Общероссийский математический портал

З. Д. Усманов, О жестких “в малом” поверхностях Ефимова, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 119–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:36:30

УДК 514.752.43

З. Д. Усманов

О жестких “в малом” поверхностях Ефимова

Рассматриваются жесткие (в классе аналитических бесконечно малых изгибаний) аналитические поверхности с изолированной точкой уплощения и положительной гауссовой кривизной вокруг этой точки. Доказывается, что такие поверхности являются жесткими “в малом” в классе C^∞ . Доказательство основывается на изучении асимптотического поведения поля бесконечно малого изгиба в окрестности точки уплощения и последующего применения аппарата теории обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой в коэффициентах.

Библиография: 9 названий.

Введение

Предметом статьи являются аналитические поверхности с точкой уплощения, которые в евклидовой системе координат $Oxyz$ задаются в виде

$$z = z^{(n)}(x, y) + R(x, y), \quad (1)$$

где

$$z^{(n)}(x, y) = \sum_{s=0}^n a_{s, n-s} x^s y^{n-s}$$

– однородная форма относительно x и y степени n ($n \geq 3$) и $R(x, y)$ – степенной ряд, начинающийся с членов $(n+1)$ -й степени.

Будем говорить, что конкретная форма $z^{(n)}(x, y)$ является *жесткой*, если ее коэффициенты таковы, что из уравнения

$$z_{yy}^{(n)} \Phi_{xx}^{(m)} - 2z_{xy}^{(n)} \Phi_{xy}^{(m)} + z_{xx}^{(n)} \Phi_{yy}^{(m)} = 0, \quad (2)$$

где $\Phi^{(m)}(x, y)$ – искомая однородная форма степени m по x и y , следует $\Phi^{(m)} \equiv 0$ для всех $m \geq 2$.

Как доказано Р. Я. Берри [1], формы $z^{(3)}$ и $z^{(4)}$ не удовлетворяют условиям жесткости. Исключая их из рассмотрения, будем в дальнейшем полагать $n \geq 5$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхности, задаваемые уравнением (1) с жесткой однородной формой $z^{(n)}(x, y)$, $n \geq 5$, называются *поверхностями Ефимова*.

Для таких поверхностей любая окрестность точки уплощения $(0, 0)$ не допускает нетривиальные аналитические бесконечно малые (б.м.) изгибания, что составляет существо явления жесткости “в малом”, впервые обнаруженного Н. В. Ефимовым [2] на примере параболоида $z = x^9 + \lambda x^6 y^3 + y^9$, λ – любое трансцендентное число. Более того, Н. В. Ефимов установил, что если при некотором n найдется

конкретная жесткая форма $z_0^{(n)}$, то тогда почти все формы $z^{(n)}(x, y)$ оказываются жесткими. Соответствующие им поверхности (1) будут обладать свойством жесткости “в малом” в классе аналитических б.м. изгибаний.

Возможно, что поверхности Ефимова жестки даже в классе C^∞ – бесконечно дифференцируемых функций, однако проверить это предположение пока не удалось. Причина в том, что заметные продвижения в изучении деформаций поверхностей с отмеченной точкой уплощения требуют существенных успехов в развитии теории дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

В настоящей статье высказанное предположение доказывается лишь для определенного подмножества поверхностей, которые будем обозначать через S_E . Именно, справедлива

ТЕОРЕМА. *Поверхности Ефимова S_E положительной гауссовой кривизны с изолированной точкой уплощения жестки “в малом” в классе C^∞ .*

Здесь, разумеется, речь идет о положительности кривизны вокруг точки уплощения, поскольку в ней самой гауссова кривизна равна нулю. Более того, в этой точке коэффициенты 2-й квадратичной формы обращаются в нуль и поверхность со своей касательной плоскостью имеет порядок прикосновения больше единицы. Отметим также, что анонсируемый в теореме факт реализации C^∞ -жесткости сам по себе не является новым: он установлен ранее Н. В. Ефимовым и автором [3], [4] и И. Х. Сабитовым [5] на примере аналитических поверхностей вращения. Новизна – в другом, в распространении этого факта на класс поверхностей, охватывающий, в частности, и поверхности вращения.

Добавим к сказанному, что современное состояние исследований по деформациям поверхностей с точкой уплощения приведен в обзорной работе И. Х. Сабитова [6].

§ 1. Малость изгибающего поля в окрестности точки уплощения

Пусть D – некоторая область плоскости (x, y) , содержащая внутри точку уплощения $(0, 0)$. Поверхность (1) называется *жесткой “в малом”* в классе $C^p(D)$, $p \geq 2$, если для любой окрестности $\sigma \subset D$ точки $(0, 0)$ из условия $\{\xi, \eta, \zeta\} \in C^p(\sigma)$, т.е. p -кратной непрерывной дифференцируемости в σ вектора б.м. изгибаний, следует, что частные производные от вертикальной компоненты $\zeta_{xx} = \zeta_{xy} = \zeta_{yy} = 0$ в σ .

