Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никишина, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 8, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:28:36

УДК 517.53

А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча

Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никишина

Доказывается существование асимптотики отношения для последовательности многочленов, совместно ортогональных относительно набора из m конечных борелевских мер, с общим носителем на конечном интервале действительной оси и составляющих так называемую систему мер Никишина. При $m = 1$ результат редуцируется к известной теореме Е. А. Рахманова об асимптотике ортогональных на отрезке многочленов.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Пусть s – конечная положительная борелевская мера с носителем на ограниченном интервале Δ действительной оси $\mathbb{R}$ такая, что $s' > 0$ почти всюду на Δ , и пусть $\{Q_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – соответствующая последовательность ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом. В серии из двух статей (см. [1], [2]) Е. А. Рахманов доказал, что при этих условиях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi'(\infty)}, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta \quad (1)$$

(равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C} \setminus \Delta$), где $\varphi(z)$ – конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ на $\{w : |w| > 1\}$ такое, что $\varphi(\infty) = \infty$ и $\varphi'(\infty) > 0$. Этот результат привлек большое внимание ввиду его значимости в общей теории ортогональных многочленов, а также из-за его приложений к теории рациональных аппроксимаций аналитических функций. Упрощенные доказательства теоремы Рахманова могут быть найдены в [3], [4]; обобщения на случай многочленов, ортогональных относительно переменной (зависящей от степени многочлена) меры см. в [5], [6].

В последние годы объектом повышенного интереса было распространение общей теории ортогональных многочленов на случай многочленов, удовлетворяющих нестандартным соотношениям ортогональности. Например, это многочлены, для которых соотношения ортогональности распределены между несколькими мерами. Такие многочлены возникают естественным образом как общие знаменатели аппроксимаций Эрмита–Паде для системы марковских функций (см. [7], [8]).

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564), Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1551.2003.1), Отделением математических наук РАН (программа № 1) и фондами INTAS (грант № 03-516637) и NATO PST.CLG (грант № 979738). Работа второго автора поддержана фондами INTAS (грант № 03-516637), NATO PST.CLG (грант № 979738) и BFM (грант № 2003-06335-C03-02). Работа третьего автора поддержана фондом BFM (грант № 2003-06335-C03-02).

Широкий класс систем марковских функций, который оказался очень естественным при распространении многих результатов общей теории ортогональных многочленов и аппроксимаций Паде, был введен Е. М. Никишиным в [9]. Такие системы определяются следующим образом. Ниже мы используем обозначения, предложенные в [10].

Пусть σ_1, σ_2 – две конечные знакопостоянные борелевские меры, чьи носители $\text{supp } \sigma_1, \text{supp } \sigma_2$ содержатся в непересекающихся интервалах Δ_1, Δ_2 соответственно, расположенных на действительной оси $\mathbb{R}$. Положим

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} d\sigma_1(x).$$

Это выражение определяет новую знакопостоянную меру, чей носитель совпадает с $\text{supp } \sigma_1$.

Пусть $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – система конечных знакопостоянных борелевских мер на действительной оси с компактными носителями. Всюду в дальнейшем $\Delta_k = [a_k, b_k]$ – наименьший интервал, содержащий носитель меры σ_k . Предположим, что $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \emptyset, k = 1, \dots, m-1$. По определению $S = (s_1, \dots, s_m) = \mathcal{N}(\Sigma)$ называется *системой Никишина*, порожденной Σ , если

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \dots, \quad s_m = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle \rangle. \quad (2)$$

Зафиксируем векторный индекс $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$. Многочлен $Q_{\mathbf{n}}(x)$ называется *$\mathbf{n}$ -м совместно ортогональным многочленом по отношению к системе S* , если он не тождественный нуль, $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_m$ и выполняются следующие соотношения ортогональности:

$$\int Q_{\mathbf{n}}(x) x^\nu ds_k(x) = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Хорошо известно и нетрудно проверить, что $Q_{\mathbf{n}}(x)$ является общим знаменателем набора рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде

$$\pi_{\mathbf{n}}(z) := \left(\frac{P_{\mathbf{n},1}(z)}{Q_{\mathbf{n}}(z)}, \dots, \frac{P_{\mathbf{n},m}(z)}{Q_{\mathbf{n}}(z)} \right)$$

для системы марковских функций

$$\widehat{s}_k(z) := \int \frac{ds_k(x)}{z-x}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Эти аппроксимации определяются следующими условиями:

- i) $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_m, \quad Q_{\mathbf{n}} \neq 0$;
- ii) $Q_{\mathbf{n}}(z) \widehat{s}_k(z) - P_{\mathbf{n},k}(z) = O(1/z^{n_k+1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, m.$

В последующем мы полагаем старший коэффициент $Q_{\mathbf{n}}$ равным единице.

Для произвольного векторного индекса $\mathbf{n}$ условия, приведенные выше, вообще говоря, не гарантируют, что $\deg Q_{\mathbf{n}} = |\mathbf{n}|$. Если же это происходит, то векторный индекс $\mathbf{n}$ называется *нормальным*, а соответствующие совместно ортогональные многочлены определены единственным образом с точностью до мультипликативной постоянной. Кроме того, если нули многочлена $Q_{\mathbf{n}}$ простые и лежат внутри Δ_1 , то векторный индекс называется *строго нормальным*. Пусть

$$\mathbb{Z}_+^m(\otimes) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m : 1 \leq i < j \leq m \Rightarrow n_j \leq n_i + 1\}.$$

В [11] доказано, что все векторные индексы из $\mathbb{Z}_+^m(\otimes)$ являются строго нормальными. Обозначим

$$\mathbb{Z}_+^m(*) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m : \nexists i, j, k \text{ такие, что } 1 \leq i < j < k \leq m \text{ и } n_i < n_j < n_k\}.$$

Недавно в [12] было показано, что $\mathbb{Z}_+^m(*)$ также является множеством строго нормальных индексов. Легко видеть, что $\mathbb{Z}_+^m(\otimes) \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$. В частности, для $m = 2$ все векторные индексы строго нормальны. В [13] доказано, что это же справедливо и для $m = 3$. Таким образом, когда $m = 1, 2, 3$, все векторные индексы строго нормальны. Важным с теоретической и практической точки зрения является вопрос, будет ли это справедливо для всех $m \in \mathbb{Z}_+$.

Логарифмическая асимптотика $\{Q_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(\otimes)$, где Λ таково, что условия ортогональности пропорционально распределены между различными компонентами и $\sigma'_k > 0$ почти всюду на Δ_k , $k = 1, \dots, m$, была получена в [10; теорема 3]. Для асимптотик этого типа условие на меры может быть существенно ослаблено, например, до их принадлежности классу **Reg** в смысле определения Г. Шталя и В. Тотика в [14] (см. теорему 5 из [15], где также рассмотрен случай $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$). Для индексов вида $(n, \dots, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и мер $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, абсолютно непрерывных и принадлежащих классу Сегё, сильная асимптотика была получена А. И. Аптекаревым в [16] (см. также [17]).

В этой статье мы рассматриваем обобщение теоремы Рахманова об асимптотике отношения на случай совместно ортогональных многочленов по отношению к системе мер Никишина. В частности, мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $S = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – система Никишина с условием $\sigma'_k > 0$ почти всюду на $\Delta_k = \text{supp } \sigma_k$, $k = 1, \dots, m$. Рассмотрим последовательность $\mathbf{I} \subset \mathbb{Z}_+^m(*)$:

$$\mathbf{I} = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, \dots), \dots, (1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots\}.$$

Пусть $(Q_{\mathbf{n}}(x))_{\mathbf{n} \in \mathbf{I}}$ – соответствующая последовательность совместно ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом. Для фиксированного $\mathbf{n}$ положим $\mathbf{n} + \mathbf{1} = \mathbf{n} + (1, \dots, 1)$. Тогда существует функция $\widetilde{F}_1$, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \Delta_1$ и такая, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \mathbf{I}} \frac{Q_{\mathbf{n}+\mathbf{1}}(z)}{Q_{\mathbf{n}}(z)} = \widetilde{F}_1(z), \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_1.$$

Справедливость теоремы 1.1 и описание предельной функции $\widetilde{F}_1$ вытекает из более общего результата. Прежде чем его сформулировать, нам придется ввести дополнительные понятия, связанные со свойствами ортогональности знаменателей $Q_{\mathbf{n}}$ аппроксимаций Эрмита–Паде для систем Никишина. Во избежание слишком громоздких обозначений в последующем мы ограничимся последовательностью векторных индексов из $\mathbb{Z}_+^m(\otimes)$.

