Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Усреднение задач теории упругости на периодических составных структурах, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 7, 101–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:41:10

УДК 517.9

С. Е. Пастухова

Усреднение задач теории упругости на периодических составных структурах

Рассмотрены задачи теории упругости на плоской плите, армированной периодической тонкой сеткой, или в трехмерном теле, армированном периодическим тонким ящичным каркасом. Составная среда зависит от двух стремящихся к нулю параметров, контролирующих ячейку периодичности и толщину армирующей структуры. Параметры могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Для указанных задач с помощью метода В. В. Жикова “двухмасштабной сходимости с переменной мерой” получен принцип усреднения: решение исходной задачи сходится в определенном смысле к решению усредненной (или предельной) задачи. Последняя имеет классический вид. Из операторной формы принципа усреднения на основе установленного принципа компактности в L^2 -пространстве на составной структуре выводится также сходимость по Хаусдорфу спектра исходной задачи к спектру предельной задачи.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Обозначим через F сетку на плоскости, составленную из всевозможных прямых $x_i = a$, где a – любое целое число, $i = 1, 2$. Каждая такая прямая является продольной осью полосы, ширина которой равна $h \in (0, 1/2)$. Объединение всех этих полос задает тонкую сетку F^h , $h > 0$. Квадрат $Y = [-1/2, 1/2]^2$ является ячейкой периодичности, $F \cap Y = I_1 \cup I_2$, где I_1, I_2 – единичные интервалы на соответствующих осях. Условимся называть сетку $F = F^0$ толщины $h = 0$ *сингулярной*.

Введем на сетках F^h *естественные* меры: λ^h , $h > 0$, – мера, сосредоточенная на тонкой сетке F^h и пропорциональная там плоской мере Лебега, $\lambda = \lambda^0$ – мера, сосредоточенная на сингулярной сетке F и пропорциональная там линейной мере Лебега. Меры нормированы условием $\int_Y d\lambda^h = \int_Y d\lambda = 1$. По построению

$$d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} dx_1 & \text{на } I_1, \\ \frac{1}{2} dx_2 & \text{на } I_2. \end{cases}$$

Имеет место сходимость мер $\lambda^h \rightarrow \lambda$ при $h \rightarrow 0$, что означает

$$\int_Y \varphi d\lambda^h \rightarrow \int_Y \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00621).

Рассмотрим составные 1-периодические меры μ^h , $\mu = \mu^0$, такие, что

$$d\mu^h = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} d\lambda^h, \quad d\mu = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} d\lambda, \quad \mu^h \rightharpoonup \mu, \quad (1.1)$$

где dx — плоская мера Лебега.

Гомотетическое сжатие плоскости в ε^{-1} раз переводит сетки F^h и F в F_ε^h и F_ε соответственно, при этом возникают масштабированные меры $\mu_\varepsilon^h, \mu_\varepsilon$, для которых

$$\mu_\varepsilon^h(B) = \varepsilon^2 \mu^h(\varepsilon^{-1}B), \quad \mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^2 \mu(\varepsilon^{-1}B),$$

где B — любое борелево множество на плоскости. Очевидно, что

$$d\mu_\varepsilon^h = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} d\lambda_\varepsilon^h, \quad d\mu_\varepsilon = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} d\lambda_\varepsilon,$$

где ε -периодические меры $\lambda_\varepsilon^h, \lambda_\varepsilon$ сосредоточены на сетках F_ε^h и F_ε . Поскольку $\mu_\varepsilon^h(\varepsilon Y) = \mu_\varepsilon(\varepsilon Y) = \varepsilon^2$, то $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx, d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_\varepsilon^h \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

где $h \geq 0, \mu_\varepsilon^0 = \mu_\varepsilon$.

Тензор упругости $A = \{a_{ijsp}\}$ подчинен обычным условиям симметрии $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jis p}$. Действие тензора A на симметрическую матрицу ξ есть симметрическая матрица $A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Предполагаем A положительно определенным: $A\xi \cdot \xi \geq c_0 \xi \cdot \xi$, $c_0 > 0$. Здесь $\xi \cdot \eta = \xi_{ij}\eta_{ij}$ — скалярное произведение матриц. В изотропном случае

$$A\xi = k\xi + k_1(\text{Tr } \xi)I, \quad k > 0, \quad k_1 \geq 0, \\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Tr } \xi = \xi_{11} + \xi_{22}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$, $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$, $u = (u_1, u_2)$. Рассмотрим вариационные задачи на отыскание

$$J^{\varepsilon, h} = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)^2} \int_{\Omega} (Ae(u) \cdot e(u) - 2f \cdot u) d\mu_\varepsilon^h, \quad (1.3)$$

$$J^\varepsilon = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)^2} \int_{\Omega} (Ae(u) \cdot e(u) - 2f \cdot u) d\mu_\varepsilon. \quad (1.4)$$

В задачах (1.3), (1.4) можно заменить инфимум по $C_0^\infty(\Omega)^2$ на минимум по соответствующему соболевскому пространству (см. §§ 4, 6), который достигается на единственных элементах $u^{\varepsilon, h}$ и u^ε , называемых далее *минимизантами*. Это следует из равномерного (по ε и $h \geq 0$) неравенства Корна (доказательство см. в § 9)

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mu_\varepsilon^h \leq C \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad C = \text{const}(\Omega, F). \quad (1.5)$$

Общая теория усреднения вариационных задач [1], [2] дает следующий результат: при $h = \text{const} \geq 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ энергии $J^{\varepsilon, h}$, J^ε и минимизанты $u^{\varepsilon, h}$, u^ε сходятся к энергиям J^h , J и минимизантам u^h , u вариационных задач на отыскание минимума энергии

$$J^h = \min_{u \in H_0^1(\Omega)^2} \int_{\Omega} (A_h^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) - 2f \cdot u) dx, \quad (1.6)$$

$$J = \min_{u \in H_0^1(\Omega)^2} \int_{\Omega} (A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) - 2f \cdot u) dx. \quad (1.7)$$

Усредненные тензоры A_h^{hom} и A^{hom} задаются формулами

$$\begin{aligned} A_h^{\text{hom}} \xi \cdot \xi &= \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2} \int_Y A(\xi + e(u)) \cdot (\xi + e(u)) d\mu^h, \\ A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi &= \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2} \int_Y A(\xi + e(u)) \cdot (\xi + e(u)) d\mu. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Классический характер усредненных задач (1.6), (1.7) определяется тем, что лишь постоянные векторы являются жесткими периодическими перемещениями в пространствах $L^2(Y, d\mu^h)^2$ и $L^2(Y, d\mu)^2$.

В связи с задачами (1.3), (1.4) возникает следующий круг вопросов.

1°. Задача (1.3) зависит через меру от второго параметра h . Актуален вопрос о предельном переходе по параметру $h \rightarrow 0$ до и после усреднения по ε : действительно ли имеют место ожидаемые в соответствии с обозначениями равенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} J^{\varepsilon, h} = J^\varepsilon \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} J^h = J, \quad (1.9)$$

которые делают диаграмму предельных переходов

$$\begin{array}{ccc} J^{\varepsilon, h} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & J^h \\ h \rightarrow 0 \downarrow & & \downarrow h \rightarrow 0 \\ J^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & J \end{array} \quad (1.10)$$

замкнутой и коммутативной. Утвердительный ответ на этот вопрос дается в теореме 6.1.

2°. До сих пор параметры ε , h считались независимыми. Изучим усреднение задачи (1.3) в том случае, когда $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. толщина сетки F^h , равная $h(\varepsilon)$, стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, так что F^h переходит в сингулярную сетку F . Асимптотически сингулярные структуры принято называть *тонкими* [3].

Если в задаче (1.3) вместо меры μ_ε^h взять меру λ_ε^h (т.е. рассматривать вариационную задачу на тонкой сетке), усреднение будет зависеть от того, какова величина $\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)/\varepsilon$: $\theta = 0$, $\theta \in (0, \infty)$, $\theta = \infty$ [3]–[5]. Вид усредненной задачи и тип сходимости минимизантов $u^{\varepsilon, h}$ различаются для трех перечисленных случаев.

Причину этого масштабного эффекта вскрывает неравенство Корна на ε -периодических тонких сетках F_ε^h [5], [6]:

$$\int |u|^2 d\lambda_\varepsilon^h \leq c \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + 1 \right) \int |e(u)|^2 d\lambda_\varepsilon^h, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad (1.11)$$

где c — константа, зависящая лишь от диаметра Ω , а порядки, с которыми входят в правую часть параметры ε и h , точны. Видим, что константа $C = c((\varepsilon/h)^2 + 1)$ в правой части (1.11) может расти к бесконечности. Ограниченность аналогичной константы в неравенстве Корна (1.5) исключает масштабный эффект при усреднении задачи (1.3) с составной мерой $\mu_\varepsilon^{h(\varepsilon)}$, $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Кроме того, для составной меры μ , в отличие от меры λ , множество периодических жестких перемещений исчерпывается постоянными векторами (см. §5). Тогда предельная задача для составных структур не может быть “двухмасштабной”, как для тонких сеток.

Отмеченные выше факторы: отсутствие масштабного эффекта в неравенстве Корна и тривиальность множества периодических жестких перемещений, определяют классический характер принципа усреднения на составных структурах с тонкой составляющей. При любой $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ имеет место (см. теорему 6.2) сильная сходимость в пространстве $L^2(\Omega, dx)^2$ решений исходной задачи (1.3) к решению обычной усредненной задачи (1.7), дополненная сходимостью энергий:

$$u^{\varepsilon, h} \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega)^2, \quad J^{\varepsilon, h} \rightarrow J. \quad (1.12)$$

Вывод соотношений (1.12) использует двухмасштабную сходимость с переменной мерой μ^h , которая изучается в §7. Для того чтобы эта сходимость обладала необходимыми для техники усреднения свойствами, требуется выполнение так называемых аппроксимативных условий для меры μ^h . Их проверка приведена в §5. Первоначально принцип усреднения дается в терминах сильной сходимости в переменном пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, а затем благодаря свойствам этой сходимости (см. §9) делается переход к обычному для классического усреднения соотношению (1.12)₁.

Принцип усреднения допускает операторную форму сильной резольвентной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$. В этом пространстве справедлив также принцип компактности (см. §9). Отсюда (см. §10) выводится сходимость по Хаусдорфу спектра исходной задачи к спектру предельной задачи, а также более точная сходимость собственных чисел и собственных векторов оператора исходной задачи. При этом рассмотрена общая схема (включающая и некоторые другие задачи усреднения) операторов, действующих в переменном гильбертовом пространстве.

3°. Рассматривая уравнение Эйлера для задачи (1.4), мы приходим (см. §4) к классической его форме, которая представляет собой смешанную задачу с условием Дирихле на внешней границе $\partial\Omega$ и с краевым условием типа Вентцеля на каждом звене сетки $F_\varepsilon \cap \Omega$. Аналогично для периодической задачи (1.8)₂ в классической форме уравнения Эйлера появляется краевое условие типа Вентцеля на каждом звене сетки F . Чтобы получить классическую форму уравнения Эйлера для задач (1.4), (1.8)₂, мы проводим предварительную релаксацию минимизируемых функционалов на сингулярной сетке F_ε или F соответственно. Отметим,

что релаксация выпуклых функционалов, заданных в соболевских пространствах скалярных функций с произвольной мерой, рассматривалась и другими авторами (см., например, [2], [7], [8]).

Идея релаксации позволяет вычислить для составной структуры усредненный тензор A^{hom} из (1.8)₂ при произвольном тензоре упругости A . В изотропном случае (см. (1.2))

$$A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \frac{1}{2} k \xi \cdot \xi + \frac{1}{2} k_1 (\text{Tr } \xi)^2 + \frac{1}{4} \widehat{k} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2), \quad \widehat{k} = \frac{k(k + 2k_1)}{k + k_1}. \quad (1.13)$$

Аналогичная методика применялась в [9], [10] при изучении усредненного тензора для периодических сеток.

4°. Мера μ^h абсолютно непрерывна относительно меры Лебега: $d\mu^h = \rho^h(x)dx$ и плотность $\rho^h(x)$ сильно контрастна при $h \rightarrow 0$ (порядка $O(h^{-1})$ на F^h и $O(1)$ вне F^h). В этом смысле мера μ^h описывает плоскость, армированную тонкой сеткой. В трехмерном случае с помощью аналогичной меры μ^h можно описать пространство, армированное тонкой ящичной структурой F^h . Соответствующая сингулярная ящичная структура F составлена из трех семейств плоскостей $x_i = a$, где a – любое целое число, $i = 1, 2, 3$. Для таких трехмерных составных мер задачи (1.3), (1.4) имеют аналогичное усреднение, как в плоском случае.

Заметим, что усреднение сильно контрастных композитов в скалярных и векторных задачах изучалось и ранее, например в работах [11; гл. 7], [12]–[15], но при условии, что ни одна из фаз композита не является тонкой или сингулярной структурой.

5°. В составной структуре на плоскости в качестве армирующей составляющей F может быть не только квадратная сетка, но и составленный из отрезков периодический связный граф достаточно общего вида. Соответствующая тонкая армирующая сетка F^h получается из F заменой каждого отрезка на полосу ширины h . Составная структура с квадратной сеткой выделена особо, потому что для нее обоснование процедуры усреднения существенно проще, чем в общем случае. А именно проверка необходимых для усреднения аппроксимативных свойств меры μ^h может быть проделана для квадратной сетки F более или менее просто – сведением к случаю так называемых мер сглаживания, для которых выполнение аппроксимативных условий – общий факт, установленный В. В. Жиковым [3]. В общем случае проверка аппроксимативных свойств технична и требует введения дополнительных (не используемых в других разделах) понятий и построений и по этой причине отнесена в самый конец статьи, в §11.

6°. Представляют интерес вариационные задачи, аналогичные (1.3), (1.4), когда составная структура наиболее простая, а именно – плита с одиночным стержнем, сингулярным или тонким. Мы изучаем эти задачи в §§2, 3, их скалярные аналоги рассматривались в [16]–[18].

§ 2. Задача на плите с бесконечно тонким стержнем

Вариационная постановка задачи. На квадрате $\Omega = (0, 1) \times (-1/2, 1/2)$ со средней линией $I = (0, 1) \times \{0\}$ введем составную меру

$$\mu = dx|_{\Omega} + d\lambda, \quad d\lambda = dx_1|_I. \quad (2.1)$$

Далее $\mathcal{A}$ – тензор упругости, удовлетворяющий обычным условиям симметрии и положительной определенности. Обозначим через $C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})$ множество функций из $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности $\Gamma = \{0\} \times (-1/2, 1/2)$.