ЛЕММА 1. *Если поверхность Ефимова допускает C^p -регулярное б.м. изгибание, то*

$$\zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy} = O(r^{p-2}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $p \geq 2$ и $r^2 = x^2 + y^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, компонента ζ поля б.м. изгибания удовлетворяет уравнению (см., например, [7]):

$$z_{yy}\zeta_{xx} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{xx}\zeta_{yy} = 0. \quad (4)$$

Разложим ζ в отрезок ряда Тейлора с остаточным членом:

$$\zeta(x, y) = \sum_{m=0}^{p-1} \Phi^{(m)}(x, y) + H(x, y), \quad (5)$$

где

$$\Phi^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^m b_{s,m-s} x^s y^{m-s}, \quad b_{s,m-s} = \frac{\partial^m \zeta(0,0)}{\partial x^s \partial y^{m-s}},$$

$H(x, y) \in C^p$ и $H(0, 0) = 0$. Очевидно, что

$$H_{xx}, H_{xy}, H_{yy} = O(r^{p-2}), \quad r \rightarrow 0. \quad (6)$$

Покажем, что $\Phi^{(m)}(x, y) \equiv 0$, $m = 2, \dots, p-1$. Тогда из (5) и (6) будет следовать (3).

Подставив (1) и (5) в (4), запишем полученное уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & z_{yy}^{(n)} \Phi_{xx}^{(2)} - 2z_{xy}^{(n)} \Phi_{xy}^{(2)} + z_{xx}^{(n)} \Phi_{yy}^{(2)} \\ & + R_{yy} \Phi_{xx}^{(2)} - 2R_{xy} \Phi_{xy}^{(2)} + R_{xx} \Phi_{yy}^{(2)} \\ & + (z_{yy}^{(n)} + R_{yy}) \left(\sum_{m=3}^{p-1} \Phi_{xx}^{(m)} + H_{xx} \right) \\ & - 2(z_{xy}^{(n)} + R_{xy}) \left(\sum_{m=3}^{p-1} \Phi_{xy}^{(m)} + H_{xy} \right) \\ & + (z_{xx}^{(n)} + R_{xx}) \left(\sum_{m=3}^{p-1} \Phi_{yy}^{(m)} + H_{yy} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первые три слагаемые этого уравнения, с одной стороны, и все прочие слагаемые, с другой стороны, имеют различные порядки малости при $r \rightarrow 0$. По этой причине имеем

$$z_{yy}^{(n)} \Phi_{xx}^{(2)} - 2z_{xy}^{(n)} \Phi_{xy}^{(2)} + z_{xx}^{(n)} \Phi_{yy}^{(2)} = 0,$$

что совпадает с (2) при $m=2$. Поскольку форма $z^{(n)}(x, y)$ жесткая, то $\Phi^{(2)}(x, y) \equiv 0$.

Подставляя $\Phi^{(2)} = 0$ в (7), мы можем вновь полученному уравнению придать прежний вид с той лишь разницей, что вместо $\Phi^{(2)}$ будет фигурировать $\Phi^{(3)}$, а суммирование под знаками сумм будет начинаться с $m = 4$. Повторяя те же самые рассуждения, что и ранее, получим $\Phi^{(3)} \equiv 0$. И далее, аналогично, $\Phi^{(m)} \equiv 0$, $m = 4, \dots, p-1$. Лемма 1 доказана.

§ 2. Сопряженно изометрическая параметризация поверхности S_E в окрестности точки уплощения

Известно, что задача о построении сопряженно изометрических координат (u, v) на поверхностях положительной кривизны сводится к поиску специальных, так называемых *гомеоморфных решений* уравнения Бельтрами [8]:

$$\partial_{\bar{\theta}} w - q(\theta) \partial_{\theta} w = 0, \quad (8)$$

где $\theta = x + iy = r e^{i\varphi}$ ($i^2 = -1$) – исходные координаты, $w = u + iv = \rho e^{i\psi}$ – искомые координаты поверхности,

$$2\partial_{\bar{\theta}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y},$$

и коэффициент $q(\theta)$ для поверхностей вида $z = z(x, y)$ определяется равенством

$$q(\theta) = \frac{z_{xx} - z_{yy} + 2iz_{xy}}{z_{xx} + z_{yy} + 2\sqrt{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}}. \quad (9)$$

Гомеоморфные решения устанавливают взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между областью D плоскости $\theta = x + iy$ и областью $D_w = w(D)$ плоскости $w = u + iv$.

Перейдем к построению искомых координат на поверхности S_E , представленной уравнением (1). Однородную форму $z^{(n)}(x, y)$ в дальнейшем будем записывать в полярных координатах (r, φ) , так что

$$z^{(n)}(x, y) \equiv r^n f(\varphi),$$

где $f(\varphi) = \sum_{s=0}^n a_{s, n-s} (\cos \varphi)^s (\sin \varphi)^{n-s}$.