Для каждого $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m(\otimes)$ определим рекуррентно следующие функции:

$$\Psi_{\mathbf{n},0}(x) = Q_{\mathbf{n}}(x), \quad \Psi_{\mathbf{n},k}(x) = \int \frac{\Psi_{\mathbf{n},k-1}(t)}{x-t} d\sigma_k(t), \quad k = 1, \dots, m.$$

В предложении 1 из [10] доказано, что для любого $k = 1, \dots, m$

$$\int \Psi_{\mathbf{n},k-1}(t) t^\nu d\langle \sigma_k, \dots, \sigma_{k+r} \rangle(t) = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_{k+r}-1, \quad k \leq k+r \leq m. \quad (4)$$

Отсюда авторы заключали, что $\Psi_{\mathbf{n},k-1}$, $k = 1, \dots, m$, имеет в точности $N_{\mathbf{n},k} = n_k + \dots + n_m$ нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_{k-1}$ и что все они простые и лежат внутри Δ_k . Пусть $Q_{\mathbf{n},k}$ — многочлен с единичным старшим коэффициентом степени $N_{\mathbf{n},k}$, чьи простые нули расположены в точках, где $\Psi_{\mathbf{n},k-1}$ обращается в нуль на Δ_k , и пусть $Q_{\mathbf{n},m+1} \equiv 1$. В предложении 2 (см. также предложение 3) из [10] доказано, что

$$\int x^\nu \Psi_{\mathbf{n},k-1}(x) \frac{d\sigma_k(x)}{Q_{\mathbf{n},k+1}(x)} = 0, \quad \nu = 0, \dots, N_{\mathbf{n},k}-1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Положим

$$H_{\mathbf{n},k} := \frac{Q_{\mathbf{n},k-1} \Psi_{\mathbf{n},k-1}}{Q_{\mathbf{n},k}}.$$

Из (5) вытекает, что для каждого векторного индекса $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m(\otimes)$ существует система полиномов

$$\{Q_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^m, \quad \deg Q_{\mathbf{n},k} = \sum_{\alpha=k}^m n_\alpha := N_{\mathbf{n},k}, \quad Q_{\mathbf{n},0} = Q_{\mathbf{n},m+1} \equiv 1, \quad (6)$$

удовлетворяющая полной системе соотношений ортогональности

$$\int x^\nu Q_{\mathbf{n},k}(x) \frac{|H_{\mathbf{n},k}(x)| d\sigma_k(x)}{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x) Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|} = 0, \quad \nu = 0, \dots, N_{\mathbf{n},k}-1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (7)$$

по отношению к переменной мере. (Заметим, что функции $H_{\mathbf{n},k}$ и $Q_{\mathbf{n},k-1} Q_{\mathbf{n},k+1}$ имеют постоянный знак на Δ_k ; таким образом, мы можем взять абсолютную величину этих функций под знаком интеграла, не изменяя значение интеграла.) Наша цель заключается в изучении асимптотики отношения для полиномов $\{Q_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^m$, в частности для $Q_{\mathbf{n}} = Q_{\mathbf{n},1}$.

Ответ будет сформулирован в терминах некоторых алгебраических функций порядка $m+1$ (как и в теореме Рахманова для $m=1$). Чтобы ввести эти функции, рассмотрим $(m+1)$ -листную риманову поверхность

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k=0}^m \overline{\mathcal{R}_k},$$

образованную последовательным “подклеиванием” листов

$$\mathcal{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1, \quad \mathcal{R}_k := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_k \cup \Delta_{k+1}), \quad k = 1, \dots, m-1, \quad \mathcal{R}_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_m$$

так, что верхний и нижний берега разрезов у двух соседних листов отождествлены. Зафиксируем $l \in \{1, \dots, m\}$. Пусть $\psi^{(l)}$, $l = 1, \dots, m$, — однозначная рациональная функция на $\mathcal{R}$ с дивизором, состоящим из одного простого нуля в точке $\infty^{(0)} \in \mathcal{R}_0$ и одного простого полюса в точке $\infty^{(l)} \in \mathcal{R}_l$. Следовательно,

$$\psi^{(l)}(z) = \frac{C_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty^{(0)}, \quad \psi^{(l)}(z) = C_2 z + O(1), \quad z \rightarrow \infty^{(l)}, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 – отличные от нуля константы. Так как род $\mathcal{R}$ равен нулю, то такая, однозначная на $\mathcal{R}$, функция всегда существует и определена единственным образом с точностью до мультипликативной постоянной. Обозначим ветви алгебраической функции $\psi^{(l)}$, соответствующие различным листам $k = 0, \dots, m$ поверхности $\mathcal{R}$, через

$$\psi^{(l)} := \{\psi_k^{(l)}\}_{k=0}^m.$$

В дальнейшем мы фиксируем мультипликативную постоянную таким образом, что

$$\prod_{k=0}^m \psi_k^{(l)}(\infty) = 1. \quad (9)$$

Для любого векторного индекса $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ положим

$$\mathbf{n}^l := (n_1, \dots, n_{l-1}, n_l + 1, n_{l+1}, \dots, n_m).$$

Для любой заданной функции $F(z)$, имеющей в окрестности бесконечности лорановское разложение вида $F(z) = Cz^k + \mathcal{O}(z^{k-1})$, $C \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, обозначим

$$\tilde{F} := \frac{F}{C}. \quad (10)$$

Теперь мы можем сформулировать нашу общую теорему об асимптотике отношения для совместно ортогональных многочленов (6), (7) системы Никишина.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $S = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – система Никишина с условием на меры $\sigma'_k > 0$ почти всюду на $\Delta_k = \text{supp } \sigma_k$, $k = 1, \dots, m$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+(\otimes)$ – последовательность векторных индексов такая, что для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$ и некоторого фиксированного $l \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_+(\otimes)$ и $n_1 - n_m \leq d$, где d – некоторая постоянная. Пусть $\{Q_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^m$, $\mathbf{n} \in \Lambda$, – соответствующая система многочленов (6). Тогда для каждого фиксированного $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{Q_{\mathbf{n}^l,k}(z)}{Q_{\mathbf{n},k}(z)} = \widetilde{F_k^{(l)}}(z), \quad z \in K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad (11)$$

где

$$F_k^{(l)} := \prod_{\nu=k}^m \psi_\nu^{(l)}, \quad (12)$$

а алгебраические функции $\psi_\nu^{(l)}$ определены в (8), (9).

Непосредственно из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. В условиях теоремы 1.2 имеем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{Q_{\mathbf{n}+1,k}(z)}{Q_{\mathbf{n},k}(z)} = \widetilde{F_k}(z), \quad z \in K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k,$$

где

$$F_k := \prod_{\nu=k}^m \psi_\nu, \quad \psi_\nu := \prod_{l=1}^m \psi_\nu^{(l)}.$$

Полагая $k = 1$ и $I = \Lambda$, мы получаем утверждение теоремы 1.1. С другой стороны, при $m = 1$ мы получаем формулу Рахманова (1) для многочленов с единичным старшим коэффициентом, ортогональных на Δ . Отметим, что при выводе теоремы 1.2 используется версия теоремы Рахманова для многочленов, ортогональных с переменным весом, следовательно, наш результат не содержит альтернативного доказательства теоремы Рахманова.

