Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Степанов, Нерациональные дивизоры над невырожденными cDV -точками,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 7, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 11:22:03

УДК 512.7

Д. А. Степанов

Нерациональные дивизоры над невырожденными cDV -точками

Пусть (X, o) – 3-мерная терминальная особенность типа cD или cE , определенная в $\mathbb{C}^4$ уравнением, невырожденным по отношению к своей диаграмме Ньютона. Мы показываем, что существует не более одного нерационального дивизора E над (X, o) с дискрепантностью $a(E, X) = 1$. Также мы описываем все раздутия особенности (X, o) с нерациональными исключительными дивизорами дискрепантности 1.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

В работе изучаются разрешения 3-мерных горенштейновых терминальных особенностей. Определение, классификация и основные свойства терминальных особенностей приведены в работе [1]. Нам необходимы некоторые понятия торической геометрии (см. [2]), в частности, очень важным является вложенное торическое разрешение Варченко–Хованского (см. [3]). Далее все особенности предполагаются 3-мерными и определенными над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – разрешение терминального многообразия (особенности) X , и пусть E – простой исключительный дивизор π . В работе [4; следствие 2.14] доказано, что E является бирационально-линейчатой поверхностью. Более того, если (X, o) – росток особенности типа cA/r , $r \geq 1$, то все E с дискрепантностями $a(E, X) \leq 1$ и центром $\text{center}_X(E) = o$ рациональны (см. [5; 2.4]). Значение условия $a(E, X) < 1$ состоит в том, что исключительные дивизоры с таким свойством присутствуют в любом разрешении X ; исключительные дивизоры с дискрепантностями $a \leq 1$ и центром в o появляются в любом дивизориальном разрешении (мы отождествляем два дивизора над X , если они дают одно и то же дискретное нормирование поля $k(X)$).

Однако над терминальными особенностями других типов есть нерациональные дивизоры с $a \leq 1$. Некоторые примеры приведены в § 4. В настоящей работе мы описываем нерациональные исключительные дивизоры с дискрепантностью $a = 1$ и центром в o , где (X, o) – горенштейнова терминальная особенность типа, отличного от cA , т.е. cD - или cE -особенность. Заметим, что так как X горенштейново, то 1 является наименьшим возможным значением для $a(E, X)$. Мы также предполагаем, что (X, o) определено уравнением, невырожденным по отношению к своей

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00441) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (гранты №№ 489.2003.1, 1910.2003.1).

диаграмме Ньютона. Наши результаты сформулированы в теоремах 2.2 и 2.3 параграфа 2.

Если не предполагать невырожденности, то для описания нерациональных дивизоров нужен более детальный анализ. Для cD -точек он проведен в работе [6]. Мы включили случай cD в настоящую работу для полноты.

Автор признателен Ю. Г. Прохорову и С. А. Кудрявцеву за постановку задачи и ценные беседы.

§ 2. Результаты и предварительные сведения

Рассмотрим гиперповерхность $X \subset \mathbb{C}^4$, $0 \in X$. Особенность $0 \in X$ называется *составной дювалевской* (сокращенно *cDV -точкой*), если общее гиперплоское сечение H многообразия X , проходящее через 0 , — поверхность с дювалевской особенностью. Мы будем говорить, что $0 \in X$ имеет тип cA_n , $n \geq 1$ (cD_n , $n \geq 4$, cE_6 , cE_7 , cE_8), если $(H, 0)$ — дювалевская особенность типа A_n (D_n , E_6 , E_7 , E_8 соответственно). В аналитической окрестности точки 0 особенность X типа cA_n (cD_n , cE_6 , cE_7 , cE_8) может быть задана уравнением вида

$$f(x, y, z) + tg(x, y, z, t) = 0,$$

где g — некоторый степенной ряд $f = x^2 + y^2 + z^{n+1}$ ($x^2 + y^2z + z^{n-1}$, $x^2 + y^3 + z^4$, $x^2 + y^3 + yz^3$, $x^2 + y^3 + z^5$ соответственно). 3-мерные горенштейновы терминальные особенности — это в точности изолированные cDV -точки [7].