Нас будет интересовать вариационная задача на отыскание

$$J = \inf_{u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2} \int_{\Omega} (\mathcal{A}e(u) \cdot e(u) - 2G \cdot u) d\mu, \quad (2.2)$$

что в более подробной записи означает

$$J = \inf_{u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2} \left(\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx + \int_{\Omega} Be(u) \cdot e(u) d\lambda - 2 \int_{\Omega} f \cdot u dx - 2 \int_{\Omega} g \cdot u d\lambda \right).$$

Здесь тензор упругости $\mathcal{A}$ и функция G представлены парой компонент: $\mathcal{A} = (A, B)$, $G = (f, g)$, одна компонента “действует” на квадрате Ω , а другая – на интервале I ; $G \in L^2(\Omega, d\mu)^2$, т.е. $f \in L^2(\Omega, dx)^2$, $g \in L^2(\Omega, d\lambda)^2$.

Пусть W_{Γ} – замыкание множества $\{(u, e(u)) : u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2\}$ в $L^2(\Omega, d\mu)^2 \times L^2(\Omega, d\mu)^3$. Элементами пространства W_{Γ} служат пары (u, v) , u – вектор, v – матрица. Матрицу v называем *симметрическим градиентом* (или просто *градиентом*) вектора u и обозначаем через $e(u)$. Вектор u может иметь много градиентов. Пусть $\mathcal{E}(u)$ – множество всех градиентов функции u . Его структура такова:

$$\mathcal{E}(u) = e(u) + \mathcal{E}(0),$$

где $e(u)$ – какой-то фиксированный градиент, а $\mathcal{E}(0)$ – множество градиентов нуля. По определению $z \in \mathcal{E}(0)$, если существует последовательность $\varphi^n \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2$ такая, что

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu)^2, \quad e(\varphi^n) \rightarrow z \text{ в } L^2(\Omega, d\mu)^3. \quad (2.3)$$

Нетривиальность градиента нуля $z \neq 0$ проявляется только на I , где согласно [3] $z|_I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, α, β – произвольные функции из $L^2(I)$.

Ясно, что $\mathcal{E}(0)$ – замкнутое пространство в $L^2(\Omega, d\mu)^3$. Определим множество тангенциальных матриц как ортогональное в $L^2(\Omega, d\mu)^3$ дополнение $\mathcal{E}(0)^{\perp}$.

Из общего результата [3; лемма 5.1] о том, что свойство тангенциальности можно определить поточечно, для нашего случая вытекает

ЛЕММА 2.1. *Симметрическая матрица $z \in L^2(\Omega, d\mu)^3$ тангенциальна $\iff z|_I = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in L^2(I)$.*

Любой градиент $e(u)$ допускает единственное представление в виде суммы градиента нуля и тангенциальной матрицы

$$e(u) = e^t(u) + z, \quad z \in \mathcal{E}(0), \quad e^t(u) \perp \mathcal{E}(0). \quad (2.4)$$

Компоненту $e^t(u)$ назовем *тангенциальным градиентом* функции u . Структура множества $\mathcal{E}(0)$ определяет структуру тангенциального градиента

$$e^t(u) = e(u) \text{ вне } I, \quad e^t(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ на } I.$$

Пусть $\mathcal{H}(\Omega, d\mu) = \{u : (u, v) \in W_\Gamma\}$. Можно дать описание этого пространства в терминах обычных соболевских пространств.

Формально следуя определению, элемент из $\mathcal{H}(\Omega, d\mu)$ надо представлять парой вектор-функций $u, u|_I$, определенных в области Ω и на интервале I соответственно, таких, что найдется $u^\delta \in C^\infty(\bar{\Omega})^2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|u - u^\delta|^2 + |e(u) - e(u^\delta)|^2) dx &\rightarrow 0, \\ \int_{\Omega} (|u|_I - u^\delta|^2 + |e(u|_I) - e(u^\delta)|^2) d\lambda &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из обычного неравенства Корна

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (|v|^2 + |e(v)|^2) dx, \quad v \in C^\infty(\bar{\Omega})^2,$$

и неравенства для следа

$$\int_I \varphi(x_1, 0)^2 dx_1 \leq C \int_{\Omega} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})^2,$$

получаем свойства вектор-функций $u, u|_I$:

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega)^2, \\ u|_I, u_2|_I &- \text{следы функций } u_1, u_2 \in H^1(\Omega) \text{ на } I, \\ u|_I &\in H^1(I). \end{aligned}$$

Третье свойство обеспечено соотношениями: $u_1^\delta \rightarrow u_1$, $\frac{\partial u_1^\delta}{\partial x_1} = e_{11}(u^\delta) \rightarrow e_{11}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ в $L^2(I)$, которые следуют из определяющих вектор u сходимостей с учетом второго свойства.

Видим, что последовательность u^δ порождает, на самом деле, одну вектор-функцию $u \in H^1(\Omega)^2$, у которой след на отрезок I имеет продольную компоненту повышенной гладкости.

Вернемся к задаче (2.2). Ее можно сформулировать как задачу на отыскание минимума энергии:

$$J = \min_{(u, e(u)) \in W_\Gamma} \int_{\Omega} (\mathcal{A}e(u) \cdot e(u) - 2G \cdot u) d\mu \quad (2.5)$$

или, в более подробной записи,

$$J = \min_{(u, e(u)) \in W_\Gamma} \left(\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx + \int_{\Omega} Be(u) \cdot e(u) d\lambda - 2 \int_{\Omega} f \cdot u dx - 2 \int_{\Omega} g \cdot u d\lambda \right).$$

Минимизант задачи (2.5) – пара, состоящая из функции u и какого-то ее градиента $e(u)$. Эта пара удовлетворяет интегральному тождеству (обобщенному уравнению Эйлера):

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}e(u) \cdot e(\varphi) d\mu = \int_{\Omega} G \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2 \quad (2.6)$$

или, в более подробной записи,

$$\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(\varphi) dx + \int_{\Omega} Be(u) \cdot e(\varphi) d\lambda = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} g \cdot \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2.$$

Существование и единственность решения задачи (2.6) доказывается с помощью следующего неравенства Корна:

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mu \leq c \int_{\Omega} |e(u)|^2 d\mu, \quad u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2. \quad (2.7)$$

В более подробной записи (2.7) означает, что

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_I |u|^2 dx_1 \leq c \left(\int_{\Omega} |e(u)|^2 dx + \int_I |e(u)|^2 dx_1 \right), \quad u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2,$$

и потому вытекает из неравенства для следа функции и обычного неравенства Корна

$$\int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \leq c \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega})^2. \quad (2.8)$$

В силу (2.7) левая часть тождества (2.6) задает скалярное произведение в пространстве W_{Γ} , соответствующую норму назовем *энергетической*. Правая часть (2.6) есть линейный функционал, ограниченный по энергетической норме. Тогда однозначная разрешимость задачи (2.6) следует из теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. При этом единственность решения здесь двоякого рода: одна функция u и один ее градиент $e(u)$ удовлетворяют тождеству (2.6). Заметим, что в энергетической норме участвует лишь вторая компонента пары $(u, e(u)) \in W_{\Gamma}$. Неравенство Корна (2.7) показывает, что по второй компоненте первая определяется однозначно.

Обратим внимание на то, что градиент $e(u)$, участвующий в тождестве (2.6), удовлетворяет условию

$$\mathcal{A}e(u) \perp \mathcal{E}(0), \quad (2.9)$$

которое зависит лишь от тензора $\mathcal{A}$, точнее от его компоненты $\mathcal{A}|_I = B$. Чтобы убедиться в этом, надо подставить в (2.6) пробные функции $\varphi = \varphi^n$ из (2.3) и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Соотношение (2.9) означает: $p = \mathcal{A}e(u)$ – тангенциальная матрица, т.е. на отрезке I $p = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Удобнее иметь дело с таким решением задачи (2.6), когда сам градиент $e(u)$, а не тензор $\mathcal{A}e(u)$, является тангенциальной матрицей, т.е.

$$e(u) = e^t(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на отрезке } I.$$

Изменим тензор $\mathcal{A}|_I = B$ так, чтобы задача (2.5) с измененным тензором имела бы в качестве решения пару $(u, e^t(u))$ с той же функцией u . Эта процедура называется *релаксацией*.

Тензор релаксации. Пусть B – положительно определенный симметрический оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^3$ симметрических матриц

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix},$$

и $\mathcal{E} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi_{11} = 0\}$.

По определению релаксация $\widehat{B}$ относительно пространства $\mathcal{E}$ задается соотношением

$$\widehat{B}\xi \cdot \xi = \min_{\zeta \in \mathcal{E}} B(\xi + \zeta) \cdot (\xi + \zeta). \quad (2.10)$$

Минимум в этой вариационной задаче достигается на элементе

$$\zeta \in \mathcal{E}, \quad B(\xi + \zeta) \perp \mathcal{E}. \quad (2.11)$$

Из (2.11)₂ следует равенство $B(\xi + \zeta) = c\eta$, $c = \text{const}$, $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому $\xi + \zeta = cB^{-1}\eta$, $\xi \cdot \eta = cB^{-1}\eta \cdot \eta$ в силу (2.11)₁ и, значит, $c = \xi \cdot \eta / (B^{-1}\eta \cdot \eta)$. Отсюда

$$\widehat{B}\xi \cdot \xi = B(\xi + \zeta) \cdot \xi = c\eta \cdot \xi = \frac{|\xi \cdot \eta|^2}{B^{-1}\eta \cdot \eta} = b\xi_{11}^2, \quad \text{где } b = (B^{-1}\eta \cdot \eta)^{-1}. \quad (2.12)$$

Для изотропного тензора B (см. (1.2)) несложные вычисления дают значение $b = \widehat{k} = k(k + 2k_1)/(k + k_1)$.

Перечислим некоторые свойства тензора релаксации $\widehat{B}$, вытекающие из определения (2.10):

$$\begin{aligned} \text{Ker } \widehat{B} &= \mathcal{E}, \\ \mathcal{E}^\perp &\text{ — область значений тензора } \widehat{B}, \\ B\xi &= \widehat{B}\xi, \quad \text{если } B\xi \in \mathcal{E}^\perp. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Релаксация исходной задачи и классическая форма уравнения Эйлера. Вернемся к задаче (2.5). В силу представления (2.4) для произвольного градиента $e(u)$

$$\begin{aligned} J &= \min_{(u, z)} \left(\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx + \int_{\Omega} B(e^t(u) + z) \cdot (e^t(u) + z) d\lambda - 2 \int_{\Omega} G \cdot u d\mu \right), \\ u &\in \mathcal{H}(u, d\mu), \quad z \in \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

Напомним (см. лемму 2.1), что ортогональность между множеством градиентов нуля и тангенциальными матрицами можно понимать как в смысле $L^2(\Omega, d\mu)^3$, так поточечно μ -п.в. Тогда, используя определение тензора релаксации $\widehat{B}$ и формулу (2.12), можем найти

$$\min_{z \in \mathcal{E}(0)} \int_{\Omega} B(e^t(u) + z) \cdot (e^t(u) + z) d\lambda = \int_{\Omega} \widehat{B}e^t(u) \cdot e^t(u) d\lambda = \int_I b \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1$$

и, значит,

$$J = \min_{u \in \mathcal{H}(\Omega, d\mu)} \left(\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(u) dx + b \int_I \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 - 2 \int_{\Omega} G \cdot u d\mu \right).$$

Тогда тождество Эйлера для минимизанта u имеет вид

$$\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(\varphi) dx + b \int_I \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 = \int_{\Omega} G \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\Gamma}^{\infty}(\bar{\Omega})^2. \quad (2.14)$$

Отсюда можно получить классическую форму уравнения Эйлера. Для достаточно гладкой функции u по формуле Грина–Бетти имеем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(\varphi) dx &= \int_{\Omega \setminus I} Ae(u) \cdot e(\varphi) dx \\ &= - \int_I Ae(u) e_2|_{-}^{+} \cdot \varphi dx_1 - \int_{\Omega \setminus I} (\operatorname{div} Ae(u)) \cdot \varphi dx + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} Ae(u) n \cdot \varphi d\sigma, \end{aligned}$$

где n – внешняя единичная нормаль на $\partial\Omega$, $v|_{-}^{+}$ – разность предельных значений $v|_I$ со стороны верхней и нижней полуплоскостей.

Из интегрального тождества (2.14) после интегрирования по частям на отрезке I получаем равенство

$$\int_{\Omega} Ae(u) \cdot e(\varphi) dx = b \int_I \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \varphi_1 dx_1 - b \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \varphi_1|_M + \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx + \int_I g \cdot \varphi dx_1,$$

где M – точка с координатами $(1, 0)$.

Сравнивая правые части последних двух равенств, в силу произвольности φ выводим соотношения, которым решение u удовлетворяет в области Ω , на отрезке I и в их граничных точках:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} Ae(u) &= f \quad \text{в } \Omega \setminus I, \\ -b \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} e_1 &= Ae(u) e_2|_{-}^{+} + g \quad \text{на } I, \quad Ae(u) n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus (\Gamma \cup M), \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_M = 0. \end{aligned}$$

Получили смешанную задачу в области $\Omega \setminus I$ с краевым условием типа Вентцеля на внутренней границе I и краевым условием типа Дирихле и Неймана на внешней границе $\partial\Omega$.

Пример более сложной составной структуры. Рассмотрим плиту $\Omega = (0, 1) \times (-1/2, 1/2)$ с двумя стержнями I_1, I_2 , где $I_1 = (0, 1) \times \{0\}$, $I_2 = \{1/2\} \times (-1/2, 1/2)$, и пусть мера λ , сосредоточенная на “кресте” $I_1 \cup I_2$, задана соотношением: $d\lambda = dx_1$ на I_1 , $d\lambda = dx_2$ на I_2 .