Доказательство теоремы 1.2 основано на следующих фактах. В §2 мы показываем, что нули совместно ортогональных многочленов $Q_{\mathbf{n}}$ для системы Никишина (и для ассоциированных многочленов $Q_{\mathbf{n},k}$, $k = 2, \dots, m$), соответствующих последовательным строго нормальным индексам, удовлетворяют свойству перемежаемости, как и обычные ортогональные на действительной оси многочлены. Следовательно, для любых фиксированных $k, l = 1, \dots, m$ отношения $Q_{\mathbf{n}^l, k} / Q_{\mathbf{n}, k}$ образуют нормальные семейства аналитических функций в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$. Используя результаты теории ортогональных многочленов по отношению к переменному весу, полученные ранее Г. Лопесом [6], мы доказываем, что предельные функции в сходящихся подпоследовательностях удовлетворяют системе граничных задач. Это делается в §3. Подобная система уравнений появлялась ранее в доказательстве сильной асимптотики совместно ортогональных многочленов для системы Никишина (см. [16]). Наконец, в §4 мы показываем, что система граничных задач имеет единственное решение, которое может быть выражено посредством алгебраических функций, определенных выше. Всюду в дальнейшем мы придерживаемся введенных выше обозначений.

§ 2. Перемежаемость нулей

В [18] Д. Кершав доказал свойство перемежаемости для нулей многочленов, которые ортогональны функциональной системе Чебышёва по отношению к лебеговской мере на интервале действительной оси. Авторы [12] адаптировали доказательство Кершава, чтобы показать, что если $\mathbf{n}, \mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_+(\otimes)$, то нули $Q_{\mathbf{n}}$ и $Q_{\mathbf{n}^l}$ перемежаются. Мы приведем здесь альтернативное доказательство, которое позволит вывести свойство перемежаемости не только для нулей $Q_{\mathbf{n}}$ и $Q_{\mathbf{n}^l}$, но также и для нулей $Q_{\mathbf{n},k}$ и $Q_{\mathbf{n}^l, k}$, $k = 1, \dots, m$.

Семейство из N действительных непрерывных функций $\{m_1(x), \dots, m_N(x)\}$ называется *чебышёвской системой на интервале $[a, b]$* , если не существует постоянных c_k , одновременно не обращающихся в нуль, таких, что $\sum_{k=1}^N c_k m_k(x)$ имеет более чем $N - 1$ нулей на $[a, b]$. Если для всех n , $1 \leq n \leq N$, $\{m_1(x), \dots, m_n(x)\}$ является чебышёвской системой на $[a, b]$, то такая система из N функций называется *системой Маркова на $[a, b]$* . Подробнее о свойствах систем Маркова и Чебышёва см., например, в [19] и [20]. Мы будем называть *узлом* точку действительной оси, в которой функция меняет свой знак.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbf{n}, \mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_m^+(\otimes)$ для некоторого фиксированного $l \in \{1, \dots, m\}$. Тогда для любого $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ и любых действительных постоянных A и B таких, что $|A| + |B| > 0$, функция $A\Psi_{\mathbf{n},k} + B\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ имеет не более $|\mathbf{n}| + 1 - (n_1 + \dots + n_k)$ нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$ (считая их кратности) и по крайней мере $|\mathbf{n}| - (n_1 + \dots + n_k)$ узлов внутри Δ_{k+1} ($\Delta_0 = \Delta_{m+1} = \emptyset$). Следовательно, все нули $A\Psi_{\mathbf{n},k} + B\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$ простые и лежат в $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем A и B , удовлетворяющие условию леммы. Для простоты обозначим

$$G_{\mathbf{n},k} = A\Psi_{\mathbf{n},k} + B\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$$

и $N_{\mathbf{n},k} = n_k + \dots + n_m$. Пусть h_j — многочлен степени не больше $n_j - 1$ и $s_{i,j} = \langle \sigma_i, \dots, \sigma_j \rangle$, $1 \leq i \leq j \leq m$. Из (4) следует, что

$$0 = \int G_{\mathbf{n},k}(t) \sum_{j=k+1}^m h_j(t) \widehat{s}_{k+2,j}(t) d\sigma_{k+1}(t), \quad (13)$$

где $\widehat{s}_{k+2,k+1} \equiv 1$. Теорема 2 из [12] дает нам, что система функций

$$\{1, \dots, x^{n_{k+1}-1}, \widehat{s}_{k+2,k+2}, \dots, x^{n_{k+2}-1} \widehat{s}_{k+2,k+2}, \dots, \widehat{s}_{k+2,m}, \dots, x^{n_m-1} \widehat{s}_{k+2,m}\}$$

образует систему Маркова на Δ_{k+1} . Отсюда с учетом (2) мы получаем, что $G_{\mathbf{n},k}$ имеет по крайней мере $N_{\mathbf{n},k+1}$ узлов внутри Δ_{k+1} , как и утверждалось.

Для $k = 0$ очевидно, что $G_{\mathbf{n},0} = A Q_{\mathbf{n},0} + B Q_{\mathbf{n}^l,0}$ имеет не более $|\mathbf{n}| + 1 = N_{\mathbf{n},1} + 1$ нулей в $\mathbb{C}$. Предположим, что для $k = 0, \dots, r-1$, $1 \leq r \leq m$, функция $G_{\mathbf{n},k}$ имеет не более $N_{\mathbf{n},k+1} + 1$ нулей с учетом их кратностей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$ и $G_{\mathbf{n},r}$ имеет по крайней мере $N_{\mathbf{n},r+1} + 2$ нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_r$ ($N_{\mathbf{n},m+1} = 0$).

Из определения вытекает, что функция $G_{\mathbf{n},r}$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Delta_r$ и симметрична относительно действительной оси (такая функция и ее производные принимают сопряженные значения в сопряженных точках). Следовательно, существует многочлен $W_{\mathbf{n},r}$ с действительными коэффициентами степени не меньше $N_{\mathbf{n},r+1} + 2$ и с нулями, лежащими в $\mathbb{C} \setminus \Delta_r$, такой, что

$$\frac{G_{\mathbf{n},r}}{W_{\mathbf{n},r}} \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_r).$$

Из (4) мы также имеем, что

$$0 = \int G_{\mathbf{n},r-1}(t) \frac{z^{n_r} - t^{n_r}}{z - t} d\sigma_r(t).$$

Следовательно,

$$G_{\mathbf{n},r}(z) = \frac{1}{z^{n_r}} \int \frac{t^{n_r} G_{\mathbf{n},r-1}(t)}{z - t} d\sigma_r(t) = O\left(\frac{1}{z^{n_r+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Отсюда, принимая во внимание степень $W_{\mathbf{n},r}$, получаем

$$\frac{z^j G_{\mathbf{n},r}}{W_{\mathbf{n},r}} = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_r), \quad j = 0, \dots, N_{\mathbf{n},r} + 1.$$

Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая, окружающая отрезок Δ_r и такая, что все нули $W_{\mathbf{n},r}$ лежат во внешности Γ . Используя теорему Коши, интегральное представление для $G_{\mathbf{n},r}$, теорему Фубини и интегральную формулу Коши, для каждого $j = 0, \dots, N_{\mathbf{n},r} + 1$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^j G_{\mathbf{n},r}(z)}{W_{\mathbf{n},r}(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^j}{W_{\mathbf{n},r}(z)} \int \frac{G_{\mathbf{n},r-1}(t)}{z - t} d\sigma_r(t) dz = \int_{\Gamma} \frac{t^j G_{\mathbf{n},r-1}(t)}{W_{\mathbf{n},r}(t)} d\sigma_r(t). \end{aligned}$$

Так как мера $d\sigma_r(t)/W_{\mathbf{n},r}(t)$ имеет постоянный знак на Δ_r , то $G_{\mathbf{n},r-1}$ имеет по крайней мере $N_{\mathbf{n},r} + 2$ узлов внутри Δ_r , что противоречит нашим индукционным предположениям, так как эта функция может иметь не более чем $N_{\mathbf{n},r} + 1$ нулей в области $\mathbb{C} \setminus \Delta_{r-1}$, которая содержит Δ_r .