Пусть $f(x, y, z, t)$ — степенной ряд с диаграммой Ньютона $\Gamma(f)$. Напомним, что f называется *невырожденным по отношению к своей диаграмме Ньютона* (далее просто *невырожденным*), если для любой грани ρ диаграммы $\Gamma(f)$ гиперповерхность

$$\{f_\rho(x, y, z, t) = 0\} \subset (\mathbb{C}^*)^4$$

неособа (см. [3; §§ 2, 5]). Здесь

$$f_\rho = \sum_{m \in \rho} a_m x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3} t^{m_4}, \quad \text{где } f = \sum_{m=(m_1, m_2, m_3, m_4)} a_m x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3} t^{m_4}.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ — росток изолированной cDV -точки типа, отличного от cA . Тогда после подходящей замены координат особенность $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ определена одним из следующих уравнений:

$$x^2 + y^2z + z^{n-1} + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + \dots + a_{n-1} z^{n-2} t^{b_{n-1}} + a_n y t^{b_n} + (\dots) = 0, \quad (1)$$

если X имеет тип cD_n . Здесь $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, и для каждого i , $1 \leq i \leq n-1$, выполнено $i-1 + b_i \geq n-1$;

$$x^2 + y^3 + z^4 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 y t^{b_4} + a_5 y z t^{b_5} + a_6 y z^2 t^{b_6} + (\dots) = 0, \quad (2)$$

если X имеет тип cE_6 . Здесь $i-1 + b_i \geq 4$ для $i = 1, 2, 3$;

$$\begin{aligned} & x^2 + y^3 + yz^3 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + \dots + a_k z^{k-1} t^{b_k} + a_{k+1} z^k \\ & + a_{k+2} y t^{b_{k+1}} + a_{k+3} y z t^{b_{k+2}} + (\dots) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

если X имеет тип cE_7 . Здесь k – некоторое целое число ≥ 5 ;

$$\begin{aligned} x^2 + y^3 + z^5 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 z^3 t^{b_4} \\ + a_5 y t^{b_5} + a_6 y z t^{b_6} + a_7 y z^2 t^{b_7} + a_8 y z^3 t^{b_8} + (\dots) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

если X имеет тип cE_8 . Здесь $i - 1 + b_i \geq 5$ для $i = 1, 2, 3, 4$.

Заключенная в скобки часть каждого уравнения не влияет на его диаграмму Ньютона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лемму для cE_6 -особенностей. В других случаях доказательство аналогично.

Итак, предположим, что X задано уравнением

$$f = x^2 + y^3 + z^4 + tg(x, y, z, t) = 0.$$

Расположим мономы ряда tg в возрастающем порядке по отношению к grlex -упорядочению (см. [8; гл. 2, § 2]). Допустим, что $a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$ – первый из мономов tg , содержащий переменную x . Если $\alpha = 1$, то сделаем замену координат $x \leftarrow x - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\beta z^\gamma t^\delta$, $y \leftarrow y$, $z \leftarrow z$, $t \leftarrow t$. Если же $\alpha \geq 2$, то сделаем замену $x \leftarrow x / \sqrt{1 + a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^{\alpha-2} y^\beta z^\gamma t^\delta}$, $y \leftarrow y$, и т.д. В обоих случаях мы уничтожаем моном $a_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta$, но предыдущая часть ряда tg не изменяется. Повторяя эту процедуру, мы увеличиваем число

$$\min\{\deg x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta \mid x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta \in tg, \alpha \geq 1\}.$$

Напомним, что данная особенность $(X, 0)$ изолирована. Следовательно, она конечно определена [9; теорема 3.3] и мы можем привести ее уравнение к виду

$$x^2 + y^3 + z^4 + tg(y, z, t) = 0.$$

(Нам следовало бы писать g' вместо g , но здесь использование того же обозначения не должно привести к путанице.)

Аналогично, используя мономы y^3 и z^4 , мы удаляем мономы с y^β , $\beta \geq 2$, и z^γ , $\gamma \geq 3$, из ряда tg и приводим уравнение к виду (2). Если бы в f был моном $z^\gamma t^\delta$ с $\gamma + \delta \leq 3$, то f определял бы особенность типа cD_4 или cA ; это доказывает условие $i - 1 + b_i \geq 4$ для $i = 1, 2, 3$. По построению мономы из части $(\dots)$ уравнения (2) не влияют на его диаграмму Ньютона.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $(X, 0)$ – терминальная точка типа cD или cE , определенная в $\mathbb{C}^4$ одним из уравнений (1)–(4). Кроме этого, предположим, что это уравнение невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда для любого разрешения $\pi: Y \rightarrow X$ существует не более одного нерационального исключительного дивизора $E \subset Y$ с дискрепантностью $a(E, X) = 1$ и $\text{center}_X(E) = 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. В условиях теоремы 2.2 предположим, что E – нерациональный дивизор над X с $a(E, X) = 1$ и $\text{center}_X(E) = 0$. Тогда E бирационально изоморфен исключительному дивизору взвешенного раздутия σ_w , где все возможные веса w описаны ниже.