Подставив (1) в (9), получим

$$q(\theta) = q_0(\varphi)e^{2i\varphi} + q^*(\theta). \quad (10)$$

Здесь

$$q_0(\varphi) = \frac{n(n-2)f - f'' + 2i(n-1)f'}{n^2f + f'' + 2\sqrt{\Delta}},$$

$$\Delta = (n-1)(n^2f^2 + nff'' - (n-1)(f')^2),$$

а штрихами над $f(\varphi)$ обозначены производные по φ . Кроме того, вследствие положительности кривизны поверхности S_E вне $x = y = 0$ имеем $\Delta > 0$ и можем принять $f(\varphi) > 0$.

Явный вид $q^*(\theta)$ не понадобится в дальнейшем. Нам достаточно будет знать, что $q^*(\theta)$ — аналитическая функция по x, y вне точки $(0, 0)$ и $q^*(\theta) = O(r)$, когда $r \rightarrow 0$. Отметим также, что $|q| < 1$ для всех $(x, y) \in D$. Справедливость этого утверждения при $x = y = 0$ проверяется непосредственно, а для остальных значений x, y следует из того, что S_E вне точки уплощения имеет положительную кривизну.

Итак, при изучении вопроса о существовании сопряженно изометрических координат на S_E приходится иметь дело с уравнением Бельтрами, коэффициент которого $q(\theta)$ строго меньше единицы во всей области D , является аналитической функцией по x, y вне $x = y = 0$, а в точке $(0, 0)$ имеет ограниченный разрыв (см. (10)). Согласно Б. В. Боярскому гомеоморфные решения уравнения (8) существуют даже для более широкого класса коэффициентов, а именно, для ограниченных ($|q| < 1$) и измеримых функций [8]. Следовательно, вопрос о существовании сопряженно изометрических координат на S_E решен положительно.

Однако, для наших целей этого недостаточно. В дальнейшем нам потребуется знать дополнительно асимптотическое поведение гомеоморфизма и его частных производных при $r \rightarrow 0$.

Рассмотрим сначала уравнение Бельтрами следующего вида

$$\partial_{\bar{\theta}}\beta - q_0(\varphi)e^{2i\varphi}\partial_{\theta}\beta = 0, \quad \theta \in D, \quad (11)$$

где $q_0(\varphi)$ имеет то же значение, что и в (10). Введем обозначения:

$$\varkappa = \frac{2\pi n(n-1)}{\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\Delta(\theta)}}{f(\theta)} d\theta}$$

и

$$\gamma(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1 - q_0(\theta)}{1 + q_0(\theta)} d\theta = \gamma_1(\varphi) + i\gamma_2(\varphi),$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{n(n-1)} \int_0^\varphi \frac{\sqrt{\Delta(\theta)}}{f(\theta)} d\theta, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{n} \ln f(\varphi).$$

Нетрудно проверить, что уравнение (11) допускает решение

$$\beta = r^\varkappa e^{i\varkappa\gamma(\varphi)}, \quad (12)$$

которое реализует гомеоморфное отображение области D плоскости θ на некоторую область $D_\beta = \beta(D)$ плоскости β , при этом точке $\theta = 0$ соответствует $\beta = 0$. Разрешив (12) относительно θ , получим

$$\theta = |\beta|^{1/\varkappa} e^{\gamma_2(\varphi) + i\varphi}. \quad (13)$$

Произведем в уравнении (8) замену переменных по формуле (12), будем иметь

$$\partial_{\bar{\beta}} w - G(\beta) \partial_\beta w = 0, \quad \beta \in D_\beta, \quad (14)$$

где

$$G(\beta) = \frac{q^*(\theta)}{1 - |q_0(\varphi)|^2 - \overline{q_0(\varphi)} q^*(\theta)} \cdot \frac{1 + \gamma'(\varphi)}{1 + \overline{\gamma'(\varphi)}} e^{2i(\varkappa\gamma_1 - \varphi)}.$$

С помощью (12), (13) и упомянутых ранее свойств $q^*(\theta)$ устанавливаем, что $G(\beta)$ — аналитическая функция по β и $\bar{\beta}$ вне $\beta = 0$ и $G(\beta) = O(|\beta|^{1/\varkappa})$, $\beta \rightarrow 0$. Из последнего следует, что $|G(\beta)| \leq G_0 < 1$ по крайней мере в некоторой окрестности точки $\beta = 0$. Не ограничивая общности, будем считать это неравенство выполненным для $\beta \in D_\beta$.

