Общероссийский математический портал

Л. К. Кусаинова, О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 8, 21–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 07:08:48

УДК 517.518

Л. К. Кусаинова

О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева

Пусть X_1, X_2 – пара банаховых пространств функций, заданных в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Под мультипликатором, действующим из X_1 в X_2 , понимается функция γ на Ω , для которой $\gamma X_1 = \{\gamma f, f \in X_1\} \subset X_2$. Под нормой $\|\gamma\| = \|\gamma\|_{M(X_1 \rightarrow X_2)}$ понимается норма оператора $T(u) = \gamma u, u \in X_1$. В работе получены условия принадлежности функции γ классам мультипликаторов $M(W_1 \rightarrow W_2)$, $M(W \rightarrow L)$, где W, L – весовые пространства Соболева и Лебега соответственно. Получены оценки норм мультипликаторов, не содержащие емкостных характеристик. В работе введены и существенно использованы специальные локальные максимальные операторы.

Библиография: 9 названий.

В настоящей работе получены условия принадлежности функции γ классам мультипликаторов $M(W_1 \rightarrow W_2)$, $M(W \rightarrow L)$, где W, L – весовые пространства Соболева и Лебега соответственно.

В работе рассмотрены весовые пары пространств Соболева достаточно общего типа, получены оценки норм мультипликаторов, не содержащие емкостных характеристик, введены и существенно использованы специальные локальные максимальные операторы.

§1. Максимальный оператор M_α^* и мультипликаторы в $M(W \rightarrow L)$

Пусть X_1, X_2 – пара банаховых пространств функций, заданных в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Под мультипликатором, действующим из X_1 в X_2 , понимается функция γ на Ω , для которой $\gamma X_1 = \{\gamma f, f \in X_1\} \subset X_2$. Пространство мультипликаторов, действующих из X_1 в X_2 , обозначим через $M(X_1 \rightarrow X_2)$. Под нормой $\|\gamma\| = \|\gamma\|_{M(X_1 \rightarrow X_2)}$ понимается норма оператора $T(u) = \gamma u, u \in X_1$. Относительно развернутая теория мультипликаторов в парах невесовых пространств дифференцируемых функций, включая производные дробных порядков (пространств Соболева, Слободецкого, бесселевых потенциалов), дана в монографии [1].

Введем обозначения. Пусть Ω – открытое множество в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$; $L(\Omega; \text{loc})$, $L_p(\Omega; v)$ – пространства локально суммируемых в Ω функций и функций, имеющих в Ω конечную весовую норму Лебега

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_p(\Omega; v)} &= \|u; L_p(\Omega; v)\| \\ &= \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u|^p v(x) dx \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty; \\ \inf_{\lambda > 0} \{ \lambda : |\{x \in \Omega : |u(x)| > \lambda\}|_v = 0 \} & \text{при } p = \infty, \end{cases} \\ |e|_v &= v(e) = \int_e v dx, \quad |e| = \int_e dx, \end{aligned}$$

соответственно; подвесом v в Ω понимается неотрицательная функция из $L(\Omega; \text{loc})$; $L(\Omega) = L(\Omega; 1)$, норма $\|u\|_{p, \Omega} = |u|_{L_p(\Omega)}$. Далее: χ_e – характеристическая функция e , $\bar{e}$ – замыкание e , I^n – совокупность всех кубов Q вида

$$Q = Q_d = Q_d(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{d}{2}, i = 1, \dots, n \right\}, \quad \lambda Q = Q_{\lambda d}(x);$$

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\};$$

$\emptyset$ – пустое множество, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество целочисленных неотрицательных векторов в $\mathbb{R}^n$. Через c будем обозначать постоянные, зависящие только от числовых параметров, например, $c = c(l, p, n)$. Для упрощения записи обозначение $\mathbb{R}^n$ будет, как правило, опускаться. Кроме того, всюду ниже

$$\int_E f = \int_E f(x) dx, \quad E \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть $d(x)$ – положительная функция, заданная в Ω и удовлетворяющая условиям:

$$\sup_{x \in \Omega} d(x) < C, \quad Q(x) = Q_{d(x)}(x) \subset \Omega \quad \forall x \in \Omega.$$

Функцию $d(x)$ будем называть *функцией длины ребра*. Положим

$$Q_{(\varepsilon)}(x) = (1 - \varepsilon)Q(x), \quad 0 \leq \varepsilon < 1$$

($\varepsilon = 0$ только для $\Omega = \mathbb{R}^n$).

Функцию длины ребра $d(x)$, удовлетворяющую условию

$$d(y) \geq \eta d(x), \quad \text{как только } y \in Q_{(\varepsilon)}(x),$$

будем называть *регулярной функцией длины ребра*. К примеру, пусть Ω имеет непустую границу $\partial\Omega$. Тогда функции $\Delta(x) = \sup_{d>0} \{d : Q_d(x) \subset \Omega\}$ и $d_\Delta(x) = \min\{1, \Delta(x)\}$ являются регулярными функциями, поскольку

$$\varepsilon \leq \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} \leq \varepsilon^{-1}, \quad \text{если } y \in Q_{\Delta(x)}(x),$$

$$\varepsilon \leq \frac{d_\Delta(y)}{d_\Delta(x)} \leq \varepsilon^{-1}, \quad \text{если } y \in (1 - \varepsilon)Q_{(\varepsilon)}^\Delta(x), \quad Q^\Delta(x) = Q_{d_\Delta(x)}(x).$$