Для задачи (2.2) с такой мерой λ классическая форма уравнения Эйлера имеет вид следующей смешанной задачи:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} Ae(u) &= f \quad \text{в } \Omega \setminus (I_1 \cup I_2), \\ -b_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} e_1 &= Ae(u)e_2|_{-}^{+} + g \quad \text{на } I_1 \setminus O, \\ -b_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} e_2 &= Ae(u)e_1|_{-}^{+} + g \quad \text{на } I_2 \setminus O, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{I_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{I_2} &\text{ непрерывны в точке } O, \\ Ae(u)n &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus (\Gamma \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3), \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{M_1} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{M_2 \cup M_3} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $b_i = (B^{-1}\eta_i \cdot \eta_i)^{-1}$, $\eta_i = e_i \times e_i$, $i = 1, 2$; $O = I_1 \cap I_2$, а точки M_1, M_2, M_3 имеют координаты $(0, 1)$, $(1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$ соответственно.

§ 3. Задача на плите с тонким стержнем

На квадрате $\Omega = (0, 1) \times (-1/2, 1/2)$ с выделенной полосой $I^h = (0, 1) \times (-h/2, h/2)$ введем меру

$$d\mu^h = dx|_{\Omega} + d\lambda^h, \quad \text{где } d\lambda^h = \frac{1}{h} dx|_{I^h}.$$

Имеется слабая сходимость мер $\lambda^h \rightharpoonup \lambda$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$ (λ, μ определены в (2.1)), что означает, например: $\int_{\Omega} \varphi d\lambda^h \rightarrow \int_{\Omega} \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega)$.

Определим пространство $V = \{u \in H^1(\Omega)^2 : u|_{x_1=0} = 0\}$, в котором плотно множество функций $C_{\Gamma}^{\infty}(\bar{\Omega})^2$ из § 2, и рассмотрим задачу на отыскание энергии

$$J^h = \min_{u \in V} \int_{\Omega} (\mathcal{A}^h e(u) \cdot e(u) - 2G^h \cdot u) d\mu^h. \quad (3.1)$$

Здесь тензор упругости $\mathcal{A}^h$ и вектор-функция G^h представлены парой компонент

$$\mathcal{A}^h = (A, B), \quad G^h = (f^h, g^h),$$

первая из них “действует” в квадрате Ω , вторая – на полосе I^h , $f^h \in L^2(\Omega, dx)^2$, $g^h \in L^2(\Omega, d\lambda^h)^2$. По определению

$$\int_{\Omega} G^h \cdot u d\mu^h = \int_{\Omega} f^h \cdot u dx + \int_{\Omega} g^h \cdot u d\lambda^h.$$

Предполагаем, что тензоры A, B – те же, что в §2, вектор g^h имеет продольное направление, т.е.

$$g^h = (g_1^h, 0), \quad (3.2)$$

и пусть

$$G^h \rightharpoonup G \text{ в } L^2(\Omega, d\mu^h)^2. \quad (3.3)$$

Сходимость (3.3) эквивалентна тому, что

$$f^h \rightharpoonup f \text{ в } L^2(\Omega, dx)^2, \quad g^h \rightharpoonup g \text{ в } L^2(\Omega^h, d\lambda^h)^2.$$

Здесь возникает слабая сходимость в “переменном” пространстве $L^2(\Omega, d\lambda^h)$. Напомним [19], [20], что последовательность $v^h \in L^2(\Omega, d\lambda^h)$ называется *ограниченной*, если

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^h|^2 d\lambda^h < \infty,$$

и *слабо сходящейся*, если она ограничена и найдется элемент $v \in L^2(\Omega, d\lambda)$ такой, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^h \varphi d\lambda^h = \int_{\Omega} v \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Выполнено следующее свойство: из ограниченной в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$ последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$.

Сильная сходимость $v^h \rightarrow v \in L^2(\Omega, d\lambda)$ в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$ означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^h g^h d\lambda^h = \int_{\Omega} v g d\lambda,$$

как только $g^h \rightharpoonup g$ в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$.

Вернемся к задаче (3.1). Ее минимизант удовлетворяет интегральному тождеству

$$u^h \in V, \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}^h e(u^h) \cdot e(\varphi) d\mu^h = \int_{\Omega} G^h \cdot \varphi d\mu^h \quad \forall \varphi \in V, \quad (3.4)$$

что в более детальной записи означает:

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} e(u^h) \cdot e(\varphi) dx + \int_{\Omega} B e(u^h) \cdot e(\varphi) d\lambda^h = \int_{\Omega} f^h \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} g^h \cdot \varphi d\lambda^h \quad \forall \varphi \in V.$$

Поскольку в задаче (3.4) мера $d\mu^h$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, проблем с существованием и единственностью решения нет.

Изучим задачу (3.1) при $h \rightarrow 0$. Покажем, что предельной для нее является задача (2.5).

Сначала из интегрального тождества (3.4), учитывая (3.2), (2.8), а также неравенство Фридрихса на полосе I^h :

$$\int_{I^h} \varphi_1^2 dx \leq \int_{I^h} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_{I^h} |e_{11}(\varphi)|^2 dx, \quad \varphi \in V,$$

проверяем условие ограниченности для ее решения:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|u^h|^2 + |\nabla u^h|^2) dx < \infty, \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|u_1^h|^2 + |e(u^h)|)^2 d\lambda^h < \infty. \quad (3.5)$$

Благодаря (3.5)₁ можно считать, что

$$u^h \rightharpoonup u \text{ в } H^1(\Omega)^2, \quad (3.6)$$

поэтому

$$u \in V, \quad e(u^h) \rightharpoonup e(u) \text{ в } L^2(\Omega)^3. \quad (3.7)$$

Тогда после перехода к пределу в (3.4) получим

$$v \in V, \quad \int_{\Omega} A e(u) \cdot e(\varphi) dx + \lim_{h \rightarrow 0} \int_{I^h} B e(u^h) \cdot e(\varphi) d\lambda^h = \int_{\Omega} G \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in V. \quad (3.8)$$

Изучим второе слагаемое в (3.8). В силу (3.5)₂

$$(u_1^h, 0), \quad e(u^h) \text{ ограничены в } L^2(\Omega, \lambda^h), \quad (3.9)$$

поэтому (переходя к подпоследовательности) можно считать, что

$$\begin{aligned} (u_1^h, 0) &\rightharpoonup \tilde{u} \in L^2(\Omega, d\lambda)^2 \text{ в } L^2(\Omega, d\lambda^h)^2, \\ e(u^h) &\rightharpoonup z \in L^2(\Omega, d\lambda)^3 \text{ в } L(\Omega, d\lambda^h)^3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Полезны следующие две леммы, доказательство которых пока отложим.

ЛЕММА 3.1. Пусть последовательность вектор-функций u^h удовлетворяет соотношениям (3.9), (3.10). Тогда

- (i) $\tilde{u}_1 \in H^1(I)$;
- (ii) $z = e(\tilde{u})$ в смысле пространства $\mathcal{H}(\Omega, d\lambda)$, т.е.

$$z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in L^2(\Omega, d\lambda). \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3.2. Если $v^h \rightharpoonup v$ в $H^1(\Omega)$, то $v^h \rightharpoonup v|_I$ в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$, где $v|_I$ — след функции $v \in H^1(\Omega)$.

Согласно лемме 3.2 можно отождествить предельную функцию $\tilde{u}_1$ из (3.10) и след $u_1|_I$ функции $u_1 \in H^1(\Omega)$ из (3.6). Поэтому в силу (3.10), (3.11) второе слагаемое из (3.8) равно $\int_I B e(\tilde{u}) \cdot e(\varphi) d\lambda$, где

$$\begin{aligned} e(\tilde{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = e^t(u) + g, \\ e^t(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

и тождество (3.8) имеет вид

$$\int_{\Omega} A e(u) \cdot e(\varphi) dx + \int_I B(e^t(u) + g) \cdot e(\varphi) d\lambda = \int_{\Omega} G \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in V. \quad (3.13)$$

Подставив в тождество (3.13) функции $\varphi = \varphi^n$, реализующие произвольный градиент нуля $p \in \mathcal{E}(0)$, такие, что $\varphi^n \rightarrow 0$, $e(\varphi^n) \rightarrow p$ в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$, в пределе получим равенство

$$\int_I B(e^t(u) + g) \cdot p d\lambda = 0 \quad \forall p \in \mathcal{E}(0),$$

которое влечет тангенциальность матрицы $B(e^t(u) + g)$, т.е. $B(e^t(u) + g) \in \mathcal{E}(0)^\perp$.

Отсюда по лемме 2.1 получаем равенство

$$B(e^t(u) + g) \cdot p = 0 \quad \forall p \in \mathcal{E}(0) \quad \lambda\text{-п.в.}, \quad (3.14)$$

которое есть уравнение Эйлера для минимизанта $g(\xi)$ (где $\xi = e^t(u)$) вариационной задачи, определяющей тензор релаксации $\widehat{B}$. Упростим второе слагаемое в (3.13), используя свойства тензора релаксации $\widehat{B}$. Из (3.14) и свойств (2.13)₃, (2.13)₁ для тензора релаксации $\widehat{B}$ выводим представление

$$B(e^t(u) + g) = \widehat{B}(e^t(u) + g) = \widehat{B}e^t(u).$$

Отсюда, учитывая (2.12), (2.13)₂ и структуру тангенциального градиента $e^t(u)$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \int_I B(e^t(u) + g) \cdot e(\varphi) d\lambda &= \int_I \widehat{B}e^t(u) \cdot e(\varphi) d\lambda = \int_I \widehat{B}e^t(u) \cdot e^t(\varphi) d\lambda \\ &= \int_I b(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} d\lambda. \end{aligned}$$

Тогда тождество (3.13) принимает вид

$$\int_{\Omega} A e(u) \cdot e(\varphi) dx + \int_I b \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} d\lambda = \int_{\Omega} G \cdot \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\Gamma}^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Но это в точности тождество (2.14) для минимизанта задачи (2.5).

Из сделанных замечаний вытекает

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполнены предположения (3.2), (3.3), u, u^h — решения задач (2.6), (3.4). Тогда

$$u^h \rightharpoonup u \quad \text{в } H^1(\Omega)^2, \quad u_1^h \rightharpoonup u_1|_I \quad \text{в } L^2(\Omega, d\lambda^h), \quad (3.15)$$

где $u_1|_I$ — след функции $u_1 \in H^1(\Omega)$.

Можно показать, что если слабую сходимость (3.3) заменить на сильную сходимость в $L^2(Y, d\mu^h)^2$, то будут сходиться энергии $J^h \rightarrow J$ (см. (3.1), (3.2)), а в (3.15) также можно перейти к соответствующим сильным сходимостям. Подробные выводы аналогичных утверждений приводятся далее для более сложных задач (см. §§ 7, 8).

Наконец, докажем леммы 3.1 и 3.2. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если $g^h \rightharpoonup g$ в $L^2(\Omega, d\lambda^h)$, то

$$\bar{g}^h \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} g(x_1, x_2) dx_2 \rightharpoonup g \quad \text{в } L^2(I, dx_1).$$

Несложное доказательство его опускаем.

Согласно (3.10)

$$u_1^h \rightharpoonup u_1, \quad \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \rightharpoonup z_{11} \quad \text{в } L^2(\Omega, d\lambda^h)$$

и, значит, по предложению 3.4 сходятся поперечные средние

$$\bar{u}_1^h \rightharpoonup \bar{u}_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_1^h = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} dx_2 \rightharpoonup z_{11} \quad \text{в } L^2(I, dx_1),$$

откуда следуют все утверждения леммы 3.1.

Лемма 3.2 выводится из классической теоремы о следе функции $v \in H^1(\Omega)$

$$\frac{1}{h} \int_{I^h} v^2 d\lambda^h \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C_{\delta} \int_{\Omega} |v|^2 dx,$$

где константа C_{δ} не зависит от h .

§ 4. Задача на плите с сингулярной сеткой

Рассмотрим плиту с армированием в виде ε -периодической сингулярной сетки. Для простоты пусть это будет квадратная сетка F_{ε} , введенная в §1. Обозначим через $F_{1,\varepsilon}$ ($F_{2,\varepsilon}$) множество всех горизонтальных (вертикальных) прямых из F_{ε} .

Соболевское пространство. По схеме, изложенной в §2, определим для меры μ_{ε} и области Ω пространства W_{ε} , $\mathcal{H}(\Omega, d\mu_{\varepsilon})$, а также множества градиентов $\mathcal{E}(u)$, $\mathcal{E}(0)$ и тангенциальных матриц $\mathcal{E}(0)^{\perp}$. Опуская подробности, выделим некоторые моменты. Например, W_{ε} – замыкание множества $\{(u, e(u)) : u \in C_0^{\infty}(\Omega)^2\}$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon})^2 \times L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon})^3$. Элементами пространства W_{ε} служат пары (u, v) , u – вектор, v – матрица. Матрицу v называем *симметрическим градиентом* (или просто градиентом) вектора u и обозначаем через $e(u)$.

По определению $z \in \mathcal{E}(0)$, если существует последовательность $\varphi^n \in C_0^{\infty}(\Omega)^2$ такая, что

$$\varphi^n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon})^2, \quad e(\varphi^n) \rightarrow z \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon})^3. \quad (4.1)$$

Нетривиальность градиента нуля $z \neq 0$ проявляется только на сетке F_{ε} , причем $z|_{F_{1,\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $z|_{F_{2,\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, где α, β – произвольные функции из $L^2(F_{1,\varepsilon})$ или $L^2(F_{2,\varepsilon})$.

Любой градиент $e(u)$ допускает единственное представление в виде суммы градиента нуля и тангенциальной матрицы

$$e(u) = e^t(u) + z, \quad z \in \mathcal{E}(0), \quad e^t(u) \perp \mathcal{E}(0), \quad (4.2)$$

и компоненту $e^t(u)$ называют *тангенциальным градиентом* функции u . Структура множества $\mathcal{E}(0)$ определяет структуру тангенциального градиента

$$e^t(u) = \begin{cases} e(u) & \text{вне } F_\varepsilon, \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } F_{1,\varepsilon}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} & \text{на } F_{2,\varepsilon}. \end{cases}$$

Можно дать описание пространства $\mathcal{H}(\Omega, d\mu_\varepsilon) = \{u : (u, v) \in W_\varepsilon\}$ в терминах обычных соболевских пространств с лебеговой мерой. Принадлежность функции $u = (u_1, u_2)$ пространству $\mathcal{H}(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ означает, что $u \in H_0^1(\Omega)^2$ и если $u_1|_{F_\varepsilon}, u_2|_{F_\varepsilon}$ — следы функций $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ на сетку F_ε , то $u_i|_{F_{i,\varepsilon}} \in H^1(F_{i,\varepsilon}), i = 1, 2$.