(i) Если X имеет тип cD_n , то

- 1) если $n = 2k$, $k \geq 2$, то $w = (k, k-1, 1, 1)$;
- 2) если $n = 2k+1$, $k \geq 2$, то $w = (k, k, 1, 1)$.

В обоих случаях E бирационален поверхности $C \times \mathbb{P}^1$, где C – гиперэллиптическая кривая рода $g \leq k-1$.

(ii) Если X имеет тип cE_6 , то вес w один из следующих:

- 1) $w = (2, 2, 1, 1)$;
- 2) $w = (3, 2, 2, 1)$;
- 3) $w = (4, 3, 2, 1)$.

Во всех случаях $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где C – кривая рода 1.

(iii) Если X имеет тип cE_7 , то вес w один из следующих:

- 1) $w = (3, 2, 2, 1)$;
- 2) $w = (4, 3, 2, 1)$;
- 3) $w = (5, 3, 2, 1)$;
- 4) $w = (6, 4, 3, 1)$.

В случаях 1), 2), 4) $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где C – кривая рода 1. В случае 3) $g(C) \leq 3$ и C может быть негиперэллиптической.

(iv) Если X имеет тип cE_8 , то вес w один из следующих:

- 1) $w = (3, 2, 2, 1)$;
- 2) $w = (4, 3, 2, 1)$;
- 3) $w = (5, 3, 2, 1)$;
- 4) $w = (6, 4, 3, 1)$;
- 5) $w = (7, 5, 3, 1)$;
- 6) $w = (8, 5, 3, 1)$;
- 7) $w = (9, 6, 4, 1)$;
- 8) $w = (12, 8, 5, 1)$.

В случае 6) $E \simeq C \times \mathbb{P}^1$, где $g(C) \leq 4$ и C может быть негиперэллиптической. В остальных случаях $g(C) = 1$.

Доказательства см. в §3.

Рассмотрим гиперповерхность $X \subset \mathbb{C}^n$, определенную невырожденной функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Допустим, что $0 \in X$ – изолированная особенность. Тогда для $X \subset \mathbb{C}^n$ существует вложенное торическое разрешение, т.е. такой торический морфизм $\pi: \widetilde{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathbb{C}^n$, что $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ и собственный прообраз $\widetilde{X}$ многообразия X неособы и исключительное множество морфизма $\pi|_{\widetilde{X}}$ – дивизор с нормальными пересечениями [3; §§9, 10]. Морфизм π строится по некоторому разбиению Σ положительного октанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Исключительные дивизоры E_i морфизма π соответствуют одномерным конусам $\tau_i \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ разбиения Σ . Выберем один простой исключительный дивизор E_τ , соответствующий конус τ и примитивный вектор $w = (w_1, \dots, w_n)$ вдоль τ ($w \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$) и положим $E_\tau|_{\widetilde{X}} = \sum_j m_j E_j$. Также обозначим через $\Gamma(f)$ диаграмму Ньютона f ; $\Gamma(f) \subset (\mathbb{R}^n)^*$, где $(\mathbb{R}^n)^*$ – пространство, двойственное к $\mathbb{R}^n$; соответствующее спаривание мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Теперь вычислим дискрепантность $a(E_j, X)$.

ЛЕММА 2.4. Дискрепантность $a(E_j, X) = m_j(w_1 + w_2 + \dots + w_n - 1 - w(f))$, где $w(f) = \min\{\langle w, v \rangle \mid v \in \Gamma(f)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3; §10] у E_τ в $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ есть аффинная окрестность $U \simeq \mathbb{C}^n$ с такими координатами $y_1, \dots, y_n$, что уравнение $y_1 = 0$ определяет $E_\tau \cap U$

[illegible]

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если X терминально, горюшфейново и $a(E_j, X) = 1$, то

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n - 1 - w(f) = 1.$$

ЛЕММА 2.6. Пусть описанная выше поверхность $E \subset \mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ неприводима и имеет только рациональные особенности. Тогда она рациональна.

$$P_2(\tilde{E}) = h^0(2K_{\tilde{E}}) = 0.$$

Лемма 2.6 может быть применена, например, когда E квазигладка или когда σ_w – plt-раздутие (см. [10; определение 3]).

Рассмотрим вложенное торическое разрешение $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ данной невырожденной терминальной cDV -точки $0 \in X \subset \mathbb{C}^4$, $X = \{f = 0\}$. Обозначим через Σ соответствующее разбиение октанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ и возьмем примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}_{>0}^4$ вдоль одномерного конуса τ из Σ . Как в лемме 2.4, положим $E_\tau \cap \tilde{X} = \bigcup_j E_j$. Так как у любых двух разбиений октанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ есть общее подразбиение, дивизоры E_j находятся во взаимно однозначном соответствии с исключительными дивизорами взвешенного раздутия σ_w . Если $E'_j \subset \text{Ex}(\sigma_w)$ соответствует E_j , то E'_j и E_j бирационально изоморфны.