По уже доказанным утверждениям мы имеем, что $N_{\mathbf{n},k+1}$ различных нулей $G_{\mathbf{n},k}$ расположены на Δ_{k+1} . Остающийся не локализованным один нуль должен лежать на $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$, потому что функция симметрична и не может иметь двух комплексно сопряженных нулей. Дополнительный нуль на действительной оси не может совпадать ни с каким из прежде локализованных на Δ_{k+1} нулем, не нарушив при этом общего числа узлов функции, обязанных быть на этом интервале. Следовательно, все нули простые, что и доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Необходимо подчеркнуть, что функция $A\Psi_{\mathbf{n},k} + B\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ не обязательно имеет $N_{\mathbf{n},k+1} + 1$ простых нулей в $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$. Например, если $B = 0$, то $G_{\mathbf{n},k}$ имеет $N_{\mathbf{n},k+1}$ простых нулей для всех $k = 0, \dots, m-1$. Когда $A = 0$, то имеется $N_{\mathbf{n},k+1} + 1$ простых нулей для $k = 0, \dots, l-1$ и $N_{\mathbf{n},k+1}$ для $k = l, \dots, m-1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbf{n}, \mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_m^+(\otimes)$ для некоторого фиксированного $l \in \{1, \dots, m\}$. Тогда для любого $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ функции $\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$, $\Psi_{\mathbf{n},k}$ не имеют общих нулей в $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$ и между двумя последовательными нулями $\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ лежит один нуль $\Psi_{\mathbf{n},k}$. Следовательно, нули $Q_{\mathbf{n}^l,k}$ и $Q_{\mathbf{n},k}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, перемежаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует точка $x_\nu \in \mathbb{R} \setminus \Delta_k$ такая, что $\Psi_{\mathbf{n}^l,k}(x_\nu) = \Psi_{\mathbf{n},k}(x_\nu) = 0$. Как мы уже видели, x_ν должна быть простым нулем каждой из этих функций. Следовательно, $(\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(x_\nu) \neq 0 \neq (\Psi_{\mathbf{n},k})'(x_\nu)$. Таким образом, должны существовать действительные константы A, B , отличные от нуля, такие, что

$$G_{\mathbf{n},k}(x_\nu) = (A\Psi_{\mathbf{n},k} + B\Psi_{\mathbf{n}^l,k})(x_\nu) = (G_{\mathbf{n},k})'(x_\nu) = 0.$$

Это означает, что функция $G_{\mathbf{n},k}$ имеет двойной нуль в x_ν , что невозможно по лемме 2.1.

Зафиксируем $y \in \mathbb{R} \setminus \Delta_k$ и положим

$$G_{\mathbf{n},k}^y(z) = \Psi_{\mathbf{n}^l,k}(z)\Psi_{\mathbf{n},k}(y) - \Psi_{\mathbf{n}^l,k}(y)\Psi_{\mathbf{n},k}(z).$$

Заметим, что эта функция рассматривалась в лемме 2.1 с $A = -\Psi_{\mathbf{n}^l,k}(y)$ и $B = \Psi_{\mathbf{n},k}(y)$. Пусть $x_\nu, x_{\nu+1}$ будут двумя последовательными нулями у $\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ в $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$, и пусть $y \in (x_\nu, x_{\nu+1})$. Тогда $|A| + |B| > 0$.

Функция $G_{\mathbf{n},k}^y(z)$ действительнoзначна на $\mathbb{R} \setminus \Delta_k$ и аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$. Имеем $(G_{\mathbf{n},k}^y)'(z) = (\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(z)\Psi_{\mathbf{n},k}(y) - \Psi_{\mathbf{n}^l,k}(y)(\Psi_{\mathbf{n},k})'(z)$. Предположим, что для некоторого $y_0 \in (x_\nu, x_{\nu+1})$ выполняется $(G_{\mathbf{n},k}^{y_0})'(y_0) = 0$. Так как $(G_{\mathbf{n},k}^y)(y) = 0$ для всех $y \in (x_\nu, x_{\nu+1})$, то мы бы получили, что $(G_{\mathbf{n},k}^{y_0})(z)$ имеет нуль порядка не меньше 2 (по отношению к z) в точке y_0 , что противоречит утверждению леммы 2.1. Следовательно,

$$(G_{\mathbf{n},k}^y)'(y) = (\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(y)\Psi_{\mathbf{n},k}(y) - \Psi_{\mathbf{n}^l,k}(y)(\Psi_{\mathbf{n},k})'(y)$$

знакопостоянна для всех $y \in (x_\nu, x_{\nu+1})$. В крайних точках $x_\nu, x_{\nu+1}$ эта функция не может принимать нулевые значения, поскольку, как мы доказали выше, $\Psi_{\mathbf{n},k}$, $\Psi_{\mathbf{n}^l,k}$ не имеют общих нулей. По непрерывности $G_{\mathbf{n},k}^y$ сохраняют тот же знак для всех $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ (и, следовательно, с каждой стороны от интервала Δ_k). Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{sign } G_{\mathbf{n},k}^y(x_\nu) &= \text{sign}((\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(x_\nu)\Psi_{\mathbf{n},k}(x_\nu)) \\ &= \text{sign}((\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(x_{\nu+1})\Psi_{\mathbf{n},k}(x_{\nu+1})) = \text{sign } G_{\mathbf{n},k}^y(x_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Так как

$$\text{sign}(\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(x_\nu) \neq \text{sign}(\Psi_{\mathbf{n}^l,k})'(x_{\nu+1}),$$

то получаем

$$\text{sign } \Psi_{\mathbf{n},k}(x_\nu) \neq \text{sign } \Psi_{\mathbf{n},k}(x_{\nu+1}).$$

Следовательно, должен быть промежуточный нуль у $\Psi_{\mathbf{n},k}$ между x_ν и $x_{\nu+1}$. Последнее утверждение теоремы вытекает из предшествующего утверждения и из определения полиномов $Q_{\mathbf{n},k}$. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Асимптотические свойства

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^m(\otimes)$ – последовательность векторных индексов таких, что для всех $n \in \Lambda$ и некоторого фиксированного $l \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_+^m(\otimes)$. Из свойства перемежаемости нулей $Q_{\mathbf{n}^l, k}$ и $Q_{\mathbf{n}, k}$ вытекает, что семейство функций $\{Q_{\mathbf{n}^l, k}/Q_{\mathbf{n}, k}\}_{\mathbf{n} \in \Lambda, k = 1, \dots, m}$ равномерно ограничено на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$. По теореме Монтеля существуют подпоследовательность векторных индексов Λ' и набор функций $\widetilde{F_k^{(l)}}$, $k = 1, \dots, m$, голоморфных в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$, такие, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{Q_{\mathbf{n}^l, k}(z)}{Q_{\mathbf{n}, k}(z)} = \widetilde{F_k^{(l)}}(z), \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Заметим, что по теореме Гурвица функции из правой части этих соотношений не обращаются в нуль в $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$, так как все нули $Q_{\mathbf{n}^l, k}$ лежат в Δ_k .

Вообще говоря, функции $\widetilde{F_k^{(l)}}$, $k = 1, \dots, m$, могут зависеть от Λ' . Наша цель доказать, что это на самом деле не так. Для этого мы покажем, что эти функции удовлетворяют некоторой системе граничных задач, которая имеет единственное решение. В этом параграфе, используя результаты об асимптотике отношения и относительной асимптотике многочленов, ортогональных с переменной мерой, мы выведем эту систему.