Функция длины ребра $d(x)$ порождает дифференциальный базис кубов $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)} = \bigcup_{x \in \Omega} \{Q : Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)\}$. Базисы $\mathcal{B}$, порождаемые регулярной функцией, будем отмечать как $\mathcal{B}^\sim$. Среди базисов $\mathcal{B}^\sim$ выделим специальным обозначением $\mathcal{B}^\Delta$ базис, порождаемый функцией $d_\Delta(x)$ либо $d(x) \equiv 1$ в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Пусть $0 \leq \alpha < n$, $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x) = \{Q : Q \in \mathcal{B}, x \in Q\}$. Положим

$$M_\alpha^* f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{B}(x)} |Q|^{-1+\alpha/n} \int_Q |f|, \quad f \in L(\Omega; \text{loc}), \quad (1)$$

$M^*f(x) = M_0^*f(x)$. Введенный посредством равенства (1) максимальный оператор является локальным аналогом известного дробного максимального оператора

$$M_\alpha f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{Q \in I^n, Q \ni x} |Q|^{-1+\alpha/n} \int_Q |f|, \quad 0 < \alpha < n,$$

а оператор M^*f локальным аналогом оператора Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{Q \in I^n, Q \ni x} |Q|^{-1} \int_Q |f|.$$

Очевидная импликация $Q \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow Q \in \mathcal{B}(y) \quad \forall y \in Q$ позволяет утверждать, что множества $\{x \in \Omega : M_\alpha^*f(x) > \lambda\}$ открыты, а следовательно, M_α^* – субаддитивный положительно однородный оператор, действующий из $L(\Omega; \text{loc})$ в пространство $\mathfrak{M}(\Omega)$ измеримых в Ω функций.

В этом параграфе будут рассматриваться вопросы ограниченности оператора M_α^* в весовых пространствах Лебега, а также соотношения между функцией M_α^* и сингулярным интегралом

$$I_{\alpha, \Omega} f(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n. \quad (2)$$

Известно, что условия ограниченности функции M_α в пространствах Лебега $L_q(\omega)$ даются в терминах весовых классов типа A_p . Если же вес ω удовлетворяет условию (A_∞) , то между потенциалом Рисса $I_\alpha f$ и максимальной функцией M_α имеет место соотношение вида

$$\|I_\alpha g\|_{L_p(\mathbb{R}^n; \omega)} \leq c \|M_\alpha g\|_{L_p(\mathbb{R}^n; \omega)}, \quad 1 \leq p < \infty$$

(см. [2], [3]).

Введем локальные аналоги условий (A_p) (см. [2]) относительно базиса $\mathcal{B}$, построенного по некоторой функции длины $d(x)$ в Ω .

Классы $A_p^* = A_p^*(\Omega)$. 1) Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$.

Будем говорить, что вес ω на Ω удовлетворяет *условию (A_p^*) (относительно базиса $\mathcal{B}$)*, если

$$\|\omega\|_{A_p^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{Q \in \mathcal{B}} |Q|^{-1} \left(\int_Q \omega^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_Q \omega \right)^{1/p} < \infty. \quad (3)$$

Запись: $\omega \in A_p^*$.

2) По определению вес ω на Ω удовлетворяет *условию (A_∞^*) (относительно базиса $\mathcal{B}$)*, если для данного $\tau > 0$ найдется такое $\delta \in (0, 1)$, что для всех $Q \in \mathcal{B}$

$$|e|_\omega \leq \tau |Q|_\omega, \quad \text{как только } e \subset Q, \quad |e| \leq \delta |Q|. \quad (4)$$

Запись: $\omega \in A_\infty^*$.

3) По определению вес ω на Ω удовлетворяет *условию* (A_1^*) (*относительно базиса* $\mathcal{B}$), если существует такое $R > 1$, что для всех $Q \in \mathcal{B}$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega \leq R \operatorname{ess\,inf}_Q \omega. \quad (5)$$

Запись: $\omega \in A_1^*$.

4) Будем говорить, что вес ω удовлетворяет *условию* (A^*) (*относительно базиса* $\mathcal{B}$), если существуют такие $\tau \in (0, 1)$ и $R > 1$, что для всех $Q \in \mathcal{B}$

$$\sup_Q M(\omega \chi_Q) \leq R \sup_{Q \setminus e} M(\omega \chi_Q), \quad \text{как только } e \subset Q, \quad |e| \leq \tau |Q|. \quad (6)$$

Запись: $\omega \in A^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $Q \in \mathcal{B}$. Из слабого неравенства (см. [4; § 1])

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq c\lambda \|f\|_1,$$

$c = c(n)$, следует оценка $|e_\gamma| \leq c\gamma |Q|$, где $e_\gamma = \{x \in Q : M(\omega \chi_Q) > \gamma^{-1} |Q|^{-1} |Q|_\omega\}$. Если вес $\omega \in A^*$, то, полагая $c\gamma = \tau$, $R_1 = c\tau^{-1}R$, получаем, что

$$\sup_Q M(\omega \chi_Q) \leq R \sup_{Q \setminus e_\gamma} M(\omega \chi_Q) \leq R_1 |Q|^{-1} |Q|_\omega. \quad (7)$$

Перечисленным выше условиям (3)–(6) удовлетворяет вес, медленно колеблющийся относительно базиса $\mathcal{B}$, т.е. такой, что для всех $Q \in \mathcal{B}$

$$c^{-1} < \frac{\omega(y)}{\omega(x)} < c, \quad \text{если } y, x \in Q. \quad (8)$$

Например, вес $\omega(x) = d(x)^\lambda$, где $d(x)$ – регулярная функция длины ребра. Нетрудно увидеть, что в этом случае

$$\begin{aligned} \eta^{-1} &\geq \frac{d(y)}{d(x)} \geq \eta, & \text{если } y \in Q_{(\varepsilon)}(x), \\ \eta^{-2|\lambda|} &\geq \frac{d(y)^\lambda}{d(x)^\lambda} \geq \eta^{2|\lambda|}, & \text{если } y, x \in Q, \quad Q \in \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (9)$$

