Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Плотникова, Системы линейных дифференциальных уравнений с π -производной и линейные дифференциальные включения, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 11, 127–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:09:51

УДК 517.9

Н. В. Плотникова

Системы линейных дифференциальных уравнений с π -производной и линейные дифференциальные включения

В работе построена аппроксимация множества достижимости линейного дифференциального включения с помощью системы линейных дифференциальных уравнений с π -производной, рассмотрены модельные примеры.

Библиография: 19 названий.

Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + F(t), \quad x(0) \in X_0, \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $A(t)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица, $F(t)$ – непрерывное многозначное отображение $[0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Исследование свойств интегральной воронки включения (1) имеет большое значение в качественной теории и задачах управления линейными системами. В связи с этим многие авторы исследовали свойства множества достижимости [1], [2], а также различные приближенные методы его построения: метод эллипсоидов для линейных систем [3]–[5], асимптотические методы [6], [7], численные методы [8], [9].

В работе [2] была доказана следующая оценка:

$$R(t) \subset X(t),$$

где $R(t)$ – множество достижимости включения (1), $X(t)$ – решение уравнения с производной Хукухары [10], соответствующего дифференциальному включению (1),

$$D_h X(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad X(0) = X_0.$$

Многозначное отображение $X(t)$, исходя из определения производной Хукухары [10], всегда является расширяющимся множеством с увеличением времени. Однако множество достижимости включения (1) может сжиматься и расширяться на различных отрезках времени. В связи с этим в работе рассматривается использование систем дифференциальных уравнений с π -производной для получения аппроксимации множества достижимости таких систем.

§ 1. Понятие π -производной

Пространства $\text{conp}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ не являются линейными, так как в них отсутствует противоположный элемент и, тем самым, операция вычитания. В работах [11] и [12] разность в пространстве $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ была введена с помощью вложения его в некоторое линейное пространство. По теореме вложения [13] существуют нормированное линейное пространство $\mathcal{B}$ и изометрическое отображение $\pi(\cdot): \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}$ такие, что $\pi(\text{conv}(\mathbb{R}^n))$ – выпуклый конус в $\mathcal{B}$. Кроме того, сложение и умножение на неотрицательный скаляр в $\mathcal{B}$ влечет соответствующие операции в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Для определения пространства $\mathcal{B}$ вводится соотношение эквивалентности в пространстве $\text{conv}(\mathbb{R}^n) \times \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$(A, B) \sim (C, D), \quad \text{если } A + D = B + C.$$

Обозначим через $\langle A, B \rangle$ класс эквивалентности, содержащий (A, B) . Тогда пространством $\mathcal{B}$ будет факторпространство $\text{conv}(\mathbb{R}^n) \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) / \sim$. В пространстве $\mathcal{B}$ введем операции сложения и умножения на скаляр

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle + \langle C, D \rangle &= \langle A + C, B + D \rangle, \\ \alpha \langle A, B \rangle &= \begin{cases} \langle \alpha A, \alpha B \rangle, & \alpha \geq 0, \\ \langle |\alpha| B, |\alpha| A \rangle, & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{B}$ является линейным.

Вложение $\pi(\cdot): \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}$ определяется следующим образом:

$$\pi(A) = \langle A, 0 \rangle, \quad A \in \text{conv}(\mathbb{R}^n),$$

т.е. $\langle A, 0 \rangle$ есть класс эквивалентности $\{(A + D, D) \mid A, D \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)\}$.

Метрика и норма в пространстве $\mathcal{B}$ определяется по формулам

$$\begin{aligned} \rho(\langle A, B \rangle, \langle C, D \rangle) &= h(A + D, C + B), \\ \|\langle A, B \rangle\| &= \rho(\langle A, B \rangle, \langle 0, 0 \rangle). \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{B}$ не является полным метрическим пространством [14], но острый выпуклый замкнутый конус, соответствующий полному метрическому пространству $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ [15], является полным [14].

Пусть $A, B \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Разностью множеств A и B называется элемент пространства $\mathcal{B}$, равный $\langle A, B \rangle$. Так как пространство $\mathcal{B}$ является линейным, то данная разность обладает всеми свойствами разности в линейных пространствах.

В общем случае данная разность двух множеств из $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ не будет являться элементом пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Если же существует разность Хукухары [16], [10] двух множеств из пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\langle A, B \rangle = \langle A \dot{-} B, 0 \rangle.$$

Рассмотрим более подробно случай $n = 1$. Элементами пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^1)$ являются сегменты. Поэтому каждый класс эквивалентности представим в виде

$\langle [x, x + \delta], 0 \rangle, \delta \geq 0$, либо $\langle x, [0, \delta] \rangle, \delta > 0$. Эту запись класса эквивалентности будем называть *канонической*.

Действительно, произвольный элемент $([a, b], [c, d])$ принадлежит классу первого вида, если $b - a \geq d - c$ (в этом случае $x = a - c, \delta = (b - a) - (d - c)$), или классу второго вида, если $b - a < d - c$ (в этом случае $x = a - c, \delta = (d - c) - (b - a)$).

