Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Михайлов, О нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 11, 109–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:51:01

УДК 512.544+512.664.4

Р. В. Михайлов

О нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп

Изучаются свойства аппроксимируемости групп нильпотентными и разрешимыми группами. Основные объекты исследования работы – класс нильпотентно аппроксимируемых групп таких, что любое их центральное расширение также нильпотентно аппроксимируемо, и класс разрешимо аппроксимируемых групп таких, что любое их абелево расширение разрешимо аппроксимируемо. С помощью гомологических методов, а также методов теории модулей над групповыми кольцами строятся различные примеры групп, не принадлежащих данным классам. В работе приводятся некоторые приложения рассматриваемой теории, а также рассматриваются вопросы нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением.

Библиография: 25 названий.

§1. Введение

Настоящая работа посвящена свойствам нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп. Первым нетривиальным результатом в этом направлении, видимо, следует считать доказательство нильпотентной аппроксимируемости свободных групп, данное Магнусом. В работе [1] А. И. Мальцев расширил описание класса нильпотентно аппроксимируемых групп, описав необходимые и достаточные условия нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений. В дальнейшем свойства нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости активно изучались в работах К. Грюнберга, Г. Баумслага, Д. И. Молдаванского и многих других.

Кроме теоретико-группового интереса аппроксимационные свойства групп и их центральных и абелевых расширений имеют топологические приложения. Так, в работе [2] изучаются приложения теории трансфинитных нижних центральных рядов в группах к теории маломерных многообразий. В работах [3]–[5] приведены приложения аппроксимационных свойств к изучению асферичности двумерных CW-комплексов.

Основные объекты исследования настоящей работы – класс нильпотентно аппроксимируемых групп таких, что любое их центральное расширение также нильпотентно аппроксимируемо, и класс разрешимо аппроксимируемых групп таких, что любое их абелево расширение разрешимо аппроксимируемо. Рассматриваемые методы изучения нильпотентной аппроксимируемости центральных расширений гомологические, в то время как для изучения свойств разрешимой аппроксимируемости абелевых расширений мы пользуемся теорией точных действий групп.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00993).

Мы начинаем § 2 с изложения основных свойств фильтрации Дваера, играющей важную роль в теории центральных расширений групп. Далее мы показываем (теорема 2), что для группы, представимой как свободное произведение групп с одним определяющим соотношением, фильтрация Дваера обнуляется на некотором конечном шаге. Как элементарное следствие этого результата получаем следующее. Пусть $1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ – некоторое центральное расширение группы G с одним определяющим соотношением. Группа G нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируема группа $\tilde{G}$ (следствие 1, случай одного свободного множителя).

Используя свойства представления Гупты, мы строим конечно представленную нильпотентно аппроксимируемую группу, имеющую не нильпотентно аппроксимируемое центральное расширение, но обладающее нильпотентно аппроксимируемым свободным центральным расширением (теорема 4).

В § 3 рассмотрены свойства групп, связанные с разрешимой аппроксимируемостью. Используя методы теории модулей над групповыми кольцами, мы приводим некоторые результаты о связи аппроксимационных свойств в группах с конечными нормальными подгруппами (теорема 6 и следствие 2), а также получаем метод построения конечно порожденных разрешимо аппроксимируемых групп, для которых существуют неразрешимо аппроксимируемые абелевы расширения (теорема 7). Мы завершаем настоящую работу некоторым обоснованием рассмотрения трансфинитных производных рядов в группах, а следовательно, и классов групп, которым посвящена работа, приводя топологические приложения.

Будем использовать стандартные обозначения: для группы G через $\gamma_i(G)$ обозначается i -й член нижнего центрального ряда G (при этом $\gamma_1(G) = G$), для двух подгрупп K и L группы G через $[K, L]$ обозначается подгруппа в G , порожденная элементами $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$, $x \in K$, $y \in L$. Пересечение нижнего центрального ряда $\{\gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$ будем обозначать $\gamma_\omega(G)$. Используется левонормированная запись коммутаторов, например $[a, b, a] := [[a, b], a]$. Производный ряд в группе G будем обозначать $\{\delta_i(G)\}_{i \geq 1}$, $\delta_\omega(G) = \bigcap_i \delta_i(G)$, $\delta_{\omega+1}(G) = [\delta_\omega(G), \delta_\omega(G)]$. Как обычно, через $\mathbb{Z}[G]$ обозначается целочисленное групповое кольцо группы G , через $\Delta(G)$ – аугментационный идеал (в случае рациональных коэффициентов – $\mathbb{Q}[G]$ и $\Delta_{\mathbb{Q}}(G)$ соответственно).

§ 2. Нильпотентная аппроксимируемость

2.1. Фильтрация Дваера, классы $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$. Пусть G – некоторая нильпотентно аппроксимируемая группа, т.е. пересечение нижнего центрального ряда $\gamma_i(G)$, $i \geq 1$, тривиально и

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (1)$$

– свободное копредставление G . Следуя [5], будем считать, что группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$, если ее свободное центральное расширение $F/[F, R]$ также является нильпотентно аппроксимируемой группой. Это определение не зависит от выбора свободного копредставления F/R , так как несложно показать, что существует изоморфизм абелевых групп [5]

$$\gamma_\omega(F/[F, R]) \simeq \bigcap_i \varphi_i(G), \quad (2)$$

где $\bigcap_i (G)$ — i -й член фильтрации Дваера во вторых гомологиях группы G :

$$H_2(G) = \varphi_2(G) \supseteq \varphi_3(G) \supseteq \cdots,$$

которая определяется как

$$\varphi_i(G) := \text{Ker}\{H_2(G) \rightarrow H_2(G/\gamma_{i-1}(G))\}, \quad i \geq 2.$$

Таким образом, получаем гомологическую характеристику класса $\mathcal{J}$: группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_i \varphi_i(G) = 0$.

Фильтрация Дваера позволяет охарактеризовать изоморфность факторов групп по нижним центральным рядам в гомологических терминах.

ТЕОРЕМА 1 (см. [6]). Пусть $f: G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп, индуцирующий изоморфизм абелианизаций $f_1: G/\gamma_2(G) \rightarrow H/\gamma_2(H)$. Тогда для данного $k \geq 2$ следующие условия эквивалентны:

- (i) f индуцирует изоморфизм $f_k: G/\gamma_k(G) \rightarrow H/\gamma_k(H)$;
- (ii) f индуцирует эпиморфизм $f_k^*: H_2(G)/\varphi_k(G) \rightarrow H_2(H)/\varphi_k(H)$.