Основываясь на результатах И. Н. Векуа (см. [8, гл. 2, § 4]), можем убедиться в том, что уравнение (14) имеет гомеоморфное решение $w(\beta)$, аналитическое по β и $\bar{\beta}$ вне $\beta = 0$, с помощью которого область D_β отображается на некоторую область D_w плоскости w , при этом точке $\beta = 0$ соответствует $w = 0$ и

$$w = \beta + O(|\beta|^{1+1/\varkappa}), \quad \partial_\beta w = 1 + O(|\beta|^{1/\varkappa}), \\ \partial_{\bar{\beta}} w = O(|\beta|^{1/\varkappa}), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Рассматривая теперь функцию $w(\beta(\theta))$, где $\beta(\theta)$ задана равенством (12), а $w(\beta)$ — гомеоморфизм уравнения (14), получим следующий результат

ЛЕММА 2. *Уравнение Бельтрами (8), (10) допускает гомеоморфное решение $w = w(\beta(\theta))$, аналитическое по x, y вне $x = y = 0$, посредством которого*

область D отображается на некоторую область $D_w = w(D_\beta)$ плоскости $w = u + iv = \rho e^{i\psi}$, при этом точке $\theta = x + iy = 0$ соответствует $w = 0$ и

$$w = r^\kappa e^{i\kappa\gamma(\varphi)} + O(r^{\kappa+1}),$$

$$\partial_\theta w = \frac{\kappa}{2} r^{\kappa-1} (1 + \gamma'(\varphi)) e^{i(\kappa\gamma(\varphi) - \varphi)} + O(r^\kappa), \quad \theta \rightarrow 0.$$

Обратная функция $\theta = \theta(w)$ является аналитической по u, v вне точки $w = u + iv = 0$, удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{w}}\theta + (q_0(\varphi)e^{2i\varphi} + q^*(\theta))\overline{(\partial_w\theta)} = 0, \quad w \in D_w,$$

и имеют место соотношения

$$\theta = \rho^{1/\kappa} e^{\gamma_2(\varphi) + i\varphi} + O(\rho^{2/\kappa}),$$

$$\partial_w\theta = \frac{\rho^{1/\kappa-1}}{2\kappa} \cdot \frac{1 + \overline{\gamma'}}{\gamma'_1} e^{\gamma_2(\varphi) + i\varphi - i\psi} + O(\rho^{2/\kappa-1}), \quad w \rightarrow 0,$$

причем в правой части переменная $\varphi = \arg \theta$ должна быть выражена через $\psi = \arg w$.

По существу в этой лемме нуждаются в доказательстве лишь асимптотические представления для $w = w(\theta)$, $\theta = \theta(w)$ и их производных. Не останавливаясь на этом, укажем, что в применении к уравнению (8) с коэффициентом $q(\theta)$ вида (10) подходящую схему доказательства можно заимствовать из [9, § 1].

§ 3. Уравнение б.м. изгибаний поверхности S_E в сопряженно изометрических координатах

Известно, что уравнение б.м. изгибаний поверхности положительной кривизны, отнесенной к сопряженно изометрическим координатам $w = u + iv$, записывается в виде

$$\partial_{\bar{w}}U^* + \overline{B(w)}\overline{U^*} = 0, \quad (15)$$

где

$$U^* = K^{1/4}(w)(\delta M + i\delta L)$$

— искомая комплекснозначная функция, выражающаяся через вариации δL , δM , δN ($\delta N = -\delta L$) коэффициентов L , M , N ($L = N$, $M = 0$) второй квадратичной формы, и $K(w)$ — гауссова кривизна поверхности. Коэффициент $B(w)$ определяется по формуле

$$B(w) = -e^{i\Gamma(w)}\partial_{\bar{w}}\left(\operatorname{Arch}\frac{H}{K^{1/2}}\right) - \frac{\partial_w K}{4K}e^{2i\Gamma(w)}, \quad (16)$$

$$e^{i\Gamma(w)} = \frac{a^-(w)\sqrt{K(w)}}{2\sqrt{a(w)\mathfrak{I}(w)}}. \quad (17)$$

Здесь $H(w)$ — средняя кривизна поверхности, $\mathfrak{I}(w) = H^2 - K$ — эйлерова разность, $a(w) = EG - F^2$ — дискриминант, и E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы; $a^-(w) = E - G + 2iF$ (см. [8]).

Воспользуемся уравнением (15) для описания б.м. изгибаний поверхности S_E . С этой целью изучим свойства коэффициента $B(w)$, выявив в нем сингулярность, обусловленную наличием на S_E изолированной точки уплощения.

