Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Скрыпник, Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 11, 141–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:53:51

УДК 517.946

И. И. Скрыпник

Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией

Работа посвящена изучению решений с точечной особенностью для общего квазилинейного параболического уравнения с абсорбцией. Развита метод получения новых поточечных оценок решения и интегральных оценок градиента решения. Установлены точные условия поведения члена уравнения, характеризующего абсорбцию, при которых не существует решений с точечной особенностью. Рассмотрены случаи решений с особой точкой на начальной плоскости и внутри области.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению устранимости изолированных особенностей решений квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_j \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, t, u) = 0 \quad (1.1)$$

в $\Omega_T \setminus (x_0, t_0)$, где $\Omega_T = \Omega \times [0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in [0, T]$. Рассматриваются две возможности расположения сингулярной точки (x_0, t_0) . В первом случае $t_0 = 0$, т.е. сингулярная точка принадлежит начальной плоскости, и предполагается дополнительно наличие начального условия

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{для } x \in \Omega \setminus \{x_0\} \quad (1.2)$$

с функцией $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$. Во втором случае $t_0 > 0$, т.е. сингулярная точка (x_0, t_0) – внутренняя точка области.

Предполагается, что коэффициенты $a_j(x, t, u, \xi)$, $j = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют условию параболичности в виде

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, t, u, \xi) \xi_j \geq \nu_1 |\xi|^p - g_1(x, t) |u|^p - f_1(x, t)$$

с $p \geq 2$, положительной постоянной ν_1 и неотрицательными функциями $g_1(x, t)$, $f_1(x, t)$, удовлетворяющими некоторому условию интегрируемости. Также предполагаются выполненными условия Каратеодори и условия на рост для функций $a_j(x, t, u, \xi)$.

Пусть $g(x, t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$g(x, t, u) \operatorname{sign} u \geq \nu_1 |u|^q - f_1(x, t), \quad q \geq p - 1 + \frac{p}{n}, \quad (1.3)$$

так что модельным случаем рассматриваемого уравнения является следующее нестационарное уравнение p -Лапласа с абсорбцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + |u|^{q-1} u = 0. \quad (1.4)$$

Исследованию сингулярных решений эллиптических и параболических уравнений посвящено большое число работ. Обзор полученных результатов и литературные ссылки можно найти в книге Л. Верона [1].

Наиболее общие результаты для квазилинейных эллиптических уравнений получены Ф. Николози, И. В. Скрыпником и автором в работах [2] (для уравнений без абсорбции) и [3] (для уравнений с абсорбцией). Для параболических уравнений решения с особенностями рассматривались Д. Аронсоном и Дж. Серринным в работах [4], [5]. Точное условие устранимости особенности для уравнения вида (1.1) без абсорбции (при $g(x, t, u) \equiv 0$) получено в недавней работе Ф. Николози, И. В. Скрыпника и автора [6]. Из этой работы следует, например, что особенность во внутренней точке (x_0, t_0) устранима, если

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} |u(x, t)| \left[|x - x_0| + |t - t_0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right]^n = 0. \quad (1.5)$$

Аналогично [6] можно доказать, что и для уравнения (1.1) с функцией $g(x, t, u)$, удовлетворяющей условию (1.3), равенство (1.5) обеспечивает устранимость особенности в точке (x_0, t_0) .

Для параболических уравнений специального вида с абсорбцией устранимость особенностей была установлена в работах Х. Брезиса, А. Фридмана [7] и Гмиры [8]. В работе [7] для уравнения (1.4) при $p = 2$, $q \geq (n + 2)/2$ доказано, что решение $u(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad (1.6)$$

имеет всегда устранимую особенность в точке $(0, 0)$. Аналогичный результат для уравнения (1.4) доказан в [8] при $p > 2$, $q \geq p - 1 + p/n$.

В настоящей работе для решений уравнения (1.1) общего вида доказывается, что при выполнении условия (1.3) особенность в точке на начальной плоскости или во внутренней точке всегда устранима. Доказательство основано на новых априорных оценках решения с особенностью. Метод получения таких оценок был развит в работах [2], [3], [6].

§ 2. Формулировка предположений и основных результатов

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Предполагаем, что функции $a_i(x, t, u, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $g(x, t, u)$ определены при $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условиям:

- a_1) $a_i(x, t, u, \xi)$, $g(x, t, u)$ непрерывны по u , ξ при почти всех x , t и измеримы по x , t при всех u , ξ ;

a_2) существуют положительные числа ν_1, ν_2 и неотрицательные функции $f_1(x, t), f_2(x, t), \nu_3(x, t)$ такие, что при всех значениях аргументов выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \xi) \xi_i &\geq \nu_1 |\xi|^p - f_1(x, t)(|u|^p + 1), \\ |a_i(x, t, u, \xi)| &\leq \nu_2 |\xi|^{p-1} + f_2(x, t)(|u|^{p-1} + 1), \quad i = 1, \dots, n, \\ |a_0(x, t, u, \xi)| &\leq \nu_3(x, t) |\xi|^{p-1} + f_1(x, t)(|u|^{p-1} + 1), \\ g(x, t, u) \operatorname{sign} u &\geq \nu_1 |u|^q - f_1(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

с числами p, q , удовлетворяющими условиям

$$p > 2, \quad q \geq p - 1 + \frac{p}{n}, \quad (2.2)$$

и функциями $f_1(x, t), f_2(x, t), \nu_3(x, t)$ такими, что

$$H(x, t) \in L^{r_0}(\Omega_T), \quad \frac{n + p + n(p-2)}{r_0} = p(1 - \delta), \quad (2.3)$$

здесь δ – произвольное число из интервала $(0, 1)$,

$$H(x, t) = \nu_3^p(x, t) + f_1(x, t) + [f_2(x, t)]^{\frac{p}{p-1}}.$$

Определим понятие сингулярного решения уравнения (1.1) с особенностью в точке (x_0, t_0) , считая для простоты, что $x_0 = 0$. Под решением уравнения (1.1) с особенностью в точке $(0, t_0)$ понимаем функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую включению

$$u(x, t) \zeta(x, t) \in V^{2,p}(Q_T) = C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$$

и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial [u(x, t)]_h}{\partial t} \varphi + \sum_{j=1}^n \left[a_j \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right. \\ \left. + \left(\left[a_0 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_h + [g(x, t, u)]_h \right) \varphi \right\} dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

с $\varphi(x, t) = \psi(x, t) \zeta(x, t)$, где $\psi(x, t)$ – произвольная функция из пространства $V^{2,p}(Q_T)$, $\zeta(x, t)$ – произвольная функция класса $C^\infty(\overline{\Omega}_T)$, равная нулю вблизи $(0, t_0) \cup \{\partial\Omega \times (0, T)\}$. В равенстве (2.4) t_1, t_2, h – произвольные числа, удовлетворяющие условию $0 < h < t_1 < t_2 < T - h$, $[\cdot]_h$ обозначает стекловское усреднение по t , так что

$$[u(x, t)]_h = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x, s) ds \quad \text{при } x \in \Omega, \quad t \in [0, T - h]. \quad (2.5)$$