Вернемся к задаче (1.4). Ясно, что $J^\varepsilon = \min_{(u,v) \in W_\varepsilon} \int_\Omega (Av \cdot v - 2f \cdot u) d\mu_\varepsilon$ и минимизант этой задачи — пара, состоящая из функции u^ε и ее градиента $e(u^\varepsilon)$.

Для минимизанта $(u^\varepsilon, e(u^\varepsilon))$ имеем уравнение Эйлера в виде вариационного тождества

$$\int_\Omega Ae(u^\varepsilon) \cdot e(\varphi) d\mu_\varepsilon = \int_\Omega f \cdot \varphi d\mu_\varepsilon \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2. \quad (4.3)$$

Вследствие неравенства Корна (1.5) с $h = 0$ в тождестве (4.3) левая часть задает скалярное произведение в пространстве W_ε , а правая часть — непрерывный функционал по соответствующей норме, называемой энергетической. В энергетической норме участвует только вторая компонента пары $(u, e(u)) \in W_\varepsilon$. Но по второй компоненте пара определяется однозначно (см. (1.5)). Отсюда по теореме Рисса выводим существование и единственность минимизанта задачи (1.4), а также условие ограниченности

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega (|u^\varepsilon|^2 + |e(u^\varepsilon)|^2) d\mu_\varepsilon < \infty. \quad (4.4)$$

Тензор релаксации. Пусть A — положительно определенный симметрический тензор (оператор), действующий в пространстве симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Аналогично, как в §2, введем для него тензор релаксации на структуре F_ε .

По определению на звеньях с направляющим ортом $e_i, i = 1, 2$, тензор релаксации $\hat{A}$ совпадает с тензором $\hat{A}_i$, который определяется соотношением

$$\hat{A}_i \xi \cdot \xi = \min_{\xi \in \mathcal{E}_i} A(\xi + \xi) \cdot (\xi + \xi), \quad \text{где } \mathcal{E}_i = \{\xi : \xi \perp e_i \times e_i\}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\hat{A}_1 \xi \cdot \xi = a_1 \xi_{11}^2, \quad \hat{A}_2 \xi \cdot \xi = a_2 \xi_{22}^2, \quad \text{где } a_i = (A^{-1} \eta_i \cdot \eta_i)^{-1}, \quad \eta_i = e_i \times e_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

В случае изотропного тензора (см. (1.2)) $a_1 = a_2 = \hat{k} = k(k + 2k_1)/(k + k_1)$.

Перечислим некоторые свойства тензора $\hat{A}_i$, вытекающие из его определения: $\text{Ker } \hat{A}_i = \mathcal{E}_i$; $\mathcal{E}_i^\perp$ — область значений $\hat{A}_i$; $A\xi = \hat{A}_i \xi$, если $A\xi \in \mathcal{E}_i^\perp$.

Классическая форма уравнения Эйлера. Тожество (4.3) в более подробной записи означает, что

$$\int_{\Omega} Ae(u^\varepsilon) \cdot e(\varphi) dx + \int_{F_\varepsilon} Ae(u^\varepsilon) \cdot e(\varphi) d\lambda_\varepsilon = 2 \int_{\Omega} f \cdot \varphi d\mu_\varepsilon.$$

Подставив в него $\varphi = \varphi^n$ из (4.1), после перехода к пределу (по n) получим условие

$$Ae(u_\varepsilon) \perp z \quad \forall z \in \mathcal{E}(0).$$

Отсюда, используя разложение (4.2) и свойства тензора релаксации $\widehat{A}$, можно переписать тождество в терминах тангенциального градиента:

$$\int_{\Omega} Ae(u^\varepsilon) \cdot e(\varphi) dx + \int_{F_\varepsilon} \widehat{A}e^t(u^\varepsilon) \cdot e^t(\varphi) d\lambda_\varepsilon = 2 \int_{\Omega} f \cdot \varphi d\mu_\varepsilon, \quad (4.6)$$

что с учетом (4.5) и определения меры λ_ε (см. §1) дает тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Ae(u^\varepsilon) \cdot e(\varphi) dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{F_{1,\varepsilon}} a_1 \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{F_{2,\varepsilon}} a_2 \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 \\ = 2 \int_{\Omega} f \cdot \varphi d\mu_\varepsilon. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям можно получить классическую постановку задачи для u^ε :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} Ae(u^\varepsilon) &= f \quad \text{в } \Omega \setminus F_\varepsilon, \\ -a_1 \frac{\partial^2 u_1^\varepsilon}{\partial x_1^2} e_1 &= \frac{2}{\varepsilon} Ae(u^\varepsilon) e_2|_{-}^{+} + f \quad \text{на } F_{1,\varepsilon} \cap \Omega \quad \text{вне узлов}, \\ -a_2 \frac{\partial^2 u_2^\varepsilon}{\partial x_2^2} e_2 &= \frac{2}{\varepsilon} Ae(u^\varepsilon) e_1|_{-}^{+} + f \quad \text{на } F_{2,\varepsilon} \cap \Omega \quad \text{вне узлов}, \\ \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{F_{1,\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2} \Big|_{F_{2,\varepsilon}} &\text{непрерывны в узлах}, \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Здесь выражение $v|_{-}^{+}$ на прямой из $F_{1,\varepsilon}$ означает разность предельных значений v на прямой со стороны верхней и нижней полуплоскостей. Аналогичный смысл придается выражению $v|_{-}^{+}$ на прямой из $F_{2,\varepsilon}$.

§5. Пространства периодических функций

В этом параграфе изучена введенная в §1 периодическая составная структура с квадратной сеткой.

1. Обозначим через W_{per} замыкание множества пар $\{(u, e(u)) : u \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2\}$ в $L^2(Y, d\mu)^2 \times L^2(Y, d\mu)^3$. Далее, аналогично, как в §§2, 4, можно определить и

описать пространства $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$, а также множества градиентов $\mathcal{E}(0)$ и тангенциальных матриц $\mathcal{E}(0)^\perp$. Например, если пара вектор-функций $u, u|_F$, заданных на Y и F соответственно, представляет элемент из $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$, то

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2) \in H_{\text{per}}^1(Y, dx)^2, \\ u_1|_F, u_2|_F &\text{ — следы функций } u_1, u_2 \in H_{\text{per}}^1(Y, dx), \\ u_1|_{I_1} &\in H^1(I_1), \quad u_2|_{I_2} \in H^1(I_2) \text{ на отрезках } I_1, I_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для теории усреднения важно выяснить структуру пространства $\mathcal{R}$ периодических жестких перемещений. Введем это ключевое понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Вектор $u \in \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$ называется *периодическим жестким перемещением*, если $0 \in \mathcal{E}(u)$ (т.е. среди градиентов вектора u есть нулевой).

Очевидно, что пространство $\mathcal{R}$ для любой меры содержит постоянные векторы и в случае меры Лебега оно исчерпывается этими векторами. Если же вместо μ рассматривать меру λ , сосредоточенную на сетке F , то пространство $\mathcal{R}$ оказывается шире множества постоянных векторов. Любой элемент $u \in \mathcal{R}$ допускает единственное представление [3; §6]

$$u = C + g, \quad (5.2)$$

где C — постоянный вектор, а g — поперечное перемещение, т.е. вектор, который на каждом звене сетки F ортогонален этому звену. Отсюда для составной меры μ из (1.1) вектор $u \in \mathcal{R}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} u &\text{ — постоянный вектор вне } F, \\ u|_F &\text{ допускает представление (5.2),} \\ u|_F &\text{ — след функции } u \in H^1(Y, dx)^2 \text{ в силу (5.1)}_2. \end{aligned}$$

Перечисленные три условия можно совместить, если $u = C$ всюду на ячейке периодичности Y . Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. В пространстве $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$ множество $\mathcal{R}$ исчерпывается постоянными векторами.

Это — ключевой факт, определяющий классический характер усреднения задачи (1.4), а также задачи (1.3) с тонкой сеткой F_ε^h , когда $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

2. Введем сходимость в “переменном” пространстве периодических функций $L^2(Y, d\mu^h)$ (см. [3; §11], [20]). Пусть $u^h \in L^2(Y, d\mu^h)$ и

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \int_Y |u^h|^2 d\mu^h < \infty.$$

Скажем, что $u^h \rightharpoonup u \in L^2(Y, d\mu)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$, если

$$\int_Y u^h \varphi d\mu^h \rightarrow \int_Y u \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y). \quad (5.3)$$

Сходимость $u^h \rightarrow u \in L^2(Y, d\mu)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ означает, что

$$\int_Y u^h v^h d\mu^h \rightarrow \int_Y uv d\mu, \quad \text{как только } v^h \rightarrow v \text{ в } L^2(Y, d\mu^h).$$

Напомним, что вектор $a \in L^2(Y, d\mu)^2$ и симметричная матрица $b \in L^2(Y, d\mu)^3$ удовлетворяют соотношению

$$a = \operatorname{div} b \quad (\text{в смысле меры } \mu), \quad (5.4)$$

если $\int_Y b \cdot e(\varphi) d\mu = - \int_Y a \cdot \varphi d\mu$ для любого $\varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2$. В случае $a \equiv 0$ это определение соленоидальной матрицы $b, b \in V_{\text{sol}}(Y, d\mu)$.

Аналогично, вектор $a^h \in L^2(Y, d\mu^h)^2$ и матрица $b^h \in L^2(Y, d\mu^h)^3$ удовлетворяют соотношению

$$a^h = \operatorname{div} b^h \quad (\text{в смысле меры } \mu^h), \quad (5.5)$$

если

$$\int_Y b^h \cdot e(\varphi) d\mu^h = - \int_Y a^h \cdot \varphi d\mu^h \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2. \quad (5.6)$$

В случае $a^h \equiv 0$ получаем матрицу b^h , соленоидальную относительно меры μ^h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Скажем, что меры μ^h и μ связаны *аппроксимативными условиями*, если

- (i) для любых a и b , удовлетворяющих соотношению (5.4), найдутся a^h и b^h , удовлетворяющие соотношению (5.5), при этом

$$a^h \rightarrow a \text{ в } L^2(Y, d\mu^h)^2, \quad b^h \rightarrow b \text{ в } L^2(Y, d\mu^h)^3; \quad (5.7)$$

- (ii) если в (i) $a \equiv 0$, то и $a^h \equiv 0$ (сильная аппроксимируемость соленоидальных матриц).

ТЕОРЕМА 5.4. Меры μ^h, μ , определенные в (1.1), связаны *аппроксимативными условиями*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Строим меру сглаживания $\tilde{\mu}^h$, определенную соотношением

$$\int_Y \varphi d\tilde{\mu}^h = \int_Y (\varphi)_h d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y),$$

где $(\varphi)_h$ – сглаживание с ядром $\omega(y) = \chi_Y(y)$ (характеристическая функция единичного квадрата Y):

$$(\varphi)_h(x) = h^{-2} \int \varphi(x-y) \omega(h^{-1}y) dy.$$

Сравним меры μ^h и $\tilde{\mu}^h$. Обе они абсолютно непрерывны относительно плоской меры Лебега:

$$\tilde{\mu}^h = \tilde{\rho}^h(x) dx, \quad \mu^h = \rho^h(x) dx,$$

где $\tilde{\rho}^h(x) = h^{-2} \int_{x+Y_h} d\mu(y)$, $Y_h = [-h/2, h/2]^2$ и, значит,

$$\tilde{\rho}^h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{вне } F^h, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4h} & \text{на } F^h \setminus Y_h, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2h} & \text{на } Y_h, \end{cases}$$

$$\rho^h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{вне } F^h, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4h}(1 + O(h)) & \text{на } F^h. \end{cases}$$

Видим, что вне Y_h плотности $\tilde{\rho}^h(x)$, $\rho^h(x)$ по существу совпадают.

2°. Известен общий результат [3; § 16]: пусть m – произвольная периодическая борелева мера, $\tilde{m}^h$ – любое ее сглаживание (с подходящим ядром сглаживания), тогда меры m , $\tilde{m}^h$ связаны аппроксимативными условиями. Отсюда и изучаемые нами меры μ и $\tilde{\mu}^h$ связаны аппроксимативными условиями. Тогда если вектор a и матрица b удовлетворяют соотношению (5.4), то найдутся вектор $\tilde{a}^h$ и матрица $\tilde{b}^h$, удовлетворяющие соотношению

$$\tilde{a}^h = \operatorname{div} \tilde{b}^h \quad (\text{в смысле меры } \tilde{\mu}^h),$$

т.е.

$$\int_Y \tilde{b}^h \cdot e(\varphi) d\tilde{\mu}^h = - \int_Y \tilde{a}^h \cdot \varphi d\tilde{\mu}^h \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2.$$

Положим

$$b^h = \tilde{b}^h \frac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h}, \quad a^h = \tilde{a}^h \frac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h}.$$

Тогда очевидно, что a^h , b^h удовлетворяют соотношению (5.5). Кроме того, по построению, если $a \equiv 0$, то и $a^h \equiv 0$, так как $\tilde{a}^h \equiv 0$. Остается проверить сходимости (5.7). Но они вытекают из следующих трех утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Для сходимости $g^h \rightharpoonup g$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ достаточно, чтобы соотношение (5.3) выполнялось на пробных функциях из множества*

$$\Pi = \{\varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y) : \varphi = 0 \text{ в окрестности узлов сетки } F\}.$$

Для доказательства этого предложения достаточно заметить, что множество Π плотно в $L^2(Y, d\mu^h)$ и $L^2(Y, d\mu)$.

Из предложения 5.5, учитывая структуру плотностей $\tilde{\rho}^h$, ρ^h , получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Для мер $\tilde{\mu}^h$, μ^h*

$$v^h \rightharpoonup v \text{ в } L^2(Y, d\mu^h) \iff v^h \rightharpoonup v \text{ в } L^2(Y, d\tilde{\mu}^h).$$

Наконец, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Если $\tilde{g}^h \rightarrow g$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$, то

$$g^h = \tilde{g}^h \frac{\tilde{\rho}^h}{\rho^h} \rightarrow g \quad \text{в } L^2(Y, d\mu^h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную $v^h \rightarrow v$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. В силу предложения 5.6 одновременно имеется сходимость $v^h \rightarrow v$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$. Тогда

$$\int_Y g^h v^h d\mu^h = \int_Y \tilde{g}^h v^h d\tilde{\mu}^h \rightarrow \int_Y g v d\mu$$

по определению сильной сходимости $\tilde{g}^h$ в $L^2(Y, d\tilde{\mu}^h)$. Но последнее соотношение означает также искомую сходимость $g^h \rightarrow g$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Предложение доказано. Вместе с тем проверены оба аппроксимативных условия и теорема 5.4 доказана.