Подсчитаем геометрические величины, участвующие в определении $B(w)$ по формуле (16). Сначала сделаем это в исходной системе координат $\theta = x + iy$.

$$\begin{aligned} E &= 1 + z_x^2 \equiv 1 + r^{2n-2} E_0, \\ F &= z_x z_y \equiv r^{2n-2} F_0, \\ G &= 1 + z_y^2 \equiv 1 + r^{2n-2} G_0, \\ a(\theta) &= EG - F^2 \equiv 1 + r^{2n-2} a_0(\theta), \\ a^+(\theta) &= E + G \equiv 2 + r^{2n-2} a_0^+(\theta), \\ a^-(\theta) &= E - G + 2iF \equiv r^{2n-2} a_0^-(\theta). \end{aligned}$$

Явный вид выражений $E_0, F_0, G_0, a_0, a^+, a^-$ не понадобится в дальнейшем. Достаточно будет знать, что все они являются аналитическими функциями по x и y вне $\theta = 0$ и ограниченными при $\theta = 0$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} L &= \frac{z_{xx}}{\sqrt{a}} \equiv \frac{r^{n-2}}{\sqrt{a}} \left\{ n((n-1) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) f - (n-1) \sin(2\varphi) f' + \sin^2(\varphi) f'' \right\} + r^{n-1} L_0, \\ M &= \frac{z_{xy}}{\sqrt{a}} \equiv \frac{r^{n-2}}{2\sqrt{a}} \left\{ n(n-2) \sin(2\varphi) f + 2(n-1) \cos(2\varphi) f' - \sin(2\varphi) f'' \right\} + r^{n-1} M_0, \\ N &= \frac{z_{yy}}{\sqrt{a}} \equiv \frac{r^{n-2}}{\sqrt{a}} \left\{ n((n-1) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) f + (n-1) \sin(2\varphi) f' + \cos^2(\varphi) f'' \right\} + r^{n-1} N_0, \\ K(\theta) &= \frac{LN - M^2}{a} \equiv \frac{\Delta}{a^2} r^{2n-4} + r^{2n-3} K_0, \\ H(\theta) &= \frac{LG - 2MF + NE}{2a} \equiv \frac{r^{n-2}}{2a^{3/2}} (n^2 f + f'') + r^{n-1} H_0, \\ \frac{H(\theta)}{\sqrt{K(\theta)}} &= \frac{n^2 f + f''}{2(a\Delta)^{1/2}} + r H_{00}, \\ \mathfrak{D}(\theta) &= H^2 - K \equiv \frac{r^{2n-4}}{4} \left\{ (n(n-2)f - f'')^2 + 4(n-1)^2 (f')^2 \right\} + r^{2n-3} \mathfrak{D}_0, \\ \frac{K(\theta)}{H(\theta)} &= \frac{4\Delta}{(n(n-2)f - f'')^2 + 4(n-1)^2 (f')^2} + r \mathfrak{D}_{00}, \end{aligned}$$

где функции $K_0, H_0, H_{00}, \mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_{00}$ – аналитические по x и y вне $\theta = 0$ и ограниченные при $\theta = 0$. Напомним также, что f и Δ определены в § 2.

Поскольку K и H являются геометрическими скалярами, то их выражения в сопряженно изометрических координатах w получаются из соответствующих выражений в координатах θ по формулам $K(w) = K(\theta(w))$, $H(w) = H(\theta(w))$. В частности, с учетом леммы 2 имеем

$$K(w) = O(|w|^{2(n-2)/\kappa}), \quad w \rightarrow 0. \quad (18)$$

Иначе обстоит дело с величинами $a(\theta)$, $a^+(\theta)$ и $a^-(\theta)$. Их значения существенно зависят от выбора системы координат. Действительно, если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ является

уравнением поверхности в векторном виде, то $a^+(\theta) = 4(\partial_\theta \mathbf{r} \partial_{\bar{\theta}} \mathbf{r})$, $a^-(\theta) = 4(\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{r})^2$, $4a(\theta) = |a^+(\theta)|^2 - |a^-(\theta)|^2$ (см. [8, с. 128, (6.55)]). Из этого следует, что

$$\begin{aligned} a^-(w) &= \overline{a^-(\theta)} (\partial_{\bar{w}} \theta)^2 + 2a^+(\theta) \partial_{\bar{w}} \theta \overline{\partial_w \theta} + a^-(\theta) \overline{(\partial_w \theta)^2}, \\ a(w) &= a(\theta) (|\partial_w \theta|^2 - |\partial_{\bar{w}} \theta|^2)^2. \end{aligned}$$

Теперь мы можем подсчитать функцию $e^{i\Gamma(w)}$. Исходя из (17) и привлекая дополнительно полученные ранее соотношения для $a^-(w)$, $a(w)$, $K(\theta)$, $\mathfrak{Z}(\theta)$ и необходимые асимптотики из леммы 2, получим

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma(w)} &= -\frac{n(n-1)f + \sqrt{\Delta} - i(n-1)f'}{n(n-1)f + \sqrt{\Delta} + i(n-1)f'} \\ &\quad \times \frac{n(n-2)f - f'' + 2i(n-1)f'}{\{(n(n-2)f - f'')^2 + 4(n-1)^2(f')^2\}^{1/2}} (1 + \rho^{1/\varkappa} P(w)) e^{2i\kappa\gamma_1}, \quad (19) \end{aligned}$$

где $P(w)$ – аналитическая функция по w и $\bar{w}$ при $|w| > 0$ и $P(w) = O(1)$, $w \rightarrow 0$. Очевидно также, что $|1 + \rho^{1/\varkappa} P(w)| \equiv 1$.