В определенных случаях базис, относительно которого вес ω обладает свойством медленного колебания, можно задать, исходя из свойств ω . К примеру, пусть ω – гладкий вес в Ω со следующим ограничением на градиент:

$$\sup_Q |\nabla \omega| \leq c\omega(x)d(x)^{-1} \quad \forall Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x), \quad (10)$$

где $d(x)$ – регулярная функция. Вес $\omega(x)$ удовлетворяет условию (8) относительно базиса $\mathcal{B}'_{(\varepsilon)}$, построенного по функции $d_1(x) = \delta d(x)$, $\delta = (c\sqrt{n})^{-1}$. Действительно,

$$\left| \frac{\omega(y)}{\omega(x)} - 1 \right| \leq \sup_Q |\nabla \omega| \frac{|y-x|}{\omega(x)} \leq \frac{c\sqrt{n}}{2} \delta = \frac{1}{2}, \quad \text{если } y \in \delta Q_{(\varepsilon)}(x).$$

Если же $y, t \in Q$, $Q \subset \delta Q_{(\varepsilon)}(x)$, то

$$4^{-1} \leq \frac{\omega(y)}{\omega(t)} = \frac{\omega(y)}{\omega(x)} \frac{\omega(x)}{\omega(t)} \leq 4.$$

Класс $D^* = D^*(\Omega)$. Будем говорить, что вес ω на Ω удовлетворяет *условию* (D^*) (*относительно базиса* $\mathcal{B}$), если существуют такие $R_\omega > 1$ и $\delta_0 \in (0, 1)$, что для всех $Q \in \mathcal{B}$

$$R_\omega^{-1}|Q|_\omega \leq |\delta Q|_\omega, \quad \text{как только } \delta_0 \leq \delta \leq 1. \quad (11)$$

Запись: $\omega \in D^*$. Легко увидеть, что имеет место импликация $\omega \in A_\infty^* \Rightarrow \omega \in D^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) Вес $\omega \in L_s(\Omega)$ при некотором $s > 1$ имеет почти всюду конечную в Ω мажоранту $(M^*\omega^s)^{1/s}$, удовлетворяющую к тому же условию (A_1^*) . Действительно, если $Q \in \mathcal{B}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q (M^*\omega^s)^{1/s} &\leq \frac{1}{|Q|} \left(\left(\int_Q M^*\omega^s \right)^{1/s} |Q|^{1/s'} \right) = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q M^*\omega^s \right)^{1/s} \\ &\leq (\text{ess inf}_Q M^*\omega^s)^{1/s} = \text{ess inf}_Q (M^*\omega^s)^{1/s}. \end{aligned} \quad (12)$$

2) Пусть вес $v \in A_1^*$ относительно базиса $\mathcal{B}$. Если $e \subset Q \in \mathcal{B}$, $|e| \leq \alpha|Q|$, $0 < \alpha < 1$, то из неравенств

$$|Q|_v \leq |Q| (R \text{ess inf}_{Q \setminus e} v) \leq R|Q| |Q \setminus e|^{-1} |Q \setminus e|_v \leq R(1 - \alpha)^{-1} |Q \setminus e|_v$$

следует оценка

$$|e|_v = |Q|_v - |Q \setminus e|_v \leq (1 - (1 - \alpha)R^{-1})|Q|_v. \quad (13)$$

Из оценок (12) и (13) заключаем, что для веса $\omega \in L_s(\Omega)$, $s > 1$, мажоранта $v = (M^*\omega^s)^{1/s} \in A_\infty^*$, так как при $\alpha = 1 - \tau$, $R = 1$ справедлива импликация

$$e \subset Q, \quad |e| \leq \tau|Q| \quad \Rightarrow \quad \int_e (M^*\omega^s)^{1/s} \leq \tau \int_Q (M^*\omega^s)^{1/s}. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq \alpha < n$, $s = n/(n - \alpha)$. Справедливы следующие утверждения.

а) Функция $M_\alpha^* f$ на классе $L_1(\Omega)$ подчиняется слабой $(1, s)$ -оценке

$$|\{x \in \Omega : M_\alpha^* f(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{c}{\lambda} \|f\|_{L_1(\Omega)} \right)^s. \quad (15)$$

б) Если $f \in L(\Omega; \text{loc})$, то $M_\alpha^* f(x) < \infty$ для п.в. $x \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\omega, v^{1-p'} \in D^*$ относительно $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}$, $0 < \tau < 1$, и

$$\sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}} |Q|^{-1+\alpha/n} \left(\int_Q v^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_Q \omega \right)^{1/q} = K < \infty. \quad (16)$$

Тогда на классе $L_p(\Omega; v)$ справедливо неравенство

$$\|M_\alpha^* f\|_{L_q(\Omega; \omega)} \leq C \|f\|_{L_p(\Omega; v)}. \quad (17)$$

Точная постоянная C в (17) подчиняется оценкам $cK \geq C \geq K$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $v^{1-p'} \in D^*$ относительно базиса $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}$, $0 < \tau < 1$, и

$$K_\tau = \sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}} \left(\int_Q (M_\alpha^* v^{1-p'})^q \omega \right)^{1/q} \left(\int_Q v^{1-p'} \right)^{-1/p} < \infty.$$

Тогда на классе $L_p(\Omega; v)$ справедливо неравенство (17). Точная постоянная C в (17) подчиняется оценкам $cK_\tau \geq C \geq K$.