3. Для вычисления A^{hom} используем формулу релаксации

$$2A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = A \xi \cdot \xi + \min_{u \in \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)} \int_Y \hat{A}(\xi^t + e^t(u)) \cdot (\xi^t + e^t(u)) d\lambda,$$

где ξ^t – тангенциальная составляющая матрицы ξ , $e^t(u)$ – тангенциальный градиент. Можно заметить, что минимум здесь достигается при $e^t(u) = 0$. Тогда $A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \frac{1}{2} A \xi \cdot \xi + \frac{1}{4} (a_1 \xi_{11}^2 + a_2 \xi_{22}^2)$, где a_i определены в (4.5). В изотропном случае получается формула (1.13).

§ 6. Коммутативные диаграммы предельных переходов

В задаче (1.3) можно перейти к минимуму по обычному соболевскому пространству $H_0^1(\Omega)^2$, так как составная мера μ_ε^h абсолютна непрерывна относительно меры Лебега, причем с невырожденной плотностью. Для минимизантов задач (1.3), (1.6), (1.7) уравнения Эйлера задаются в виде интегральных тождеств в одном и том же пространстве

$$u^{\varepsilon, h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_\Omega A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(\varphi) d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega f \cdot \varphi d\mu_\varepsilon^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad (6.1)$$

$$u^h \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_\Omega A_h^{\text{hom}} e(u^h) \cdot e(\varphi) dx = \int_\Omega f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad (6.2)$$

$$u \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_\Omega A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(\varphi) dx = \int_\Omega f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2. \quad (6.3)$$

Параллельно с диаграммой предельных переходов (1.10) для энергий будем рассматривать диаграмму предельных переходов

$$\begin{array}{ccc} u^{\varepsilon, h} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & u^h \\ h \rightarrow 0 \downarrow & & \downarrow h \rightarrow 0 \\ u^\varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & u \end{array} \quad (6.4)$$

для соответствующих минимизантов, где всюду подразумевается сходимость в $L^2(\Omega)^2$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть в задачах (4.3), (6.1)–(6.3) параметры ε , h независимы. Тогда верны коммутативные диаграммы предельных переходов (6.4) и (1.10) для решений этих задач и их энергий.*

В диаграммах (6.4), (1.10) рассмотрим сначала предельные переходы

$$u^{\varepsilon,h} \rightarrow u^h, \quad J^{\varepsilon,h} \rightarrow J^h \quad \text{и} \quad u^\varepsilon \rightarrow u, \quad J^\varepsilon \rightarrow J$$

“по горизонтали” при $\varepsilon \rightarrow 0$. Первый из них осуществляется в рамках теории усреднения относительно меры μ^h ($h = \text{const} > 0$), а второй – относительно меры μ . В обоих случаях, хотя результаты формулируются без использования двухмасштабной сходимости, для их доказательства применяется метод двухмасштабной сходимости относительно периодической борелевой меры.

Отметим, что первый горизонтальный переход так же можно осуществить, оставаясь в рамках теории усреднения в обычных лебеговых пространствах $L^2(\Omega)$ (с мерой Лебега dx), поскольку $d\mu^h = \rho^h dy$, где периодический множитель $\rho^h(y)$ принимает всего два значения: $1/2$ вне F^h и $c^h \neq 0$ на F^h . Аналогичные задачи усреднения композитов изучались, например, в [11] методом асимптотических разложений.

Второй горизонтальный переход оказывается обоснованным общей теоремой 8.2, охватывающей, в частности, и этот случай.

Разберем предельные переходы “по вертикали”, т.е. при $h \rightarrow 0$. Согласно лемме 16.5 из [3] если меры μ^h , μ связаны аппроксимативными условиями, то $A_h^{\text{hom}} \rightarrow A^{\text{hom}}$, что позволяет обосновать $(1.9)_2$ и аналогичный предельный переход в диаграмме (6.4). Для этого достаточно заметить, что из интегральных тождеств (6.2), (6.3) вытекает равенство

$$\int_{\Omega} A_h^{\text{hom}} e(u^h - u) \cdot e(u^h - u) dx = \int_{\Omega} (A^{\text{hom}} - A_h^{\text{hom}}) e(u) \cdot e(u^h - u) dx.$$

Чтобы обосновать $(1.9)_1$, перейдем к пределу в тождестве (6.1) при $h \rightarrow 0$. Предварительно отметим условие ограниченности

$$\int_{\Omega} (|u^{\varepsilon,h}|^2 + |e(u^{\varepsilon,h})|^2) d\mu_\varepsilon^h \leq C < \infty$$

(вытекающее из интегрального тождества (6.1) при $\varphi = u^{\varepsilon,h}$ в силу неравенства Корна (1.5)). Из него следуют сходимости (по крайней мере по подпоследовательности)

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon,h} &\rightharpoonup u^\varepsilon \quad \text{в } H^1(\Omega)^2, \quad e(u^{\varepsilon,h}) \rightharpoonup e(u^\varepsilon) \quad \text{в } L^2(\Omega)^3, \\ \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_\varepsilon^h &\rightarrow \int_{\Omega} u^\varepsilon \cdot \varphi d\mu_\varepsilon, \\ \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\lambda_\varepsilon^h &\rightarrow \int_{\Omega} \widehat{A} e^t(u^\varepsilon) \cdot e^t(\varphi) d\lambda_\varepsilon \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2, \end{aligned}$$

где $\hat{A}$ – тензор релаксации, $e^t(u^\varepsilon)$ – тангенциальный градиент. Учитывая эти сходимость, приходим к тождеству (4.6), и тогда предельная функция u^ε , в самом деле, есть решение задачи (4.3). Подробнее аналогичный предельный переход при $h \rightarrow 0$, но в более простой ситуации был объяснен в §3.

В диаграммах (1.10) и (6.4) рассмотрим предельный переход “по диагонали”, т.е. когда параметры ε и h зависимы, причем $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Для произвольной $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ задачи (6.1) и (6.3) связаны сходимостью решений и энергий*

$$u^{\varepsilon, h} \rightarrow u \quad \text{в } L^2(\Omega)^2, \quad J^{\varepsilon, h} \rightarrow J \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Эта теорема, так же как часть предыдущей, будет доказана позже, в конце §9.

§ 7. Двухмасштабная сходимость с переменной составной мерой

Изучим некоторую общую ситуацию, в которую вписывается усреднение задач теории упругости на составных структурах, не обязательно плоских.

1. Пусть μ^h , μ – 1-периодические борелевы меры в $\mathbb{R}^d$ такие, что $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \rightarrow 0$, и пусть μ_ε^h – масштабированная мера (см. §1), т.е. для фиксированного h

$$\mu_\varepsilon^h(B) = \varepsilon^d \mu^h(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелева множества } B \subset \mathbb{R}^d. \quad (7.1)$$

Далее полагаем $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Напомним, как определяется сходимость в переменном пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ [1]–[3], [20].

Пусть $v^{\varepsilon, h}(x)$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, т.е. $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h < \infty$.

Слабая сходимость $v^{\varepsilon, h} \rightharpoonup v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ означает:

$$v \in L^2(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega v^{\varepsilon, h} \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Сильная сходимость $v^{\varepsilon, h} \rightarrow v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ означает:

$$v \in L^2(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega v^{\varepsilon, h} z^{\varepsilon, h} d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega v z dx, \\ \text{как только } z^{\varepsilon, h} \rightharpoonup z \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h).$$

Сходимость в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ имеет следующие свойства:

- 1) всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность компактна в смысле слабой сходимости;
- 2) свойство полунепрерывности снизу: если $v^{\varepsilon, h} \rightharpoonup v$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h \geq \int_\Omega v^2 dx;$$

- 3) критерий компактности:

$$v^{\varepsilon, h} \rightarrow v \iff v^{\varepsilon, h} \rightharpoonup v \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega v^2 dx.$$

Мы будем использовать также двухмасштабную сходимость в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ [2], [3], [20], которая является обобщением двухмасштабной сходимости в $L^2(\Omega, dx)$ [21], [22].

Основу теории двухмасштабной сходимости составляет

Свойство среднего значения [3], [20]. Пусть Ω – ограниченная измеримая по Жордану область и $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Тогда для любого $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) a^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x) a(y) dx d\mu.$$

Дадим определение двухмасштабной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.

Скажем, что ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность $v^{\varepsilon, h}(x)$ *слабо двухмасштабно сходится* к функции $v(x, y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$: $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon, h}(x) \varphi(x) b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall b \in C_{\text{per}}^\infty(Y).$$

Скажем, что последовательность $v^{\varepsilon, h}(x)$ *сильно двухмасштабно сходится* к функции $v(x, y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times d\mu)$: $v^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} v(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon, h}(x) z^{\varepsilon, h}(x) d\mu_\varepsilon^h$$

$$= \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) z(x, y) dx d\mu, \quad \text{как только } z^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} z(x, y).$$

Сходимости для вектор-функции $v^{\varepsilon, h} = (v_1^{\varepsilon, h}, \dots, v_N^{\varepsilon, h})$ определяются покомпонентно. Например, $v^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} v \Leftrightarrow v_i^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} v_i, i = 1, \dots, N$.

Перечислим некоторые общие свойства двухмасштабной сходимости, которые используются далее.

- (i) Всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность содержит слабо двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность.
- (ii) Если $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h \geq \int_{\Omega} \int_Y |v(x, y)|^2 dx d\mu.$$

- (iii) $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y) \Leftrightarrow v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_Y v^2(x, y) dx d\mu.$$

- (iv) Если $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$, то $v^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup \int_Y v(x, y) d\mu$.

(v) Если $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$, $b^h(y) \rightarrow b(y)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$, то

$$b^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} b(y)v(x, y).$$

(vi) Пусть $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$, где $v(x, y) = \sum_i \varphi_i(x)b_i(y)$, $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^2_{\text{per}}(Y, d\mu)$, и пусть $b_i^h \rightarrow b_i$ в $L^2_{\text{per}}(Y, d\mu^h)$, $v^h(x, y) = \sum_i \varphi_i(x)b_i^h(y)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| v^{\varepsilon, h}(x) - v^h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0.$$

Приведем свойства сходимости для вектор-функций. В них участвует $A^h(y)$ – симметрическая 1-периодическая борелева матрица в $\mathbb{R}^N$ такая, что

$$cI_N \leq A^h(y) \leq c^{-1}I_N, \quad I_N - \text{единичная матрица в } \mathbb{R}^N, \quad c > 0, \\ A^h(y) \rightarrow A(y) \text{ в } L^2(Y, d\mu^h)^{N(N+1)/2}.$$

Пусть, далее, $A^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = A_{\varepsilon}^h(x) = A_{\varepsilon}^h$.

(vii) Если $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^N$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^{\varepsilon, h} \cdot v^{\varepsilon, h} d\mu_{\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} \int_Y A(y)v(x, y) \cdot v(x, y) dx d\mu,$$

причем это свойство остается в силе, если условие $A^h(y) \geq cI_N$ заменить на $A^h(y) \geq 0$.

(viii) Критерий сильной двухмасштабной сходимости векторов:

$$v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^N \iff v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^N, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^{\varepsilon, h}(x) \cdot v^{\varepsilon, h}(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_Y A(y)v(x, y) \cdot v(x, y) dx d\mu.$$

Свойства (i)–(vi) доказаны в [3], [20]. Свойства (vii), (viii) – некоторые обобщения (например за счет зависимости матрицы $A_{\varepsilon}^h = A^h(x/\varepsilon)$ от двух параметров) аналогичных свойств, приведенных в [20] в теоремах 7.1, 7.2, и могут быть доказаны последовательно одно за другим с использованием свойства (v).

2. Сформулируем свойства двухмасштабной сходимости вектор-функций $u^{\varepsilon, h} \in L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d$, которые обнаруживаются при совместном изучении $u^{\varepsilon, h}$ и $e(u^{\varepsilon, h})$, если меры μ, μ^h удовлетворяют следующим требованиям:

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d, \tag{7.2}$$

т.е. пространство жестких периодических перемещений в $\mathcal{R}(\mu)$ состоит только из постоянных векторов;

$$\begin{aligned} \text{меры } \mu^h, \mu \text{ связаны аппроксимативными условиями} \\ (\text{см. определение 5.3}); \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\text{мера } \mu \text{ невырождена,} \quad (7.4)$$

т.е. $V_{\text{pot}}(Y, d\mu)$ не содержит постоянных матриц. Напомним, что $V_{\text{pot}}(Y, d\mu)$ есть замыкание множества $\{e(\phi), \phi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d\}$ в $L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)/2}$.

Условие (7.2) для пространства вектор-функций можно трактовать как некоторый аналог условия эргодичности меры в пространстве скалярных функций (см. [1], [2]).

Условие невырожденности меры (7.4) не существенно для дальнейшего, оно лишь упрощает формулировку результатов и их доказательство. Невырожденность меры влечет невырожденность усредненного тензора A^{hom} , который в общем случае лишь неотрицателен.

Далее $A^h(y)$ – 1-периодическая борелева симметрическая операторная функция, действующая в пространстве симметрических матриц $\mathbb{R}^{d(d+1)/2}$ (тензор упругости), такая, что

$$c\xi \cdot \xi \leq A^h(y)\xi \cdot \xi \leq c^{-1}\xi \cdot \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d(d+1)/2}, \quad c > 0, \quad (7.5)$$

$$A^h \rightarrow A \quad \text{в } L^2(Y, d\mu^h). \quad (7.6)$$

Пусть $A_\varepsilon^h = A_\varepsilon^h(x) = A^h(x/\varepsilon)$.

Для тензора A из (7.6) усредненный тензор A^{hom} можно определить по формуле

$$A^{\text{hom}}\xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu)} \int_Y A(\xi + v) \cdot (\xi + v) d\mu. \quad (7.7)$$

Из (7.4), (7.5) вытекает невырожденность тензора A^{hom} .