Изучим еще один сомножитель, входящий в формулу (16):

$$\partial_{\bar{w}} \left(\text{Arch} \frac{H}{K^{1/2}} \right) = (\cdot)_{\bar{\theta}} \overline{\partial_w \theta} + (\cdot)_{\theta} \partial_{\bar{w}} \theta \equiv \{(\cdot)_{\bar{\theta}} - (q_0(\varphi) e^{2i\varphi} + q^*(\theta))(\cdot)_{\theta}\} \partial_w \theta.$$

Подставив сюда выражение для $(H(\theta))/\sqrt{K(\theta)}$ и воспользовавшись леммой 2, получим

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{w}} \left(\text{Arch} \frac{H}{K^{1/2}} \right) &= \frac{in(n-1)f(\varphi)}{2\kappa r^\kappa} e^{i\kappa\bar{\gamma}} \left(\frac{n^2 f + f''}{\sqrt{\Delta}} \right)'_{\varphi} \\ &\quad \times \left((n(n-2)f - f'')^2 + 4(n-1)^2(f')^2 \right)^{-1/2} + r^{1-\kappa} Q_0(w). \quad (20) \end{aligned}$$

Здесь $Q_0(w)$ – аналитическая функция по w и $\bar{w}$ вне $w = 0$ и $Q_0(w) = O(1)$, $w \rightarrow 0$. Отметим также, что переменные r и φ следует рассматривать как неявные функции от w .

И наконец, обратимся к отношению $(\partial_w K)/(4K)$, которое необходимо для подсчета $B(w)$:

$$\frac{\partial_w K}{4K} = \frac{1}{4K} (K_{\theta} \partial_w \theta + K_{\bar{\theta}} \overline{\partial_w \theta}) \equiv \frac{1}{4K} [(K_{\theta} - (q_0 e^{-2i\varphi} + \bar{q}^*) K_{\bar{\theta}}) \partial_w \theta].$$

Подставив значение $K(\theta)$ и воспользовавшись леммой 2, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial_w K}{4K} &= \frac{(n(n-1)f + \sqrt{\Delta} + i(n-1)f')^2}{2\sqrt{\Delta} (n^2 f + f'' + 2\sqrt{\Delta})} \\ &\quad \times \left(2(n-2) \frac{\sqrt{\Delta} - i(n-1)f'}{n(n-1)f} - i \frac{\Delta'}{\Delta} \right) \frac{r^{-\kappa} e^{-i\kappa\gamma}}{2\kappa} + r^{1-\kappa} Q_{00}(w), \quad (21) \end{aligned}$$

где $Q_{00}(w)$ обладает теми же свойствами, что и $Q_0(w)$. Отметим, что в формулах (19)–(21) переменные r и φ следует рассматривать как неявные функции от w .

Теперь мы располагаем необходимыми данными для описания свойств коэффициента $B(w)$. Поскольку в каждом слагаемом формулы (16) сомножители являются аналитическими по w и $\bar{w}$ функциями вне $w = 0$, то таковым будет и $B(w)$. Кроме того, с помощью формул (19)–(21) устанавливается поведение $B(w)$ в точке $w = 0$:

$$B(w) = \frac{e^{(3i\gamma_1 + \gamma_2)\varkappa}}{2\varkappa r^\varkappa} b^*(w),$$

$$b^*(w) = b_0(\varphi) + O(|w|^{1/\varkappa}), \quad w \rightarrow 0,$$

где $b_0(\varphi)$ – непрерывная периодическая функция с периодом 2π . В настоящей статье нам не потребуется точное выражение для $b(\varphi)$. И тем не менее, несмотря на громоздкость, здесь оно будет выписано (поскольку в перспективе оно может иметь важное значение для построения теории соответствующего дифференциального уравнения):

$$b_0(\varphi) = n(n-1)f \frac{c(\varphi)d(\varphi)}{c(\varphi)\overline{|d(\varphi)|^2}} \times \left\{ i \left(\frac{n^2 f + f''}{\sqrt{\Delta}} \right)'_{\varphi} - \left(2(n-2) \frac{\sqrt{\Delta} + i(n-1)f'}{n(n-1)f} - i \frac{\Delta'_{\varphi}}{\Delta} \right) \frac{c(\varphi)d(\varphi)}{4\sqrt{\Delta}c(\varphi)} \right\},$$

где

$$c(\varphi) = n(n-1)f + \sqrt{\Delta} - i(n-1)f',$$

$$d(\varphi) = n(n-2)f - f'' - 2i(n-1)f'.$$

Далее, в соответствии с леммой 2, имеем

$$\left(\frac{w}{\bar{w}} \right)^2 \frac{1}{w} = r^{-\varkappa} e^{(\gamma_2 + 3i\gamma_1)\varkappa} + O(r^{\varkappa+1}), \quad r \rightarrow 0.$$