Теорема 2 переносит на максимальную функцию $M_\alpha^* f$ неравенство Сойера

$$\|M_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n; \omega)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n; v)}, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n; v),$$

где существование конечной постоянной C равносильно условию

$$\sup_{Q \in I^n} \left(\int_Q v^{1-p'} \right)^{-1/p} \left(\int_Q (M_\alpha(\chi_Q v^{1-p'}))^q \omega \right)^{1/q} < \infty$$

(см. [3]).

Приведем ряд простых следствий из теорем 2 и 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедливы следующие утверждения:

- а) $\|M^* f\|_{L_p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_p(\Omega)}$, $1 < p < \infty$;
- б) пусть $0 < \alpha < n/p$, $1 < p \leq q \leq n/(n - \alpha p)$, M_α^Δ — максимальный оператор относительно базиса $\mathcal{B}^\Delta$, тогда

$$\|M_\alpha^\Delta f\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_p(\Omega)};$$

- в) пусть $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$ и

$$|Q|_\omega^{1/q} \leq K |Q|^{1/p} \quad \forall Q \in \mathcal{B}^\Delta,$$

тогда

$$\|M_\alpha^\Delta f\|_{L_q(\Omega; \omega)} \leq cK \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Семейство кубов $\{Q^j, j \in J\}$, $|J| \leq \infty$, будем называть B -покрытием множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если выполнены условия:

- 1) $E \subset \bigcup_j Q^j$;
- 2) $\sum_j \chi_{Q^j}(x) \leq \varkappa_1 < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) семейство $\{Q^j\}$ можно разбить на не более чем $\varkappa_2 < \infty$ непересекающихся подсемейств $\{Q^j, j \in J_\nu\}$, в каждом из которых кубы попарно не пересекаются.

Условие 3) назовем $\varkappa_2$ -разделимостью.

ТЕОРЕМА 4 [5; разд. 2.3]. Пусть $d(x)$ – регулярная функция длины ребра, $\gamma \in (0, 1)$. Тогда из семейства $\{\gamma Q_{(\varepsilon)}(x), x \in \Omega\}$ можно выделить не более чем счетное подсемейство $\{\gamma Q^j, j \in J\}$, $Q^j = Q_{(\varepsilon)}(x^j)$, такое, что

- a) $\{\gamma \overline{Q}^j, j \in J\}$ – $\varkappa_1$ -разделимое B -покрытие Ω кратности $\widehat{\varkappa}_1$;
- b) $\{Q^j, j \in J\}$ – $\varkappa_2$ -разделимое B -покрытие Ω кратности $\widehat{\varkappa}_2$.

Постоянные $\varkappa_i = \varkappa_i(\eta, \gamma, n)$, $\widehat{\varkappa}_i = \widehat{\varkappa}_i(\eta, \gamma, n)$.

Покрывтия $\{Q^j, j \in J\}$, $\{\gamma \overline{Q}^j, j \in J\}$ множества Ω , рассматриваемые в паре, будем называть *двойным B -покрытием*. Запись: $\{\widehat{Q}^j, Q^j\}_{j \in J}$, $\widehat{Q}^j = \gamma \overline{Q}^j$.

ТЕОРЕМА 5 [5; разд. 2.3]. Пусть $d(x)$ – регулярная функция длины ребра на Ω , $\{\widehat{Q}^j, Q^j\}_{j \in J}$ – двойное B -покрытие Ω . Тогда существует такое семейство $\Psi = \{\psi_j, j \in J\}$ функций класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

- a) $\text{supp}(\psi_j) \subset Q^j$;
- b) $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j = 1$ на $\widehat{Q}^j$;
- c) $\sum_{j \in J} \psi_j = 1$;
- d) $\max_{Q^j} |D^\alpha \psi_j| \leq c d(x^j)^{-|\alpha|}$, $c = c(|\alpha|, n, \gamma)$.

В свете сформулированных выше теорем 4, 5 полезным оказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\omega \in A_\infty^*$ относительно базиса $\mathcal{B}$. Тогда существует такая постоянная $c = c(p)$, $1 \leq p < \infty$, что для любого куба $Q_{(\varepsilon)}(x_0)$

$$\int_{Q^*} |I_\alpha f|^p \omega \leq c^p \int_{Q^*} |M_\alpha^* f|^p \omega, \quad \text{как только } 2Q^* \subset Q_{(\varepsilon)}(x_0), \quad \text{supp } f \subset Q^*. \quad (18)$$

Пусть $W = W_{\overline{p}}^l(\overline{p}; \Omega)$ – весовое пространство Соболева с нормой

$$|u; W_{\overline{p}}^l(\overline{p}; \Omega)| = \sum_{m=0}^l |\nabla_m u; L_{p_m}(\Omega; \rho_m)|.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $1 \leq l < n$, $1 < p_m \leq q < \infty$, $\rho_m^{1-p'_m} \in A_\infty^*$ относительно базиса $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}^\sim$, $0 < \tau < 1$. Тогда

- a) $\gamma \in M(W \rightarrow L_q(\Omega; \omega))$, если $|\gamma|^q \omega \in A_\infty^*$, и

$$K_m = \sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}^\sim} |Q|^{-1+m/n} \left(\int_Q \rho_m^{1-p'_m} \right)^{1/p'_m} \left(\int_Q |\gamma|^q \omega \right)^{1/q} < \infty,$$

$m = 0, 1, \dots, l$, норма $\|\gamma\| \leq c \sum_{m=0}^l K_m$;

- b) $\gamma \in M(W \rightarrow L_q(\Omega))$, если $\gamma \in L_{q+\theta}(\Omega; \text{loc})$ при некотором $\theta > 0$, и

$$K_{\theta, m} = \sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}^\sim} |Q|^{-1+m/n} \left(\int_Q \rho_m^{1-p'_m} \right)^{1/p'_m} \left(\int_Q \left(M^*(|\gamma|^{q+\theta}) \right)^{q/(q+\theta)} \right)^{1/q} < \infty,$$