Рассмотрим последовательность $u^{\varepsilon, h} \in C_0^\infty(\Omega)^d$, ограниченную вместе с $e(u^{\varepsilon, h})$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, т.е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega (|u^{\varepsilon, h}|^2 + |e(u^{\varepsilon, h})|^2) d\mu_\varepsilon^h < \infty. \quad (7.8)$$

Переходя, быть может, к подпоследовательности, будем считать, что

$$u^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y), \quad e(u^{\varepsilon, h}) \xrightarrow{2} p(x, y). \quad (7.9)$$

В следующей теореме уточняются свойства этих сходимостей.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $h > 0$, $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ и выполнены условия (7.2)–(7.6). Тогда

$$u(x, y) = u(x) \in H_0^1(\Omega)^d, \quad u^{\varepsilon, h} \rightharpoonup u(x), \quad (7.10)$$

$$p(x, y) = e(u(x)) + v(x, y), \quad v \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}(Y, d\mu)). \quad (7.11)$$

Если дополнительно выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e_y \left(w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad \forall w \in C_{\text{per}}^{\infty}(Y)^d, \quad (7.12)$$

то

$$A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon, h}) \rightharpoonup A^{\text{hom}} e(u) \quad (7.13)$$

и в (7.11) $v(x, y) = v_{\xi}(y)|_{\xi=e(u)}$, где $v_{\xi}(y)$ – минимизант задачи (7.7);

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h &\geq \int_{\Omega} \int_Y A(e(u) + v) \cdot (e(u) + v) dx d\mu \\ &\geq \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) dx. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Утверждения теоремы также верны, если всюду $h \equiv 0$ и $\mu_{\varepsilon}^0 = \mu_{\varepsilon}$, μ_{ε} получена из μ по формуле (7.1), $A_{\varepsilon}^0 = A_{\varepsilon} = A(x/\varepsilon)$.

Полное доказательство этой теоремы опускаем, так как оно во многом повторяет доказательства аналогичных утверждений для скалярных и векторных пространств из [2; § 4], [3; § 9]. Ключевыми в нашем доказательстве являются аппроксимативные условия для меры μ^h и

ЛЕММА ОБ АППРОКСИМАЦИИ [3; лемма 9.3]. Множество векторов $a = \text{div } b$ (в смысле меры μ) плотно в $\mathcal{R}(\mu)^{\perp}$.

Например покажем, как, используя эти моменты, выяснить структуру двухмасштабного предела из (7.9)₁, а именно $u(x, y) = u(x)$, даже при более общих предположениях, чем (7.8).

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть для $u^{\varepsilon, h} \in C^{\infty}(\Omega)^d$ выполнены условия:

$$u^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y), \quad \varepsilon \|e(u^{\varepsilon, h})\|_{L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)} \rightarrow 0.$$

Тогда $u(x, y) = u(x)$.

Для доказательства возьмем $a = \text{div } b$ (в смысле меры μ) и a^h, b^h – из аппроксимативного свойства (i). Тогда из тождества (5.6) на периодических функциях следует аналогичное тождество на финитных функциях:

$$-\varepsilon \int_{\Omega} b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(\psi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} a^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \psi d\mu_{\varepsilon}^h, \quad \psi \in C_0^{\infty}(\Omega)^d.$$

Полагая $\psi = u^{\varepsilon, h} \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$-\varepsilon \int_{\Omega} \phi b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \phi a^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot u^{\varepsilon, h} d\mu_{\varepsilon}^h + \varepsilon \int_{\Omega} [u^{\varepsilon, h} \times \nabla \phi] \cdot b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Отсюда, используя свойства функций $u^{\varepsilon, h}$, a^h , b^h , а также свойство (v) двухмасштабной сходимости, после перехода к пределу выводим

$$\int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \cdot \phi(x) a(y) dx d\mu = 0,$$

что по лемме об аппроксимации в силу (7.2) дает искомое равенство $u(x, y) = u(x)$.

3. Свяжем с ограниченной липшицевой областью Ω пространство $\mathcal{H}^{\varepsilon, h}$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)^d$ по норме $\left(\int_{\Omega} (|\varphi|^2 + |e(\varphi)|^2) d\mu_{\varepsilon}^h \right)^{1/2}$. Изучим следующую задачу теории упругости:

$$u^{\varepsilon, h} \in \mathcal{H}^{\varepsilon, h}, \quad \int_{\Omega} (A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon, h} \cdot \varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d, \quad (7.15)$$

где $f^{\varepsilon, h}$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d$, тензор $A_{\varepsilon}^h = A^h(x/\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (7.5), (7.6).

Существование и единственность решения как пары $u^{\varepsilon, h}$, $e(u^{\varepsilon, h})$ следует из теоремы Рисса.

Введем усредненную задачу

$$u \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} (A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(\varphi) + u \cdot \varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d. \quad (7.16)$$

Очевидны существование и единственность этой задачи в силу постоянства и невырожденности тензора A^{hom} .

Связь между решениями задач (7.15), (7.16) устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $h > 0$, $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ и выполнены условия (7.2)–(7.6). Тогда если

$$f^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup f(x) \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d, \quad (7.17)$$

то

$$u^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^d, \quad (7.18)$$

$$e(u^{\varepsilon, h}(x)) \xrightarrow{2} e(u(x)) + v(x, y) \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^{d(d+1)/2}, \quad (7.19)$$

где

$$v(x, y) = v_{\xi}(y)|_{\xi=e(u(x))}, \quad v_{\xi}(\cdot) - \text{минимизант задачи (7.7)}, \quad (7.20)$$

$$\text{т.е.} \quad \operatorname{div}_y A(e(u(x)) + v(x, y)) = 0 \quad (\text{в смысле меры } \mu).$$

Если сходимость правых частей (7.17) является сильной, то сильными будут и сходимости решений и их градиентов в (7.18) и (7.19). При этом имеет место сходимость энергий

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon}^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) dx. \quad (7.21)$$

Утверждения теоремы верны также при $h \equiv 0$, когда $\mu_{\varepsilon}^0 = \mu_{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального тождества (7.15) с $\varphi = u^{\varepsilon, h}$ следует условие ограниченности (7.8), благодаря которому, переходя, быть может, к подпоследовательности (см. свойство (i) двухмасштабной сходимости), считаем выполненными соотношения (7.9), (7.10).

Взяв в тождестве (7.15) пробную функцию вида $\varphi(x) = \varepsilon \psi(x) w(\varepsilon^{-1} x)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $w \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d$, после перехода к пределу получим условие (7.12), из которого вытекает сходимость (7.13). Тогда можно перейти к пределу в тождестве (7.15) с произвольной функцией $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, в результате чего получим тождество (7.16) для предельной функции u . В силу единственности решения задачи (7.16) сходимость (7.18) доказана для всей последовательности ε .

Пусть в (7.17) имеем сильную сходимость $f^{\varepsilon, h} \rightarrow f$. Сравним энергетические равенства для задач (7.15), (7.16):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) + u^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h}] d\mu_\varepsilon^h &= \int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h} d\mu_\varepsilon^h, \\ \int_{\Omega} [A_\varepsilon^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u] dx &= \int_{\Omega} f \cdot u dx. \end{aligned}$$

Поскольку слабая сходимость (7.18) уже доказана, то по определению сильной сходимости $\int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h} d\mu_\varepsilon^h \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot u dx$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) + u^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h}] d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} [A^{\text{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u] dx.$$

Из свойств полунепрерывности для двухмасштабной сходимости (см. (ii) и (vii)) выводим отсюда сходимость энергий (7.21), а также сходимость норм

$$\int_{\Omega} |u^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h \rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Из сходимости энергий (7.21) следует, что в соотношениях (7.14) для решения $u^{\varepsilon, h}$ всюду имеют место равенства. В частности,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_Y A(e(u) + v) \cdot (e(u) + v) dx d\mu.$$

Отсюда в силу критериев сильной сходимости (iii), (viii) получаем сильную сходимость решений и их градиентов. Теорема доказана.

В следующей теореме мера μ^h удовлетворяет дополнительному требованию, а именно пусть выполнено равномерное (по h) неравенство Корна для периодических функций

$$\int_Y |\varphi|^2 d\mu^h \leq c \int_Y |e(\varphi)|^2 d\mu^h \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d, \quad \int_Y \varphi d\mu^h = 0. \quad (7.22)$$

Из него, в частности, вытекает возможность представить матрицу $v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h)$ в виде $v = e(w)$, $w \in H_{\text{per}}^1(Y, d\mu^h)^d$. Поэтому и минимизант вариационной задачи

$$A_h^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h)} \int_Y A^h(\xi + v) \cdot (\xi + v) d\mu^h \quad (7.23)$$

допускает представление $v_\xi^h(y) = e_y(w^h(\xi, y))$, где

$$\begin{aligned} w^h(\xi, y) &\in H_{\text{per}}^1(Y, d\mu^h)^d, \quad \text{div}_y A^h(\xi + e_y(w^h)) = 0 \quad (\text{в смысле меры } \mu^h), \\ \int_Y w^h(\xi, \cdot) d\mu^h &= 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

ТЕОРЕМА 7.3 (о корректуре). *Пусть в предположениях теоремы 7.2 $f^{\varepsilon, h} \rightarrow f$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^d$, $u \in C^2(\overline{\Omega})^d$. Тогда если $u_1(x, y) = w^h(e(u(x)), y)$, $w^h(\xi, y)$ из (7.24), то*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \left| e \left(u^{\varepsilon, h}(x) - u(x) - \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0. \quad (7.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 7.2

$$e(u^{\varepsilon, h}(x)) \xrightarrow{2} e(u(x)) + v(x, y) = p(x, y). \quad (7.26)$$

Теперь докажем сходимость

$$v_\xi^h(y) \rightarrow v_\xi(y) \quad \text{в } L^2(Y, d\mu^h)^d \quad (7.27)$$

для минимизантов задач (7.23) и (7.7). Из интегрального тождества для $v_\xi^h = v^h$:

$$v^h \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu^h), \quad \int_Y A^h(\xi + v^h) \cdot e(\varphi) d\mu^h = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d, \quad (7.28)$$

вытекает оценка $\int_Y A^h v^h \cdot v^h d\mu^h \leq \int_Y A^h \xi \cdot \xi d\mu^h$, поэтому можно считать, что $v^h \rightharpoonup v$. Аппроксимативные свойства меры μ^h обеспечивают [3; §16] свойство сохранения потенциальности при слабой сходимости матриц. Тогда переход к пределу в (7.28) дает (см. (7.6))

$$v \in V_{\text{pot}}(Y, d\mu), \quad \int_Y A(\xi + v) \cdot e(\varphi) d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d,$$

и, действительно, $v = v_\xi$ — минимизант задачи (7.7).

С помощью энергетических равенств для $v_\xi^h = v^h$, $v_\xi = v$ выводим сходимость квадратичных форм

$$\int_Y A^h v^h \cdot v^h d\mu^h = - \int_Y A^h \xi \cdot v^h d\mu^h \rightarrow - \int_Y A \xi \cdot v d\mu = \int_Y A v \cdot v d\mu,$$

что вместе со слабой сходимостью $v^h \rightharpoonup v$ влечет (7.27) согласно критерию сильной сходимости векторов (матриц) в $L^2(Y, d\mu^h)$ (см. выше аналогичный критерий (viii) сильной двухмасштабной сходимости).

Нетрудно увидеть, что функция $v(x, y)$ из (7.20) имеет структуру, предусмотренную свойством (vi) двухмасштабной сходимости. Положим $p^h(x, y) = e(u(x)) + v^h(x, y)$, где $v^h(x, y) = v_\xi^h(y)|_{\xi=e(u(x))}$. Тогда из (7.26), (7.27) следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| e(u^{\varepsilon, h}) - p^h \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0,$$

что в силу представления $v^h(x, y) = e_y(w^h(x, y))$ с учетом неравенства (7.22) дает соотношения (7.25).

§ 8. Усреднение на составной структуре

Применим результаты § 7 к усреднению на составной структуре. Следующая теорема суммирует результаты § 5, благодаря которым это можно сделать.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для составных мер μ, μ^h , заданных в (1.1), выполнены условия (7.2)–(7.4).*

Вместо (6.1) рассмотрим более общую задачу Дирихле в статической постановке с переменным тензором упругости и переменной правой частью:

$$u^{\varepsilon, h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(\varphi) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot \varphi d\mu_\varepsilon^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad (8.1)$$

где $A_\varepsilon^h = A_\varepsilon^h(x) = A^h(x/\varepsilon)$, $A^h(y)$ – семейство 1-периодических тензоров упругости, удовлетворяющих условиям (7.5), (7.6), а правая часть $f^{\varepsilon, h} \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ и ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$. Как и раньше, допускаем $h \equiv 0$.

Разрешимость задачи (8.1), а также условие равномерной ограниченности (7.8) вытекают из предположений на тензор A_ε^h и правую часть $f^{\varepsilon, h}$ в силу неравенства Корна (1.5).

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть $f^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup f(x)$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$. Тогда для решений задачи (8.1) имеет место сходимость (7.18), где предельная функция $u(x)$ есть решение задачи (6.3).*

Пусть

$$f^{\varepsilon, h}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2, \quad (8.2)$$

тогда и сходимость решений будет сильной, при этом имеет место сходимость упругих энергий (7.21).

Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})^2$, тогда имеет место сходимость с корректором вида (7.25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности считаем, что

$$u^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2,$$

причем $u(x) \in H_0^1(\Omega)^2$ (см. теорему 7.1). Запишем задачу (8.1) в резольвентной форме (7.15), а именно:

$$u^{\varepsilon,h} \in \mathcal{H}^{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} (A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} g^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_\varepsilon^h,$$

где $g^{\varepsilon,h} = u^{\varepsilon,h} + f^{\varepsilon,h}$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon,h} = H_0^1(\Omega)^2$ в силу составной структуры меры μ^h из (1.1). Поскольку $g^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup g(x) = u(x) + f(x)$, то по теореме 7.2 предельная функция u есть решение усредненной задачи (7.16) с правой частью g , а значит, и задачи (5.3). Этим исчерпан случай слабой сходимости правых частей.

В предположении (8.2) сходимость энергий устанавливается так же, как в теореме 7.2. Докажем сильную сходимость решений. Для этого рассмотрим второй вариант задачи (8.1):

$$v^{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} A_\varepsilon^h e(v^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} z^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_\varepsilon^h \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (8.3)$$

где в правой части стоит произвольная вектор-функция $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$. Тогда $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$, где v — решение усредненного уравнения (6.3) с правой частью z .