Будем говорить, что особенность в точке $(0, t_0)$ устранима, если интегральное тождество (2.4) справедливо для $\varphi(x, t) = \psi(x, t) \bar{\zeta}(x, t)$ и $u(x, t) \bar{\zeta}(x, t) \in V^{2,p}(Q_T)$ для произвольных функций $\psi, \bar{\zeta}$ таких, что $\psi(x, t) \in V^{2,p}(\Omega_T)$, $\bar{\zeta}(x, t)$ – бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вблизи $\partial\Omega \times (0, T)$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия $a_1), a_2)$ и $u(x, t)$ – решение уравнения (1.1), имеющее особенность в точке $(0, 0)$ и удовлетворяющее условию (1.2). Тогда особенность $u(x, t)$ в точке $(0, 0)$ устранима.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия $a_1), a_2)$ и $u(x, t)$ — решение уравнения (1.1), имеющее особенность в точке $(0, t_0)$, $0 < t_0 < T$. Тогда особенность $u(x, t)$ в точке $(0, t_0)$ устранима.

Доказательство обеих теорем проводится одинаково. В §§ 3–5 рассматривается случай внутренней сингулярной точки, т.е. $t_0 > 0$. Доказательство состоит из трех этапов. Вначале устанавливается поточечная оценка, которая дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Тогда существуют положительные постоянные $K^{(1)}, R^{(1)}$, зависящие лишь от известных параметров, такие, что выполнена оценка

$$|u(x, t)| \leq K^{(1)} [|x| + |t - t_0|]^{-\frac{1}{q-1}} \quad (2.6)$$

при $0 < |x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0| \leq R^{(1)}, (x, t) \in \Omega_T$.

Оценка (2.6) фактически доказана в § 3. Она просто следует (см. начало доказательства леммы 5.2) из теоремы 3.1.

Дальше доказывается интегральная оценка градиента решения. Определим

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(r) &= \sup \{ |u(x, t)| : r^{p+n(p-2)} \leq |x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0| \leq \widetilde{R}_0^{p+n(p-2)} \} + r^{-p_0}, \\ E(r, 4r) &= \{ (x, t) \in \Omega_T : \widetilde{M}(4r) < u(x, t) < \widetilde{M}(r) \}, \end{aligned}$$

где $p_0, \widetilde{R}_0$ — положительные числа, определенные в § 5 и зависящие лишь от известных параметров.

ТЕОРЕМА 2.4. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Тогда существуют положительные постоянные $\alpha, K^{(2)}, R^{(2)}$, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при $0 < \rho \leq R^{(2)}$ справедлива оценка

$$\iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq K^{(2)} \rho^{2-n}. \quad (2.7)$$

Оценка (2.7) является непосредственным следствием оценки (2.6) и леммы 4.3, доказанной в § 4.

Наконец, в § 5 с помощью оценок (2.6), (2.7) доказывается поточечная оценка

$$|u(x, t)| \leq K^{(3)} \left[|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right]^{\gamma-n}, \quad \gamma > 0, \quad (2.8)$$

в окрестности точки $(0, t_0)$. Эта оценка обеспечивает выполнение равенства (1.5) для решения $u(x, t)$. И, следовательно, устранимость особенности в точке $(0, t_0)$ следует из работы [6].

§3. Поточечные оценки решения

Пусть R_0 – фиксированное положительное число такое, что

$$R_0 \leq \frac{1}{2} \min\{1, \text{dist}(0, \partial\Omega), t_0^{1/\lambda}, (T - t_0)^{1/\lambda}\},$$

и обозначим для $0 < r \leq R_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r) &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^1 : \left(\frac{|x|}{r} \right)^p + \frac{|t - t_0|}{r^\lambda} \leq 1 \right\}, \\ M(r) &= \sup\{|u(x, t)| : (x, t) \in \mathcal{D}(R_0) \setminus \mathcal{D}(r)\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbb{R}_+^1 = \{t \in \mathbb{R}^1 : t > 0\}$, $\lambda = p(q - 1)/(q - p + 1)$.

Далее предполагаем, что $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty$, так как в противном случае устранимость особенности непосредственно следует из работы [6]. Поэтому можем считать, что

$$M(R_0) \geq 1 + \text{ess sup}\{|u_0(x)| : x \in \Omega\}. \quad (3.2)$$

Определим при $0 < \rho < 3^{-R_0/p}$, $\sigma \in (0, 1/2)$ функцию

$$\varphi_{\sigma\rho}(x, t) = \omega_\sigma\left(\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^p + \frac{|t - t_0|}{\rho^\lambda}\right),$$

где $\omega_\sigma: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция класса C^∞ такая, что $\omega_\sigma(s) = 1$ при $1 \leq s \leq 2$, $\omega_\sigma(s) = 0$ вне интервала $(1 - \sigma)^p \leq s \leq 3 - (1 - \sigma)^p$, $0 \leq \omega_\sigma(s) \leq 1$, $\left| \frac{d\omega_\sigma(s)}{ds} \right| \leq \frac{C_0}{\sigma}$. Здесь C_0 – постоянная, зависящая лишь от p, n . Заметим, что $\varphi_{\sigma\rho}(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \mathcal{D}(p - \sigma\rho)$ и при $(x, t) \notin \mathcal{D}(R_0)$. Так что выполнено неравенство

$$|u(x, t)| \leq M(\rho - \sigma\rho), \quad \text{если } \varphi_{\sigma\rho}(x, t) \neq 0. \quad (3.3)$$

Будем подразумевать под известными параметрами числа $\nu_1, \nu_2, n, p, q, q_0, r_0, \delta, R_0$, нормы функций $H(x, t), u_0(x)$ в соответствующих пространствах.

Определим при $0 < R < R_0$ функцию $u_R(x, t)$ равенствами

$$\begin{aligned} u_R(x, t) &= [u(x, t) - M(R)]_+ \quad \text{при } (x, t) \in \mathcal{D}(R), \\ u_R(x, t) &= 0 \quad \text{при } (x, t) \in \Omega_T \setminus \mathcal{D}(R), \end{aligned}$$

где $[z]_+ = \max\{z, 0\}$ для $z \in \mathbb{R}^1$.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда при $0 < \sigma < 1/2$, $0 < \rho < 3^{-1/p}R_0$, $0 < R < R_0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \text{ess sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx + \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u_R(x, t)}{\partial x} \right|^p \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & \quad + \iint_{\Omega_T} u_R^{q+1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & \leq K_1 \sigma^{-p} \{M^2(\rho - \sigma\rho) \rho^n + M^p(\rho - \sigma\rho) \rho^{n-p+\lambda}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