Используя формулу Хопфа для вторых гомологий группы, заданной свободным копредставлением (1), легко видим, что i -й член фильтрации Дваера группы G может быть представлен как

$$\varphi_i(G) = \frac{(R \cap \gamma_i(F))[F, R]}{[F, R]} = \frac{R \cap \gamma_i(F)}{[F, R] \cap \gamma_i(F)}.$$

Рассмотрим еще один класс групп. Класс $\tilde{\mathcal{J}}$ состоит из нильпотентно аппроксимируемых групп G таких, что для любого центрального расширения

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (3)$$

группа $\tilde{G}$ также является нильпотентно аппроксимируемой. Очевидно, имеем включение $\tilde{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{J}$. Ниже мы покажем, что это включение является собственным.

Класс $\mathcal{J}$ также допускает гомологическую характеристику. Дваер показал следующее [6]: если для данного центрального расширения (3) рассмотреть соответствующий когомологический класс в $H^2(G, N)$ и его естественный образ в $\text{Hom}(H_2(G), N)$, обозначенный через α , то

$$N \cap \gamma_i(\tilde{G}) = \alpha(\varphi_i(G)), \quad i \geq 2. \quad (4)$$

Обозначим через T “рациональную окружность”, т.е. делимую абелеву группу $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Предположим, что нильпотентно аппроксимируемая группа G не лежит в классе $\mathcal{J}$ и (3) представляет собой центральное расширение с $\gamma_\omega(\tilde{G}) \neq \{1\}$. Тогда ввиду нильпотентной аппроксимируемости G $\gamma_\omega(\tilde{G})$ лежит в N . Выберем произвольный нетривиальный элемент $x \in \gamma_\omega(\tilde{G})$ и рассмотрим гомоморфизм $\beta: N \rightarrow T$, для которого $\beta(x) \neq 1$. Гомоморфизм β задает индуцированное центральное расширение

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \beta \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

для которого $\beta(x) \in \gamma_\omega(M)$. Пользуясь условием Дваера (4), получаем следующее описание класса $\tilde{\mathcal{J}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Нильпотентно аппроксимируемая группа G принадлежит классу $\tilde{\mathcal{J}}$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_i s(\varphi_i(G)) = 0$ для любого $s \in \text{Hom}(H_2(G), T)$.*

При исследовании связи между классами $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ будем использовать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть*

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1 \quad (5)$$

– центральное расширение групп. Тогда для каждого $i \geq 2$ существует точная последовательность

$$\varphi_i(\tilde{G}) \xrightarrow{p^*} \varphi_i(G) \xrightarrow{\beta} N \cap \gamma_i(\tilde{G}) \rightarrow 1,$$

где гомоморфизм p^* индуцирован эпиморфизмом p , а гомоморфизм β есть ограничение гомоморфизма $\beta: H_2(G) \rightarrow N$, задаваемого центральным расширением (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободные копредставления групп из (5):

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{p} & G \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & R/S & \longrightarrow & F/S & \xrightarrow{p} & F/R \longrightarrow 1 \end{array}$$

где F – свободная группа и

$$[F, R] \subseteq S. \quad (6)$$

Из определения фильтрации Дваера, используя формулу Хопфа для вторых гомологий групп, получаем, что гомоморфизм p^* можно представить как отображение

$$p^*: \frac{(S \cap \gamma_i(F))[F, S]}{[F, S]} \rightarrow \frac{(R \cap \gamma_i(F))[F, R]}{[F, R]},$$

индуцированное вложением $S \rightarrow R$. Коядро p^* естественно представимо как

$$\text{Coker}(p^*) \simeq \frac{(R \cap \gamma_i(F))[F, R]}{(S \cap \gamma_i(F))[F, R]}.$$

Определим гомоморфизм

$$f: \frac{(R \cap \gamma_i(F))[F, R]}{(S \cap \gamma_i(F))[F, R]} \rightarrow R/S \cap \gamma_i(F/S) = \frac{R \cap \gamma_i(F)S}{S}$$

как

$$f: r(S \cap \gamma_i(F))[F, R] \mapsto rS, \quad r \in R \cap \gamma_i(F).$$

Из условия центральности (6) непосредственно следует, что f является естественным изоморфизмом. Тот факт, что эпиморфизм $\varphi_i(G) \rightarrow \text{Coker}(p^*)$ совпадает с ограничением на $\varphi_i(G)$ гомоморфизма $\beta: H_2(G) \rightarrow N$, непосредственно следует из его определения, т.е. принципа сопоставления гомоморфизма β центральному расширению (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – такая группа, что $\varphi_m(G) = 0$ для некоторого $m \geq 2$ и $1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ – некоторое центральное расширение. Группа $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируема группа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 имеем $N \cap \gamma_m(\tilde{G}) = 0$, откуда следует, что $\gamma_n(\tilde{G}) = \gamma_n(G)$, $n \geq m$. Следовательно, $\gamma_\omega(\tilde{G}) = \gamma_\omega(G)$.

2.2. Группы с одним определяющим соотношением. Теперь мы рассмотрим группы G , обладающие копредставлением с одним определяющим соотношением, т.е. копредставлением (1), в котором R является нормальным замыканием одного элемента в F .

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа, являющаяся свободным произведением конечного числа групп с одним определяющим соотношением. Тогда существует такое $s \geq 2$, что $\varphi_s(G) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала требуемое утверждение для случая одной группы с одним соотношением. Пусть $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ – свободное копредставление группы G , в котором R является нормальным замыканием одного элемента r в свободной группе F .

Если r не лежит в коммутанте F , то $H_2(F/R) = 0$, а следовательно, $\varphi_2(F/R) = 0$ и мы имеем требуемый результат. Предположим, что r лежит в коммутанте F . Ввиду нильпотентной аппроксимируемости F существует такое $m \geq 2$, что

$$r \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F). \quad (7)$$

Тогда $H_2(F/R)$ есть бесконечная циклическая группа. Рассмотрим $\varphi_{m+1}(F/R)$. Заметим, что отображение гомологий есть в нашем случае отображение

$$f: R/[F, R] \rightarrow \gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F),$$

индуцированное вложением (7). При этом (7) указывает на то, что

$$\text{im}(f) = R\gamma_{m+1}(F)/\gamma_{m+1}(F)$$

нетривиальна. Таким образом, имеем нетривиальный образ бесконечной циклической группы в свободной абелевой группе $\gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F)$. Получаем, что f является вложением и $\varphi_{m+1}(F/R)$ тривиален.