Будем записывать класс эквивалентности в канонической форме в виде (x, δ) , понимая при этом $\langle [x, x + \delta], 0 \rangle$ при $\delta \geq 0$ и $\langle x, [0, -\delta] \rangle = \langle 0, [-x, -x - \delta] \rangle$ при $\delta < 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) $(x, \delta) = (y, \Delta) \Leftrightarrow x = y, \delta = \Delta$;
- б) $(x, \delta) + (y, \Delta) = (x + y, \delta + \Delta)$;
- в) $a(x, \delta) = (ax, a\delta)$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Достаточность очевидна, докажем необходимость.

Пусть $\delta \geq 0, \Delta \geq 0$. Тогда $(x, \delta) = \langle [x, x + \delta], 0 \rangle = \langle [y, y + \Delta], 0 \rangle = (y, \Delta)$, откуда следует, что $x = y, \delta = \Delta$.

Пусть $\delta < 0, \Delta < 0$. Тогда $(x, \delta) = \langle x, [0, -\delta] \rangle = \langle 0, [-x, -x - \delta] \rangle, (y, \Delta) = \langle y, [0, -\Delta] \rangle = \langle 0, [-y, -y - \Delta] \rangle$, откуда следует, что $x = y, \delta = \Delta$.

Пусть $\delta \geq 0, \Delta < 0$. Тогда $(x, \delta) = \langle [x, x + \delta], 0 \rangle, (y, \Delta) = \langle 0, [-y, -y - \Delta] \rangle$, откуда следует, что равенство $(x, \delta) = (y, \Delta)$ невозможно. Случай $\delta < 0, \Delta \geq 0$ рассматривается аналогично.

б) Пусть $\delta \geq 0, \Delta \geq 0$. Тогда

$$(x, \delta) + (y, \Delta) = \langle [x, x + \delta], 0 \rangle + \langle [y, y + \Delta], 0 \rangle = \langle [x + y, x + y + \delta + \Delta], 0 \rangle = (x + y, \delta + \Delta).$$

Пусть $\delta < 0, \Delta < 0$. Тогда

$$(x, \delta) + (y, \Delta) = \langle x, [0, -\delta] \rangle + \langle y, [0, -\Delta] \rangle = \langle x + y, [0, -\delta - \Delta] \rangle = (x + y, \delta + \Delta).$$

Пусть $\delta \geq 0, \Delta < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (x, \delta) + (y, \Delta) &= \langle [x, x + \delta], 0 \rangle + \langle y, [0, -\Delta] \rangle = \langle [x + y, x + y + \delta], [0, -\Delta] \rangle \\ &= \begin{cases} \langle [x + y, x + y + \delta - (-\Delta)], 0 \rangle, & \delta \geq -\Delta, \\ \langle x + y, [0, -\Delta - \delta] \rangle, & \delta < -\Delta, \end{cases} = (x + y, \delta + \Delta). \end{aligned}$$

Случай $\delta < 0, \Delta \geq 0$ рассматривается аналогично.

в) При $a = 0$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $a > 0$. Если $\delta \geq 0$, то

$$a(x, \delta) = a\langle [x, x + \delta], 0 \rangle = \langle [ax, ax + a\delta], 0 \rangle = (ax, a\delta).$$

Если $\delta < 0$, то

$$a(x, \delta) = a\langle x, [0, -\delta] \rangle = \langle ax, [0, -a\delta] \rangle = (ax, a\delta).$$

Пусть теперь $a < 0$. Тогда если $\delta \geq 0$, то

$$\begin{aligned} a(x, \delta) &= a\langle [x, x + \delta], 0 \rangle = \langle 0, |a|[x, x + \delta] \rangle = \langle 0, [|a|x, |a|x + |a|\delta] \rangle \\ &= \langle -|a|x, -|a|\delta \rangle = (ax, a\delta). \end{aligned}$$

Если $\delta < 0$, то

$$\begin{aligned} a(x, \delta) &= a\langle x, [0, -\delta] \rangle = \langle |a|[0, -\delta], |a|x \rangle = \langle [-|a|x, -|a|x - |a|\delta], 0 \rangle \\ &= \langle -|a|x, -|a|\delta \rangle = (ax, a\delta). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо следующее утверждение:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, \delta_k) = (x, \delta) \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть начиная с некоторого k_0 все $\delta_k \geq 0$. Тогда $(x_k, \delta_k) = \langle [x_k, x_k + \delta_k], 0 \rangle$. Пусть также $\delta \geq 0$, тогда $(x, \delta) = \langle [x, x + \delta], 0 \rangle$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, \delta_k) = (x, \delta)$, то

$$\begin{aligned} \rho((x_k, \delta_k), (x, \delta)) &= \rho(\langle [x_k, x_k + \delta_k], 0 \rangle, \langle [x, x + \delta], 0 \rangle) = h([x_k, x_k + \delta_k], [x, x + \delta]) \\ &= \max\{\|x_k - x\|, \|x_k + \delta_k - x - \delta\|\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta$.