Следовательно, коэффициент $B(w)$ можно преобразовать к виду

$$B(w) = \left(\frac{w}{\bar{w}} \right)^2 \frac{\overline{b(w)}}{2\varkappa w}, \quad (22)$$

где $b(w)$ – аналитическая функция по w и $\bar{w}$ вне $w = 0$, удовлетворяющая так же, как и $b^*(w)$, условию

$$\overline{b(w)} = b_0(\varphi) + O(|w|^{1/\varkappa}), \quad w \rightarrow 0.$$

С учетом (22) уравнение (15) принимает следующий вид:

$$\partial_{\bar{w}} U + \frac{b(w)}{2\varkappa \bar{w}} \bar{U} = 0, \quad w \in D_w, \quad (23)$$

где

$$U = w^2 U^* \equiv w^2 K^{1/4}(w) (\delta M(w) + i\delta L(w)). \quad (24)$$

В заключение §3 полезно упомянуть, что при $f(\varphi) \equiv 1$ имеем

$$b_0(\varphi) \equiv -\frac{n-2}{2}, \quad \varkappa = \sqrt{n-1}.$$

Поэтому

$$\frac{b(0)}{\varkappa} = \frac{\overline{b_0(\varphi)}}{\varkappa} = -\frac{n-2}{2\sqrt{n-1}}.$$

Именно такой результат был получен в статье [9] для модельной поверхности $z = r^n$, $n > 2$.

§4. Малость функции $U(w)$ в окрестности точки $w = 0$

Известно, что вариации δL , δM , δN коэффициентов 2-й квадратичной формы поверхности являются компонентами ковариантного тензора второй валентности. Выпишем к примеру одно из трех соотношений, которые устанавливают связь этих вариаций в исходной ($\theta = x + iy$) и сопряженно изометрической ($w = u + iv$) параметризациях поверхности:

$$\delta L(w) = x_u^2 \delta L(\theta) + 2x_u y_u \delta M(\theta) + y_u^2 \delta N(\theta).$$

В свою очередь, из [4] имеем

$$\delta L(\theta) = \zeta_{xx} \sqrt{a}, \quad \delta M(\theta) = \zeta_{xy} \sqrt{a}, \quad \delta N(\theta) = \zeta_{yy} \sqrt{a}, \quad (25)$$

где $\zeta = \zeta(x, y)$, как и в §1, — вертикальная компонента вектора б.м. изгибаний и $a = a(\theta)$ — дискриминант 1-й квадратичной формы поверхности, заданной уравнением (1). Но тогда

$$\frac{\delta L(w)}{\sqrt{a}} = x_u^2 \zeta_{xx} + 2x_u y_u \zeta_{xy} + y_u^2 \zeta_{yy}.$$

Применим эту формулу к C^p -регулярным ($p \geq 2$) б.м. изгибаниям поверхности S_E . Воспользовавшись леммой 1 и соответствующими асимптотиками леммы 2, получим

$$\delta L(w) = O(|w|^{-2+p/\varkappa}), \quad w \rightarrow 0. \quad (26)$$

Таким же свойством обладают $\delta M(w)$ и $\delta N(w)$.

Теперь уже из (24) с учетом (18) будет следовать

$$U(w) = O(|w|^{(n-2+2p)/(2\varkappa)}), \quad w \rightarrow 0.$$

Отметим также, что условие $\zeta \in C^p(D)$, $p \geq 2$, обеспечивает принадлежность $U(w)$ классу $C^{p-2}(D_w \setminus \{0\})$. Более того, в силу эллиптического характера задачи $U(w)$ будет аналитической функцией по w и $\bar{w}$ вне $w = 0$.

§5. Доказательство теоремы

Пусть $U(w)$ — нетривиальное решение уравнения (23), аналитическое по w , $\bar{w}$ в области $D_w \setminus \{0\}$ и удовлетворяющее условию (25). Представим это решение в виде

$$U(w) = \Phi(w) e^{\omega(w)}. \quad (27)$$

В этом соотношении $\Phi(z)$ – аналитическая функция от $w \in D_w$, поведение которой в точке $w = 0$ уточняется через свойства $U(w)$ и $\omega(w)$, причем

$$\omega(w) = \frac{1}{2\pi\kappa} \iint_{D_w} \frac{\mu(w^*)}{w^*(w^* - w)} du^* dv^*,$$

где $w^* = u^* + iv^*$ и

$$\mu(w) = \begin{cases} b(w) \frac{\overline{U(w)}}{U(w)}, & \text{если } U(w) \neq 0, \\ b(w), & \text{если } U(w) = 0. \end{cases}$$

Согласно [8] имеем

$$|\omega| \leq \lambda \ln \frac{1}{|w|} + A.$$

Здесь

$$\lambda = \frac{4}{\kappa} \sup_{D_w} |b(w)|$$

и A – константа, зависящая от n , $f(\varphi)$ и D_w .