ЛЕММА 3.1. *Пусть в условиях теоремы 1.2 $\Lambda' \subset \Lambda$ – последовательность векторных индексов такая, что выполняется (14). Тогда существует нормировка для функций, определенных в (14), такая, что набор нормированных функций $F_k^{(l)}$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяет следующей системе граничных задач:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & F_k^{(l)}, \frac{1}{F_k^{(l)}} \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_k); \\ 2) \quad & (F_k^{(l)})'(\infty) > 0, \quad k = 1, \dots, l; \\ 2') \quad & F_k^{(l)}(\infty) > 0, \quad k = l + 1, \dots, m; \\ 3) \quad & |F_k^{(l)}(x)|^2 \frac{1}{|(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_k, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } F_0^{(l)} \equiv F_{m+1}^{(l)} \equiv 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\widetilde{F_k^{(l)}}$, определенные в (14), удовлетворяют 1), 2) и 2'). Действительно, как было отмечено выше, $\widetilde{F_k^{(l)}}$ не обращается в нуль в области $\mathbb{C} \setminus \Delta_k$; следовательно, 1) выполнено. С другой стороны, рассматривая степени полиномов для всех $n \in \Lambda'$, замечаем, что рациональные функции в левой части (14) в бесконечной точке либо равны 1, когда $k = l + 1, \dots, m$, либо их производные равны 1 для $k = 1, \dots, l$. Следовательно, предельные функции обязаны удовлетворять либо 2), либо 2') в зависимости от k . Таким образом, любая нормировка этих функций посредством умножения на положительную постоянную также приводит к условиям 1), 2) и 2').

Рассмотрим соотношения ортогональности (7) для многочленов $Q_{\mathbf{n},k}(x)$ по отношению к переменным мерам

$$\frac{|H_{\mathbf{n},k}(x)| d|\sigma_k|(x)}{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|}, \quad H_{\mathbf{n},k} := \frac{Q_{\mathbf{n},k-1}\Psi_{\mathbf{n},k-1}}{Q_{\mathbf{n},k}}.$$

Через $|\sigma_k|$ мы обозначаем полную вариацию меры σ_k . Так как мера σ_k имеет постоянный знак, то $|\sigma_k| = \sigma_k$ или $|\sigma_k| = -\sigma_k$ в зависимости от положительности или отрицательности меры σ_k соответственно. Очевидно, в обоих случаях соотношения ортогональности остаются справедливыми.

Для каждого $k = 1, \dots, m$ положим

$$K_{\mathbf{n},k} = \left(\int Q_{\mathbf{n},k}^2(x) \left| \frac{Q_{\mathbf{n},k-1}(x)\Psi_{\mathbf{n},k-1}(x)}{Q_{\mathbf{n},k}(x)} \right| \frac{d|\sigma_k|(x)}{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|} \right)^{-1/2}. \quad (16)$$

Пусть

$$K_{\mathbf{n},0} = 1, \quad \varkappa_{\mathbf{n},k} = \frac{K_{\mathbf{n},k}}{K_{\mathbf{n},k-1}}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Определим

$$q_{\mathbf{n},k} = \varkappa_{\mathbf{n},k} Q_{\mathbf{n},k}, \quad h_{\mathbf{n},k}(z) = K_{\mathbf{n},k-1}^2 H_{\mathbf{n},k}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Из (7) получаем

$$\int x^\nu Q_{\mathbf{n},k}(x) \frac{|h_{\mathbf{n},k}(x)| d|\sigma_k|(x)}{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|} = 0, \quad \nu = 0, \dots, N_{\mathbf{n},k} - 1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Отсюда вытекает, что многочлены $q_{\mathbf{n},k}$ (см. (17)) являются ортонормированными по отношению к переменной мере

$$\frac{|h_{\mathbf{n},k}(x)| d|\sigma_k|(x)}{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|} = d\rho_{\mathbf{n},k}(x). \quad (18)$$

Пусть $l \in \{1, \dots, m\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2. Рассуждая как ранее, получаем, что $Q_{\mathbf{n}^l,k}$ и $q_{\mathbf{n}^l,k}$ являются соответственно ортогональным многочленом с единичным старшим коэффициентом и ортонормированным многочленом по отношению к переменной мере

$$\frac{|h_{\mathbf{n}^l,k}(x)| d|\sigma_k|(x)}{|Q_{\mathbf{n}^l,k-1}(x)Q_{\mathbf{n}^l,k+1}(x)|} = \frac{|h_{\mathbf{n}^l,k}(x)|}{|h_{\mathbf{n},k}(x)|} \frac{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|}{|Q_{\mathbf{n}^l,k-1}(x)Q_{\mathbf{n}^l,k+1}(x)|} d\rho_{\mathbf{n},k}(x). \quad (19)$$

Возьмем $\Lambda' \subset \Lambda$ так, что имеет место (14). Тогда

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|}{|Q_{\mathbf{n}^l,k-1}(x)Q_{\mathbf{n}^l,k+1}(x)|} = \frac{1}{|\widetilde{F_{k-1}^{(l)}}(x)\widetilde{F_{k+1}^{(l)}}(x)|}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (20)$$

равномерно на Δ_k ($\widetilde{F_0^{(l)}} = \widetilde{F_{m+1}^{(l)}} = 1$). С другой стороны, соотношение (50) из [21] дает

$$h_{\mathbf{n},k+1}(z) = \int \frac{|q_{\mathbf{n},k}(x)|^2}{z-x} \frac{h_{\mathbf{n},k}(x) d\sigma_k(x)}{Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)}, \quad k = 1, \dots, m,$$

откуда, используя теорему 9 из [21], получаем

$$\lim_{n \in \Lambda} |h_{\mathbf{n},k+1}(z)| = \frac{1}{|\sqrt{(z-b_k)(z-a_k)}|}, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\Delta_k = [a_k, b_k]$ (заметим, что из определения имеем $h_{\mathbf{n},1} \equiv h_{\mathbf{n}^l,1} \equiv 1$). В частности,

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{|h_{\mathbf{n}^l,k}(x)|}{|h_{\mathbf{n},k}(x)|} = 1, \quad k = 1, \dots, m,$$

равномерно на Δ_k . При использовании теоремы 9 из [21] условие $n_1 - n_m \leq d$ играет существенную роль. Из доказанного выше следует, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{|h_{\mathbf{n}^l,k}(x)|}{|h_{\mathbf{n},k}(x)|} \frac{|Q_{\mathbf{n},k-1}(x)Q_{\mathbf{n},k+1}(x)|}{|Q_{\mathbf{n}^l,k-1}(x)Q_{\mathbf{n}^l,k+1}(x)|} = \frac{1}{|\widetilde{F_{k-1}^{(l)}}(x)\widetilde{F_{k+1}^{(l)}}(x)|} \quad (21)$$

равномерно на Δ_k . Функция в правой части этого соотношения непрерывна и отлична от нуля на Δ_k .

Зафиксируем $k \in \{l+1, \dots, m\}$. Заметим, что для такого k мы имеем $\deg Q_{\mathbf{n}^l,k} = \deg Q_{\mathbf{n},k} = N_{\mathbf{n},k}$. Из (14), (18), (19) и (21) по теореме о сравнительной асимптотике (см. [22; теорема 3.2]) мы заключаем, что

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{Q_{\mathbf{n}^l,k}(z)}{Q_{\mathbf{n},k}(z)} = \frac{S_k(z)}{S_k(\infty)} = \widetilde{S}_k(z) = \widetilde{F_k^{(l)}}(z), \quad K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k, \quad k = l+1, \dots, m, \quad (22)$$

где S_k — функция Сегё для области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k$ по отношению к весу $|\widetilde{F_{k-1}^{(l)}}(x)\widetilde{F_{k+1}^{(l)}}(x)|^{-1}$, $x \in \Delta_k$. (Отметим, что функция, играющая роль весового множителя при мере (см. (19)), в используемой здесь теореме 3.2 из [22] фиксирована; тем не менее нетрудно показать, что доказательство остается справедливым и при (21).) Функция S_k однозначно определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} 1) \quad & S_k, \frac{1}{S_k} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k); \\ 2) \quad & S_k(\infty) > 0; \\ 3) \quad & |S_k(x)|^2 \frac{1}{|\widetilde{(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})}(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_k. \end{aligned} \quad (23)$$