Пусть теперь G_i , $i = 1, \dots, n$, заданы свободными копредставлениями

$$1 \rightarrow R_i \rightarrow F_i \rightarrow G_i \rightarrow 1,$$

где подгруппы R_i являются нормальными замыканиями элементов $r_i \in F_i$. Тогда группа G имеет свободное копредставление

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1,$$

где $F = F_1 * \dots * F_n$, $R = \langle r_1, \dots, r_n \rangle^F$.

Пусть m_i – такие числа, что выполнено

$$r_i \in \gamma_{m_i}(F_i) \setminus \gamma_{m_i+1}(F_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Обозначим $m = \max(m_i)$, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что $\varphi_{m+1}(G) \neq 0$. Тогда существуют $k_1, \dots, k_n$ такие, что

$$r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n} \in \gamma_{l+1}(F), \quad r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n} \notin [R, F].$$

Отсюда следует, что существует $1 \leq j \leq n$ такое, что $r_j^{k_j} \notin [R_j, F_j]$. Рассмотрим образ элемента $r_j^{k_j}$ при естественной проекции

$$\begin{aligned} d_i: F &\rightarrow F_i, \\ d_i: F_i &\xrightarrow{\text{id}} F_i, \quad d_i: F_j \rightarrow \{1\}, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Имеем $d(r_j^{k_j}) \in \gamma_{l+1}(F_j) \setminus [R_j, F_j]$. Но по уже доказанному случаю одной группы с одним соотношением имеем $\varphi_{m+1}(F_j/R_j) = 0$, откуда следует, что $d(r_j^{k_j}) = 1$ в F_j . Это противоречит конструкции свободного произведения, откуда заключаем, что $\varphi_{m+1}^{(1)}(G) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (9)$$

– центральное расширение, где G – группа, являющаяся свободным произведением конечного числа групп с одним определяющим соотношением. Группа $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируема G .

Доказательство следует из теоремы 2 и предложения 3.

И по определению получаем, что нильпотентно аппроксимируемые группы, представимые как свободные произведения групп с одним определяющим соотношением, принадлежат классу $\mathcal{J}$.

ПРИМЕРЫ. 1) Группа $\langle a, b \mid [a, b, a] = [aba, b] = 1 \rangle$ нильпотентно аппроксимируема, так как является свободным центральным расширением фундаментальной группы бутылки Клейна $\langle a, b \mid b^{-1}aba = 1 \rangle$, которая нильпотентна аппроксимируема.

2) Группа $\langle a, b \mid [a^p, b] = [b^p, a] = 1 \rangle$ (p простое) нильпотентно аппроксимируема, так как является свободным центральным расширением нильпотентно аппроксимируемой группы $\langle a, b \mid a^p b^p = 1 \rangle$.

3) Рассмотрим группу $G = \langle a, t \mid [a, t, a] = 1 \rangle$. Группа G является HNN-расширением свободной абелевой группы $H = \langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$:

$$G = \langle a, b, t \mid [a, b] = 1, a^t = b \rangle.$$

Так как $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$ в H и $H/\langle a \rangle \simeq H/\langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$, по критерию Рапписа–Варсосу [7] получаем, что G является нильпотентно аппроксимируемой. Отсюда следует, что группа

$$\langle a, t \mid [a, t, a, a] = [a, t, a, t] = 1 \rangle$$

также нильпотентно аппроксимируема.

Следствие 1 может быть обобщено в одну сторону на случай произвольных k -центральных расширений. Для подгруппы N группы $\tilde{G}$ введем обозначения: $[N, {}_0\tilde{G}] = N$, $[N, {}_{k+1}\tilde{G}] = [[N, {}_k\tilde{G}], \tilde{G}]$. Тогда расширение $1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ называется k -центральным для некоторого $k \geq 1$, если $[N, {}_k\tilde{G}] = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k \geq 1$, G – группа с одним определяющим соотношением,

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (10)$$

– некоторое k -центральное расширение и $\tilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема. Тогда G также нильпотентно аппроксимируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x \in \gamma_\omega(G)$. Тогда мы можем записать x как $x = gN$ для некоторого $g \in \tilde{G}$. Из предположения получаем, что для любого $m \geq 1$ существует представление элемента g :

$$g = f_m r_m, \quad f_m \in \gamma_m(\tilde{G}), \quad r_m \in N.$$

Учитывая условие k -центральности

$$[N, {}_k\tilde{G}] = 1,$$

получаем, что для любых элементов $g_1, \dots, g_k$ имеем

$$[g, g_1, \dots, g_k] \in \gamma_m(\tilde{G})$$

для любого $m \geq 1$. То есть элемент $[g, g_1, \dots, g_k]$ лежит в пересечении нижнего центрального ряда $\tilde{G}$, и ввиду нильпотентной аппроксимируемости $\tilde{G}$ заключаем, что он тривиален, т.е. $[\langle g \rangle, {}_k\tilde{G}] = 1$. Переходя теперь к группе G , получаем, что элемент x является k -центральным в G . Действительно, для любых $x_1, \dots, x_k \in G$ элемент $[x, x_1, \dots, x_k]$ является образом элемента $[g, g_1, \dots, g_k]$ для некоторых $g_1, \dots, g_k \in \tilde{G}$, который тривиален. Так как в качестве x мы брали произвольный элемент из $\gamma_\omega(G)$, то получаем

$$\gamma_{\omega+k}(G) = 1. \quad (11)$$

Из (11) заключаем, что G имеет нетривиальный центр. Действительно, $\gamma_{\omega+k-1}(G)$ лежит в центре G . Предположим, что $\gamma_{\omega+k-1}(G) = 1$, тогда, спускаясь на ступень ниже, заключаем, что весь предыдущий член трансфинитного нижнего центрального ряда лежит в центре. Если же все члены $\gamma_{\omega+l}(G)$, $l \geq 1$, тривиальны, то $\gamma_\omega(G)$ лежит в центре G , а мы предположили, что группа G не аппроксимируется нильпотентными группами.

Дальнейшее доказательство следует схеме доказательства основной теоремы из [8]. Итак, группа G является группой с одним соотношением и нетривиальным центром. Тогда из [9] следует, что G может быть задана одним из следующих копредставлений:

$$G = \langle a_1, \dots, a_m \mid a_1^{p_1} = a_2^{q_1}, \dots, a_{m-1}^{p_{m-1}} = a_m^{q_{m-1}} \rangle, \quad (12)$$

где $p_i, q_i \geq 2$, $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$; или

$$G = \langle a, a_1, \dots, a_m \mid aa_1a^{-1} = a_m, a_1^{p_1} = a_2^{q_1}, \dots, a_{m-1}^{p_{m-1}} = a_m^{q_{m-1}} \rangle, \quad (13)$$

где $p_i, q_i \geq 2$, $p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{m-1}$ и $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$.