с постоянной K_1 , зависящей лишь от известных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию $\varphi(x, t) = [[u(x, t)]_h - M(R)]_+ \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t)$. Используя неравенства (2.1) и стандартные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_R^2(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx \\ & + \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial u_R(x, t)}{\partial x} \right|^p \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt + \iint_{\Omega_T} u_R^{q+1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) dx dt \\ & \leq C_1 \iint_{\Omega_T} \left\{ u_R^2(x, t) \left| \frac{\partial \varphi_{\sigma\rho}}{\partial t} \right| \varphi_{\sigma\rho}^{p-1}(x, t) + u_R^p(x, t) \left| \frac{\partial \varphi_{\sigma\rho}}{\partial x} \right|^p \right. \\ & \quad \left. + H(x, t) |u(x, t)|^p \varphi_{\sigma\rho}^p(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя неравенство (3.3) и условие (2.3), получаем из (3.5) оценку (3.4), что и доказывает лемму 3.1.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют постоянные K_2 , R_1 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что справедлива оценка*

$$M(\rho) \leq K_2 \rho^{-\frac{p}{q-p+1}} \quad \text{при} \quad 0 < \rho < R_1 < 3^{-\frac{1}{p}} R_0. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi(x, t) = [[u(x, t)]_h - M(R)]_+^m \varphi_{\sigma\rho}^s(x, t), \quad m \geq 1, \quad s \geq p,$$

где $\varphi_{\sigma\rho}$ — та же функция, что и в лемме 3.1. Используя неравенство (2.1) и стандартные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_R^{m+1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^s(x, t) dx \\ & + \iint_{\Omega_T} u_R^{m-1}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \varphi_{\sigma\rho}^s(x, t) dx dt + \iint_{\Omega_T} u_R^{m+q}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^s(x, t) dx dt \\ & \leq C_2 \left(\frac{m+s}{\sigma} \right)^p \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda-\mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right] \\ & \quad \times \left[\iint_{\Omega_T} u_R^{(m-1)r'_0}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{(s-p)r'_0}(x, t) dx dt \right]^{\frac{1}{r'_0}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\mu = (n + \lambda)/r_0$.

Пусть $\bar{l}, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ — произвольные положительные числа такие, что

$$\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2, \quad \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2, \quad \bar{l}_1 = [\bar{l}_2 + 2 - p] \frac{p}{n}, \quad \bar{k}_1 = \bar{k}_2 \frac{p}{n}.$$

Обозначим $\bar{p}_1 = n/p$, $\bar{p}_2 = n/(n-p)$,

$$\bar{\theta} = \frac{nr'_0}{n+p}, \quad \bar{l}' = \frac{p(n+2)}{n+p} r'_0, \quad \bar{k}' = pr'_0, \quad (3.8)$$

где $r'_0 = r_0/(r_0 - 1)$ и число r_0 введено в условии a_2).

Используя неравенство Гёльдера, теорему вложения и неравенство (3.7), получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega_T} u_R^{\bar{l}}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{\bar{k}}(x, t) dx dt \\
& \leq C_3 \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_R^{\bar{l}_1 \bar{p}_1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{\bar{k}_1 \bar{p}_1}(x, t) dx \right\}^{\frac{1}{\bar{p}_1}} \iint_{\Omega_T} \left| \frac{\partial}{\partial x} (u_R^{\frac{\bar{l}_2}{p} \varphi^{\frac{\bar{k}_2}{p}}}) \right|^p dx dt \\
& \leq C_4 \left(\frac{\bar{l} + \bar{k}}{\sigma} \right)^{p(\frac{1}{\bar{p}_1} + 2)} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda - \mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p - \mu}} \right]^{\frac{1}{\bar{p}_1} + 1} \\
& \quad \times \left\{ \iint_{\Omega_T} u_R^{\bar{l}\theta - \bar{l}'}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{\bar{k}\theta - \bar{k}'}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Пусть p_1 – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$p_1 > \frac{p}{n + p - nr'_0}. \tag{3.10}$$

Определим $l_1, l, l', k_1, k, k', \theta$ равенствами

$$\begin{aligned}
r'_0(l_1 p_1 - q - 1) &= \bar{l}\theta - \bar{l}', \quad l = l_1 + \bar{l} \left(1 - \frac{1}{p_1} \right), \quad l' = \frac{\bar{l}' p_1 + p_2 \bar{\theta}(q + 1)}{r'_0 p_1 + p_2 \bar{\theta}} r'_0, \\
r'_0(k_1 p_1 - p) &= \bar{k}\theta - \bar{k}', \quad k = k_1 + \bar{k} \left(1 - \frac{1}{p_1} \right), \quad k' = \frac{\bar{k}' p_1 + p_2 \bar{\theta}(q + 1)}{r'_0 \theta_1 + p_2 \bar{\theta}} r'_0, \\
\theta &= \frac{\bar{\theta} p_1 p_2 r'_0}{r'_0 \theta_1 + \bar{\theta} \theta_2},
\end{aligned}$$

где $p_2 = p_1/(p_1 - 1)$, $\bar{l}, \bar{k}$ – те же числа, что и в оценке (3.9).

Используя неравенства (3.7), (3.9) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega_T} u_R^l(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^k(x, t) dx dt \\
& \leq \left\{ \iint_{\Omega_T} u_R^{l_1 p_1}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{k_1 p_1}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{1}{p_1}} \left\{ \iint_{\Omega_T} u_R^{\bar{l}}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{\bar{k}}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{1}{p_2}} \\
& \leq C_5 \left(\frac{l + k}{\sigma} \right)^{\frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2} (\frac{p}{n} + 2)} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda - \mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p - \mu}} \right]^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} (\frac{p}{n} + 1)} \\
& \quad \times \left\{ \iint_{\Omega_T} u_R^{l\theta - l'}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{k\theta - k'}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Неравенство (3.11) дает возможность применить итерационный процесс для оценки максимума функции $u_R(x, t)$ на множестве $\{(x, t) : \varphi_{\sigma\rho}(x, t) = 1\}$. Заметим, что условие (3.10) на p_1 обеспечивает неравенство $\theta < 1$. Определим для этого последовательности $\{l_j\}, \{k_j\}$ следующим образом:

$$l_j = \left[q + 1 + l' \frac{1}{1 - \theta} \right] \theta^{-j} - l' \frac{1}{1 - \theta}, \quad k_j = \left[p + k' \frac{1}{1 - \theta} \right] \theta^{-j} - k' \frac{1}{1 - \theta},$$

и обозначим

$$I(l_j, k_j) = \left\{ \iint_{\Omega_T} u_R^{l_j}(x, t) \varphi_{\sigma\rho}^{k_j}(x, t) dx dt \right\}^{\theta^j}.$$

Из неравенства (3.11) следует оценка

$$I(l_j, k_j) \leq \left\{ C_6 (\sigma^{-1} \theta^{-j})^{\frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2} (\frac{p}{n} + 2)} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda-\mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right]^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} (\frac{p}{n} + 1)} \right\}^{\theta^j} \times I(l_{j-1}, k_{j-1}).$$

Последовательно применяя последнее неравенство, имеем

$$I(l_j, k_j) \leq C_7 \left\{ \sigma^{-p(\frac{n+p}{p_2 n} + 1)} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda-\mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right]^{1 + \frac{p}{p_2 n}} \right\}^{\frac{\theta}{1-\theta}(1-\theta^j)} I(l_0, k_0).$$