Полагая в (8.3) $\varphi = u^{\varepsilon,h}$, а в (8.1) $\varphi = v^{\varepsilon,h}$, получаем по формуле Грина–Бетти равенство

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h,$$

правая часть которого по определению сильной сходимости ($f^{\varepsilon,h} \rightarrow f$, $v^{\varepsilon,h} \rightarrow v$) сходится к

$$\int_{\Omega} f \cdot v dx = \int_{\Omega} u \cdot z dx.$$

Последнее равенство выводится из интегрального тождества для предельных функций u, v . В результате

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \rightarrow \int_{\Omega} u \cdot z dx,$$

что в силу произвольности $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$ означает искомую сильную сходимость решений.

Искомая сходимость с корректором вытекает из теоремы 7.3 и доказанного в §9 неравенства Корна (7.22) с составной мерой μ^h (см. (9.1)).

§9. Неравенства Пуанкаре и Корна для составной меры. Принцип компактности

1. Пусть $\lambda, \lambda^h, \mu, \mu^h$ – меры из (1.1), Ω – ограниченная липшицева область.

ЛЕММА 9.1. 1°. Для периодических функций имеют место равномерные неравенства Корна и Пуанкаре при $h \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_Y |u|^2 d\mu^h &\leq C_1 \int_Y |e(u)|^2 dx, & u &\in C_{\text{per}}^\infty(Y)^2, \\ \int_Y u d\mu^h &= 0, & C_1 &= \text{const}(F), \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \int_Y v^2 d\mu^h &\leq C_2 \int_Y |\nabla v|^2 dx, & v &\in C_{\text{per}}^\infty(Y), \\ \int_Y v d\mu^h &= 0, & C_2 &= \text{const}(F). \end{aligned} \quad (9.2)$$

2°. Для финитных функций имеют место неравенство Корна (1.5), а также следующие равномерные (по ε и $h \geq 0$) неравенства:

$$\int_\Omega v^2 d\mu_\varepsilon^h \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \quad C = \text{const}(\Omega, F), \quad (9.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda_\varepsilon^h \leq C \int_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad C = \text{const}(F). \quad (9.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полезны следующие известные или легко выводимые неравенства:

$$\int_Y \varphi^2 d\lambda^h \leq C_0 \int_Y (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{Y}), \quad C_0 = \text{const}(F), \quad h \geq 0, \quad (9.5)$$

$$\int_\Omega v^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \quad C = \text{const}(\Omega), \quad (9.6)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 2 \int_\Omega |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)^2. \quad (9.7)$$

Гомотетическое сжатие переводит неравенство (9.5) в неравенство для квадрата εY

$$\int_{\varepsilon Y} \varphi^2 d\lambda_\varepsilon^h \leq C_0 \int_{\varepsilon Y} (\varphi^2 + \varepsilon^2 |\nabla \varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\varepsilon \bar{Y}),$$

из которого, разбивая плоскость на непересекающиеся полуоткрытые квадраты $\mathbb{R}^2 = \bigcup_i \varepsilon Y_i$, получаем неравенство (9.4):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda_\varepsilon^h &= \sum_i \int_{\varepsilon Y_i} v^2 d\lambda_\varepsilon^h \leq C_0 \sum_i \int_{\varepsilon Y_i} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx \\ &\leq C_0 \int_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9.6), (9.7) выводим последовательно неравенства (9.3) и (1.5).

Неравенства для периодических функций доказываются аналогично.

2. Докажем с помощью неравенства (9.4) некоторые специфические свойства сходимости в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ с составной мерой μ_ε^h .

ЛЕММА 9.2. *Имеет место сходимость*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v^2 d\lambda_\varepsilon^h = \int_{\Omega} v^2 dx, \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (9.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ равенство (9.8) следует из слабой сходимости мер $d\lambda_\varepsilon^h \rightarrow dx$. Для произвольной $v \in H_0^1(\Omega)$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_{\Omega} v^2 dx \right| &\leq \int_{\Omega} |v - v_\delta|^2 d\lambda_\varepsilon^h + \left| \int_{\Omega} v_\delta^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_{\Omega} v_\delta^2 dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} v_\delta^2 dx - \int_{\Omega} v^2 dx \right|, \end{aligned}$$

в которой используем

$$v_\delta \in C_0^\infty(\Omega), \quad |v - v_\delta|_{H^1(\Omega)}^2 < \delta, \quad (9.9)$$

и, значит, в силу (9.3)

$$\int_{\Omega} |v - v_\delta|^2 d\lambda_\varepsilon^h < C_0 \delta.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} v^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_{\Omega} v^2 dx \right| \leq C\delta,$$

где δ любое, а константа C не зависит от δ . Отсюда следует формула (9.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 9.3. *Пусть v_ε ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Тогда*

$$\text{если } v_\varepsilon \rightarrow v \text{ в } L^2(\Omega), \text{ то } v_\varepsilon \rightarrow v \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h). \quad (9.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать сходимость $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^2(\Omega, d\lambda_\varepsilon^h)$, которая согласно свойствам сходимости в $L^2(\Omega, d\lambda_\varepsilon^h)$ (см. в § 7 критерий сильной сходимости и свойство полунепрерывности снизу) выводится из соотношений

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon \varphi d\lambda_\varepsilon^h &= \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Y |v_\varepsilon|^2 d\lambda_\varepsilon^h &\leq \int_Y v^2 dx. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Для v_δ из (9.9) имеет место представление

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_\varepsilon \varphi d\lambda_\varepsilon^h - \int_{\Omega} v \varphi dx &= \int_{\Omega} (v_\varepsilon - v) \varphi d\lambda_\varepsilon^h + \int_{\Omega} (v - v_\delta) \varphi d\lambda_\varepsilon^h \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} v_\delta \varphi d\lambda_\varepsilon^h - \int_{\Omega} v_\delta \varphi dx \right) + \int_{\Omega} (v_\delta - v) \varphi dx. \end{aligned}$$

В последней сумме второе и четвертое слагаемые можно оценить, используя (9.9)₂ и (9.4):

$$\left| \int_{\Omega} (v - v_{\delta}) \varphi d\lambda_{\varepsilon}^h \right| \leq C_{\varphi} \delta, \quad \left| \int_{\Omega} (v_{\delta} - v) \varphi dx \right| \leq C_{\varphi} \delta.$$

Там же первое и третье слагаемые в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают нуль, так как

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h &\leq C_0 \int_{\Omega} (|v_{\varepsilon} - v|^2 + \varepsilon^2 |\nabla(v_{\varepsilon} - v)|^2) dx \\ &= C_0 \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 dx + O(\varepsilon^2) = o(1) \end{aligned} \quad (9.12)$$

в силу (9.4) и (9.10)₁, а вследствие сходимости мер $d\lambda_{\varepsilon}^h \rightarrow dx$

$$\int_{\Omega} v_{\delta} \varphi d\lambda_{\varepsilon}^h \rightarrow \int_{\Omega} v_{\delta} \varphi dx.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} v_{\varepsilon} \varphi d\lambda_{\varepsilon}^h - \int_{\Omega} v \varphi dx \right) \leq C_{\varphi} \delta,$$

откуда в силу произвольности δ вытекает (9.11)₁.

Соотношение (9.11)₂ следует из (9.12) и (9.8):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon}|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_{\varepsilon} - v|^2 d\lambda_{\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^2 d\lambda_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} v^2 dx.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 9.4 (принцип компактности).

1°. Последовательность функций $v^{\varepsilon, h} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ таких, что

$$v^{\varepsilon, h}, \quad \nabla v^{\varepsilon, h} \quad \text{ограничены в } L^2(\Omega, dx), \quad (9.13)$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$.

2°. Последовательность вектор-функций $u^{\varepsilon, h} \in C_0^{\infty}(\Omega)^2$ таких, что

$$u^{\varepsilon, h}, \quad e(u^{\varepsilon, h}) \quad \text{ограничены в } L^2(\Omega, dx), \quad (9.14)$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^2$.

Простым следствием из леммы 9.3 является первое утверждение этой теоремы. Из него вытекает второе утверждение, поскольку в силу неравенства Корна (9.7) условие (9.14) влечет условие (9.13) для каждой компоненты вектора $u^{\varepsilon, h}$.

ЛЕММА 9.5. Утверждения лемм 9.2 и 9.3 остаются в силе для функций из $H^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из слабой сходимости мер $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$ (см. определение в §1) следует сходимость [20; лемма 1.1]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \varphi dx, \quad \varphi \in C(\overline{\Omega}).$$

Отсюда ясно, что для вывода (9.8) в случае $v \in H^1(\Omega)$ рассматриваем в (9.9) $v_\delta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и в остальном повторяем прежнее доказательство. Лемма доказана.

ЛЕММА 9.6. Если $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, $v \in H^1(\Omega)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v_\varepsilon - v|^2 d\mu_\varepsilon^h \rightarrow 0. \quad (9.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $v \in H^1(\Omega)$, то $v \rightarrow v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ (для вывода возьмем $v_\varepsilon = v$ и воспользуемся леммой 9.5) и, значит, $(v_\varepsilon - v) \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, что по критерию сильной сходимости влечет (9.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Для $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$ имеем $f^{\varepsilon, h} \equiv f \rightarrow f$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$ (см. вывод (9.15)). Отсюда по теореме 8.2 получаем сходимость энергий (6.5)₂, а также сильную сходимость решений в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$, из которой по лемме 9.6 следует (6.5)₁. Теорема 6.2 доказана.

Поскольку в рассуждениях выше допустимо $h \equiv 0$, то одновременно обоснован нижний горизонтальный переход в диаграммах (1.10) и (6.4). Значит, и теорема 6.1 доказана полностью.

§10. О сходимости спектра

Задачи (8.1) и (6.3) можно записать в операторной форме

$$\mathcal{A}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon, \quad \mathcal{A}u = f,$$

где $\mathcal{A}^\varepsilon = \mathcal{A}^{\varepsilon, h}$, $f^\varepsilon = f^{\varepsilon, h}$ при $h = h(\varepsilon)$, $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}$ — неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $H_\varepsilon = L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$ и $H = L^2(\Omega, dx)^2$ соответственно, $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}$ имеют компактную резольвенту.

Распространим обычные теоремы о спектральных асимптотиках, вытекающие из сильной резольвентной сходимости [23], [18], на случай переменных гильбертовых пространств.

Рассмотрим общую схему, в которой нам даны только сильная резольвентная сходимость в переменном гильбертовом пространстве и абстрактный принцип компактности.

Для ограниченных операторов B_ε , B , действующих в пространствах H_ε и H соответственно, таких, что $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|B_\varepsilon\| < \infty$, будем рассматривать сильную сходимость $B_\varepsilon \rightarrow B$, которая означает, что $B_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow Bu$ в H_ε , как только $u_\varepsilon \rightarrow u$ в H_ε . Здесь мы оперируем некоторой “сильной” сходимостью $u_\varepsilon \rightarrow u$ элементов $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ к элементу $u \in H$, обладающей следующими свойствами.

1°. Если $u_\varepsilon \rightarrow u$, $v_\varepsilon \rightarrow v$, то $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_\varepsilon \rightarrow (u, v)$.

2°. Для любого $u \in H$ найдется $u_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такая, что $u_\varepsilon \rightarrow u$.

Введем условия:

$$(\Gamma_1) \quad (\mathcal{A}^\varepsilon + \lambda)^{-1} \rightarrow (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \quad \forall \lambda > 0;$$

(Γ_2) в пространстве H_ε имеет место принцип компактности, а именно:

$$\text{если } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\mathcal{A}^\varepsilon + 1)u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon < \infty, \quad \text{то } \exists \varepsilon' : u_{\varepsilon'} \rightarrow u.$$

Из (Γ_1) следует простой факт, который используется далее:

$$\text{если } \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = o(1) \text{ в } H_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \rightarrow u, \text{ то } \mathcal{A}u = \lambda u.$$

ТЕОРЕМА 10.1. Из условий (Γ_1) и (Γ_2) следует сходимость по Хаусдорфу $\text{Sp } \mathcal{A}^\varepsilon \rightarrow \text{Sp } \mathcal{A}$:

$$(H_1) \quad \forall \lambda \in \text{Sp } \mathcal{A} \quad \exists \lambda_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}^\varepsilon \text{ такое, что } \lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda;$$

$$(H_2) \quad \text{если } \lambda_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}^\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda, \quad \lambda < \infty, \text{ то } \lambda \in \text{Sp } \mathcal{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (H_1) следует только из условия (Γ_1), как это показано в [24]. Докажем здесь свойство (H_2). Для $\lambda_\varepsilon \in \text{Sp } \mathcal{A}^\varepsilon$ найдутся

$$u_\varepsilon \in H_\varepsilon, \quad \mathcal{A}^\varepsilon u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon = o(1) \text{ в } H_\varepsilon, \quad (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon = 1.$$

Можно считать, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ (следует из (Γ_2)). Переход к пределу дает соотношения

$$\mathcal{A}u = \lambda u, \quad (u, u) = 1,$$

из которых следует, что $\lambda \in \text{Sp } \mathcal{A}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon = \int_0^\infty \lambda dE_\varepsilon(\lambda)$, $\mathcal{A} = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ – спектральные разложения операторов $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 10.2. В предположении (Γ_1), если λ не есть собственное значение $\mathcal{A}$, то

$$E_\varepsilon(\lambda) \rightarrow E(\lambda).$$

Эта теорема доказана в работе [24].