Рассмотрим отдельно каждый из случаев. Предположим сначала, что G задается копредставлением (12). Тогда G является древесным произведением циклических групп с объединенными подгруппами и содержит подгруппы

$$G_i = \langle a_i, a_{i+1} \mid a_i^{p_i} = a_{i+1}^{q_i} \rangle, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Так как группа G трансфинитно нильпотентна ввиду (11), подгруппы G_i также трансфинитно нильпотентны. Если для некоторого $1 \leq i \leq m-1$ пара p_i, q_i не является парой степеней какого-то простого числа, то $[a_i, a_{i+1}] \in \gamma_3(G_i)$, откуда получаем стабилизацию нижнего центрального ряда для группы G_i , и трансфинитная нильпотентность для G_i эквивалентна абелевости, что невозможно ввиду условия $p_i, q_i \geq 2$. Таким образом, для любого $1 \leq i \leq m-1$ числа p_i и q_i являются степенями простых чисел: $p_i = P_i^{s_i}$, $q_i = P_i^{t_i}$. Если $m = 2$, получаем нильпотентно аппроксимируемую группу $G = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{P_1^{s_1}} = a_2^{P_2^{t_2}} \rangle$. Поэтому можем предположить, что $m \geq 3$. Условие $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$, влечет, что P_i являются различными простыми при разных i . Рассмотрим подгруппу H в G , порожденную элементами $a_1^{P_2}$ и $a_3^{P_1}$. Подгруппа H не является абелевой ввиду конструкции древесного произведения. Имеем соотношения в H :

$$\begin{aligned} [a_1^{P_2}, a_3^{P_1}]^{P_1} &\equiv [a_1^{P_2 P_1}, a_3^{P_1}] \equiv [a_2^{P_2}, a_3^{P_1}] \equiv 1 \pmod{\gamma_3(H)}, \\ [a_1^{P_2}, a_3^{P_1}]^{P_2} &\equiv [a_1^{P_2}, a_3^{P_1 P_2}] \equiv [a_1^{P_2}, a_2^{P_1}] \equiv 1 \pmod{\gamma_3(H)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\gamma_2(H) = \gamma_3(H)$. И при $m \geq 3$ трансфинитная нильпотентность G невозможна.

Рассмотрим теперь случай копредставления (13). Копредставление (13) задает HNN-расширение группы, заданной копредставлением (12) с некоторыми дополнительными условиями на коэффициенты p_i, q_i . Как мы видели при анализе копредставления (12), трансфинитная нильпотентность базы рассматриваемого HNN-расширения возможна лишь в случае $m = 2$. Таким образом, мы получаем группу

$$G = \langle a, a_1, a_2 \mid aa_1a^{-1} = a_2, a_1^{P^{s_1}} = a_2^{P^{t_1}} \rangle$$

для некоторого простого P . Но такая группа нильпотентно аппроксимируема (см., например, [8]). Таким образом, мы получаем, что не существует $(\omega + k)$ -трансфинитно нильпотентной группы с одним соотношением, не являющейся нильпотентно

аппроксимируемой, и поэтому нильпотентная аппроксимируемость $\tilde{G}$ влечет нильпотентную аппроксимируемость G .

Естественно, теорема 3 элементарно обобщается на случай, когда G является свободным произведением конечного числа групп с одним определяющим соотношением. Однако полное обобщение следствия 1 на случай произвольных k -центральных расширений весьма проблематично, и мы ставим его частный случай (при одном свободном сомножителе) как открытый вопрос.

Вопрос 1. Пусть $k \geq 1$, G – нильпотентно аппроксимируемая группа с одним определяющим соотношением и

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

– некоторое k -центральное расширение. Верно ли, что группа $\tilde{G}$ также нильпотентно аппроксимируема¹?

2.3. Представление Гупты и нильпотентная аппроксимируемость.

Для дальнейших построений и, в частности, для построения примера группы, лежащей в классе $\mathcal{J}$, но не лежащей в $\tilde{\mathcal{J}}$, нам понадобятся результаты о представлении Гупты свободных центральных расширений групп.

Для любого $c \geq 2$ и произвольной нормальной подгруппы N свободной группы F существует канонический гомоморфизм

$$\eta_c: F/[\gamma_c(N), F] \rightarrow M_{c+1, \mathbb{Z}}(F/N),$$

называемый представлением Гупты, где $M_{c+1, \mathbb{Z}}(F/N)$ обозначает группу $(c+1) \times (c+1)$ матриц над некоторым кольцом (точное описание данного кольца мы не приводим здесь, все необходимые определения см. в [10] или [11]).

Для группы G обозначим через $\Delta^\omega(G)$ пересечение степеней аугментационного идеала $\bigcap_n \Delta^n(G)$. Следующий результат непосредственно вытекает из результатов Гупты, Пасси, Штера и Хартли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть p – некоторое простое число. Предположим, что группа F/N не содержит p -кручения, $\Delta^\omega(F/N) = 0$ и $H_4(F/N, \mathbb{Z}_p) = 0$. Тогда $\Delta^\omega(F/[\gamma_p(N), F]) = 0$. В частности, $F/\gamma_p(N) \in \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пасси и Гупта показали, что условие $\Delta^\omega(G) = 0$ влечет $\Delta^\omega(M_{n, \mathbb{Z}}(G)) = 0$ для любого n (см. [12]). Таким образом, для рассматриваемой пары $N \subset F$ имеем

$$\Delta^\omega(F/[\gamma_p(N), F]) \subseteq \Delta(\text{Ker}(\eta_p)) \mathbb{Z}[F/[\gamma_p(N), F]]. \quad (14)$$

Штер показал (см. [13]), что для любой нормальной подгруппы N в F ядро представления Гупты $\text{Ker}(\eta_p)$ состоит из элементов конечного порядка в $F/[\gamma_p(N), F]$.

¹Это верно также для $k = 2$ и доказывается с помощью обобщенной фильтрации Дваера в инвариантах Бэра.

Элементы конечного порядка в $F/[\gamma_p(N), F]$ лежат в $\gamma_p(N)/[\gamma_p(N), F]$. В случае, когда F/N не имеет p -кручения (например, в случае доказываемой теоремы), Хартли и Штер дали описание искомым элементов [14]:

$$\text{Tot}(\gamma_p(N)/[\gamma_p(N), F]) \simeq H_4(F/N, \mathbb{Z}_p),$$

где $\mathbb{Z}_p$ рассматривается как тривиальный F/N -модуль. Но по условию

$$H_4(F/N, \mathbb{Z}_p) = 0.$$

Следовательно, $F/[\gamma_p(N), F]$ не имеет кручения и $\text{Ker}(\eta_p) = 0$. Требуемое утверждение вытекает из (14).