Устремляя j к бесконечности и используя оценку (3.4), получаем

$$M^{q+1+l'} \frac{1}{1-\theta}(\rho) \leq C_8 \sigma^{-a} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda-\mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right]^{(1 + \frac{p}{p_2 n}) \frac{\theta}{1-\theta}} \times [M^2(\rho - \sigma\rho) \rho^n + M^p(\rho - \sigma\rho) \rho^{n-p+\lambda}], \quad (3.12)$$

где a — положительное число, зависящее лишь от известных параметров. Неравенство (3.12) можем переписать в виде

$$M^{q+1+l'} \frac{1}{1-\theta}(\rho) \leq C_8 \sigma^{-a} \rho^{n-\mu+\lambda} \left[\frac{M^2(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{\lambda-\mu}} + \frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right]^{(1 + \frac{p\theta}{p_2 n}) \frac{1}{1-\theta}}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим при $p > 2$ две возможности:

а) для данного ρ существует $\sigma \in (0, 1/2)$ такое, что выполнено неравенство

$$M^2(\rho - \sigma\rho) \geq \rho^{\lambda-p} M^p(\rho - \sigma\rho), \quad (3.14)$$

б) для данного ρ неравенство (3.13) не выполняется ни при каком $\sigma \in (0, 1/2)$.

В первом случае непосредственно из неравенства (3.14) следует оценка

$$M(\rho) \leq M(\rho - \sigma'\rho) \leq \rho^{-\frac{p}{q-p+1}}$$

при некотором $\sigma' \in (0, 1/2)$. Следовательно, мы получаем в этом случае неравенство (3.6).

Во втором случае имеем из (3.13), (3.14) оценку

$$M^{q+1+l'} \frac{1}{1-\theta}(\rho) \leq C_9 \sigma^{-a} \rho^{n-\mu+\lambda} \left[\frac{M^p(\rho - \sigma\rho)}{\rho^{p-\mu}} \right]^{(1 + \frac{p\theta}{p_2 n}) \frac{1}{1-\theta}} \quad (3.15)$$

при любом $\sigma \in (0, 1/2)$.

Введем обозначения

$$r_1 = q + 1 + l' \frac{1}{1 - \theta} = q + 1 + \frac{\bar{l}' p_1 + p_2 \bar{\theta} (q + 1)}{(r'_0 p_1 + p_2 \bar{\theta})(1 - \theta)} r'_0,$$

$$r_2 = p \left(1 + \frac{p\theta}{p_2 n} \right) \frac{1}{1 - \theta}, \quad r_3 = n - \mu + \lambda - \frac{(p - \mu)}{1 - \theta} \left(1 + \frac{p\theta}{p_2 n} \right).$$

Подставляя вместо λ и μ их значения, определенные выше, и проводя прямые вычисления, получаем равенство

$$\begin{aligned} (q - p + 1)r_3 + p(r_1 - r_2) &= \frac{r'_0 p_1 + \bar{\theta} p_2}{r'_0 p_1 + \bar{\theta} p_2 - \bar{\theta} p_1 p_2 r'_0} \left\{ n(q - p + 1) \right. \\ &\quad + p(q - 1) + \bar{\theta} p_2 \left[p(q - p + 1) + \frac{p^2}{n}(q - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. - p_1 \left(n(q - p + 1) + \frac{p^2}{n}(q - 1) + (2q - p)p \right) \right] \right\} \\ &= \frac{r'_0 p_1}{[r'_0 p_1 + \bar{\theta} p_2 - \bar{\theta} p_1 p_2 r'_0](p_1 - 1)(n + p)} \\ &\quad \times \left\{ [(n + p)(p_1 - 1) + n][n(q - p + 1) + p(q - 1)] + np(q - p + 1) \right. \\ &\quad \left. + p^2(q - 1) - p_1 n \left[n(q - p + 1) + \frac{p^2}{n}(q - 1) + (2q - p)p \right] \right\} = 0. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Отметим, что последнее равенство выполнено при любом p_1 .

Далее, обеспечим выполнение неравенства $r_1 > r_2$. Замечая, что

$$r_1 - r_2 = q + 1 + \frac{p^2}{p_2 n} + \frac{R(p_1, p_2)}{1 - \theta},$$

где

$$R(p_1, p_2) = \frac{\bar{l}' p_1 + p_2 \bar{\theta} (q + 1)}{r'_0 p_1 + p_2 \bar{\theta}} r'_0 - p - \frac{p^2}{p_2 n}, \quad (3.17)$$

видим, что достаточно установить положительность $R(p_1, p_2)$ для некоторого p_1 , удовлетворяющего условию (3.10).

Вычисляя значение указанной функции для

$$p_1 = p_1^* = \frac{p}{n + p - nr'_0}, \quad p_2 = p_2^* = \frac{p}{nr'_0 - n},$$

получаем

$$R(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{p} \{ (n + p - nr'_0)(q + 1) - p(n + 2) + [p(n + 2) - p^2]r'_0 \}.$$

Используя неравенство (2.2) для q , имеем

$$R(p_1^*, p_2^*) \geq (p - 1)(1 - r'_0) + \frac{p}{n}. \quad (3.18)$$

Условие (2.3) для r_0 дает нам, что

$$r'_0 = \frac{n(p-1)+p}{n(p-1)+p\delta}, \quad (p-1)(1-r'_0) + \frac{p}{n} = \frac{p\delta[n(p-1)+p]}{n[n(p-1)+p\delta]},$$

и, тем самым, из (3.18) получаем, что

$$R(p_1^*, p_2^*) \geq \frac{p\delta[n(p-1)+p]}{n[n(p-1)+p\delta]}. \quad (3.19)$$

Из (3.17), (3.19) следует возможность выбора p_1 , достаточно близкого к p_1^* , зависящего лишь от известных параметров и удовлетворяющего неравенству (3.10), такого, что $r_1 - r_2 > 0$.

Используя обозначения (3.16), перепишем оценку (3.15) в виде

$$M^{r_1}(\rho) \leq C_9 \sigma^{-a} \rho^{r_3} M^{r_2}(\rho - \sigma\rho). \quad (3.20)$$

Эта оценка справедлива при произвольных $\rho \in (0, 3^{-1/p} R_0)$, $\sigma \in (0, 1/2)$ с постоянной C_9 , зависящей лишь от известных параметров.

Выберем последовательность $\{\sigma_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\sigma_j = 2^{-(j-1)}$, и обозначим $M_j = M(\rho - (\sigma_1 + \dots + \sigma_j)\rho)$. Из неравенства (3.20) следует оценка

$$M_j \leq C_{10} [2^{ja} \rho^{r_3} M_{j+1}^{r_2}]^{\frac{1}{r_1}} \quad \text{при } j = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Последовательное применение неравенства (3.21), использование равенства (3.16), неравенства $r_1 > r_2 > 0$ и ограниченности последовательности $\{M_j\}$ дает оценку

$$M(\rho) \leq C_{11} \rho^{\frac{r_3}{r_1 - r_2}} = C_{11} \rho^{-\frac{p}{q-p+1}}. \quad (3.22)$$

Этим закончено доказательство теоремы 3.1.