Зафиксируем $k \in \{1, \dots, l\}$. В этой ситуации $\deg Q_{\mathbf{n}^l,k} = \deg Q_{\mathbf{n},k} + 1 = N_{\mathbf{n},k} + 1$. Пусть $Q_{\mathbf{n},k}^*(x)$ — многочлен (со старшим коэффициентом единица) степени $N_{\mathbf{n},k}$, ортогональный с переменной мерой (19). Используя вышеприведенные рассуждения, получаем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{Q_{\mathbf{n},k}^*(z)}{Q_{\mathbf{n},k}(z)} = \frac{S_k(z)}{S_k(\infty)} = \widetilde{S}_k(z), \quad K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k, \quad k = 1, \dots, l. \quad (24)$$

Как и ранее, функция Сегё S_k определена в (23) при $k = 1, \dots, l$. С другой стороны, так как $\deg Q_{\mathbf{n}^l,k} = \deg Q_{\mathbf{n},k}^* + 1$ и оба эти многочлена ортогональны по отношению

к одному и тому же переменному весу, то по теореме об асимптотике отношения для переменных мер (см. [21; теорема 6]) имеем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{Q_{\mathbf{n}^l, k}(z)}{Q_{\mathbf{n}, k}^*(z)} = \frac{\varphi_k(z)}{\varphi_k'(\infty)}, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad (25)$$

где φ_k – конформное отображение области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k$ на $\{w : |w| > 1\}$ такое, что $\varphi_k(\infty) = \infty$ и $\varphi_k'(\infty) > 0$. Функция φ_k однозначно определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varphi_k, \frac{1}{\varphi_k} \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta_k); \\ 2) \quad & \varphi_k'(\infty) > 0; \\ 3) \quad & |\varphi_k(x)| = 1, \quad x \in \Delta_k. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24) и (25) получаем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda'} \frac{Q_{\mathbf{n}^l, k}(z)}{Q_{\mathbf{n}, k}(z)} = \frac{(S_k \varphi_k)(z)}{(S_k \varphi_k')(\infty)} = \widetilde{(S_k \varphi_k)}(z) = \widetilde{F_k^{(l)}}(z), \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad k = 1, \dots, l. \quad (27)$$

Таким образом,

$$\widetilde{F_k^{(l)}} = \begin{cases} \widetilde{S_k \varphi_k}, & k = 1, \dots, l; \\ \widetilde{S_k}, & k = l+1, \dots, m, \end{cases} \quad (28)$$

и из (23) и (28) следует, что

$$\left| \widetilde{F_k^{(l)}}(x) \right|^2 \frac{1}{\left| \widetilde{(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})}(x) \right|} = \frac{1}{\omega_k}, \quad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (29)$$

где

$$\omega_k = \begin{cases} (S_k \varphi_k')^2(\infty), & k = 1, \dots, l; \\ S_k^2(\infty), & k = l+1, \dots, m. \end{cases} \quad (30)$$

Покажем теперь, что существуют положительные константы c_k , $k = 1, \dots, m$, такие, что функции $\widetilde{F_k^{(l)}} = c_k F_k^{(l)}$ удовлетворяют (15). Действительно, в соответствии с (29) для любой такой константы c_k мы имеем

$$\left| F_k^{(l)}(x) \right|^2 \frac{1}{\left| (F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x) \right|} = \frac{c_k^2}{c_{k-1} c_{k+1} \omega_k}, \quad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $c_0 = c_{m+1} = 1$. Задача свелась к нахождению подходящих констант c_k таких, что

$$\frac{c_k^2}{c_{k-1} c_{k+1} \omega_k} = 1, \quad k = 1, 5 \dots, m. \quad (31)$$

После логарифмирования получаем линейную систему уравнений

$$2 \ln c_k - \ln c_{k-1} - \ln c_{k+1} = \ln \omega_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (32)$$

$c_0 = c_{m+1} = 1$, на неизвестные $\ln c_k$. Эта система имеет единственное решение, что и завершает доказательство.

ЛЕММА 3.2. Пусть $F_k^{(l)}$, $k = 1, \dots, m$, – система функций, удовлетворяющая (15), и пусть $\mathbb{S}_k$ – функция Сегё, т.е. аналитическая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k$ функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$|\mathbb{S}_k(x)|^2 \frac{1}{|(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_k, \quad (33)$$

где $F_0^{(l)} \equiv F_{m+1}^{(l)} \equiv 1$. Тогда

$$F_k^{(l)} = \begin{cases} \mathbb{S}_k \varphi_k, & k = 1, \dots, l; \\ \mathbb{S}_k, & k = l+1, \dots, m. \end{cases} \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий 1), 2) и 2') в (15) получаем, что функции $F_k^{(l)}$, $k = 1, \dots, l$, имеют полюс первого порядка в точке ∞ , а $F_k^{(l)}$, $k = l+1, \dots, m$, аналитичны в бесконечности. Следовательно, если мы положим

$$\mathbb{S}_k = \begin{cases} \frac{F_k^{(l)}}{\varphi_k}, & k = 1, \dots, l; \\ F_k^{(l)}, & k = l+1, \dots, m, \end{cases}$$

то из (15) вытекает, что эта функция удовлетворяет системе:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathbb{S}_k, \frac{1}{\mathbb{S}_k} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k); \\ 2) \quad & \mathbb{S}_k(\infty) > 0; \\ 3) \quad & |\mathbb{S}_k(x)|^2 \frac{1}{|(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_k, \end{aligned} \quad (35)$$

которая единственным образом определяет функцию Сегё, удовлетворяющую соотношению (33), откуда следует (34).

§ 4. Предельные функции

Для окончания доказательства главной теоремы 1.2 мы должны проверить, что система (15) имеет единственное решение и что алгебраические функции, определенные в § 1 (см. формулировку теоремы 1.2), удовлетворяют этой системе.

Существование и единственность решения системы (15) с произвольной правой частью в граничных условиях 3) из (15), принадлежащей классу Сегё, было доказано в [16]. Здесь для полноты изложения мы приведем независимое доказательство. Существование решения не является проблемой, потому что лемма 3.1 гарантирует существование. Для доказательства единственности нам потребуется один предварительный результат.

Пусть $\Omega_k = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k$, $k = 1, \dots, m$, и пусть $\text{Harm}(\overline{\Omega_k})$ – банахово пространство гармонических в Ω_k функций u , которые непрерывно продолжаются сверху и снизу на отрезок Δ_k ; соответствующую чебышёвскую норму обозначим через $\|u\|_k$.

Пусть $T_{i,j}$ – линейный оператор, $T_{i,j}: \text{Harm}(\overline{\Omega_j}) \rightarrow \text{Harm}(\overline{\Omega_i})$, определяемый с помощью решения задачи Дирихле с граничными условиями

$$T_{i,j}(u_j)(x) = u_j(x), \quad x \in \partial\Omega_i.$$

Рассмотрим банахово пространство $H = \text{Нарм}(\overline{\Omega_1}) \times \cdots \times \text{Нарм}(\overline{\Omega_k})$ с нормой

$$\|(u_1, \dots, u_m)\| = \max\{\|u_k\|_k : k = 1, \dots, m\}$$

и линейный оператор $T: H \rightarrow H$, определенный следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & T_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ T_{2,1} & 0 & T_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & T_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