Применяя это неравенство к оценке $\Phi(w)$ в формуле (27), получим

$$|\Phi(w)| \leq e^A |w|^\lambda |U(w)|.$$

И наконец, с учетом соотношения (26) функция $\Phi(w)$ должна удовлетворять, по крайней мере, следующему условию малости:

$$\Phi(w) = O(|w|^{\lambda + (n-2+2p)/(2\kappa)}), \quad w \rightarrow 0.$$

Теперь положим, как это требуется в теореме, $p = \infty$, т.е. $\zeta(x, y) \in C^\infty(\sigma)$, где σ , $\sigma \subset D$, – любая окрестность точки $(0, 0)$. В таком случае $\Phi(w)$ в точке $w = 0$ будет иметь нуль бесконечного порядка. Но тогда $\Phi(w) \equiv 0$ в D_w . Следовательно, в силу (27) и $U(w) \equiv 0$. Далее, из (24) будет следовать $\delta L(w) = \delta M(w) = \delta N(w) = 0$, а потому и $\delta L(\theta) = \delta M(\theta) = \delta N(\theta) = 0$, $\theta \in \sigma$. Наконец, из (25) получим $\zeta_{xx} = \zeta_{xy} = \zeta_{yy} = 0$ в σ . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество поверхностей S_E , для которых имеет место жесткость “в малом” в классе C^∞ , может быть заметно расширено за счет изменения требований, налагаемых на $R(x, y)$ в уравнении (1).

Действительно, подчиним $R(x, y)$ следующим условиям:

$$R(x, y) \in C^\infty(D), \quad R_{xx}, R_{xy}, R_{yy} = O(r^{n-1}), \quad r \rightarrow 0. \quad (28)$$

Прочие ограничения (жесткость формы $z^{(n)}(x, y)$ и положительность кривизны поверхности вне точки уплощения) оставим неизменными. Поверхности с такими свойствами обозначим символом $S_E^{(\infty)}$.

Оказывается, что и $S_E^{(\infty)}$ жестки “в малом” в классе C^∞ . Для проверки этого утверждения возвратимся к этапам доказательства теоремы.

Прежде всего отметим, что лемма 1 справедлива и для $S_E^{(\infty)}$, поскольку условия (28) не нарушают схемы ее доказательства, обеспечивая в уравнении (7) при $r \rightarrow 0$ меньший порядок малости первым трем слагаемым по сравнению с другими слагаемыми. Заметим также, что в уравнении (7) участвуют только вторые производные от R . Поэтому, если лемму 1 не нацеливать на доказательство теоремы и рассматривать ее обособленно, то можно воспользоваться даже условием $R \in C^2(D)$. Однако с геометрической точки зрения корректнее требовать, чтобы $R \in C^p(D)$, $p \geq 2$. В таком случае сама поверхность и ее изгибающее поле будут принадлежать одному классу регулярности.

Что касается леммы 2, то приведенные в ее формулировке асимптотические формулы остаются прежними и в условиях (28), и только связь между исходными и сопряженно изометрическими координатами на поверхности будет осуществляться не аналитическими, а бесконечно дифференцируемыми функциями.

Аналогичная ситуация имеет место для искомой функции $U(w)$ и коэффициента $b(w)$ в уравнении (23). Условия (28) не изменяют их асимптотического поведения при $|w| \rightarrow 0$, зато переводят их в класс $C^\infty(D_w \setminus \{0\})$.

Все сказанное поддается несложной проверке. Заключительный этап доказательства теоремы (см. §5) в условиях (28) очевиден, ибо в нем все необходимые подготовительные соотношения имеют место даже при более слабых ограничениях на классы функций $U(w)$ и $b(w)$ в сравнении с теми, которые появляются из геометрической задачи.

Список литературы

1. Берри Р. Я. Об одном целочисленном инварианте бинарных форм четвертой степени // УМН. 1952. Т. 7. №3. С. 125–130.
2. Ефимов Н. В. О жесткости в малом // ДАН СССР. 1948. Т. 60. №5. С. 761–764.
3. Ефимов Н. В., Усманов З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхности с точкой уплощения // ДАН СССР. 1973. Т. 208. №1. С. 28–31.
4. Усманов З. Д. К вопросу о жесткости в малом в классе C^∞ // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №5. С. 643–648.
5. Сабитов И. Х. Исследование жесткости и неизгибаемости аналитических поверхностей вращения с уплощением в полюсе // Вестн. МГУ. Сер. 1, матем., мех. 1986. №5. С. 29–36.
6. Сабитов И. Х. Локальная теория изгибания поверхностей // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1989. С. 196–270.
7. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // УМН. 1948. Т. 3. №2. С. 47–158.
8. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
9. Усманов З. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125). №4 (12). С. 596–615.

Математический институт
АН Республики Таджикистан,
Душанбе

Поступила в редакцию
25.03.1994