Дивизор $\text{Exs } \sigma_w$ задается в $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ уравнением

$$f_{\rho(w)}(x, y, z, t) = 0,$$

где $f_{\rho(w)}$ — часть ряда f , соответствующая грани

$$\rho(w) = \{v \in \Gamma(f) \mid \langle w, v \rangle = w(f)\}.$$

Теперь разберем случаи cD_n, cE_6, cE_7, cE_8 по отдельности.

3.1. Тип cD_n . Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип cD_n , $n \geq 4$. Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (1):

$$f = x^2 + y^2z + z^{n-1} + a_1t^{b_1} + a_2zt^{b_2} + \dots + a_{n-1}z^{n-2}t^{b_{n-1}} + a_nyt^{b_n} + (\dots) = 0.$$

По нашему предположению ряд f невырожден. Пример диаграммы Ньютона для $f(0, y, z, t)$ приведен на рис. 1. Заметим, что (1) содержит только один моном с переменной x (x^2), поэтому $\Gamma(f)$ полностью определяется диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$.

Рис. 1. Диаграмма Ньютона cD -особенности

Допустим, что E — нерациональный дивизор над X дискрепантности $a(E, X) = 1$ и $\text{center}_X(E) = 0$. Тогда мы можем рассматривать E как один из исключительных дивизоров некоторого взвешенного раздутия σ_w . Исключительный дивизор раздутия σ_w соответствует некоторой грани ρ диаграммы $\Gamma(f)$. Ясно, что 0-мерные грани дают только рациональные дивизоры. Если ρ — 1-мерная грань, то f_ρ представляет собой либо квазиоднородный полином от z и t , либо полином, содержащий только два монома. В обоих случаях f_ρ определяет рациональные поверхности. Следовательно, $\dim \rho = 2$ или 3.

Если грань ρ не содержит ни одного из мономов x^2, y^2z, z^{n-1} , то $f_\rho = a_n y t^{b_n} + h(z, t)$, $a_n \neq 0$. Опять $\{f_\rho = 0\}$ рационально. Значит, мы можем предполагать, что $x^2 \in \rho$ или $y^2z \in \rho$.

Теперь воспользуемся условием $a(E, X) = 1$. Пусть L — такая гиперплоскость в $(\mathbb{R}^4)^*$, что $L \supset \rho$ и вектор w нормален к L . Запишем уравнение L в отрезках на осях:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — координаты в $(\mathbb{R}^4)^*$. Если $m = \text{НОК}(a, b, c, d)$, то $m = w(f)$ и $m/a = w_1, m/b = w_2, m/c = w_3, m/d = w_4$. В нашем случае

- (i) $a = 2, 2/b + 1/c \geq 1, c \leq n - 1$ или $a < 2, 2/b + 1/c = 1, c \leq n - 1$;
- (ii) $m/a + m/b + m/c + m/d - 1 - m = 1$ (см. следствие 2.5).

ЛЕММА 3.1. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четверка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:

- 1) $((2k - 1)/k, (2k - 1)/(k - 1), 2k - 1, 2k - 1)$, здесь $n = 2k, k \geq 2$;
- 2) $(2, 2, 2k, 2k)$, здесь $n = 2k + 1, k \geq 2$;
- 3) $(2, (2k - 1)/(k - 1), k, 2k)$, $k \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = 2$. В этом случае $m = 2k, k \geq 2$.

Имеем $2k(1/2 + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - 2k = 1$. Используя $2/b + 1/c \geq 1$, получаем

$$\frac{2k}{2c} + \frac{2k}{d} \leq 2.$$

Но $2k/d \in \mathbb{Z}_{>0}$, значит, $2k/d = 1, 2k/c \leq 1$. Кроме этого, $2k/c \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$\frac{2k}{2c} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2k}{2c} = 1.$$

Пусть $2k/(2c) = 1/2, c = 2k = m = d$. Тогда $c = n - 1, b = 2$. Мы получили случай 2).

Теперь предположим, что $2k/(2c) = 1, k = c$. Здесь мы получаем $b = 2k/(k - 1)$ и

$$(a, b, c, d) = \left(2, \frac{2k}{k - 1}, k, 2k\right),$$

где $k \leq n - 1$. Это случай 3).