Если $\delta < 0$, то $(x, \delta) = \langle 0, [-x, -x - \delta] \rangle$, а значит,

$$\begin{aligned} \rho((x_k, \delta_k), (x, \delta)) &= \rho(\langle [x_k, x_k + \delta_k], 0 \rangle, \langle 0, [-x, -x - \delta] \rangle) \\ &= h([x_k - x, x_k - x + \delta_k - \delta], 0) \\ &= \max\{\|x_k - x\|, \|x_k + \delta_k - x - \delta\|\} \not\rightarrow 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию.

Случай, когда начиная с некоторого k_0 все $\delta_k < 0$, рассматривается аналогично.

Пусть существует бесконечно много $\delta_k \geq 0$ и бесконечно много $\delta_k < 0$. Тогда разделим последовательность номеров $\{k\}$ на две подпоследовательности

$$\{k_1 : \delta_{k_1} \geq 0\} \quad \text{и} \quad \{k_2 : \delta_{k_2} < 0\}.$$

Так как любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, то $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (x_{k_1}, \delta_{k_1}) = (x, \delta)$ и по доказанному

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} x_{k_1} = x, \quad \lim_{k_1 \rightarrow \infty} \delta_{k_1} = \delta \geq 0,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует k_1^0 такое, что при $k_1 > k_1^0$ справедливы оценки

$$\|x_{k_1} - x\| < \varepsilon, \quad \|\delta_{k_1} - \delta\| < \varepsilon.$$

Аналогично получаем, что $\lim_{k_2 \rightarrow \infty} (x_{k_2}, \delta_{k_2}) = (x, \delta)$, а значит,

$$\lim_{k_2 \rightarrow \infty} x_{k_2} = x, \quad \lim_{k_2 \rightarrow \infty} \delta_{k_2} = \delta \leq 0,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует k_2^0 такое, что при $k_2 > k_2^0$ справедливы оценки

$$\|x_{k_2} - x\| < \varepsilon, \quad \|\delta_{k_2} - \delta\| < \varepsilon.$$

Таким образом, получаем, что $\delta = 0$. Выбирая $k_0 = \max\{k_1^0, k_2^0\}$, получаем, что $\|x_k - x\| < \varepsilon$ и $\|\delta_k\| < \varepsilon$ при $k > k_0$. Следовательно, необходимость доказана.

Достаточность доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 3. *Имеем*

$$D_{\pi}(x(t), \delta(t)) = (\dot{x}(t), \dot{\delta}(t)),$$

где $D_{\pi}(x(t), \delta(t))$ – π -производная [11], [12] пары $(x(t), \delta(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись определением π -производной и теоремами 1 и 2, получим

$$\begin{aligned} D_{\pi}(x(t), \delta(t)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(x(t + \Delta), \delta(t + \Delta)) - (x(t), \delta(t))] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [(x(t + \Delta), \delta(t + \Delta)) + (-x(t), -\delta(t))] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (x(t + \Delta) - x(t), \delta(t + \Delta) - \delta(t)) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta}, \frac{\delta(t + \Delta) - \delta(t)}{\Delta} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta}, \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta(t + \Delta) - \delta(t)}{\Delta} \right) = (\dot{x}(t), \dot{\delta}(t)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in ax + [-m, m], \quad x(0) = 0, \quad (2)$$

при $m > 0$ и различных $a \neq 0$. В работе А. А. Толстоногова [2] рассматривается вопрос о связи между R -решением $R(t)$ [1] включения (2) и решением соответствующего уравнения с производной Хукухары

$$D_h X(t) = aX(t) + [-m, m], \quad X(0) = 0. \quad (3)$$

В работе было показано, что при $a > 0$ справедливо равенство

$$R(t) = X(t) = \frac{e^{at} - 1}{a} [-m, m]$$

при $t \in [0, T]$. Если же $a < 0$, то

$$R(t) = \frac{e^{at} - 1}{a} [-m, m], \quad X(t) = e^{-at} R(t).$$

Следовательно, $R(t) \subset X(t)$ при $t \in (0, T]$.

Рассмотрим уравнение с π -производной, соответствующее включению (2):

$$\begin{cases} D_{\pi}(x, \delta) = a(x, \delta) + (-m, 2m), \\ (x(0), \delta(0)) = (0, 0). \end{cases} \quad (4)$$

На основании теорем 1 и 3 данное уравнение распадается на два линейных неоднородных уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - m, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\delta} = a\delta + 2m, \\ \delta(0) = 0. \end{cases}$$

Решая их, получаем, что

$$x(t) = -\frac{m}{a}(e^{at} - 1), \quad \delta(t) = \frac{2m}{a}(e^{at} - 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (x(t), \delta(t)) &= \left(-\frac{m}{a}(e^{at} - 1), \frac{2m}{a}(e^{at} - 1) \right) \\ &= \left\langle \left[-\frac{m}{a}(e^{at} - 1), \frac{m}{a}(e^{at} - 1) \right], 0 \right\rangle = \left\langle \frac{e^{at} - 1}{a}[-m, m], 0 \right\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, R -решение включения (2) при всех a совпадает с интегральной воронкой включения (2) и совпадает с решением уравнения с π -производной (4).