2.4. Связь между классами $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$.

ТЕОРЕМА 4. Включение $\tilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ является собственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве примера рассмотрим группу

$$G = \langle a, b \mid [b^3, a] = [a, b, a] = 1 \rangle.$$

В [15] показано, что G является нильпотентно аппроксимируемой и для нее существует центральное расширение

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1,$$

где $\tilde{G} = \langle a, b \mid [b^3, a] = [a, b, a]^2 = [a, b, a, a] = [a, b, a, b] = 1 \rangle$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Таким образом, $G \notin \tilde{\mathcal{J}}$.

Отметим, что G является свободным абелевым расширением циклической группы порядка 3:

$$1 \rightarrow N/[N, N] \rightarrow F/[N, N] (\simeq G) \rightarrow \mathbb{Z}_3 \rightarrow 1,$$

где $F = \langle a, b \rangle$, $N = \langle b^3, a, a^b, a^{b^2} \rangle$. Имеем

- 1) $\Delta^\omega(F/N) = \Delta^\omega(\mathbb{Z}_3) = 0$,
- 2) $H_4(F/N, \mathbb{Z}_2) = H_4(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2) = 0$.

Следовательно, $F/[[N, N], F]$ нильпотентно аппроксимируема ввиду предложения 4. По определению получаем, что группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$.

Различие между классами $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ является весьма тонким. В [5] показано, что если G – нильпотентно аппроксимируемая группа такая, что существует центральное расширение $1 \rightarrow \gamma_\omega(\tilde{G}) \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$ (откуда сразу же следует, что $G \notin \tilde{\mathcal{J}}$) и $\varprojlim^1 \varphi_i(\tilde{G}) = 0$, то $G \notin \mathcal{J}$. Здесь мы несколько обобщим этот результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – счетная нильпотентно аппроксимируемая группа, $G \notin \tilde{\mathcal{J}}$,

$$1 \rightarrow N \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 \tag{15}$$

– центральное расширение с $\gamma_\omega(\tilde{G}) \neq 1$ и $\varprojlim^1 \varphi_i(\tilde{G}) = 0$. Тогда $G \notin \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha: H_2(G) \rightarrow N$ – гомоморфизм, соответствующий расширению (15). По предложению 2 для любого $i \geq 2$ существует следующая точная последовательность

$$\varphi_i(\tilde{G}) \rightarrow \varphi_i(G) \rightarrow N \cap \gamma_i(\tilde{G}) \rightarrow 1. \quad (16)$$

Переходя к обратным пределам, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \bigcap_i \text{im}(t_i) \rightarrow \bigcap_i \varphi_i(G) \rightarrow N \cap \gamma_\omega(\tilde{G}) \rightarrow \varprojlim \text{im}(t_i). \quad (17)$$

Эпиморфизм $\varphi_i(\tilde{G}) \rightarrow \text{im}(t_i)$ индуцирует эпиморфизм производных пределов:

$$\varprojlim \varphi_i(\tilde{G}) \rightarrow \varprojlim \text{im}(t_i),$$

поэтому ввиду условия получаем $\varprojlim \text{im}(t_i) = 0$. Так как $N \cap \gamma_\omega(\tilde{G}) \neq 0$, из (17) заключаем, что $\bigcap_i \varphi_i(G) \neq 0$, т.е. $G \notin \mathcal{J}$.

Отметим, что условие $\varprojlim \varphi_i(G) = 0$ для фиксированной группы G рассматривалось в [16] при изучении гомологической локализации. Там же приведен простой пример группы G с $\varprojlim \varphi_i(G) \neq 0$.

ВОПРОС 2. Существует ли конечно порожденная (конечно представленная) группа G , аппроксимируемая нильпотентными группами без кручения, такая, что $G \notin \mathcal{J}$?

Приведенный вопрос тесно связан с парасвободной гипотезой Баумслага: для любой конечно порожденной парасвободной группы целочисленные вторые гомологии тривиальны. Напомним, что группа G называется *парасвободной*, если она нильпотентно аппроксимируема и существует свободная группа F и гомоморфизм $f: F \rightarrow G$, индуцирующий изоморфизм на факторах по нижнему центральному ряду $f_*: F/\gamma_n(F) \rightarrow G/\gamma_n(G)$. Теорема 1 показывает, что для парасвободной группы G $H_2(G) = \bigcap_n \varphi_n(G)$, таким образом, вторые гомологии парасвободной группы G тривиальны тогда и только тогда, когда свободное центральное расширение группы G нильпотентно аппроксимируемо. Поэтому отрицательный ответ на вопрос 2 влечет положительное решение парасвободной гипотезы.

Следующий более слабый вопрос также представляет интерес.

ВОПРОС 2*. Существует ли конечно порожденная нильпотентно аппроксимируемая группа G такая, что $\bigcap_i \varphi_i(G)$ не является конечно порожденной?

Отметим, что без предположения конечной представленности ответ на вопрос 2 положительный. Действительно, рассмотрим свободное нильпотентное пополнение свободной группы ранга 2: $G = \varprojlim F/\gamma_i(F)$. Тогда G парасвободна [17] и, следовательно, $H_2(G) = \bigcap_n \varphi_n(G)$ по теореме 1. Но в [18] показано, что $H_2(G)$ нетривиальна. Поэтому $G \notin \mathcal{J}$. Если же отбросить в вопросе 2 требование аппроксимируемости нильпотентными группами без кручения, а рассматривать класс нильпотентно аппроксимируемых конечно представленных групп, то ответ также будет положительным. В [5] показано, что в качестве такой группы можно выбрать некоторое HNN-расширение абелевой группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$, где $p \neq 2$ простое.

§ 3. Разрешимая аппроксимируемость

3.1. Точные действия групп и разрешимая аппроксимируемость.

Вопросы, аналогичные рассмотренным выше, встают при изучении производного ряда в группах. Однако теория, аналогичная теории класса $\mathcal{J}$, не является содержательной. Из работы Шмелькина [19] непосредственно следует, что для любой свободной группы F и ее нормальной подгруппы R из разрешимой аппроксимируемости группы F/R вытекает разрешимая аппроксимируемость свободного абелева расширения $F/[R, R]^2$. Но при этом подобное утверждение не остается верным для произвольного абелева расширения. По аналогии с классом $\mathcal{J}$ определим следующий класс: класс $\widetilde{\mathcal{K}}$ состоит из разрешимо аппроксимируемых групп G таких, что для любого расширения

$$1 \rightarrow A \rightarrow \widetilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

с абелевой группой A группа G является разрешимо аппроксимируемой.