§ 4. Интегральные оценки решения

Определим при $r \in (0, R_1)$ функцию $\psi_r: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$\psi_r(x, t) = \eta_r(|x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0|), \quad (4.1)$$

где $\eta_r: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — функция со следующими значениями:

$$\begin{aligned} \eta_r(s) &\equiv 0 \quad \text{при } s \leq r^{p+n(p-2)}, \quad \eta_r(s) \equiv 1 \quad \text{при } s \geq R(r), \\ \eta_r(s) &= - \left[(1 - \theta) \ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-1} \int_{r^{p+n(p-2)}}^s \frac{1}{z \ln z} dz \\ &\quad \text{при } r^{p+n(p-2)} < s < [R(r)]^{p+n(p-2)}. \end{aligned}$$

Здесь θ — выбираемое далее число из интервала $(0, 1)$, $R(r)$ определяется равенством

$$\ln \frac{1}{[R(r)]^{p+n(p-2)}} = \left[\ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^\theta.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{D}}(r) &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0| \leq r^{p+n(p-2)}\}, \\
 \tilde{M}(r) &= \sup\{|u(x, t)| : (x, t) \in \mathcal{D}(\tilde{R}_0) \setminus \tilde{\mathcal{D}}(r)\} + r^{-p_0}, \\
 E(r) &= \{(x, t) \in \Omega_T \setminus (0, t_0) : u(x, t) > \tilde{M}(r)\}, \\
 \tilde{u}_r(x, t) &= [u(x, t) - \tilde{M}(r)]_+ \quad \text{при } (x, t) \in \tilde{\mathcal{D}}(r) \setminus (0, t_0), \\
 \tilde{u}_r(x, t) &= 0 \quad \text{при } (x, t) \in \Omega_T \setminus \tilde{\mathcal{D}}(r).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь

$$0 < r < \tilde{R}_0, \quad \tilde{R}_0 = \max\{r : \tilde{\mathcal{D}}(r) \subset \mathcal{D}(R_0)\}, \quad p_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{p+n(p-2)}{q-1}\right\},$$

$u(x, t)$ – решение уравнения (1.1) с особенностью в точке $(0, t_0)$.

Определим число $\bar{p}$ и функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ при $0 < r < \tilde{R}_0$ равенствами

$$\begin{aligned}
 \bar{p} &= \frac{pq}{q-p+1}, \\
 F_1(r) &= [R(r)]^{p+n(p-1)-\bar{p}} \quad \text{при } q > p-1 + \frac{p}{n}, \\
 F_1(r) &= \ln^{1-\frac{n(p-1)}{p}} \frac{1}{r} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p > n(p-1), \\
 F_1(r) &= \ln \ln \frac{1}{r} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p = n(p-1), \\
 F_1(r) &= \ln^{1-\frac{n(p-1)}{p}} \frac{1}{R(r)} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p < n(p-1), \\
 F_2(r) &= [R(r)]^{[p+n(p-2)](1-q')+n} \quad \text{при } q > p-1 + \frac{p}{n}, \quad q' = \frac{q}{q-1}, \\
 F_2(r) &= \ln^{2-q'} \frac{1}{r} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad q' < 2, \\
 F_2(r) &= \ln \ln \frac{1}{r} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad q' = 2, \\
 F_2(r) &= \ln^{2-q'} \frac{1}{R(r)} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad q' > 2.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2, и пусть дополнительно решение $u(x, t)$ удовлетворяет условию*

$$|u(x, t)| \leq K' \left(|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right)^{\varepsilon-n} \tag{4.5}$$

при $(x, t) \in \tilde{\mathcal{D}}(\tilde{R}_0) \setminus (0, t_0)$ с некоторыми постоянными $K' > 0$, $\varepsilon \in [0, n)$. Тогда при $0 < R(r) < \rho < \tilde{R}_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 &\iint_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + u^q \ln \frac{u}{\tilde{M}(\rho)} \right\} \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\
 &\leq K_3 \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\bar{p}} F_1(r) + \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} F_2(r) \right. \\
 &\quad \left. + \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

с постоянной K_3 , зависящей лишь от известных параметров, θ и K' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi(x, t) = \left[\ln \frac{u(x, t)_h}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+ \psi_r^{\overline{p}}(x, t).$$

Выполняя стандартные преобразования в слагаемом, содержащем производную по t , переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и оценивая возникающие интегралы с использованием условия a_2) и неравенства Юнга, приходим к оценке

$$\iint_{E(\rho)} \left\{ \frac{1}{u}(x, t) \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|^p + u^q(x, t) \ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \right\} \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \leq C_{12}(I_1 + I_2 + I_3), \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{E(\rho)} \int_{\widetilde{M}(\rho)}^{u(x, t)} \left[\ln \frac{z}{\widetilde{M}(\rho)} \right]_+ dz \psi_r^{p-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial t} \right| dx dt, \\ I_2 &= \iint_{E(\rho)} u^{p-1}(x, t) \ln^p \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial t} \right|^p \psi_r^{\overline{p}-p}(x, t) dx dt, \\ I_3 &= \iint_{E(\rho)} \left\{ f_1(x, t) + [f_2(x, t)]^{\frac{p}{p-1}} + f_1(x, t) \ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \right. \\ &\quad \left. + \nu_3^p(x, t) \ln^p \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \right\} u^{p-1}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Постоянные C_j в настоящем параграфе зависят от известных параметров, θ и K' .

Используя неравенство Юнга, представление функции $\psi_r(x, t)$ и неравенство (4.5), оцениваем интеграл I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4C_{12}} \iint_{E(\rho)} u^q(x, t) \ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ &\leq C_{13} \iint_{E(\rho)} \ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{\overline{p}-q'}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial t} \right|^{q'} dx dt \\ &\leq C_{14} \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} \iint_{\widetilde{\mathcal{D}}(R(r)) \setminus \widetilde{\mathcal{D}}(r)} [|x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0|]^{-q'} \\ &\quad \times |\ln[x^{p+n(p-2)} + |t - t_0|]|^{1-q'} dx dt \leq C_{15} \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-q'} F_2(r). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Аналогично оцениваем интеграл I_2 и получаем, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4C_{12}} \iint_{E(\rho)} u^q(x, t) \ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ &\leq C_{16} \iint_{E(\rho)} \left[\ln \frac{u(x, t)}{\widetilde{M}(\rho)} \right]^{1+\frac{p-1}{p}\overline{p}} \left| \frac{\partial \psi_r(x, t)}{\partial x} \right|^{\overline{p}} dx dt \\ &\leq C_{17} \left[\ln \ln \frac{1}{r^{p+n(p-2)}} \right]^{-\overline{p}} F_1(r). \quad (4.9) \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, представление для функции $\psi_r(x, t)$ и неравенство (4.5), получаем следующую оценку:

$$I_3 \leq C_{18} \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^p \frac{1}{\rho}. \quad (4.10)$$

Из полученных оценок (4.7)–(4.10) следует неравенство (4.6), что и заканчивает доказательство леммы 4.1.