Таким образом, имеет смысл рассмотреть вопрос об аппроксимации R -решения линейного дифференциального включения при помощи решения соответствующего уравнения с π -производной.

§ 2. Аппроксимация множества достижимости линейного дифференциального включения

Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + F(t), \quad x(0) \in X_0, \quad (5)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $A(t)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица, $F(t)$ – непрерывное многозначное отображение $[0, T] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

R -решение $R(t)$ включения (5) с начальным условием $R(0) = X_0$ записывается в виде

$$R(t) = \Phi(t, 0)X_0 + \int_0^t \Phi(t, s)F(s) ds, \quad (6)$$

где

$$\Phi(t, s) = \exp \int_s^t A(\tau) d\tau,$$

интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Аумана [17].

Пусть отображение $\tilde{F}(t) = F_1(t) \times \cdots \times F_n(t)$, где $F_i(t) = [f_i(t), f_i(t) + r_i(t)]$, $i = \overline{1, n}$, и множество $\tilde{X}_0 = X_1^0 \times \cdots \times X_n^0$, где $X_i^0 = [x_i^0, x_i^0 + \delta_i^0]$, $i = \overline{1, n}$, таковы, что $F(t) \subseteq \tilde{F}(t)$ ($F(t) \supseteq \tilde{F}(t)$) для всех $t \in [0, T]$ и $X_0 \subseteq \tilde{X}_0$ ($X_0 \supseteq \tilde{X}_0$).

Поставим в соответствие включению (5) систему линейных дифференциальных уравнений с π -производной вида

$$\begin{cases} D_\pi(x_i, \delta_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j, \delta_j) + (f_i(t), r_i(t)), \\ (x_i(0), \delta_i(0)) = (x_i^0, \delta_i^0), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) в силу теорем 1 и 3 распадается на две системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \\ x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\delta_j + r_i(t), \\ \delta_i(0) = \delta_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (9)$$

решениями которых являются

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t))^T = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, s)f(s) ds, \\ \delta(t) &= (\delta_1(t), \dots, \delta_n(t))^T = \Phi(t, 0)\delta_0 + \int_0^t \Phi(t, s)r(s) ds. \end{aligned}$$

Пусть

$$X_i(t) = \begin{cases} [x_i(t), x_i(t) + \delta_i(t)] & \text{при } \delta_i(t) \geq 0, \\ [x_i(t) + \delta_i(t), x_i(t)] & \text{при } \delta_i(t) < 0 \end{cases}$$

и $\tilde{X}(t) = X_1(t) \times \dots \times X_n(t)$.

Изучим связь между множествами $R(t)$ и $\tilde{X}(t)$. По свойству опорных функций [18] имеем

$$\begin{aligned} c(R(t), \psi) &= c(\Phi(t, 0)X_0, \psi) + c\left(\int_0^t \Phi(t, s)F(s) ds, \psi\right) \\ &= c(X_0, \Phi^T(t, 0)\psi) + \int_0^t c(F(s), \Phi^T(t, s)\psi) ds \\ &\leq (\geq) c(\tilde{X}_0, \Phi^T(t, 0)\psi) + \int_0^t c(\tilde{F}(s), \Phi^T(t, s)\psi) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(x_i^0 + \frac{\delta_i^0}{2} \right) (\Phi^T(t, 0)\psi)_i + \frac{\delta_i^0}{2} \left| (\Phi^T(t, 0)\psi)_i \right| \right\} \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \left\{ \left(f_i(s) + \frac{r_i(s)}{2} \right) (\Phi^T(t, s)\psi)_i + \frac{r_i(s)}{2} \left| (\Phi^T(t, s)\psi)_i \right| \right\} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(x_i^0 + \frac{\delta_i^0}{2} \right) \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, 0)\psi_j + \frac{\delta_i^0}{2} \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, 0)\psi_j \right| \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \left\{ \left(f_i(s) + \frac{r_i(s)}{2} \right) \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, s)\psi_j + \frac{r_i(s)}{2} \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, s)\psi_j \right| \right\} ds \\ &= I_1(t, \psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(\tilde{X}(t), \psi) &= \sum_{i=1}^n c(X_i, \psi_i) = \sum_{i=1}^n \left(\left(x_i + \frac{\delta_i}{2} \right) \psi_i + \frac{|\delta_i|}{2} |\psi_i| \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t, 0) \left(x_j^0 + \frac{\delta_j^0}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t, s) \left(f_j(s) + \frac{r_j(s)}{2} \right) ds \right) \psi_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{|\psi_i|}{2} \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t, 0) \delta_j^0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_{ij}(t, s) r_j(s) ds \right| \right\} \\
&= I_2(t, \psi).
\end{aligned}$$

Соотношение между $I_1(t, \psi)$ и $I_2(t, \psi)$ непосредственно связано с соотношением между

$$J_1(t, \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\delta_i^0 \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, 0) \psi_j \right| + \int_0^t \left(r_i(s) \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t, s) \psi_j \right| \right) ds \right)$$