норма $\|\gamma\| \leq c \sum_{m=0}^l K_{\theta, m}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p \leq q \leq pn/(n-lp) < \infty$, $\gamma \in L_{q+\theta}(\Omega; \text{loc})$, $\theta > 0$, и

$$C_\theta = \sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}^\Delta} |Q|^{-1} \int_Q M^*(|\gamma|^{q+\theta}) < \infty.$$

Тогда $\gamma \in M(W_p^l(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega))$. Норма $\|\gamma\| \leq cC_\theta^{1/(q+\theta)}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\rho^{-p'} \in A_p^*$ относительно базиса $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}^\Delta$, $0 < \tau < 1$, и

$$K = \sup_{Q \in \mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}^\Delta} |Q|^{-1} \int_Q \rho^{-p'} < \infty.$$

Тогда на классе $C^\infty(\Omega)$ справедлива оценка

$$\int_\Omega |u|^p \rho^{-p'} \leq cK^p \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \rho^p.$$

§ 2. Доказательства теорем о свойствах операторов M_α^* и мультипликаторах в $M(W \rightarrow L)$

ЛЕММА 2 [6]. Пусть E – ограниченное подмножество Ω . Тогда из семейства $\{Q_{(\varepsilon)}(x), x \in E\}$ можно извлечь B -покрытие E с $\varkappa_i$, $i = 1, 2$, зависящими только от n .

ЛЕММА 3. Пусть на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задано отображение $E \ni x \mapsto Q^x \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x)$. Тогда из семейства $\{aQ^x, x \in E\}$, $a > 1$, можно извлечь B -покрытие E с постоянными $\varkappa_i = \varkappa_i(a, n)$, $i = 1, 2$.

Утверждение леммы 3 следует из обобщенной теоремы Морса (см. [6]). Пусть $H(x) = aQ^x$, $Q^x = Q_{h(x)}$. Условия теоремы Морса: существуют семейство замкнутых шаров $\{\overline{B}(x; r(x)), x \in E\}$ и постоянная $R > 0$ такие, что

- 1) $\overline{B}(x; r(x)) \subset H(x) \subset R\overline{B}(x; r(x))$;
- 2) выпуклая оболочка $\text{conv}(\{z\} \cup \overline{B}(x, r(x))) \subset H(x) \quad \forall z \in H(x)$,

относительно семейства $\{H(x), x \in E\}$ выполняются при $r(x) = (a-1)h(x)/2$ и $R = (a+1)\sqrt{n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $1 < a < (1-\varepsilon)^{-1}$, то кубы $a\overline{Q}^x \subset \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. а) Точке $x \in E_{\lambda, R} = E_\lambda \cap B(0, R)$, где $E_\lambda = \{x \in \Omega : M_\alpha^* f(x) > \lambda\}$, сопоставим куб $Q^x \in \mathcal{B}(x)$, на котором

$$|Q^x|^{-1+\alpha/n} \int_{Q^x} |f| > \lambda.$$

Пусть $\{Q^j\}$, $Q^j = aQ^{x^j}$, – $\varkappa$ -разделимое покрытие $E_{\lambda, R}$, выделенное согласно лемме 3 из семейства $\{aQ^x, x \in E_{\lambda, R}\}$, $a = (1-\varepsilon)^{-1}$. Очевидны оценки

$$|E_{\lambda, R}|^{1/s} \leq \varkappa \max_{1 \leq \nu \leq \varkappa} \sum_{j \in J_\nu} \frac{a^{n/s}}{\lambda} \int_{Q^j} |f| \leq \varkappa a^{n/s} \lambda^{-1} |f; L_1(\Omega)|.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем (15).

б) Пусть F_k – возрастающая по включению последовательность компактов $F_k \subset \Omega$, объединение которых $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \Omega$. Каждому F_k соотнесем компакт $\tilde{F}_k = \bigcup_{x \in X_k} \overline{Q_{(\varepsilon)}(x)}$, где $X_k = \{x \in \Omega : Q_{(\varepsilon)}(x) \cap F_k \neq \emptyset\}$. Пусть $E_{\lambda,k} = \{x \in F_k : M_{\alpha}^* f(x) > \lambda\}$. Заметим, что кубы $Q \subset \tilde{F}_k$, где $Q \in \mathcal{B}_x, x \in F$. Поэтому с помощью рассуждений, приведенных выше, выводим, что

$$|E_{\lambda,k}|^{1/s} \leq a^{n/s} \varkappa_2 \lambda^{-1} |f; L_1(\tilde{F}_k)|. \quad (19)$$

Из (19) следует, что

$$|\{x \in F_k : M_{\alpha}^* f(x) = \infty\}| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\{x \in F_k : M_{\alpha}^* f(x) > N\}| = 0.$$

Наконец,

$$|\{x \in \Omega : M_{\alpha}^* f(x) = \infty\}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\{x \in F_k : M_{\alpha}^* f(x) = \infty\}| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 в существенном опирается на доказательство аналогичного неравенства для максимальной функции M_{α} , данной в работе [3], но с использованием B -покрытий, выделяемых из семейства $\{aQ^x\} \subset \mathcal{B}$.