ТЕОРЕМА 10.3. В предположении (Γ_1), если λ не есть собственное значение $\mathcal{A}$, то

$$\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon \geq \dim E(\lambda)H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (10.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – ортонормированная система в $E(\lambda)H$. Для любого i существует $\hat{u}_i^\varepsilon \in H_\varepsilon$ такой, что $\hat{u}_i^\varepsilon \rightarrow u_i$. Пусть $u_i^\varepsilon = E_\varepsilon(\lambda)\hat{u}_i^\varepsilon$, тогда по теореме 10.2

$$(u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_\varepsilon = (E_\varepsilon(\lambda)\hat{u}_i^\varepsilon, \hat{u}_j^\varepsilon)_\varepsilon \rightarrow (E(\lambda)u_i, u_j) = (u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

и, значит, матрица Грама векторов $u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon$ невырождена при ε достаточно малых, так как

$$\det \|(u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_\varepsilon\|_{i,j=1}^n \rightarrow 1.$$

Следовательно, $u_i^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon$ – линейно независимы и неравенство (10.1) выполнено. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10.4. В предположении (Γ_1) , (Γ_2) , если λ не является собственным значением $\mathcal{A}$, то

$$\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon \leq \dim E(\lambda)H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв произвольное λ , считаем, что

$$\dim E(\lambda)H = n < \infty, \quad (10.3)$$

в случае $\dim E(\lambda)H = \infty$ доказывать нечего. Предположив, что (10.2) неверно, найдем подпоследовательность $\varepsilon' \subset \varepsilon$ такую, что при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$

$$\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon > n.$$

Сначала для ясности допустим, что операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеют компактные резольвенты. Тогда найдутся векторы $u_1^\varepsilon, \dots, u_{n+1}^\varepsilon$ такие, что

$$\mathcal{A}^\varepsilon u_i^\varepsilon = \lambda_i^\varepsilon u_i^\varepsilon, \quad (u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_\varepsilon = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad \lambda_i^\varepsilon \leq \lambda. \quad (10.4)$$

Как и при доказательстве теоремы 10.1, предельный переход дает

$$\mathcal{A}u_i = \lambda_i u_i, \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1, \quad \lambda_i \leq \lambda,$$

что противоречит (10.3). Если резольвенты операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ не являются компактными, в (10.4) надо взять “почти собственные” векторы. Теорема доказана.

Аналогично устанавливается такое утверждение: если $\lambda_1 < \lambda_2$ не являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dim(E(\lambda_2) - E(\lambda_1))H_\varepsilon = \dim(E(\lambda_2) - E(\lambda_1))H.$$

В свою очередь, отсюда получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10.5. Пусть λ – собственное значение кратности r оператора $\mathcal{A}$ и в интервале $I = (-\delta + \lambda, \lambda + \delta)$ нет других собственных значений оператора $\mathcal{A}$. Тогда для достаточно малых ε в интервале I содержится ровно r собственных значений оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ с учетом их кратности.

Теперь введем новые предположения. Сначала допустим, что предельный оператор $\mathcal{A}$ имеет компактную резольвенту. При этом оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ может иметь непрерывный спектр. Из теорем 10.1, 10.5 следует, что при малых ε оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ обязательно имеет собственные значения (вблизи собственных значений оператора $\mathcal{A}$ и той же кратности), а непрерывный спектр “уходит на бесконечность” при $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, спектр оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ “асимптотически” дискретен.

Наконец, допустим, что и оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ имеет компактную резольвенту. Упорядочим собственные значения по принципу минимакса и пусть

$$\begin{aligned} \{u_i^\varepsilon\} & \text{ — ортогональный базис в } H_\varepsilon, \quad \mathcal{A}^\varepsilon u_i^\varepsilon = \lambda_i^\varepsilon u_i^\varepsilon, \\ \{u_i\} & \text{ — ортогональный базис в } H, \quad \mathcal{A}u_i = \lambda^i u_i. \end{aligned}$$

Пусть $K(\lambda)$ – подпространство собственных векторов с собственным значением $\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 10.6. *Собственные значения и собственные векторы операторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}$ связаны соотношениями:*

- (i) $\lambda_k^\varepsilon \rightarrow \lambda_k$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $k = 1, 2, \dots$;
- (ii) $\exists \varepsilon' \subset \varepsilon$: $u_k^{\varepsilon'} \rightarrow U_k \in K(\lambda_k)$, $\|U_k\| = 1$, $k = 1, 2, \dots$;
- (iii) $u_k^\varepsilon \rightarrow u_k$, если λ_k – не кратное собственное значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для данного k $\hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \dots < \hat{\lambda}_j = \lambda_k$ – все различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, не превосходящих λ_k , при этом r_i – кратность $\hat{\lambda}_i$, $r_1 + \dots + r_j = m \geq k$. Выберем непересекающиеся интервалы $I_1, \dots, I_j$, содержащие по одной точке $\hat{\lambda}_i$. По теореме 10.4 при достаточно малых ε m первых собственных значений $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_m^\varepsilon$ попадают последовательно в интервалы $I_1, \dots, I_j$ в соответствии с кратностью $r_1, \dots, r_j$. Стыгивая интервал I_i к точке $\hat{\lambda}_i$, получаем сходимость $\lambda_i^\varepsilon \rightarrow \lambda_i$, $i = 1, \dots, m$. В частности, $\lambda_k^\varepsilon \rightarrow \lambda_k$. Утверждение (i) доказано. Из него в силу (Γ_1) , (Γ_2) следует (ii).

Рассмотрим случай не кратного λ_k . Тогда для подпоследовательности ε' из п. (ii) $U_k = \pm u_k$, так как $\|U_k\| = \|u_k\| = 1$, $\dim K(\lambda_k) = 1$. Найдется последовательность $U_k^\varepsilon, U_k^{\varepsilon'} \rightarrow U_k$, для которой $(u_k^{\varepsilon'}, U_k^{\varepsilon'})_{\varepsilon'} \geq 0$. Тогда в пределе $(u_k, U_k) \geq 0$ и, значит, $U_k = u_k$. Отсюда следует утверждение (iii). Теорема доказана.

§ 11. Об аппроксимативных условиях

1. Пусть μ^h – периодическая нормированная борелева мера в $\mathbb{R}^d$ с ячейкой периодичности $Y = [-1/2, 1/2]^d$, слабо сходящаяся к мере μ : $\mu^h \rightharpoonup \mu$. Здесь нам удобно рассматривать соболевские пространства теории упругости как множества пар (u, v) , состоящих из вектора u и его градиента $v = e(u)$. Например, $W_{\text{per}} = W_{\text{per}}(Y, d\mu)$ есть замыкание множества $\{(\varphi, e(\varphi)), \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^d\}$ в $L^2(Y, d\mu)^d \times L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)/2}$. Привычнее называть соболевским пространством $\mathcal{H}_{\text{per}} = \{u : (u, v) \in W_{\text{per}}\}$.

Для меры μ^h введем аппроксимативные условия (или свойства) так же, как для составной меры в § 5, см. определение 5.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Скажем, что в пространстве $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, \mu^h)$ *возможен предельный переход*, если

$$(u, v) \in W_{\text{per}}(Y, d\mu), \quad \text{т.е. } v = e(u), \quad (11.1)$$

как только

$$u^h \rightharpoonup u, \quad e(u^h) \rightharpoonup v \quad \text{в } L^2(Y, d\mu^h). \quad (11.2)$$

Оказывается, что аппроксимативные условия и возможность предельного перехода тесно связаны. Чтобы убедиться в этом, удобно оперировать *двойственным* определением соболевского пространства теории упругости (для пространства скалярных функций это определение введено В. В. Жиковым [25]). Будем использовать отношение, определенное в случае составной меры в § 5:

$$a = \operatorname{div} b \quad (\text{по мере } \mu), \quad (11.3)$$

между вектором a и симметрической матрицей b из $L^2(Y, d\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Скажем, что пара (u, v) , где

$$u \in L^2(Y, d\mu)^d, \quad v \in L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)/2}$$

принадлежит пространству $\widetilde{W}_{\text{per}}$, если

$$\int_Y a \cdot u \, d\mu = - \int_Y b \cdot v \, d\mu,$$

как только $a = \operatorname{div} b$ (по мере μ).

Непосредственно из определений выводятся следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 11.3. Пространства W_{per} и $\widetilde{W}_{\text{per}}$ совпадают.

ТЕОРЕМА 11.4. Из аппроксимативного условия (i) следует возможность предельного перехода в $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu^h)$.

Предположим, что для меры μ^h пространство жестких периодических перемещений состоит только из постоянных векторов, т.е.

$$\mathcal{R}(\mu^h) = \mathbb{R}^d. \quad (11.4)$$

ТЕОРЕМА 11.5. Пусть в дополнение к условию (11.4) выполнено равномерное по h неравенство Корна (7.22). Тогда возможность предельного перехода в соболевском пространстве $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu^h)$ влечет выполнение аппроксимативных условий (i), (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для a и b , удовлетворяющих отношению (11.3), возьмем какие-то аппроксимации $\tilde{a}^h \rightarrow a$, $\tilde{b}^h \rightarrow b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Для $a^h = \tilde{a}^h - \int_Y \tilde{a}^h \, d\mu^h$ по-прежнему имеем сходимость $a^h \rightarrow a$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Рассмотрим периодическую задачу

$$u^h \in \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu^h), \quad \operatorname{div} e(u^h) = \operatorname{div} \tilde{b}^h - a^h, \quad \int_Y u^h \, d\mu^h = 0,$$

решение которой удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Y e(u^h) \cdot e(\varphi) \, d\mu^h = \int_Y \tilde{b}^h \cdot e(\varphi) \, d\mu^h + \int_Y a^h \cdot \varphi \, d\mu^h. \quad (11.5)$$

Существование решения и равномерная ограниченность u^h , $e(u^h)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ следуют из неравенства Корна (7.22). Поэтому можно считать, что имеют место сходимости (11.2) и, значит, по предположению выполнены соотношения (11.1). Взяв в тождестве (11.5) $\varphi = u^h$, после перехода к пределу с учетом сходимостей для a^h и $\tilde{b}^h$ получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_Y e(u^h) \cdot e(u^h) \, d\mu^h = \int_Y [b \cdot e(u) + a \cdot u] \, d\mu = 0$$

в силу (11.3) и определения 11.2, т.е. $e(u^h) \rightarrow 0$ в $L^2(Y, d\mu^h)$.

Полагая $b^h = \tilde{b}^h - e(u^h)$, получаем искомую сильную аппроксимацию матрицы b и вместе с тем аппроксимативное свойство (i). Одновременно проверено и свойство (ii): для $a \equiv 0$ берем $a^h \equiv 0$. Теорема доказана.

2. Вернемся к составным мерам. Пусть F – произвольный составленный из отрезков 1-периодический связный граф на плоскости (сетка), $Y = [-1/2, 1/2)^2$ – ячейка периодичности. Заменяя каждое звено I из F на полосу, ширина которой равна h , а средняя линия совпадает с I , получаем тонкую сетку F^h . Пусть λ, λ^h – естественные меры на сетках F, F^h и μ, μ^h – соответствующие составные меры, см. (1.1).

Будем предполагать, что в каждой вершине графа F сходятся хотя бы два ребра. В этом случае можно дать описание пространства $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu)$ и проверить аппроксимативные условия.

ТЕОРЕМА 11.6. *Имеет место следующее: $u \in \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu) \Leftrightarrow$*

- (i) $u \in H_{\text{per}}^1(Y, d\mu)^2$;
- (ii) $u|_F \in \mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\lambda)$, где $u|_F$ – след функции $u \in H_{\text{per}}^1(Y, d\mu)^2$ на F .

ТЕОРЕМА 11.7. *Для составной меры μ^h выполнены аппроксимативные условия (i), (ii).*

Для доказательства теоремы 11.7 достаточно (см. теорему 11.5 и неравенство Корна (9.1)) заметить возможность предельного перехода в $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\mu^h)$, которая вытекает (см. теорему 11.6) из возможности предельного перехода в пространствах $H_{\text{per}}^1(Y, dx)^2$ и $\mathcal{H}_{\text{per}}(Y, d\lambda^h)$. Этот факт для сеточного пространства выводится (см. теорему 11.4) из аппроксимативных свойств меры λ^h , проверенных в [26], или может быть доказан непосредственно (см. [27]).

Настоящая работа представляет собой расширенный вариант статьи [28].

Список литературы

1. Жиков В. В. К технике усреднения вариационных задач // Функци. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 1. С. 14–29.
2. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
3. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 81–148.
4. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 6. С. 741–745.
5. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 5. С. 61–95.
6. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических структурах // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 5. С. 588–592.
7. Bouchitté G., Fragalà I. Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures // SIAM J. Math. Anal. 2001. V. 32 (6). P. 1198–1226.
8. Chiadò Piat V., Zhikov V. V. Relaxation problems in Sobolev spaces with respect to a measure // Rapporto interno. № 18, luglio 2003, Politecnico di Torino.
9. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Об усреднении на периодических сетках // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 4. С. 443–447.
10. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Об усредненном тензоре на периодических сетках // Труды МИАН (в печати).
11. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
12. Панасенко Г. П. Осреднение периодических структур с хорошо проводящими неоднородностями // Вестн. МГУ. Сер. вычислительная математика и кибернетика. 1980. Т. 3. С. 4–11.

13. *Панасенко Г. П.* Осреднение полей в композитных материалах с высоко модульной арматурой // Вестн. МГУ. Сер. вычислительная математика и кибернетика. 1983. Т. 2. С. 20–27.
14. *Косарев А. Ю.* Асимптотика осредненных характеристик периодических упругих сред с сильно изменяющимися свойствами // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 1. С. 38–42.
15. *Сандраков Г. В.* Осреднение системы уравнений теории упругости с контрастными коэффициентами // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 12. С. 37–92.
16. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
17. *Sanchez-Palencia E.* Problèmes de perturbations liés aux phénomènes de conduction à travers des couches minces de grande résistivité // J. Math. Pures Appl. (9). 1974. V. 53. P. 251–270.
18. *Mosco U.* Composite media and asymptotic Dirichlet forms // J. Funct. Anal. 1994. V. 123. P. 368–421.
19. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 27–58.
20. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости // Труды сем. имени И. Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 149–187.
21. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
22. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
23. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
24. *Пастухова С. Е.* О сходимости гиперболических полугрупп в переменном гильбертовом пространстве // Труды сем. имени И. Г. Петровского. 2004. Т. 24. С. 216–241.
25. *Zhikov V. V.* Note on Sobolev space // Contemp. Math. 2003. V. 10. P. 54–58.
26. *Пастухова С. Е.* Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на тонких стержневых структурах // Современная матем. и ее прилож. 2003. Т. 12. С. 99–106.
27. *Пастухова С. Е.* Аппроксимативные условия и предельный переход в соболевских пространствах на тонких и составных структурах // Современная матем. и ее прилож. 2004. Т. 16. С. 47–63.
28. *Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических составных структурах // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 3. С. 316–321.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

Поступила в редакцию
07.10.2003 и 13.09.2004