Пусть теперь $a < 2, 2/b + 1/c = 1$. В этом случае из (ii) следует, что

$$\frac{m}{2c} + \frac{m}{d} < 2.$$

Но $m/d \in \mathbb{Z}_{>0}, m/(2c) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$, поэтому $m = d, m/(2c) = 1/2$, а значит, $m = c = d$. Таким образом, $m = n - 1, b = 2(n - 1)/(n - 2)$. Подставляя $2(n - 1)/(n - 2), n - 1, n - 1$ вместо b, c, d в (ii), получаем

$$\frac{n - 1}{a} + \frac{n - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Так как $(n-1)/a \in \mathbb{Z}$, число $n-1$ нечетно, т.е. $n-1 = 2k-1$. Мы приходим к случаю 1).

Случаи 1) и 2) леммы 3.1 соответствуют раздутиям (i), 1) и 2) теоремы 2.3. Случай 3) дает раздутие $\sigma = (k, k-1, 2, 1)$. Но σ удовлетворяет условиям предложения 3.2 из работы [11], значит, это plt-раздутие многообразия X и из леммы 2.6 следует, что его исключительный дивизор рационален. В остальных случаях исключительный дивизор может быть нерациональным (см. примеры в § 4), однако в случае 1) n четно, а в случае 2) n нечетно, следовательно, нерациональный дивизор единствен.

Исключительный дивизор E взвешенного раздутия $\sigma = (k, k-1, 1, 1)$ (теорема 2.3, (i), 1)) задается в $\mathbb{P}(k, k-1, 1, 1)$ уравнением

$$y^2 z + z^{2k-1} + h(y, z, t) = 0,$$

где $h = y h_1(z, t) + h_2(z, t)$ — квазиоднородный полином степени $2k-1$ по отношению к весам $(k-1, 1, 1)$. Очевидно, что E — конус над гиперэллиптической кривой C степени $2k-1$ в $\mathbb{P}(k-1, 1, 1)$. Как легко вычислить, род $g(C) \leq k-1$.

Для взвешенного раздутия $\sigma = (k, k, 1, 1)$ (теорема 2.3, (i), 2)) исключительный дивизор E задан в $\mathbb{P}(k, k, 1, 1)$ уравнением

$$x^2 + h(z, t) = 0,$$

где h — однородный полином степени $2k$. Снова E оказывается конусом над гиперэллиптической кривой рода $g \leq k-1$. Этим завершается доказательство теорем 2.2 и 2.3 для cD -особенностей.

3.2. Тип cE_6 . Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип cE_6 . Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (2)

$$f = x^2 + y^3 + z^4 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 y t^{b_4} + a_5 y z t^{b_5} + a_6 y z^2 t^{b_6} + (\dots) = 0.$$

По нашему предположению ряд f невырожден. Пример диаграммы Ньютона для $f(0, y, z, t)$ приведен на рис. 2. Как и выше, $\Gamma(f)$ полностью определена диаграммой Ньютона ряда $f(0, y, z, t)$.

Допустим, что E — нерациональный дивизор над X с дискрепантностью $a(E, X) = 1$ и $\text{center}_X(E) = 0$. Можно предполагать, что E — исключительный дивизор некоторого взвешенного раздутия σ_w ; обозначим через ρ соответствующую грань $\Gamma(f)$. Можно доказать, что 0- и 1-мерные грани дают только рациональные дивизоры, так что мы должны рассмотреть только случаи $\dim \rho = 2$ и $\dim \rho = 3$.

Если грань ρ не содержит ни одного из мономов x^2, y^3, z^4 , то она содержит хотя бы один из мономов $y t^{b_4}, y z t^{b_5}, y z^2 t^{b_6}$, поэтому E рационален.

Пусть $L \subset (\mathbb{R}^4)^*$ — такая гиперплоскость, что $L \supset \rho$ и w нормален к L . Запишем уравнение L в отрезках на осях:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1,$$

 Рис. 2. Диаграмма Ньютона sE_6 -особенности

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — координаты в $(\mathbb{R}^4)^*$. Если $m = \text{НОК}(a, b, c, d)$, то $m = w(f)$ и $w_1 = m/a, w_2 = m/b, w_3 = m/c, w_4 = m/d$. В нашем случае

(i) $a = 2, b \leq 3, c \leq 4$, или $a < 2, b = 3, c \leq 4$, или $a < 2, b < 3, c = 4$.