и

$$J_2(t, \psi) = \sum_{i=1}^n |\psi_i| \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t, 0) \delta_j^0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_{ij}(t, s) r_j(s) ds \right|.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. Пусть для линейного дифференциального включения (5) существуют непрерывная функция $\tilde{F}(t)$ такая, что $F(t) \subseteq \tilde{F}(t)$ ($F(t) \supseteq \tilde{F}(t)$), и множество $\tilde{X}_0$ такое, что $X_0 \subseteq \tilde{X}_0$ ($X_0 \supseteq \tilde{X}_0$), и $J_1(t, \psi) \leq J_2(t, \psi)$ ($J_1(t, \psi) \geq J_2(t, \psi)$) для всех $\psi \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, T]$. Тогда $R(t) \subseteq \tilde{X}(t)$ ($R(t) \supseteq \tilde{X}(t)$) для всех $t \in [0, T]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n = 1$ имеем $F(t) = \tilde{F}(t)$, $X_0 = \tilde{X}_0$ и

$$\begin{aligned}
J_1(t, \psi) &= \delta_0 |\varphi(t, 0) \psi| + \int_0^t r(s) |\varphi(t, s) \psi| ds \\
&\geq |\psi| \left| \varphi(t, 0) \delta_0 + \int_0^t r(s) \varphi(t, s) ds \right| = J_2(t, \psi)
\end{aligned}$$

для всех $\psi \in R$ и $t \in [0, T]$. Таким образом, $R(t) \supseteq \tilde{X}(t)$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим дифференциальное включение (5) при $n = 2$ и диагональной матрице $\Phi(t, s)$. Пусть отображение $\tilde{F}(t)$ и множество $\tilde{X}_0$ таковы, что $F(t) \supseteq \tilde{F}(t)$ и $X_0 \supseteq \tilde{X}_0$. В этом случае

$$\begin{aligned}
J_1(t, \psi) &= \delta_1^0 |\varphi_{11}(t, 0) \psi_1| + \delta_2^0 |\varphi_{22}(t, 0) \psi_2| \\
&\quad + \int_0^t r_1(s) |\varphi_{11}(t, s) \psi_1| ds + \int_0^t r_2(s) |\varphi_{22}(t, s) \psi_2| ds, \\
J_2(t, \psi) &= |\psi_1| \left| \int_0^t r_1(s) \varphi_{11}(t, s) ds + \varphi_{11}(t, 0) \delta_1^0 \right| \\
&\quad + |\psi_2| \left| \int_0^t r_2(s) \varphi_{22}(t, s) ds + \varphi_{22}(t, 0) \delta_2^0 \right|.
\end{aligned}$$

Так как функции $\varphi_{11}(t, s)$ и $\varphi_{22}(t, s)$ знакопостоянны (в противном случае матрица $\Phi(t, s)$ не будет невырожденной), то $J_1(t, \psi) = J_2(t, \psi)$ для всех $\psi \in \mathbb{R}^n$ и всех $t \in [0, T]$. Таким образом, в силу доказанной теоремы $R(t) \supseteq \tilde{X}(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Если $F(t) = \tilde{F}(t)$ и $X_0 = \tilde{X}_0$, то $R(t) = \tilde{X}(t)$.

В случае, когда матрица $\Phi(t, s)$ является обратно диагональной, получается та же оценка.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть матрица $\Phi(t, s)$ обладает следующим свойством: каждые строка и столбец матрицы содержат один ненулевой элемент. Пусть отображение $\tilde{F}(t)$ и множество $\tilde{X}_0$ таковы, что $F(t) \supseteq \tilde{F}(t)$ и $X_0 \supseteq \tilde{X}_0$. Тогда $R(t) \supseteq \tilde{X}(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

Очевидно, что в общем случае нельзя сказать, какая из величин $J_1(t, \psi)$, $J_2(t, \psi)$ больше.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для линейного дифференциального включения (5) для любого $k \in \overline{1, n}$ все $\varphi_{ki}(t, s)$ неотрицательны (неположительны) для всех $i \in \overline{1, n}$ при $t, s \in [0, T]$ и существуют функция $\tilde{F}(t)$ такая, что $F(t) \subseteq \tilde{F}(t)$, и множество $\tilde{X}_0$ такое, что $X_0 \subseteq \tilde{X}_0$. Тогда $R(t) \subseteq \tilde{X}(t)$ для всех $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 4. Достаточно проверить выполнение условия $J_1(t, \psi) \leq J_2(t, \psi)$ лишь для $\psi = e_k$, $k = \overline{1, n}$, где e_k — единичный орт. В этом случае

$$J_1(t, e_k) = \sum_{i=1}^n \left(\delta_i^0 |\varphi_{ki}(t, 0)| + \int_0^t r_i(s) |\varphi_{ki}(t, s)| ds \right),$$

$$J_2(t, e_k) = \left| \sum_{i=1}^n \varphi_{ki}(t, 0) \delta_i^0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t \varphi_{ki}(t, s) r_i(s) ds \right|.$$

Так как для любого $k \in \overline{1, n}$ все $\varphi_{ki}(t, s)$ неотрицательны (неположительны) для всех $i \in \overline{1, n}$ и всех $0 \leq s \leq t \leq T$, то $J_1(t, e_k) = J_2(t, e_k)$ для всех $k \in \overline{1, n}$ и всех $t \in [0, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в теореме 5 $F(t) = \tilde{F}(t)$ и $X_0 = \tilde{X}_0$, то $J_1(t, e_k) = J_2(t, e_k)$ для всех $k \in \overline{1, n}$ и всех $t \in [0, T]$. Таким образом, множество $R(t)$ вписано в множество $\tilde{X}(t)$.