Для построения примеров разрешимо аппроксимируемых групп, не принадлежащих классу $\widetilde{\mathcal{K}}$, удобно использовать методы теории модулей над групповыми кольцами. Приведем необходимые для дальнейшего определения.

Напомним, что действие группы G на левом G -модуле M называется *точным*, если из того, что $M \circ (1 - g) = 0$, $g \in G$, следует, что $g = 1$. Левый G -модуль M называется *точным*, если из того, что $M \circ \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}[G]$, следует, что $\alpha = 0$, где $\mathbb{Z}[G]$ – целочисленное групповое кольцо группы G .

Пусть F – свободная группа и N_1, N_2 – нормальные подгруппы в F . Тогда абелева группа $N_1 \cap N_2/[N_1, N_2]$ имеет структуру $\mathbb{Z}[F/N_1N_2]$ -модуля, где действие индуцировано сопряжением в F . В работах [3] и [5] приведены различные приложения точности данного действия к доказательству нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости некоторых групп, а также к теории асферичных двумерных CW-комплексов. В основе вышеупомянутых приложений точности действий лежат следующие элементарные вложения:

$$\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \circ \Delta^\omega(F/N_1N_2) \subseteq \gamma_\omega(F/[N_1, N_2]), \quad (18)$$

где $\Delta^\omega(G)$ – пересечение степеней $\bigcap_n \Delta^n(G)$ аугментационного идеала $\Delta(G)$, а также

$$\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \circ \bigcap_n \Delta(\delta_n(F/N_1N_2))\mathbb{Z}[F/N_1N_2] \subseteq \delta_\omega(F/[N_1, N_2]), \quad (19)$$

где для данной группы G , подмножества K в $\mathbb{Z}[G]$ и $\mathbb{Z}[G]$ -модуля M под $M \circ K$ подразумевается $\{m \circ \alpha \mid m \in M, \alpha \in K\}$, а для подгруппы H группы G через $\Delta(H)\mathbb{Z}[G]$ обозначается идеал в $\mathbb{Z}[G]$, порожденный элементами $h - 1, h \in H$.

² Это несложно доказать с помощью классического вложения Магнуса модуля соотношений $R/[R, R]$ в свободный модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[F/R]$. Некоторые приложения трансфинитных свойств свободных абелевых расширений в изучении аугментационных степеней над рациональными числами приведены в [20].

Для группы G обозначим через $\delta^+(G)$ подгруппу, порожденную элементами конечного порядка $g \in G$, которые имеют лишь конечное число сопряженных элементов в G . Подгруппа $\delta^+(G)$ является локально конечной подгруппой в G . Несложно показать, что $\delta^+(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G не содержит нетривиальных нормальных конечных подгрупп.

Пусть I – идеал групповой алгебры $k[G]$, где k – некоторое поле, I называется *контролируемым* нормальной подгруппой H в G , если

$$I = (k[H] \cap I)k[G]. \quad (20)$$

Аннуляторный идеал I в групповой алгебре $k[G]$ – идеал, для которого существует подмножество $X \subseteq k[G]$ такое, что

$$I = \text{Ann}(X) := \{\alpha \in k[G] \mid X\alpha = 0\}.$$

Напомним, что в случае, когда $k[G]$ -модуль M вложим в свободный $k[G]$ -модуль, $\text{Ann}(M)$ является аннуляторным идеалом в $k[G]$. В случае $\text{char}(k) = 0$ аннуляторные идеалы в $k[G]$ контролируются нормальной подгруппой $\delta^+(G)$ [21].

ТЕОРЕМА 6. *Пусть F – нециклическая свободная группа и $\{1\} \neq N_1 \subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F . Если $\mathbb{Z}[F/N_2]$ -модуль $N_1/[N_1, N_2]$ не является точным, то группа F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как свободные группы являются нильпотентно аппроксимируемыми, а N_2 свободна, то существует такое $n \geq 1$, что выполняется

$$N_1 \subseteq \gamma_n(N_2), \quad N_1 \not\subseteq \gamma_{n+1}(N_2). \quad (21)$$

Для такого n получаем $[N_1, N_2] \subseteq \gamma_{n+1}(N_2)$, откуда следует, что существует естественный эпиморфизм F/N_2 -модулей:

$$\varphi_1: N_1/[N_1, N_2] \rightarrow \frac{N_1\gamma_{n+1}(N_2)}{\gamma_{n+1}(N_2)}, \quad (22)$$

который нетривиален ввиду (21). Используя снова (21), получаем, что существует вложение эпиморфного образа из (22) в высший модуль соотношений:

$$\varphi_2: \frac{N_1\gamma_{n+1}(N_2)}{\gamma_{n+1}(N_2)} \rightarrow \gamma_n(N_2)/\gamma_{n+1}(N_2), \quad (23)$$

где, естественно, данное вложение сохраняет действие группы F/N_2 посредством сопряжений. Высший модуль соотношений, в свою очередь, вкладывается в свободный модуль:

$$\varphi_3: \gamma_n(N_2)/\gamma_{n+1}(N_2) \rightarrow \frac{\Delta^n(N_2)\mathbb{Z}[F]}{\Delta^{n+1}(N_2)\mathbb{Z}[F]}.$$

(Данный свободный модуль является членом резольвенты Грюнберга, построенной по копредставлению группы F/N_2 . Описание базиса этого свободного $\mathbb{Z}[F/N_2]$ -модуля см. в [22].)

Предположим, что модуль $N_1/[N_1, N_2]$ является точным $\mathbb{Z}[F/N_2]$ -модулем. Тогда ввиду соотношения (18)

$$\frac{N_1}{[N_1, N_2]} \circ \alpha \subseteq \gamma_\omega(F/[N_1, N_2]), \quad \alpha \in \Delta^\omega(F/N_2),$$

что, учитывая условия теоремы, противоречит точности. Получаем, что рассматриваемый модуль не является точным, т.е. существует такое $\alpha \in \mathbb{Z}[F/N_2]$, что

$$\frac{N_1}{[N_1, N_2]} \circ \alpha = 0.$$

Следовательно, α аннулирует также и эпиморфный образ $\text{im}(\varphi_1)$, который вложим посредством композиции φ_2 и φ_3 в свободный $\mathbb{Z}[F/N_2]$ -модуль. Образ $\bar{\alpha}$ элемента α в групповой алгебре $\mathbb{Q}[F/N_2]$ аннулирует модуль $\text{im}(\varphi_1) \otimes \mathbb{Q}$, следовательно, $\bar{\alpha}$ принадлежит нетривиальному аннуляторному идеалу. Но если F/N_2 не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $(F/N_2)^+ = 1$ и из (20) следует, что $\bar{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Но подмодуль свободного модуля не имеет кручения как абелева группа, поэтому $\bar{\alpha} = 0$. Таким образом, $(F/N_2)^+ \neq 1$ и F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть F – свободная группа и $\{1\} \neq N_1 \subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F . Если

$$\Delta^\omega(F/N_2) \neq \{0\}, \quad \gamma_\omega(F/[N_1, N_2]) = \{1\}, \quad (24)$$

то группа F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.