Из условия $a(E, X) = 1$ по следствию 2.5 мы получаем

(ii) $m(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - m = 1$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четверка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:

- 1) $(2, 2, 4, 4)$;
- 2) $(2, 3, 3, 6)$;
- 3) $(2, 8/3, 4, 8)$;
- 4) $(2, 3, 4, 12)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1: $a = 2$. Здесь $m = 2k$. Имеем

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

Поэтому $m(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - m \geq m(1/12 + 1/d) - 1$. Из (ii) следует, что

$$\frac{m}{12} + \frac{m}{d} \leq 2.$$

Так как $m/d \in \mathbb{Z}_{>0}$, получаем $m/d = 1, m \leq 12$. С другой стороны, ясно, что $m \geq 4$.

Пусть $m = d = 4$. Тогда из (ii) получаем

$$4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{4} - 1\right) = 2,$$

$$\frac{4}{b} + \frac{4}{c} = 3.$$

Есть только одна возможность $b = 2, c = 4$. Это дает случай 1).

Пусть $m = d = 6$. Здесь мы получаем $6/b + 6/c = 4$. Единственная возможность $-b = 3, c = 3$. Это дает случай 2).

Пусть $m = d = 8$. Здесь мы находим $b = 8/3, c = 4$. Это случай 3).

Пусть $m = d = 10$. Получаем $10/b + 10/c = 6$. Так как $b \leq 3, 10/b \geq 4$, но так как $c \leq 4, 10/c \geq 3$, получаем противоречие.

Пусть $m = d = 12$. Единственная возможность $-b = 3, c = 4$, т.е. случай 4).

Случай 2: $a < 2$. В этом случае

$$m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) - 1 - m > m\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{d}\right) - 1.$$

Следовательно, $m/12 + m/d < 2, m < 12, d = m$.

Случай 2.1: $b = 3$. Здесь $m = 3k$, т.е. $m = 6$ или 9 .

Пусть $m = d = 6$. Получаем

$$6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} + \frac{1}{6} - 1\right) = 2,$$

$$\frac{6}{a} + \frac{6}{c} = 5.$$

Так как $6/a \in \mathbb{Z}$ и $a < 2$, имеем $6/a = 4$, а значит, $c = 6$. Это противоречит (i).

Пусть $m = d = 9$. Здесь $9/a + 9/c = 7$. Как и выше, получаем противоречие.

Случай 2.2: $b < 3, c = 4$. В этом случае $m = 4k$, т.е. $m = 4$ или 8 . В обоих случаях мы легко приходим к противоречию.

Случаи 1)–3) леммы 3.2 отвечают раздутиям (ii), 1)–3) теоремы 2.3 соответственно. Случай 4) дает раздутие $\sigma = (6, 4, 3, 1)$. Это plt-раздутие [11; 3.2], и его исключительный дивизор рационален (лемма 2.6).

Теперь покажем, что если нерациональный дивизор E с $a(E, X) = 1$ существует, то он единствен. Действительно, допустим, что E – исключительный дивизор раздутия $(2, 2, 1, 1)$. Тогда E задан в $\mathbb{P}(2, 2, 1, 1)$ уравнением

$$x^2 + z^4 + a_1 t^4 + a_2 z t^3 + a_3 z^2 t^2 = 0,$$

где $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$ (иначе E рационален). Легко видеть, что в этом случае исключительные дивизоры раздутий $(3, 2, 2, 1)$ и $(4, 3, 2, 1)$ заданы уравнениями $t^4 = 0$ или $z t^3 = 0$ и, следовательно, они рациональны.

Теперь допустим, что раздутие $\sigma = (3, 2, 2, 1)$ имеет нерациональный исключительный дивизор E . Это означает, что диаграмма Ньютона $\Gamma(f)$ лежит над гиперплоскостью

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{6} = 1$$

и E определен в $\mathbb{P}(3, 2, 2, 1)$ уравнением

$$x^2 + y^3 + a_1 t^6 + a_2 z t^4 + a_3 z^2 t^2 + a_4 y t^4 + a_5 y z t^2 = 0,$$

но так как E нерационален, должно быть $a_2 = a_3 = a_5 = 0$ (иначе σ было бы plt-раздутием). Очевидно, исключительный дивизор раздутия $(4, 3, 2, 1)$ рационален.

Во всех случаях нерациональный E представляет собой конус над кривой рода 1. Этим завершается доказательство теорем 2.2 и 2.3 для sE_6 -особенностей.

3.3. Тип sE_7 . Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип sE_7 . Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (3)

$$\begin{aligned} f = x^2 + y^3 + yz^3 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + \dots + a_k z^{k-1} t^{b_k} + a_{k+1} z^k \\ + a_{k+2} y t^{b_{k+1}} + a_{k+3} y z t^{b_{k+2}} + (\dots) = 0. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что ряд f невырожден. Как и выше, $\Gamma(f)$ полностью определена диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$.