ПРИМЕР 3. В работе [19] было рассмотрено дифференциальное включение (5) при $n = 1$:

$$\dot{x} \in a(t)x + F(t), \quad x(0) \in X_0. \quad (10)$$

В случае, когда $a(t) \geq 0$, а отображение $F: [0, T] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ измеримо и интегрально ограничено, в [2] было показано, что R -решение $R(t)$ включения (10) совпадает с решением уравнения с производной Хукхары

$$D_h X = a(t)X + F(t), \quad X(0) = X_0.$$

Рассмотрим уравнение с π -производной, соответствующее включению (10):

$$D_\pi(x, \delta) = a(t)(x, \delta) + (f(t), r(t)), \quad (11)$$

$$(x(0), \delta(0)) = (x_0, \delta_0).$$

В этом случае $F(t) = \tilde{F}(t)$, $X_0 = \tilde{X}_0$ и

$$\varphi(t, s) = \exp \int_s^t a(\tau) d\tau > 0$$

при всех $t, s \in [0, T]$.

Таким образом, в силу теоремы 5 и следствия 1 получим, что

$$R(t) = \tilde{X}(t) = \left[x_0 \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) + \int_0^t f(s) \exp \left(\int_s^t a(\tau) d\tau \right) ds, \right. \\ \left. (x_0 + \delta_0) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) + \int_0^t (f(s) + r(s)) \exp \left(\int_s^t a(\tau) d\tau \right) ds \right].$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим линейное неоднородное включение

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ [0, 2] \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0. \quad (12)$$

Матрицант соответствующей однородной системы имеет вид

$$\Phi(t, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} + e^{-3(t-s)} & e^{-(t-s)} - e^{-3(t-s)} \\ e^{-(t-s)} - e^{-3(t-s)} & e^{-(t-s)} + e^{-3(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Так как все $\varphi_{ij}(t, s) > 0$ при $i, j \in 1, 2$ и всех $0 \leq s \leq t \leq T$, то в силу теоремы 5 R -решение $R(t)$ включения (12) является подмножеством множества $\tilde{X}(t)$, определяемого системой уравнений с π -производной

$$\begin{cases} D_\pi(x_1, \delta_1) = -2(x_1, \delta_1) + (x_2, \delta_2), \\ D_\pi(x_2, \delta_2) = (x_1, \delta_1) - 2(x_2, \delta_2) + (0, 2 \sin^2 t), \\ (x_1(0), \delta_1(0)) = (0, 0), \\ (x_2(0), \delta_2(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Эта система распадается на две системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\delta}_1 = -2\delta_1 + \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 = \delta_1 - 2\delta_2 + 2 \sin^2 t, \\ \delta_1(0) = 0, \\ \delta_2(0) = 0, \end{cases}$$

решениями которых являются

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) \equiv 0, \\ \delta_1(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{10}{195}e^{-3t} - \frac{8}{65}\sin 2t + \frac{1}{65}\cos 2t + \frac{1}{3}, \\ \delta_2(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} - \frac{10}{195}e^{-3t} - \frac{18}{65}\sin 2t - \frac{14}{65}\cos 2t + \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $\tilde{X}(t)$ стремится к периодическому решению при $t \rightarrow \infty$, в то время как решение уравнения с производной Хукухары, соответствующего включению (12), является расширяющимся множеством при $t \rightarrow \infty$.

§ 3. Аппроксимация множества достижимости линейного импульсного дифференциального включения

Рассмотрим линейное импульсное дифференциальное включение

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_k, \quad x(0) \in X_0, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &\in B_k x + P_k, \end{aligned} \quad (13)$$

где моменты импульсов τ_k таковы, что $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_N \leq T$, $B_k - (n \times n)$ -матрицы, $P_k \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть множество $\tilde{P}_k = P_1^k \times \dots \times P_n^k$, где $P_i^k = [p_i^k, p_i^k + q_i^k]$, $i = \overline{1, n}$, таково, что $P_k \subseteq \tilde{P}_k$ ($P_k \supseteq \tilde{P}_k$). Поставим в соответствие включению (13) систему линейных дифференциальных уравнений с π -производной вида

$$\begin{cases} D_\pi(x_i, \delta_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j, \delta_j) + (f_i(t), r_i(t)), & t \neq \tau_k, \\ \Delta(x_i, \delta_i)|_{t=\tau_k} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^k(x_j, \delta_j) + (p_i^k, q_i^k), \\ (x_i(0), \delta_i(0)) = (x_i^0, \delta_i^0), \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Delta(x_i, \delta_i)|_{t=\tau_k} = (\Delta x_i|_{t=\tau_k}, \Delta \delta_i|_{t=\tau_k})$.