Определим при $z \in \mathbb{R}^1$ функцию

$$\Phi_\rho(z) = [\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} - [z - \widetilde{M}(4\rho)]_+^{1-\kappa}, \quad (4.11)$$

где $\kappa = 1 + p\delta/(4n(p-1))$.

Обозначим при $0 < r < \widetilde{R}_0$

$$\begin{aligned} F_3(r) &= [R(r)]^{[p+n(p-2)](1-q')+n}, & \text{если } q > p-1 + \frac{p}{n}, \\ F_3(r) &= \ln^{1-q'} \frac{1}{R(r)}, & \text{если } q = p-1 + \frac{p}{n}, \\ F_4(r) &= \frac{1}{\varepsilon} [R(r)]^{\varepsilon(p-1)}, & \text{если } \varepsilon > 0, \\ F_4(r) &= \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1-p}, & \text{если } \varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где ε — число из неравенства (4.5).

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2 и оценка (4.5). Тогда при $0 < R(r) < \rho < \widetilde{R}_0$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho)} [u(x, t) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq K_4 [\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} \left\{ F_3(r) + F_4(r) \right. \\ & \quad \left. + \left[\iint_{E(\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \right]^{\frac{p-1}{p}} [F_4(r)]^{\frac{1}{p}} + \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

с постоянной K_4 , зависящей лишь от известных параметров, θ и K' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi(x, t) = \Phi_\rho([u(x, t)]_h) \psi_r^{\overline{p}}(x, t).$$

Совершая преобразования такие же, как и при доказательстве (4.7), и оценивая полученные в результате указанной подстановки выражения, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho)} \left\{ [u(x, t) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + \Phi_\rho(u(x, t)) u^q(x, t) \right\} \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq C_{19} \{ I_4 + [I_5 + I_6 + I_7] [\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} \}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) u(x, t) \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| dx dt, \\ I_5 &= \iint_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} \psi_r^{\bar{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| dx dt, \\ I_6 &= \iint_{E(\rho)} u^{p-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p dx dt, \\ I_7 &= \iint_{E(\rho)} H(x, t) u^{p-1}(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Оценим, далее, интегралы $I_4, \dots, I_7$. Используя неравенство Юнга и представление функции $\psi_r(x, t)$, получаем

$$\begin{aligned} I_4 &- \frac{1}{2C_{19}} \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) u^q(x, t) \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \\ &\leq C_{20} \iint_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x, t)) \psi_r^{\bar{p}-q'}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right|^{q'} dx dt \\ &\leq C_{21} [\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)]^{1-\kappa} F_3(r). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Следующая оценка получается из неравенства (4.5) и представления для функции $\psi_r(x, t)$:

$$I_6 \leq C_{22} F_4(r), \quad (4.16)$$

с функцией $F_4(r)$, определенной в (4.12).

Из (4.16) и неравенства Гёльдера получаем

$$I_5 \leq C_{23} \left\{ \iint_{E(\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\bar{p}}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{p-1}{p}} \{F_4(r)\}^{\frac{1}{p}}. \quad (4.17)$$

Наконец, оценка интеграла I_7 следует аналогично оценке I_3 , так что имеем

$$I_7 \leq C_{24} \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta}.$$

Подставляя полученные оценки (4.15)–(4.17) в (4.14), заканчиваем доказательство леммы 4.2.

Определим функцию $u^{(\rho)}(x, t)$ и множество $E(\rho, 4\rho)$:

$$\begin{aligned} u^{(\rho)}(x, t) &= \min\{[u(x, t) - \widetilde{M}(4\rho)]_+, \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)\}, \quad (x, t) \in \Omega_T \setminus (0, t_0), \\ E(\rho, 4\rho) &= \{(x, t) \in \Omega_T : \widetilde{M}(4\rho) < u(x, t) < \widetilde{M}(\rho)\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2 и неравенство (4.5). Тогда справедлива оценка*

$$\iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq K_5 \widetilde{M}(\rho) \rho^{\varepsilon(p-1)+\frac{\delta p}{2}} \quad (4.18)$$

с постоянной K_5 , зависящей лишь от известных параметров и K' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi(x, t) = \min\{[u(x, t)]_h - \widetilde{M}(4\rho)_+, \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)\} \psi_r^{\overline{p}}(x, t),$$

где ψ_r — функция, определенная равенством (4.1), $R(r) < \rho$.

Аналогично доказательству леммы 4.1 получаем оценку

$$\begin{aligned} & \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt + \iint_{E(4\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ & \leq C_{25}(I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} I_8 &= \iint_{E(4\rho)} u(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial t} \right| dx dt, \\ I_9 &= \iint_{E(4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}-1}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right| dx dt, \\ I_{10} &= \iint_{E(4\rho)} \nu_3(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-1} u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt, \\ I_{11} &= \widetilde{M}(\rho) \iint_{E(4\rho)} \left[f_1(x, t) + f_2^{\frac{p}{p-1}}(x, t) + \psi_r^{-p}(x, t) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \right] \\ & \quad \times u^{p-1}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

При оценке интеграла I_8 воспользуемся неравенством Юнга и представлением для функции $\psi_r(x, t)$. В результате имеем

$$I_8 \leq 3 \frac{1}{4C_{25}} \iint_{E(4\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt + C_{26} \widetilde{M}(\rho) F_3(r) \quad (4.20)$$

с функцией $F_3(r)$, определенной равенствами (4.12).

Аналогичные рассуждения и неравенство Гёльдера дают оценку интеграла I_9 :

$$\begin{aligned} I_9 &\leq \frac{1}{4C_{25}} \iint_{E(4\rho)} u^q(x, t) u^{(\rho)}(x, t) \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \\ &+ C_{27} \widetilde{M}(\rho) \left\{ \iint_{E(4\rho)} \frac{1}{u(x, t)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \\ &\times \left\{ [F_5(r)]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} + \frac{1}{4C_{25}} \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt + C_{27} F_4(r) \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $F_4(r)$ — функция, определенная равенствами (4.12),

$$\begin{aligned} F_5(r) &= [R(r)]^{p+n(p-1)-\overline{p}} \quad \text{при } q > p-1 + \frac{p}{n}, \\ F_5(r) &= \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-(p-1)(n+1)} \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Также, используя неравенства Юнга, Гёльдера, (4.5) и выбор κ , получаем оценки

$$\begin{aligned}
 I_{10} &\leq \frac{1}{2C_{25}} \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt + C_{28} \widetilde{M}(\rho) \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \\
 &\quad + C_{28} \widetilde{M}(\rho) \left\{ \iint_{E(\rho)} [u(x, t) - \widetilde{M}(4\rho)]^{-\kappa} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^{\overline{p}}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\quad \times \left\{ \rho^{\varepsilon(p-1)+\frac{3\delta p}{4}} \right\}^{\frac{1}{p}}, \\
 I_{11} &\leq C_{29} \widetilde{M}(\rho) \{ \rho^{\varepsilon(p-1)+\delta p} + F_4(r) \}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Неравенства (4.19)–(4.23), а также неравенства (4.6), (4.12), доказанные в леммах 4.1, 4.2, дают возможность получить оценку