Допустим, что взвешенное раздутие σ_w особенности X имеет нерациональный исключительный дивизор E с дискрепантностью 1, и обозначим через ρ соответствующую грань диаграммы $\Gamma(f)$. Мы можем ограничиться случаями $\dim \rho = 2$ и $\dim \rho = 3$.

Если ρ не содержит ни одного из мономов x^2, y^3 , то она должна содержать моном $y t^{b_{k+2}}$ и, значит, E рационален.

Используя обозначения и рассуждения п. 3.2, мы находим четыре рациональных числа a, b, c, d со следующими свойствами:

- (i) $a = 2, b \leq 3, 1/b + 3/c \geq 1$ или $a < 2, b = 3, c \leq 9/2$;
- (ii) $m(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - m = 1$ ($m = \text{НОК}(a, b, c, d)$).

ЛЕММА 3.3. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четверка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:

1) $(2, 2, 6, 6)$;	2) $(2, 3, 3, 6)$;	3) $(2, 8/3, 4, 8)$;
4) $(9/5, 3, 9/2, 9)$;	5) $(2, 5/2, 5, 10)$;	6) $(2, 3, 4, 12)$;
7) $(2, 14/5, 14/3, 14)$;	8) $(2, 3, 9/2, 18)$.	

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1: $a = 2$. Здесь $m = 2k$.

Используя условие $1/b + 3/c \geq 1$, из (ii) мы получаем

$$\frac{4k}{3b} + \frac{2k}{3} + \frac{2k}{d} - k \leq 2.$$

Так как $b \leq 3$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{4k}{9} + \frac{2k}{3} + \frac{2k}{d} - k &\leq 2, \\ \frac{k}{9} + \frac{2k}{d} &\leq 2. \end{aligned}$$

Но $2k/d \in \mathbb{Z}$, так что $d = 2k$, $2k \leq 18$. В остальном доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.

Случаи 2)–4), 6) леммы 3.3 отвечают раздутиям (iii), 1)–4) теоремы 2.3 соответственно. Остальные случаи дают раздутия с рациональными исключительными дивизорами. С помощью тех же рассуждений, что и для sE_6 -особенностей, можно доказать, что если E нерационален и получен как исключительный дивизор одного из раздутий (iii), 1)–4) (теорема 2.3), то остальные раздутия имеют только рациональные исключительные дивизоры. Поэтому нерациональный дивизор единствен. Во всех случаях он оказывается конусом над некоторой кривой C . Прямым вычислением несложно проверить, что род $g(C)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, (iii).

3.4. Тип sE_8 . Пусть особенность $0 \in X$ имеет тип sE_8 . Тогда она определена в $\mathbb{C}^4$ уравнением (4)

$$f = x^2 + y^3 + z^5 + a_1 t^{b_1} + a_2 z t^{b_2} + a_3 z^2 t^{b_3} + a_4 z^3 t^{b_4} + a_5 y t^{b_5} + a_6 y z t^{b_6} + a_7 y z^2 t^{b_7} + a_8 y z^3 t^{b_8} + (\dots) = 0.$$

Мы предполагаем, что ряд f невырожден. Как и выше, $\Gamma(f)$ полностью определена диаграммой Ньютона для $f(0, y, z, t)$. Используя обозначения и рассуждения п. 3.2, мы находим четыре рациональных числа a, b, c, d , удовлетворяющие условиям:

- (i) $a = 2, b \leq 3, c \leq 5$, или $a < 2, b = 3, c \leq 5$, или $a < 2, b < 3, c = 5$;
- (ii) $m(1/a + 1/b + 1/c + 1/d) - 1 - m = 1$ ($m = \text{НОК}(a, b, c, d)$).

ЛЕММА 3.4. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяют условиям (i) и (ii). Тогда четверка (a, b, c, d) может быть только одной из следующих:

1) $(2, 3, 3, 6)$;	2) $(2, 8/3, 4, 8)$;	3) $(9/5, 3, 9/2, 9)$;
4) $(2, 3, 4, 12)$;	5) $(2, 14/5, 14/3, 14)$;	6) $(15/8, 3, 5, 15)$;
7) $(2, 3, 9/2, 18)$;	8) $(2, 3, 24/5, 24)$;	9) $(2, 3, 5, 30)$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3.2.

Случаи 1)–8) леммы 3.4 отвечают раздутиям (iv), 1)–8) теоремы 2.3 соответственно. Случай 9) дает раздутие $(15, 10, 6, 1)$. Это plt-раздутие, и его исключительный дивизор рационален.