Эта система распадается на две системы линейных неоднородных импульсных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x_i|_{t=\tau_k} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^k x_j + p_i^k, \\ x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\delta_j + r_i(t), & t \neq \tau_k, \\ \Delta \delta_i|_{t=\tau_k} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^k \delta_j + q_i^k, \\ \delta_i(0) = \delta_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть $\tilde{X}(\tau_k + 0) = X_1(\tau_k + 0) \times \dots \times X_n(\tau_k + 0)$, где

$$\begin{aligned} X_i(\tau_k + 0) &= \begin{cases} [x_i(\tau_k + 0), x_i(\tau_k + 0) + \delta_i(\tau_k + 0)] & \text{при } \delta_i(\tau_k + 0) \geq 0, \\ [x_i(\tau_k + 0) + \delta_i(\tau_k + 0), x_i(\tau_k + 0)] & \text{при } \delta_i(\tau_k + 0) < 0, \end{cases} \\ x_i(\tau_k + 0) &= \sum_{j=1}^n (e_{ij} + b_{ij}^k)x_j(\tau_k) + p_i^k, \\ \delta_i(\tau_k + 0) &= \sum_{j=1}^n (e_{ij} + b_{ij}^k)\delta_j(\tau_k) + q_i^k, \end{aligned}$$

e_{ij} – символ Кронекера.

Изучим связь между множествами $R(\tau_k + 0)$ и $\tilde{X}(\tau_k + 0)$ в предположении, что $R(\tau_k) \subseteq \tilde{X}(\tau_k)$ ($R(\tau_k) \supseteq \tilde{X}(\tau_k)$). По свойству опорных функций имеем

$$\begin{aligned} c(R(\tau_k + 0), \psi) &= c((E + B_k)R(\tau_k) + P_k, \psi) = c(R(\tau_k), (E + B_k)^T \psi) + c(P_k, \psi) \\ &\leq (\geq) c(\tilde{X}(\tau_k), (E + B_k)^T \psi) + c(\tilde{P}_k, \psi) \\ &= \sum_{i=1}^n \{c(X_i(\tau_k), ((E + B_k)^T \psi)_i) + c(P_i^k, \psi_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(x_i(\tau_k) + \frac{\delta_i(\tau_k)}{2} \right) \sum_{j=1}^n (e_{ji} + b_{ji}^k) \psi_j + \left(p_i^k + \frac{q_i^k}{2} \right) \psi_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\delta_i(\tau_k)|}{2} \left| \sum_{j=1}^n (e_{ji} + b_{ji}^k) \psi_j \right| + \frac{q_i^k}{2} |\psi_i| \right\} = I_{k1}(\psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\tilde{X}(\tau_k + 0), \psi) &= \sum_{i=1}^n c(X_i(\tau_k + 0), \psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(x_i(\tau_k + 0) + \frac{\delta_i(\tau_k + 0)}{2} \right) \psi_i + \frac{|\delta_i(\tau_k + 0)|}{2} |\psi_i| \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n (e_{ij} + b_{ij}^k) \left(x_j(\tau_k) + \frac{\delta_j(\tau_k)}{2} \right) \psi_i + \left(p_i^k + \frac{q_i^k}{2} \right) \psi_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^n (e_{ij} + b_{ij}^k) \delta_j(\tau_k) + q_i^k \right| |\psi_i| \right\} = I_{k2}(\psi). \end{aligned}$$

Соотношение между $I_{k1}(\psi)$ и $I_{k2}(\psi)$ непосредственно связано с соотношением между

$$J_{k1}(\psi) = \sum_{i=1}^n \left\{ |\delta_i(\tau_k)| \left| \sum_{j=1}^n (e_{ji} + b_{ji}^k) \psi_j \right| + q_i^k |\psi_i| \right\}$$

и

$$J_{k2}(\psi) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (e_{ij} + b_{ij}^k) \delta_j(\tau_k) + q_i^k \right| |\psi_i|.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. Пусть $P_k \subseteq \tilde{P}_k$ ($P_k \supseteq \tilde{P}_k$) и $X(\tau_k) \subseteq \tilde{X}(\tau_k)$ ($X(\tau_k) \supseteq \tilde{X}(\tau_k)$). Тогда если $J_{k1}(\psi) \leq (\geq) J_{k2}(\psi)$ для всех $\psi \in \mathbb{R}^n$, то $R(\tau_k + 0) \subseteq \tilde{X}(\tau_k + 0)$ ($R(\tau_k + 0) \supseteq \tilde{X}(\tau_k + 0)$).