Доказательство следует из (18) и теоремы 6.

Изучение длины трансфинитного разрешимого ряда было начато в работе А. И. Мальцева [1]. Построенные в [1] примеры групп с $\delta_\omega \neq \delta_{\omega+1}$ (а следовательно, и примеры разрешимо аппроксимируемых групп, не лежащих в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$) являются бесконечно порожденными. Подобные примеры могут быть интересны в рамках конструкций, где применяется совершенный радикал, например в алгебраической К-теории. Также подобные построения могут представлять некоторый интерес с точки зрения некоммутативной теории узлов Кохрана. Здесь мы приведем несложный метод построения таких групп на основе соотношения (19).

ТЕОРЕМА 7. Пусть F – свободная группа и $\{1\} \neq N_1 \subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F . Если F/N_1 аппроксимируется разрешимыми группами, F/N_2 не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп и не аппроксимируется разрешимыми группами, то

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6 получаем, что $\mathbb{Z}[F/N_2]$ -модуль $N_1/[N_1, N_2]$ является точным.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность групп

$$1 \rightarrow \frac{N_1}{[N_1, N_2]} \rightarrow F/[N_1, N_2] \rightarrow F/N_1 \rightarrow 1.$$

По условию $\delta_\omega(F/N_1) = \{1\}$, поэтому $\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) \subseteq N_1/[N_1, N_2]$. Но подгруппа $N_1/[N_1, N_2]$ абелева, откуда получаем, что $\delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = \{1\}$. Предположим, что

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = \{1\},$$

тогда ввиду соотношения (19) получаем, что для любого $g \in \delta_\omega(F/N_2) \neq \{1\}$ $(1 - g)$ аннулирует весь модуль $N_1/[N_1, N_2]$, что противоречит доказанной точности данного действия. Получаем, что группа $F/[N_1, N_2]$ не аппроксимируется разрешимыми группами.

Примеры групп, удовлетворяющих условиям теоремы 7, придумать несложно.

ПРИМЕР. Пусть F – свободная группа ранга 3 с базисом $\{a, b, c\}$. Обозначим через N_1 нормальное замыкание элемента a в F , через N_2 – нормальное замыкание слов $a, b[cbc^{-1}, b]$ в F . Тогда группа F/N_1 является свободной группой ранга 2, следовательно, аппроксимируется разрешимыми группами. Группа F/N_2 задается копредставлением

$$\langle b, c \mid b[cbc^{-1}, b] = 1 \rangle.$$

Из простейших общих свойств групп с одним определяющим соотношением заключаем, что F/N_2 без кручения и элемент b нетривиален в F/N_2 . Но легко видеть, что b лежит в пересечении производного ряда группы F/N_2 , поэтому группа F/N_2 не аппроксимируется разрешимыми группами и условия теоремы 7 выполнены. Получаем, что

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = \{1\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя результаты из работы [3] и доказательство теоремы 7, легко видим, что при условиях теоремы 7 выполняется более сильное соотношение, чем (25), а именно

$$\bigcap_n [\delta_\omega(F/[N_1, N_2]), \delta_n(F/[N_1, N_2])] \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]).$$

По аналогии с построением последнего примера несложно построить пример конечно представленной разрешимо аппроксимируемой группы, не лежащей в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$.

ПРИМЕР. Пусть F – свободная группа с образующими $a, x_i, i = 1, \dots, 4$. Обозначим через N_1 нормальное замыкание элемента a в F , и через N_2 – нормальное замыкание элементов $a, x_1[x_4, x_1], x_2[x_1, x_2], x_3[x_2, x_3], x_4[x_3, x_4]$. Тогда F/N_2 представляет собой группу Хигмана, которая не содержит кручения и ациклична (следовательно, совершенна и не является разрешимо аппроксимируемой). Группа

F/N_1 является свободной группой ранга 4, поэтому применима теорема 7. Получаем, что

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = \{1\}.$$

Ввиду соотношения (19) имеем

$$\langle [x_i, a^f], [a, a^f] \rangle [N_1, N_2] \subseteq \delta_\omega(F/[N_1, N_2]), \quad f \in F.$$

С другой стороны, рассмотрим группу

$$G = F / \langle [x_i, a] \rangle [N_1, N_2] = \langle a, x_i \mid [a, x_i] = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{*4}.$$

Аппроксимационные свойства сохраняются при прямых суммах, откуда получаем, что G является нильпотентно аппроксимируемой. Отсюда следует, что

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = \langle [x_i, a^f], [a, a^f] \rangle [N_1, N_2]$$

и

$$G = \frac{F/[N_1, N_2]}{\delta_\omega(F/[N_1, N_2])} \notin \widetilde{\mathcal{K}}.$$

В связи с приведенными выше конструкциями естественно встает следующий

ВОПРОС 3. Существует ли конечно представленная группа G , для которой

$$\delta_\omega(G) \neq \delta_{\omega+1}(G)?$$

3.2. Приложение трансфинитных факторов производного ряда. Возникает естественный вопрос о мотивации изучения групп с $\delta_\omega \neq \delta_{\omega+1}$. Здесь мы приведем один результат, показывающий существенность рассмотрения трансфинитного производного ряда. Этот результат, в целом, следует из схемы, изложенной в [3], где показано, что препятствия важным случаям конечной гипотезы асферичности Уайтхеда лежат в факторах $\delta_\omega / \delta_{\omega+1}$ некоторых групп.

Напомним, что гипотеза асферичности Уайтхеда утверждает, что подкомплекс асферического двумерного CW-комплекса асферичен. Эта гипотеза имеет множество переформулировок, в том числе и на чисто теоретико-групповом языке. Отметим также, что в случае конечного стягиваемого комплекса асферичность производного его подкомплекса эквивалентна нильпотентной аппроксимируемости соответствующего скрещенного модуля (см. [4]).

Для CW-комплекса L через $L^{(1)}$ будем обозначать 1-мерный остов L .