$$\begin{aligned}
 \iint_{E(\rho, 4\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt &\leq C_{30} \widetilde{M}(\rho) \left\{ \rho^{\varepsilon(p-1)+\frac{\delta p}{2}} + F_3(r) + F_4(r) \right. \\
 &\quad + [F_5(r)]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \left\{ \rho^{\varepsilon(p-1)+p\delta} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\}^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} \\
 &\quad \left. + F_6(r) \rho^{(\varepsilon(p-1)+\delta p)\frac{1}{p}} + F_7(r) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_6(r) &= \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-\overline{p}} F_1(r) \right. \\
 &\quad + \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-q'} F_2(r) \left\{ [F_5(r)]^{\frac{q(p-1)}{qp-p+1}} [F_5(r)]^{\frac{q-p+1}{qp-p+1}} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-\overline{p}} F_1(r) + \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-q'} F_2(r) \right\}^{\frac{p-1}{p}} [F_4(r)]^{\frac{1}{p}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Теперь перейдем к пределу в неравенстве (4.24) при $r \rightarrow 0$. Равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_3(r) = \lim_{r \rightarrow 0} F_4(r) = \lim_{r \rightarrow 0} F_5(r) = 0 \tag{4.25}$$

непосредственно следует из определения функций F_3, F_4, F_5 . Также из определения функций F_1, F_2 следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_1(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} F_2(r) = 0 \tag{4.26}$$

при $q > p-1+p/n$. Первое равенство в (4.26) также имеет место при $q = p-1+p/n$, $p < n(p-1)$, а второе – при $q = p-1+p/n$, $q < 2$. Кроме того, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-\overline{p}} F_1(r) &= 0 \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad p = n(p-1), \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left[\ln \ln \frac{1}{rp+n(p-2)} \right]^{-q'} F_2(r) &= 0 \quad \text{при } q = p-1 + \frac{p}{n}, \quad q = 2.
 \end{aligned}$$

Далее, при $q = p - 1 + p/n$, $p > n(p - 1)$, имеем

$$[F_1(r)]^{q(p-1)} [F_5(r)]^{q-p+1} \leq C_{31} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{-p(p-1)(n+1)}{n} \theta + \left[1 - \frac{n(p-1)}{p} \right] (p-1 + \frac{p}{n})(p-1)},$$

$$[F_1(r)]^{p-1} F_4(r) \leq C_{32} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\left[1 - \frac{n(p-1)}{p} - \theta \right] (p-1)}.$$

Правые части этих неравенств стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, если

$$\theta \geq \max \left\{ \frac{p+n(p-1)}{p(n+1)}, \frac{1}{p} \left(p - \left(n - \frac{1}{2} \right) (p-1) \right) \right\}. \quad (4.27)$$

Аналогично получаем при $q = p - 1 + p/n$, $q > 2$, оценки

$$[F_2(r)]^{q(p-1)} [F_5(r)]^{q-p+1} \leq C_{33} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{-p(p-1)(n+1)}{n} \theta + \left[1 - \frac{1}{p-2+p/n} \right] (p-1)(p-1 + \frac{p}{n})},$$

$$[F_2(r)]^{p-1} F_4(r) \leq C_{34} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\left[1 - \frac{1}{p-2+p/n} - \theta \right] (p-1)}.$$

Правые части двух последних неравенств стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$, если

$$\theta \geq \max \left\{ \frac{p+n(p-1)}{p(n+1)}, 1 - \frac{1}{2(p-2+p/n)} \right\}. \quad (4.28)$$

Окончательно, выбирая θ равным наибольшему значению правых частей неравенств (4.27), (4.28), получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_6(r) = 0.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (4.24), получаем оценку (4.18) и заканчиваем доказательство леммы 4.3.

§ 5. Доказательство теоремы 2.2

Докажем вначале вспомогательную поточечную оценку. Определим функцию $\xi_\rho: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ класса C^∞ такую, что

$$\xi_\rho(s) = 1 \quad \text{при } s \geq \left(\frac{2}{\rho} \right)^{p+n(p-2)},$$

$$\xi_\rho(s) = 0 \quad \text{при } s \leq \left(\frac{1}{\rho} \right)^{p+n(p-2)},$$

$$0 \leq \xi_\rho(s) \leq 1, \quad \left| \frac{d\xi_\rho(s)}{ds} \right| \leq \left(\frac{4}{\rho} \right)^{p+n(p-2)}.$$

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Тогда при $0 < \rho < \tilde{R}_0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) &\leq K_6 \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r_0}} \widetilde{M}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0}} \widetilde{M}^p \left(\frac{\rho}{2} \right) \right]^{\frac{(n+p)r_0'}{p(n+p+2r_0')}} \\ &\quad \times \left\{ \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^p(x, t) \xi_\rho^p(x, t) dx dt \right\}^{\frac{n+p-nr_0'}{p(n+p+2r_0')}} + \rho^{-\rho_0} \end{aligned} \quad (5.1)$$

с постоянной K_6 , зависящей лишь от известных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi(x, t) = [[u(x, t)]_h - \widetilde{M}(2\rho)]_+^m \xi_\rho^s(|x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0|), \quad m \geq 1, \quad s \geq p.$$

Используя неравенства (2.1) и стандартные преобразования, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \int_{\Omega} u_{2\rho}^{m+1}(x, t) \xi_\rho^s(x, t) dx + \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^{m-1}(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \xi_\rho^s(x, t) dx dt \\ & \leq C_{35} (m + s)^p \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r_0}} \widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0} - p} \widetilde{M}^p\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \\ & \quad \times \left[\iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^{(m-1)r'_0}(x, t) \xi_\rho^{(s-p)r'_0}(x, t) dx dt \right]^{\frac{1}{r'_0}}. \end{aligned}$$

Далее, аналогично доказательству неравенства (3.9) устанавливаем оценку

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^l(x, t) \xi_\rho^k(x, t) dx dt \\ & \leq C_{36} (l + k)^p \left(\frac{p}{n} + 2\right) \left[\rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r_0}} \widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0}} \widetilde{M}^p\left(\frac{\rho}{2}\right) \right]^{\frac{n+p}{n}} \\ & \quad \times \left\{ \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^{l\bar{\theta}-l'}(x, t) \xi_\rho^{k\bar{\theta}-k'}(x, t) dx dt \right\}^{\frac{1}{\bar{\theta}}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\bar{\theta} = nr'_0/(n + p)$, $l' = p(n + 2)r'_0/(n + p)$, $k' = pr'_0$, l, k — произвольные положительные числа такие, что $l\bar{\theta} - l' \geq p$, $k\bar{\theta} - k' \geq p$.