Введем обозначения: $\Omega_N = \{x \in \Omega : |x| < N\}$, $\Omega_N^k = \{x \in \Omega_N : M_{\alpha}^* f(x) > 2^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел; $\{\hat{Q}^{k,j}, j \in J^k\}$ – $\varkappa$ -разделимое B -покрытие множества Ω_N^k , выделенное из семейства $\{aQ^x, x \in \Omega_N^k\}$, $1 < a < (1 - \varepsilon)^{-1}$, где Q^x – кубы из $\mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x)$, на которых

$$|Q^x|^{-1+\alpha/n} \int_{Q^x} |f| > 2^k, \quad (20)$$

$\hat{Q}^{k,j} = aQ^{k,j}$, $Q^{k,j} = Q^{x^j}$ при $j \in J^k$. Положим $\tilde{\Omega}_N^k = \bigcup_{j \in J^k} \hat{Q}^{k,j}$, $E_{k,j} = (\Omega_N \cap \hat{Q}^{k,j}) \setminus \tilde{\Omega}_N^{k+1}$, $\sigma = v^{1-p'}$. Из условия (16) вытекают оценки

$$\mu_{k,j} = |E_{k,j}|_{\omega} \left(|Q^{k,j}|^{-1+\alpha/n} \int_{Q^{k,j}} \sigma \right)^q \leq K^q |Q^{k,j}|_{\sigma}^{q/p} |\hat{Q}^{k,j}|_{\omega} |Q^{k,j}|_{\omega}^{-1}. \quad (21)$$

Выбрав в (21) $a = \min\{\delta_0^{-1}, (1 - \tau\varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}\}$, из условия (D^*) на вес ω выводим, что $|\hat{Q}^{k,j}|_{\omega} |Q^{k,j}|_{\omega}^{-1} \leq R_{\omega}$, а

$$\mu_{k,j} \leq R_{\omega} K^q |Q^{k,j}|_{\sigma}^{q/p}. \quad (22)$$

Поскольку $E_{k,j} \cap \Omega_N^{k+1} = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \{|x| < N\}} (M_{\alpha}^* f)^q \omega &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{\Omega}_N^k \setminus \tilde{\Omega}_N^{k+1}} (M_{\alpha}^* f)^q \omega \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \in J^k} \int_{E_{k,j}} (M_{\alpha}^* f)^q \omega \right) \\ &\leq 2^q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j \in J^k} |Q^{k,j}|^{-1+\alpha/n} \int_{Q^{k,j}} |f| \right)^q |E_{k,j}|_{\omega} \\ &= 2^q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j \in J^k} \left(\left(|Q^{k,j}|^{-1+\alpha/n} \int_{Q^{k,j}} \sigma \right)^q |E_{k,j}|_{\omega} \left(|Q^{k,j}|_{\sigma}^{-1} \int_{Q^{k,j}} |f| \right)^q \right) \\ &\leq 2^q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j \in J^k} \mu_{k,j} \left(|Q^{k,j}|_{\sigma}^{-1} \int_{Q^{k,j}} |f| \right)^q. \end{aligned} \quad (23)$$

Зададим на $\Lambda = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ дискретную меру μ , соотнеся паре $(k, j) \in \Lambda$ массу $\mu_{k,j}$ либо нуль, если $j \notin J^k$. Из (23) следует оценка

$$\int_{\Omega_N} (M_\alpha^* f)^q \omega \leq 2^q |U(|f|v^{-1+p'})|; L_q(\Lambda; \mu)|^q, \quad (24)$$

где

$$Ug = \left\{ |Q^{k,j}|_\sigma^{-1} \int_{E_{k,j}} |g|_\sigma, (k, j) \in \Lambda \right\}, \quad g \in L_1(\Omega; \sigma) + L_\infty(\sigma).$$

Оператор U сублинеен и имеет строгий (∞, ∞) -тип как оператор из $L_\infty(\Omega_N; \sigma)$ в $L_\infty(\Lambda, \mu)$, слабый $(1, q/p)$ -тип как оператор из $L_1(\Omega; \sigma)$ в $L_{q/p}(\Lambda, \mu)$. Действительно,

$$|Q^{k,j}|_\sigma^{-1} \int_{E_{k,j}} |g|_\sigma \leq \|g\|_{L_\infty(\Omega; \sigma)} \frac{|\widehat{Q}^{k,j}|_\sigma}{|Q^{k,j}|_\sigma} \leq R_\sigma \|g\|_{L_\infty(\Omega; \sigma)} \quad \forall (k, j) \in \Lambda.$$

Далее, полагая $\Lambda_\lambda = \left\{ (k, j) \in \Lambda : |Q^{k,j}|_\sigma^{-1} \int_{E_{k,j}} |g|_\sigma > \lambda \right\}$ и обращаясь к оценке (22), выводим, что

$$\begin{aligned} |\{Ug > \lambda\}|_\mu &= \sum_{(k,j) \in \Lambda_\lambda} \mu_{k,j} \leq R_\omega K^q \sum_{(k,j) \in \Lambda_\lambda} |Q^{k,j}|_\sigma^{q/p} \\ &\leq R_\omega K^q \sum_{(k,j) \in \Lambda_\lambda} \left(\lambda^{-1} \int_{E_{k,j}} |g|_\sigma \right)^{q/p} \\ &\leq R_\omega \varkappa K^q \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{q/p} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{\Omega}_N^k \setminus \tilde{\Omega}_N^{k+1}} |g|_\sigma \right)^{q/p} \\ &\leq R_\omega \varkappa K^q \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{q/p} \left(\int_{\Omega} |g|_\sigma \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Заметим, что для $\theta = 1/p$, $1/p = (1 - \theta)/\infty + \theta/1$, $1/q = (1 - \theta)/\infty + \theta p/q$ из интерполяционной теоремы Марцинкевича [7] следует, что $\|U\|_{L_p(\Omega, \sigma) \rightarrow L_q(\Lambda, \mu)} \leq c(R_\sigma R_\omega)^{1/p} K$. В итоге, перейдя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в вытекающем из (24) неравенстве

$$\int_{\Omega_N} (M_\alpha^* f)^q \omega \leq (c(R_\sigma R_\omega)^{1/p} K)^q \left(\int_{\Omega} |f|^p v \right)^{q/p},$$