ЛЕММА 4.1. *Имеем $(2I - T)(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. (Здесь $I: H \rightarrow H$ обозначает тождественный оператор.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $u = 0$ влечет $(2I - T)(u) = 0$. Предположим, что $(2I - T)(u) = 0$. Тогда $T(u) = 2u$ и $\|T(u)\| = 2\|u\|$, где $u = (u_1, \dots, u_m)$ и $u_i \in \text{Нарм}(\overline{\Omega_i})$, $i = 1, \dots, m$. По определению оператора $T_{i,j}$ и по принципу максимума модуля

$$\|T_{i,j}(u_j)\|_i = \|u_j\|_i \leq \|u_j\|_j.$$

В соответствии с нашим предположением соседние интервалы Δ_i не пересекаются; следовательно, для $j = i - 1$ или $j = i + 1$

$$\|T_{i,j}(u_j)\|_i = \|u_j\|_j \Rightarrow u_j = \text{const}.$$

Так как $\|T(u)\| = 2\|u\|$, то существует $i \in \{1, \dots, m\}$ такое, что

$$\begin{aligned} 2\|u\| &= \|T_{i,i-1}(u_{i-1}) + T_{i,i+1}(u_{i+1})\|_i \leq \|T_{i,i-1}(u_{i-1})\|_i + \|T_{i,i+1}(u_{i+1})\|_i \\ &\leq \|u_{i-1}\|_{i-1} + \|u_{i+1}\|_{i+1} \leq 2\|u\|, \end{aligned}$$

где $u_0 \equiv u_{m+1} \equiv 0$, и, следовательно, все знаки неравенства выше превращаются в знаки равенства. Отсюда имеем, если $i = 1$ или $i = m$, то u обязан быть нулевым вектором. Для $i = 2, \dots, m - 1$ эти соотношения влекут

$$\|T_{i,i-1}(u_{i-1})\|_i = \|u_{i-1}\|_{i-1} = \|u\| = \|T_{i,i+1}(u_{i+1})\|_i = \|u_{i+1}\|_{i+1}$$

и по предыдущему замечанию u_{i-1} и u_{i+1} — константы. Следовательно, то же верно и для $T_{i,i-1}(u_{i-1})$ и $T_{i,i+1}(u_{i+1})$. Кроме того, нетрудно видеть, что существуют только две возможности: или $u_{i-1} \equiv u_{i+1} \equiv \|u\|$, или $u_{i-1} \equiv u_{i+1} \equiv -\|u\|$. Так как $T_{i,i-1}(u_{i-1}) + T_{i,i+1}(u_{i+1}) = 2u_i$, в первом случае мы получаем, что $u_i \equiv \|u\|$, а во втором: $u_i \equiv -\|u\|$. Теперь, используя соотношения $T_{i-1,i-2}(u_{i-2}) + T_{i-1,i}(u_i) = 2u_{i-1}$ и $T_{i+1,i}(u_i) + T_{i+1,i+2}(u_{i+2}) = 2u_{i+1}$, в первом случае получаем $u_{i-2} = u_{i+2} \equiv \|u\|$, а во втором: $u_{i-2} = u_{i+2} \equiv -\|u\|$. Повторяя эти рассуждения с изменением индекса i , заключаем, что у вектора u все компоненты равны либо $\|u\|$, либо $-\|u\|$. Это опять приводит к равенству $\|u\| = 0$, иначе первое и последнее граничные условия нарушаются.

ЛЕММА 4.2. *Система граничных задач (15) имеет единственное решение, которое представляется в виде (12).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (33) и (34) с помощью леммы 3.2 получаем следующее:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathbb{S}_k, \frac{1}{\mathbb{S}_k} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_k); \\ 2) \quad & \mathbb{S}_k(\infty) > 0; \\ 3) \quad & |\mathbb{S}_k(x)|^2 \frac{1}{|(\mathbb{S}_{k-1}\mathbb{S}_{k+1})(x)|} = W_k(x), \quad x \in \Delta_k, \end{aligned} \quad (37)$$

где $k = 1, \dots, m$ и

$$W_k := |\varphi_{k-1}^{(l)} \varphi_{k+1}^{(l)}|, \quad \varphi_k^{(l)} = \begin{cases} \frac{\varphi_k}{\varphi'_k(\infty)}, & k \in \{1, \dots, l\}; \\ 1, & k \in \{l+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Обозначим

$$u_k := \ln |\mathbb{S}_k|, \quad w_k := \ln W_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (38)$$

Заметим, что $u_k \in \text{Harm}(\overline{\Omega_k})$, $k = 1, \dots, m$. Функция $\mathbb{S}_k$ для любого $k = 1, \dots, m$ не обращается в нуль в Ω_k и положительна в точке ∞ ; следовательно, $\ln \mathbb{S}_k$ голоморфна в этой области. Тем самым u_k определяет $\mathbb{S}_k$ единственным образом. Из (37) следует, что

$$2u_k(x) - u_{k-1}(x) - u_{k+1}(x) = w_k(x), \quad x \in \Delta_k, \quad (39)$$

для $k = 1, \dots, m$, где $u_0 \equiv u_{m+1} \equiv 0$. В обозначениях, введенных в лемме 4.1, уравнения из (39) переписываются в матричном виде следующим образом:

$$(2I - T)(u) = w,$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)^t$ и $w = (w_1, \dots, w_m)^t$. Из леммы 4.1 следует, что вектор $u = (2I - T)^{-1}(w)$ однозначно определен, и тем самым существует единственный набор функций $F_k^{(l)}$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющий (15).

Осталось проверить, что функции (12) из утверждения теоремы 1.2

$$F_k^{(l)} = \prod_{\nu=k}^m \psi_\nu^{(l)},$$

где алгебраические функции $\psi_\nu^{(l)}$ определены в (8), удовлетворяют системе граничных задач (15). Выполнение условий 1), 2) и 2') в (15) непосредственно следует из определения функций $\psi_\nu^{(l)}$. Проверим граничные условия 3) в (15)

$$|F_k^{(l)}(x)|^2 \frac{1}{|(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_k.$$

Действительно, из определения $F_k^{(l)}$ имеем

$$\frac{F_k^{(l)}}{F_{k-1}^{(l)}} = \frac{1}{\psi_{k-1}^{(l)}}. \quad (40)$$

Кроме того, симметрия (по отношению к действительной оси) конструкции римановой поверхности $\mathcal{R}$ функции $\psi^{(l)}$ дает нам

$$\psi_k^{(l)}(x) = \overline{\psi_{k-1}^{(l)}(x)}, \quad x \in \Delta_k. \quad (41)$$

Следовательно, из (40) и (41) мы получаем граничные условия для $k = 2, 3, \dots, m$. Действительно,

$$|F_k^{(l)}(x)|^2 \frac{1}{|(F_{k-1}^{(l)} F_{k+1}^{(l)})(x)|} = \left| \frac{\psi_k^{(l)}(x)}{\psi_{k-1}^{(l)}(x)} \right| = 1, \quad x \in \Delta_k.$$

Для $k = 1$ соотношение (40) дает

$$\frac{|F_1^{(l)}|^2}{|F_2^{(l)}|} = |\psi_1^{(l)}|^2 \left| \prod_{\nu=2}^m \psi_\nu^{(l)} \right|.$$

Ввиду (41) правая часть этого выражения на Δ_k превращается в $|\prod_{\nu=0}^m \psi_\nu^{(l)}|$. Однако произведение всех ветвей алгебраической функции $\psi^{(l)}$ является однозначной функцией в $\overline{\mathbb{C}}$, и по построению (см. (8) и (9)) это произведение не имеет полюсов в $\overline{\mathbb{C}}$, а в бесконечности оно равно 1; следовательно, по теореме Лиувилля это произведение является единицей всюду в $\overline{\mathbb{C}}$. Тем самым граничное условие для $k = 1$:

$$\frac{|F_1^{(l)}(x)|^2}{|F_2^{(l)}(x)|} = 1, \quad x \in \Delta_1,$$

также проверено. Таким образом, лемма и вместе с ней теорема 1.2 доказаны.