СЛЕДСТВИЕ 3. При $n = 1$ имеем $P_k = \tilde{P}_k$ и

$$J_{k1}(\psi) = |\delta_i(\tau_k)(1 + b_k)\psi| + q_k |\psi| \geq |(1 + b_k)\delta_i(\tau_k) + q_k| \cdot |\psi| = J_{k2}(\psi)$$

для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Таким образом, $R(\tau_k + 0) \supseteq \tilde{X}(\tau_k + 0)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $P_k \subseteq \tilde{P}_k$ и $R(\tau_k) \subseteq \tilde{X}(\tau_k)$. Если для любого $m \in \overline{1, n}$ все $(e_{mi} + b_{mi}^k)\delta_i(\tau_k)$ неотрицательны для всех $i \in \overline{1, n}$, то $R(\tau_k + 0) \subseteq \tilde{X}(\tau_k + 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить выполнение условия

$$J_{k1}(\psi) \leq J_{k2}(\psi)$$

лишь для $\psi = e_m$, $m = \overline{1, n}$. В этом случае

$$J_{k1}(e_m) = \sum_{i=1}^n |\delta_i(\tau_k)(e_{mi} + b_{mi}^k)| + q_m^k,$$

$$J_{k2}(e_m) = \left| \sum_{i=1}^n (e_{mi} + b_{mi}^k) \delta_i(\tau_k) + q_m^k \right|.$$

Так как для любого $m \in \overline{1, n}$ все $(e_{mi} + b_{mi}^k) \delta_i(\tau_k)$ неотрицательны для всех $i \in \overline{1, n}$, то $J_{k1}(e_m) = J_{k2}(e_m)$ для всех $m \in \overline{1, n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в теореме 7 $P_k = \tilde{P}_k$ и $R(\tau_k) = \tilde{X}(\tau_k)$, то $J_{k1}(e_m) = J_{k2}(e_m)$ для всех $m \in \overline{1, n}$. Таким образом, множество $R(\tau_k + 0)$ вписано в множество $\tilde{X}(\tau_k + 0)$. При $n = 1$ получим, что $R(\tau_k + 0) = \tilde{X}(\tau_k + 0)$.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим импульсное дифференциальное включение (13) при $n = 1$:

$$x \in a(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_k} \in b_k x + P_k, \quad x(0) \in X_0.$$

Поставим ему в соответствие линейное уравнение с π -производной

$$D_\pi(x, \delta) = a(t)(x, \delta) + (f(t), r(t)), \quad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta(x, \delta)|_{t=\tau_k} = b_k(x, \delta) + (p_k, q_k),$$

$$(x(0), \delta(0)) = (x_0, \delta_0),$$

которое распадается на два линейных импульсных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + f(t), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} = b_k x + p_k, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\delta} = a(t)\delta + r(t), & t \neq \tau_k, \\ \Delta \delta|_{t=\tau_k} = b_k \delta + q_k, \\ \delta(0) = \delta_0. \end{cases}$$

В этом случае $F(t) = \tilde{F}(t)$ и $X_0 = \tilde{X}_0$. Предположим, что $b_k \geq -1$ для всех $k \in N$. Проверим выполнение условий теоремы 7:

$$(1 + b_1)\delta(\tau_1) = (1 + b_1) \left(\exp \left(\int_0^{\tau_1} a(t) dt \right) \delta_0 + \int_0^{\tau_1} r(s) \exp \left(\int_s^{\tau_1} a(t) dt \right) ds \right) \geq 0.$$

Предположим, что $(1 + b_{k-1})\delta(\tau_{k-1}) \geq 0$. Тогда

$$(1 + b_k)\delta(\tau_k) = (1 + b_k) \left(\exp \left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} a(t) dt \right) \delta(\tau_{k-1} + 0) \right. \\ \left. + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} r(s) \exp \left(\int_s^{\tau_k} a(t) dt \right) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + b_k) \left[((1 + b_{k-1})\delta(\tau_{k-1}) + q_{k-1}) \exp\left(\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} a(t) dt\right) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} r(s) \exp\left(\int_s^{\tau_k} a(t) dt\right) ds \right] \geq 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, в силу примера 3 и замечания 2 $R(t) \subseteq \tilde{X}(t)$. Следовательно, $R(t) = \tilde{X}(t)$.

Список литературы

1. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977.
2. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
3. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
4. Овсеевич А. И. Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Проблемы управления и теории информации 1983. Т. 12. №2. С. 1237–1240.
5. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
6. Дончев А. Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
7. Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999.
8. Никольский М. С. Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // ЖВМиМФ. 1988. Т. 28. №8. С. 1252–1254.
9. Veliov V. Second order discrete approximations to linear differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 1992. V. 29. P. 439–451.
10. Hukuhara M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkcial Ekvac. 1967. №10. P. 205–223.
11. Тюрин Ю. Н. Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования // Эконом. и матем. методы. 1965. Т. 1. №3. С. 391–409.
12. Banks H. T., Jacobs M. Q. A differential calculus of multifunctions // J. Math. Anal. Appl. 1970. №29. P. 246–272.
13. Radström H. An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. №3. P. 165–169.
14. Половинкин Е. С. Теория многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1983.
15. Debreu G. Integration of correspondences // Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66). Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1. Berkeley: Univ. California Press, 1967. P. 351–372.
16. de Blasi F. S., Iervolino F. Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione Mat. Ital. 1969. V. 2. №4–5. P. 491–501.
17. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. №1. P. 1–12.
18. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. М.: Наука, 1985. С. 194–252.
19. Markov S. M. Existence and uniqueness of solutions of the interval differential equation $X' = F(t, X)$ // C.R. Acad. Sci. Bulgar. 1978. V. 31. №12. P. 1519–1522.