получаем (17). Оценка снизу в (17) проверяется на $f = \chi_Q \sigma$, $Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 повторяет в целом доказательство теоремы 2. Следует лишь внести следующую поправку: взять вместо (21) оценку $\mu_{kj} \leq K_\tau^q \times |\widehat{Q}^{k,j}|_\sigma^{q/p}$.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in L(\Omega; \text{loc})$, $0 < \alpha < n$, $Q^* = Q_d^* \in I^n$ и не пустые множества $E = \{x \in \Omega : I_{\alpha, \Omega} f(x) > a\} \cap Q^*$ и $F = 2\bar{Q}^* \setminus E$, $a > 0$. Тогда существует не более чем счетное разложение $E = \bigcup_{k=1}^K P^k$ по кубам, удовлетворяющим следующим условиям:

- а) $\text{int}(P^k) = Q^k \in I^n$;
- б) $Q^k \cap Q^j = \emptyset$, если $k \neq j$;
- в) $I_{\alpha, \Omega} f(t) \leq a$ в некоторой точке $t \in 10\sqrt{n}P^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda_0 = \{\bar{Q}^*\}$. Рассмотрим последовательность $\{\Lambda_k\}$, где Λ_k – совокупность всех замкнутых кубов, полученных параллельным рассечением каждого из $S \in \Lambda_{k-1}$ на 2^n кубов с длинами ребер $2^{-1}\delta(S)$, где $\delta(S)$ – длина ребра куба S . Положим $P = S \cap Q^*$, $c = 2\sqrt{n}$, $A_j = \{x \in E : cd/2^j < \text{dist}(x, F) \leq cd/2^{j-1}\}$, j целые, $J = \{j : A_j \neq \emptyset\}$, $\Lambda = \bigcup_{j \in J} \{P : P \in \Lambda_j, P \cap A_j \neq \emptyset\}$. По построению кубов $E = \bigcup_{P \in \Lambda} P$. Кубы $P \in \Lambda$ обладают свойством:

- и) $\text{diam}(P) \leq \text{dist}(P, F) \leq 4 \text{diam}(P)$.

Докажем и). Если $P \in \Lambda_j$ и $x_0 \in P \cap A_j \neq \emptyset$, то для произвольно выбранных $x \in P$, $y \in F$

$$|x - x_0| \leq \frac{\sqrt{n}d}{2^j} < \frac{cd}{2^j} \leq |y - x_0|,$$

откуда

$$\begin{aligned} \text{diam}(P) &= \frac{\sqrt{n}d}{2^j} = \frac{cd}{2^j} - \frac{\sqrt{n}d}{2^j} \leq \inf_{x \in P, y \in F} ||x_0 - y| - |x - x_0|| \\ &\leq \inf_{x \in P, y \in F} |x - y| = \text{dist}(P, F) \leq \text{dist}(x_0, F) \leq \frac{4\sqrt{n}d}{2^j} = 4 \text{diam}(P). \end{aligned}$$

Пусть $P \in \Lambda_j$ и $P \cap A_j \neq \emptyset$, z – центр P . Допустим, что $10\sqrt{n}P \cap F = \emptyset$, т.е. $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in F$ найдется $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, при котором $|y_s - z_s| \geq 10\sqrt{n}d/2^{j+1}$. С другой стороны, для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$

$$|x - y| \geq ||x_s - z_s| - |z_s - y_s|| > \frac{(10\sqrt{n} - 1)d}{2^{j+1}}$$

и в силу и)

$$\frac{9\sqrt{n}d}{2^{j+1}} \leq \frac{(10\sqrt{n} - 1)d}{2^{j+1}} \leq \text{dist}(P, F) \leq \frac{8\sqrt{n}d}{2^{j+1}},$$

что невозможно. Итак, $10\sqrt{n}P \cap F \neq \emptyset$, т.е. для любого $P \in \Lambda$ имеет место утверждение в). Если $\text{int}(P) \cap \text{int}(S) \neq \emptyset$, $P, S \in \Lambda$, то по построению кубов из Λ один из них содержится в другом. Введем на Λ отношения порядка, считая $P \leq S$, если $\text{int}(P) \cap \text{int}(S) \neq \emptyset$ и $P \subset S$. Относительно данного порядка каждая линейно упорядоченная цепь $L \subset \Lambda$ ограничена сверху кубом $P_L = P^m$, где $m = \min\{j : P^j \in L\}$. Совокупность максимальных кубов $\{P_L\}$ удовлетворяет условиям леммы а)–в).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Доказательство проводится по сути методом, данным в работе [8] (см. теорему 1), с соответствующими изменениями. Можно считать, что $f \geq 0$. Обращаясь к известной формуле

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > a\}) da,$$

неравенство (18) перепишем в виде

$$\int_0^\infty \omega(E_a) a^{p-1} da \leq K^p \int_0^\infty \omega(E_a^*) a^{p-1} da, \quad (25)$$

где $E_a = \{I_\alpha f > a\} \cap Q^*$, $E_a^* = \{M_\alpha^* f > a\} \cap Q^*$. Пусть $b > 0$, $d > 0$, $\lambda_0 > 0$, $\tau > 0$ — некоторые числа, значения которых будут определены ниже, $a > 0$ произвольное.