Следующее утверждение дополняет теорему 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $S = \mathcal{N}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – система Никкишина с условием на меры $\sigma'_k > 0$ почти всюду на $\Delta_k = \text{supp } \sigma_k$, $k = 1, \dots, m$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+(\otimes)$ – последовательность векторных индексов такая, что для всех $\mathbf{n} \in \Lambda$ и произвольного зафиксированного $l \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\mathbf{n}^l \in \mathbb{Z}_+(\otimes)$ и $n_1 - n_m \leq d$, где d – некоторая константа. Пусть $\{q_{\mathbf{n},k} = \varkappa_{\mathbf{n},k} Q_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^m$, $\mathbf{n} \in \Lambda$, – ортонормированная система многочленов, определенная в (17), и значения $\{K_{\mathbf{n},k}\}_{k=1}^m$, $\mathbf{n} \in \Lambda$, даны в (16). Тогда для любого фиксированного $k = 1, \dots, m$ имеем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{\varkappa_{\mathbf{n}^l,k}}{\varkappa_{\mathbf{n},k}} = \varkappa_k^{(l)}, \quad (42)$$

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{K_{\mathbf{n}^l,k}}{K_{\mathbf{n},k}} = \varkappa_1^{(l)} \dots \varkappa_k^{(l)} \quad (43)$$

и

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{q_{\mathbf{n}^l,k}(z)}{q_{\mathbf{n},k}(z)} = \varkappa_k^{(l)} \widetilde{F_k^{(l)}}(z), \quad z \in K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k, \quad (44)$$

где

$$\varkappa_k^{(l)} = \frac{c_k^{(l)}}{\sqrt{c_{k-1}^{(l)} c_{k+1}^{(l)}}}, \quad c_k^{(l)} = \begin{cases} (F_k^{(l)})'(\infty), & k = 1, \dots, m; \\ F_k^{(l)}(\infty), & k = l+1, \dots, m, \end{cases} \quad (45)$$

и $F_k^{(l)}$ определены в (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По доказанной теореме 1.2 предел в (20) имеет место по всей последовательности Λ . Рассуждая как и при выводе формул (22) и (27), но теперь применительно к ортонормированным многочленам (см. [21], [22]), получаем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{q_{\mathbf{n}^l, k}(z)}{q_{\mathbf{n}, k}(z)} = \begin{cases} (S_k \varphi_k)(z), & k = 1, \dots, l; \\ S_k(z), & k = l + 1, \dots, m, \end{cases} \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k,$$

где S_k определено в (23). Из этой формулы после деления на (22) или (27) в зависимости от значения k получаем

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \frac{\varkappa_{\mathbf{n}^l, k}}{\varkappa_{\mathbf{n}, k}} = \sqrt{\omega_k} = \frac{c_k}{\sqrt{c_{k-1}c_{k+1}}},$$

где ω_k определено в (30), а нормировочные константы c_k были найдены в лемме 3.1 при решении линейной системы уравнений (32), которая эквивалентна соотношениям

$$F_k^{(l)} \equiv c_k \widetilde{F_k^{(l)}}, \quad k = 1, \dots, m,$$

с $\widetilde{F_k^{(l)}}$, удовлетворяющей (15) и тем самым заданной посредством (12). Так как $(\widetilde{F_k^{(l)}})'(\infty) = 1$, $k = 1, \dots, l$, и $(\widetilde{F_k^{(l)}})(\infty) = 1$, $k = l + 1, \dots, m$, то отсюда немедленно получаем формулу (42) с $\varkappa_k^{(l)}$, заданной в (45).

Из определения $\varkappa_{\mathbf{n}, k}$ имеем

$$K_{\mathbf{n}, k} = \varkappa_{\mathbf{n}, 1} \cdots \varkappa_{\mathbf{n}, k}.$$

Выбрав отношение этих констант при значениях векторных индексов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}^l$ и воспользовавшись (42), мы получаем (43). Формула (44) является немедленным следствием (42) и (11).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из (11), (42) и (43) вытекает, что для любого $k = 1, \dots, m$

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} \varkappa_{\mathbf{n}, k}^{1/|\mathbf{n}|} = \varkappa_k^{(l)}, \quad \lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} K_{\mathbf{n}, k}^{1/|\mathbf{n}|} = \varkappa_1^{(l)} \cdots \varkappa_k^{(l)}$$

и

$$\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} |Q_{\mathbf{n}, k}(z)|^{1/|\mathbf{n}|} = |\widetilde{F_k^{(l)}}(z)|, \quad K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_k.$$

Формулы (20) и (31) из [10] позволяют выразить эти пределы в терминах решения векторной проблемы равновесия для логарифмического потенциала. Эта связь устанавливается непосредственно и стандартным образом, и мы не останавливаемся здесь на деталях.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В случае, когда меры σ_k , $k = 1, \dots, m$, из класса Сегё, сильная асимптотика совместно ортогональных многочленов для системы Никишина была получена в [16]. При этих более ограничительных условиях результаты настоящей работы могут быть выведены из теоремы 1 работы [16].

Список литературы

1. Рахманов Е. А. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). №2. С. 237–252.
2. Рахманов Е. А. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II // Матем. сб. 1982. Т. 118(160). №1. С. 104–117.
3. Рахманов Е. А. Об асимптотических свойствах ортогональных многочленов на единичной окружности с весами, не удовлетворяющими условию Сегё // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). №2. С. 151–169.

4. Nevai P. Weakly convergent sequences of functions and orthogonal polynomials // J. Approx. Theory. 1991. V. 65. P. 322–340.
5. Лопес Г. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов и сходимости много-точечных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1985. Т. 128(170). №2. С. 216–229.
6. Лопес Г. Сходимость аппроксимаций Паде для мероморфных функций стилтьесовского типа и сравнительная асимптотика ортогональных многочленов // Матем. сб. 1988. Т. 136(178). №2. С. 206–226.
7. Гончар А. А., Рахманов Е. А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
8. Никитин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
9. Никитин Е. М. О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113(145). №4. С. 499–519.
10. Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. №5. С. 33–58.
11. Driver K., Stahl H. Normality in Nikishin systems // Indag. Math. (N.S.). 1994. V. 5. P. 161–187.
12. Fidalgo Prieto U., Illán J., López Lagomasino G. Hermite–Padé approximation and simultaneous quadrature formulas // J. Approx. Theory. 2004. V. 126. P. 171–197.
13. Fidalgo Prieto U., López Lagomasino G. On perfect Nikishin systems // Comput. Methods Funct. Theory. 2002. V. 2. P. 415–426.
14. Stahl H., Totik V. General orthogonal polynomials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
15. Fidalgo Prieto U., López Lagomasino G. Rate of convergence of generalized Hermite–Padé approximants of Nikishin systems // Constr. Approx. (to appear).
16. Аптекарев А. И. Сильная асимптотика совместно ортогональных многочленов для систем Никитина // Матем. сб. 1999. Т. 190. №5. С. 3–44.
17. de la Calle Ysern B., López Lagomasino G. Strong asymptotic of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite–Padé approximants // J. Comput. Appl. Math. 1998. V. 99. P. 91–103.
18. Kershaw D. A note on orthogonal polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1970. V. 17. P. 83–93.
19. Borwein P., Erdélyi T. Polynomials and polynomial inequalities. New York: Springer-Verlag, 1991. (Grad. Texts in Math. V. 161.)
20. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
21. de la Calle Ysern B., López Lagomasino G. Weak convergence of varying measures and Hermite–Padé orthogonal polynomials // Constr. Approx. 1999. V. 15. P. 553–575.
22. de la Calle Ysern B., López Lagomasino G. Convergencia relativa de polinomios ortogonales variantes // Margarita mathematica en memoria de José Javier Guadalupe Hernández (Chicho) / ed. L. Español, J. L. Varona. Logroño: Univ. de La Rioja, 2001.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, Москва;
Университет Карлоса III, Мадрид, Испания;
Школа телекоммуникаций,
Политехнический университет Мадрида, Испания
E-mail: aptekaa@keldysh.ru
lago@math.uc3m.es
igalvar@euitt.upm.es

Поступила в редакцию
18.10.2004