ТЕОРЕМА 8. Пусть L – стягиваемый двумерный CW-комплекс и K_1, K_2 – подкомплексы в L такие, что $K_1 \cap K_2 \subseteq L^{(1)}$ и $\pi_1(K_i)$ разрешимо аппроксимируемы, $i = 1, 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\pi_2(K_1 \cup K_2) = 0$;
- (ii) $\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = 1$,

где $F = \pi_1(L^{(1)})$, $N_i = \text{Ker}\{\pi_1(L^{(1)}) \rightarrow \pi_1(L^{(1)} \cup K_i)\}$, $i = 1, 2$.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 8, заметим, что существует следующая короткая точная последовательность групп:

$$1 \rightarrow \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \rightarrow F/[N_1, N_2] \rightarrow F/N_1 \cap N_2 \rightarrow 1. \quad (26)$$

Группа $F/N_1 \cap N_2$ является подгруппой прямого произведения $F/N_1 \times F/N_2$. Далее, $F/N_i \simeq \pi_1(K_i) * E$ для некоторой свободной группы E . Свободное произведение разрешимо аппроксимируемых групп также разрешимо аппроксимируемо (см. [23]). Таким образом, группы F/N_i , $i = 1, 2$, разрешимо аппроксимируемы ввиду условия теоремы 8 и, следовательно, разрешимо аппроксимируема группа $F/N_1 \cap N_2$. Так как группа $N_1 \cap N_2/[N_1, N_2]$ абелева, имеем $\delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = 1$ и условие (ii) в теореме 8 эквивалентно условию

$$\delta_{\omega}(F/[N_1, N_2]) = \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]).$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K = K_1 \cup K_2$. Тогда имеет место точная последовательность Гуттиерреса–Ратклиффа (подробнее см. [24], [5], [3]):

$$\pi_2(K_1 \cup L^{(1)}) \oplus \pi_2(K_2 \cup L^{(1)}) \rightarrow \pi_2(K \cup L^{(1)}) \rightarrow \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \rightarrow 0, \quad (27)$$

где первое отображение индуцировано вложением комплексов и эпиморфизм является эпиморфизмом $\mathbb{Z}[\pi_1(K \cup L^{(1)})]$ -модулей (т.е. $\mathbb{Z}[F/N_1 N_2]$ -модулей). Из разрешимой аппроксимируемости групп $\pi_1(K_i)$ следует асферичность комплексов K_i (по одному из следствий теоремы Адамса [25] получаем, что если группа подкомплекса асферического 2-комплекса имеет тривиальный совершенный радикал, то этот подкомплекс асферичен). Следовательно, комплексы $K_i \cup L^{(1)}$ также асферичны и последовательность (27) влечет изоморфизм

$$\pi_2(K \cup L^{(1)}) \simeq \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]}.$$

Далее, условие (i) влечет $\pi_2(K \cup L^{(1)}) = 0$, следовательно, $F/[N_1, N_2] \simeq F/N_1 \cap N_2$ разрешимо аппроксимируема и мы имеем условие (ii).

Предположим теперь, что (ii) выполнено. Предположим, что $\pi_2(K) \neq 0$. В [5], [4] показано, что стандартное действие $\pi_1(K')$ на $\pi_2(K')$ является точным для любого неасферичного 2-комплекса K' . В нашем случае ввиду последовательности (27) это действие есть просто действие группы $F/N_1 N_2$ на $N_1 \cap N_2/[N_1, N_2]$ посредством сопряжений. Из точности данного действия, условия (ii) и соотношения (19) имеем $\delta_{\omega}(F/[N_1, N_2]) = 1$. Снова применяя результат Адамса [25], получаем, что $K \cup L^{(1)}$ асферичен, а следовательно, K также асферичен.

Автор благодарит И. Б. С. Пасси за многочисленные обсуждения и ценные замечания, а также всех участников семинара по теории групп МГУ, где неоднократно обсуждались результаты настоящей работы.

Список литературы

1. Мальцев А. И. Обобщенные нильпотентные алгебры и ассоциированные с ними группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 347–366.
2. Cochran T., Orr K. Stability of lower central series of compact 3-manifold groups // Topology. 1998. V. 37. P. 497–526.
3. Михайлов Р. В. Точные действия групп и асферичные комплексы // Труды МИАН. (в печати).
4. Mikhailov R. On residual nilpotence of projective crossed modules // Comm. Algebra. (to appear).
5. Mikhailov R., Passi I. B. S. Faithfulness of certain modules and residual properties of groups // Internat. J. Algebra Comput. (to appear).
6. Dwyer W. Homology, Massey products and maps between groups // J. Pure Appl. Algebra. 1975. V. 6. P. 177–190.
7. Raptis E., Varsos D. The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f.g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. V. 76. P. 167–178.
8. McCarron J. Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial center // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 1. P. 1–5.
9. Pietrowski A. The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre // Math. Z. 1974. V. 136. P. 95–106.
10. Gupta C. K., Gupta N. Generalized Magnus embedding and some applications // Math. Z. 1978. V. 160. P. 75–87.
11. Gupta N. Free group rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987. (Contemp. Math. V. 66.)
12. Gupta C. K., Passi I. B. S. Magnus embeddings and residual nilpotence // J. Algebra. 1987. V. 106. P. 105–113.
13. Stohr R. On Gupta representations of central extensions // Math. Z. 1984. V. 187. P. 259–267.
14. Hartley B., Stohr R. Homology of higher relation modules and torsion in free central extensions of groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1991. V. 62. P. 325–352.
15. Михайлов Р. В. Трансфинитные нижние центральные ряды групп: парасвободные свойства и топологические приложения // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 251–267.
16. Dwyer W. Homological localization of π -modules // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 10. P. 135–151.
17. Baumslag G., Stammenbach U. On the inverse limit of free nilpotent groups // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 219–233.
18. Bousfield A. K. Homological localization towers for groups and π -modules // Mem. Amer. Math. Soc. 1977. V. 186.
19. Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. С. 149–170.
20. Mikhailov R., Passi I. B. S. Augmentation powers and group homology // J. Pure Appl. Algebra. 2004. V. 192. P. 225–238.
21. Smith M. On group algebras // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1970. V. 76. P. 780–782.
22. Gruenberg K. W. Cohomological topics in group theory. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math. V. 143.)
23. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1957. V. 7. P. 29–62.
24. Gutierrez M. A., Ratcliffe J. G. On the second homotopy group // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1981. V. 32. P. 45–55.
25. Adams J. F. A new proof of a theorem of Cockcroft // J. London Math. Soc. (2). 1955. V. 30. P. 482–488.