Неравенство (5.2) дает возможность применить итерационный процесс Мозера для оценки максимума функции $u_{2\rho}(x, t)$ на множестве $\{\xi_\rho(x, t) = 1\}$. Доказательство оценки (5.1) аналогично доказательству неравенства (3.12). Лемма 5.1 доказана.

ЛЕММА 5.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Тогда справедлива оценка*

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \leq K_7 \rho^{\gamma-n} \quad \text{при } 0 < \rho < \widetilde{R}_0 \quad (5.3)$$

с положительными постоянными γ, K_6 , зависящими лишь от известных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 3.1 и просто проверяемое неравенство

$$\left(\frac{4|x|}{x + |t - t_0|^{\frac{1}{\lambda}}} \right)^p + \frac{4^\lambda |t - t_0|}{(|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda} \geq 1,$$

получаем оценку

$$|u(x, t)| \leq C_{37} (|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{p}{q-p+1}} \quad (5.4)$$

при $0 < |x| + |t - t_0|^{\frac{1}{\lambda}} < 3^{-1/p} R_0$.

Эта оценка влечет за собой следующее неравенство:

$$\widetilde{M}(\rho) \leq C_{38} \rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1}}. \quad (5.5)$$

В самом деле, если

$$|x|^{p+n(p-2)} + |t - t_0| > \rho^{p+n(p-2)}, \quad (5.6)$$

то возможны два варианта:

- 1) $|x|^{p+n(p-2)} > |t - t_0|$,
- 2) $|x|^{p+n(p-2)} \leq |t - t_0|$.

В первом случае из (5.6) имеем $2|x|^{p+n(p-2)} > \rho^{p+n(p-2)}$. Используя (5.4), получаем

$$|u(x, t)| \leq C_{39} \rho^{-\frac{p}{q-p+1}}. \quad (5.7)$$

Во втором случае из (5.6) следует $2|t - t_0| > \rho^{p+n(p-2)}$. Далее, из неравенства (5.4) имеем

$$|u(x, t)| \leq C_{40} \rho^{-\frac{p}{q-p+1} \cdot \frac{p+n(p-2)}{\lambda}} = C_{40} \rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1}}. \quad (5.8)$$

Замечая, что в силу условия (2.2) на q выполнено неравенство $\lambda \leq p + n(p-2)$, получаем

$$\frac{p + n(p-2)}{q-1} \geq \frac{p}{q-p+1}.$$

Таким образом, неравенство (5.5) следует из (5.7) и (5.8).

Из неравенства (5.5) немедленно следует поточечная оценка

$$|u(x, t)| \leq C_{41} \left[|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right]^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1}}. \quad (5.9)$$

Обозначим $\varepsilon_0 = n - (p + n(p-2))/(q-1)$. В силу условия (2.2) $\varepsilon_0 \geq 0$, так что для решения $u(x, t)$ выполнено неравенство (4.5) с $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Оценим теперь интеграл из правой части неравенства (5.1). Из определения $\widetilde{M}(\rho)$ имеем

$$|u(x, t)| \leq \widetilde{M}\left(\frac{\rho}{2}\right), \quad \text{если } \xi_\rho(x, t) \neq 0.$$

Используя неравенство Пуанкаре и лемму 4.3, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} u_{2\rho}^p(x, t) \xi_\rho^p(x, t) dx dt &\leq \iint_{\Omega_T} u^{(\frac{p}{2})}(x, t) dx dt \\ &\leq C_{42} \rho^p \iint_{E(\rho/2, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p dx dt \leq C_{43} \widetilde{M}(\rho) \rho^{p+\varepsilon_0(p-1)+\frac{\delta p}{2}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из неравенств (5.1), (5.5), (5.9) следует оценка

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) &\leq \rho^{-p_0} + C_{44} \left\{ \rho^{\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r_0'} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1}} \right. \\ &\quad \left. + \rho^{\frac{p+n(p-2)}{r_0} - p\frac{p+n(p-2)}{q-1}} \right\} \frac{(n+p)r_0'}{p(n+p+2r_0')} \\ &\quad \times \left\{ \rho^{-\frac{p+n(p-2)}{q-1} + p+\varepsilon_0(p-1)+\frac{\delta p}{2}} \right\} \frac{n+p-nr_0'}{p(n+p+2r_0')}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Используя условия (2.2), (2.3), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1} &\leq \frac{p+n(p-2)}{r_0} - p\frac{p+n(p-2)}{q-1}, \\ \left[\frac{n}{r_0} - \frac{p+n(p-2)}{r'_0} - 2\frac{p+n(p-2)}{q-1} \right] \frac{(n+p)r'_0}{p(n+p+2r'_0)} \\ &+ \left[p - \frac{p+n(p-2)}{q-1} \right] \frac{n+p-nr'_0}{p(n+p+2r'_0)} \geq -n. \end{aligned}$$

Из неравенства (5.11) и двух последних неравенств следует оценка (5.3), что и заканчивает доказательство леммы 5.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Определим последовательность $\{\rho_j\}, \{\widetilde{M}_j\}$ равенствами $\rho_j = \widetilde{R}_0/2^j, j = 1, 2, \dots, \widetilde{M}_j = \widetilde{M}(\rho_j)$. Из оценки (5.3) получаем

$$\widetilde{M}_j - \widetilde{M}_{j-1} \leq C_{45} 2^{j(n-\gamma)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Суммируя неравенства (5.12) по j от 2 до J , имеем оценку

$$\widetilde{M}_J - \widetilde{M}_1 \leq C_{46} 2^{J(n-\gamma)},$$

из которой следует неравенство

$$\widetilde{M}(\rho) \leq C_{47}(\rho^{\gamma-n} + \widetilde{M}_1).$$

Последнее неравенство обеспечивает выполнение следующей поточечной оценки:

$$|u(x, t)| \leq C_{48} \left\{ \left[|x| + |t - t_0|^{\frac{1}{p+n(p-2)}} \right]^{\gamma-n} + \widetilde{M}_1 \right\}. \quad (5.13)$$

Используя эту оценку, получаем, что для решения $u(x, t)$ выполнено равенство (1.5). Теперь устранимость особенности в точке $(0, t_0)$ следует из работы [6]. Доказательство теоремы 2.2 закончено.

Список литературы

1. *Veron L.* Singularities of solutions of second order quasilinear equations, 1995. (Pitman Res. Notes in Math. Ser. V. 353.)
2. *Nicolosi F., Skrypnik I. V., Skrypnik I. I.* Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // Comm. Partial Differential Equations. 2003. V. 28. № 3–4. P. 677–696.
3. *Скрыпник И. И.* Локальное поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией // Труды ИПММ НАН Украины. 2004. Т. 9. С. 97–105.
4. *Aronson D. G.* Isolated singularities of solutions of second order linear parabolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 19. P. 231–238.
5. *Aronson D. G., Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasilinear parabolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 25. P. 81–122.
6. *Nicolosi F., Skrypnik I. V., Skrypnik I. I.* Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. (to appear).
7. *Brezis H., Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measure as initial conditions // J. Math. Pures Appl. (9). 1983. V. 62. P. 73–97.
8. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data // Asymptot. Anal. 1990. V. 3. P. 43–56.