С помощью тех же аргументов, что и в предыдущих пунктах, можно показать, что если нерациональный дивизор E существует, то он единствен. Во всех случаях он оказывается конусом над кривой во взвешенной проективной плоскости, и прямое вычисление доказывает все остальные утверждения теоремы 2.3.

§ 4. Примеры

ПРИМЕР 4.1. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0, \quad k \geq 2.$$

Очевидно, X имеет тип cD_{2k} . Сделаем взвешенное раздутие $\sigma = (k, k-1, 1, 1)$ (теорема 2.3, (i), 1)). Легко видеть, что исключительный дивизор E определен в $\mathbb{P}(k, k-1, 1, 1)$ уравнением

$$y^2z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0$$

и что дискрепантность $a(E, X) = 1$. Поверхность E — конус над гладкой гиперэллиптической кривой $y^2z + z^{2k-1} + t^{2k-1} = 0 \subset \mathbb{P}(k-1, 1, 1)$ рода $k-1$. Этот пример показывает, что род $g(C)$ (см. теорему 2.3) может быть произвольным.

ПРИМЕР 4.2. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ задана уравнением

$$x^2 + y^3 + yz^3 + t^9 = 0.$$

Это cE_7 -особенность. Рассмотрим взвешенное раздутие $\sigma = (5, 3, 2, 1)$ (теорема 2.3 (iii), 3)). Его исключительный дивизор $E = \{y^3 + yz^3 + t^9 = 0\} \subset \mathbb{P}(5, 3, 2, 1)$ — конус над гладкой кривой рода 3. Нетрудно показать, что эта кривая негиперэллиптика. Действительно, заметим, что она тригональна. Если бы она была гиперэллиптической, то мы могли бы вложить ее в квадрику $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ как дивизор бистепени $(3, 2)$. Но тогда ее род был бы $g \leq 2$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть особенность $X \subset \mathbb{C}^4$ определена уравнением

$$x^2 + y^3 + z^5 + t^{15} = 0.$$

Очевидно, X имеет тип cE_8 . Раздуем ее с весом $(8, 5, 3, 1)$ (теорема 2.3, (iv), 6)). Тогда мы получаем исключительный дивизор

$$\{y^3 + z^5 + t^{15} = 0\} \subset \mathbb{P}(8, 5, 3, 1).$$

Это конус над негиперэллиптической кривой рода 4.

ПРИМЕР 4.4. Рассмотрим особенность $X \subset \mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1)$, заданную уравнением

$$x^2 + y^3 + z^4y + t^4y + z^2t^2 + z^6 + t^6 = 0.$$

Это особенность типа $cE/2$. Сделаем раздутия $\sigma_1 = \frac{1}{2}(3, 2, 3, 1)$ и $\sigma_2 = \frac{1}{2}(3, 2, 1, 3)$ (см. [12; §10]). Соответствующие исключительные дивизоры

$$E_1 : \{x^2 + y^3 + t^4y + t^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(3, 2, 3, 1),$$

$$E_2 : \{x^2 + y^3 + z^4y + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(3, 2, 1, 3)$$

представляют собой конусы над эллиптическими кривыми. Дискрепантности $a_1 = a(E_1, X) = a_2 = a(E_2, X) = 1/2$. Этот пример показывает, что негорнштейновы терминальные особенности могут иметь более одного нерационального исключительного дивизора с дискрепантностью ≤ 1 .

Список литературы

1. Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46(1). P. 345–414.
2. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. С. 97–154.
3. Varchenko A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram // Invent. Math. 1976. V. 37. P. 253–262.
4. Reid M. Canonical 3-folds // Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, 1979. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980. P. 273–310.
5. Prokhorov Yu. G. E1-blowing ups of terminal singularities // J. Math. Sci. (New York). 2003. V. 115. № 3. P. 2395–2427.

6. *Степанов Д. А.* О разрешениях терминальных особенностей // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 1. С. 127–140.
7. *Reid M.* Minimal models of canonical 3-folds // Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981). Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 131–180. (Adv. Stud. Pure Math. V. 1.)
8. *Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
9. *Hironaka H.* Formal line bundles along exceptional loci // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford Univ. Press., 1969. P. 201–218.
10. *Prokhorov Yu. G.* Blow-ups of canonical singularities // Algebra (Moscow, 1998). Berlin: de Gruyter, 2000. P. 301–317.
11. *Ishii S., Prokhorov Yu. G.* Hypersurface exceptional singularities // Internat. J. Math. 2001. V. 12. № 6. P. 661–687.
12. *Hayakawa T.* Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1999. V. 35. P. 515–570.

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: stepanov@online.ru

dstepanov@bmstu.ru

Поступила в редакцию

07.09.2004