1) Пусть куб $Q = Q^* \subset \{I_\alpha f > a\}$. Тогда либо $M_\alpha^* f(x) > a\lambda_0$ для любого $x \in Q$, а значит, $E_{ab} \setminus E_{a\lambda_0}^* = \emptyset$, либо $M_\alpha^* f(t) \leq a\lambda_0$ в некоторой точке $t \in Q$, откуда следует оценка

$$\int_Q f = |Q|^{(n-\alpha)/n} \left(|Q|^{-1+\alpha/n} \int_Q f \right) \leq |Q|^{(n-\alpha)/n} M_\alpha^* f(t) \leq (a\lambda_0) |Q|^{(n-\alpha)/n}. \quad (26)$$

Из (26) и известного слабого неравенства [2]

$$|\{I_\alpha f > \lambda\}| \leq (c_1 \lambda^{-1} |f; L_1(Q)|)^{n/(n-\alpha)}$$

следует, что

$$|E_{ab} \setminus E_{a\lambda_0}^*| = |\{x \in Q : I_\alpha f(x) > ab \text{ и } M_\alpha^* f(x) \leq a\lambda_0\}| \leq \left(\frac{c_1 \lambda_0}{b} \right)^{n/(n-\alpha)} |Q|. \quad (27)$$

2) Пусть $E_a \neq \emptyset$ и $Q^* \setminus E_a \neq \emptyset$. Представим множество E_a в виде объединения $E_a = \bigcup_{k=1}^K P^k$ по лемме 4. Заметим, что $2Q^k \subset Q_{(\varepsilon)}(x_0)$, где $Q^k = \text{int}(P^k)$. Положим $g_k(x) = f(x)$ для $x \in 2P^k$, $g_k(x) = 0$ для $x \notin 2P^k$, $h_k = f - g_k$. Понятно, что $I_\alpha f = I_\alpha g_k + I_\alpha h_k$ и что $\{I_\alpha f > ab\} \cap P^k \subset \{x \in P^k : I_\alpha g_k(x) > ab/2\} \cup \{x \in P^k : I_\alpha h_k(x) > ab/2\}$. Выбором b можно добиться выполнения оценки

$$I_\alpha h_k(x) \leq \frac{ab}{2} \quad \forall x \in P^k, \quad \forall P^k.$$

Действительно, в силу утверждения с) леммы 4 $I_\alpha f(t) \leq a$ в некоторой точке $t \in 10\sqrt{n}P^k$. Для $x \in P^k$, $y \in (2P^k)^c$ справедливо $|x - y| \geq d/2^{k+1}$, откуда следует, что

$$|t - y| \leq |t - x| + |x - y| \leq \frac{10nd}{2^k} + |x - y| \leq A|x - y|,$$

где $A = 1 + 20n$. Поэтому для $b = 2A^{n-\alpha}$

$$\begin{aligned} I_\alpha h_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2P^k} |x - y|^{\alpha-n} f(y) dy \\ &\leq A^{n-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2P^k} |t - y|^{\alpha-n} f(y) dy + \int_{2P^k} |t - y|^{\alpha-n} f(y) dy \right) \\ &\leq A^{n-\alpha} I_\alpha f(t) \leq \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

Итак, при $b = 2A^{n-\alpha}$ $\{I_\alpha f > ab\} \cap P^k \subset \{I_\alpha g_k > ab/2\} \cap P^k$ для всех P^k , а следовательно, множество $E_{ab} \setminus E_{a\lambda_0}^* = (\bigcup_{k=1}^K (E_{ab} \cap P_k)) \setminus E_{a\lambda_0}^* \subset \bigcup_{k=1}^K e_k$, где $e_k = \{x \in P^k : I_\alpha g_k(x) > ab/2 \text{ и } M_\alpha^* f(x) \leq a\lambda_0\}$, при этом $|e^k \cap e^j| = \emptyset$ для $k \neq j$. Пусть $|e_k| > 0$. Тогда $e_k \cap Q^k \neq \emptyset$. Если $x \in e_k \cap Q^k$, то

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq \left| \left\{ I_\alpha g_k > \frac{ab}{2} \right\} \right| \leq \left(\frac{2c_1}{ab} \right)^{n/(n-\alpha)} |2P^k| \left(|2Q^k|^{-1+\alpha/n} \int_{2Q^k} f \right)^{n/(n-\alpha)} \\ &\leq 2^n \left(\frac{2c_1}{ab} \right)^{n/(n-\alpha)} |Q^k| (M_\alpha^* f(x))^{n/(n-\alpha)} \leq |Q^k| 2^n \left(\frac{2c_1\lambda_0}{b} \right)^{n/(n-\alpha)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть δ – параметр, соответствующий $\tau = 1/(2b^p)$ в условии (A_∞^*) весу ω . Возьмем $2^n(2c_1\lambda_0/b)^{n/(n-\alpha)} = \delta$. Тогда в случае $Q^* \subset E_a$ в силу (27) справедливы оценки

$$\omega(E_{ab}) \leq \omega(E_{ab} \setminus E_{a\lambda_0}^*) + \omega(E_{a\lambda_0}^*) \leq \tau\omega(Q) + \omega(E_{a\lambda_0}^*) = \tau\omega(E_a) + \omega(E_{a\lambda_0}^*). \quad (29)$$

Если же $Q^* \setminus E_a \neq \emptyset$, то в силу (28)

$$\omega(E_{ab}) \leq \sum_{k=1}^K \omega(e_k) + \omega(E_{a\lambda_0}^*) \leq \tau \sum_{k=1}^K \omega(Q^k) + \omega(E_{a\lambda_0}^*) = \tau\omega(E_a) + \omega(E_{a\lambda_0}^*),$$

т.е. и в случае 2) справедлива оценка (29), применяя которую, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_0^N \omega(E_a) a^{p-1} da &= b^p \int_0^{N/b} \omega(E_{ab}) a^{p-1} da \leq \tau b^p \int_0^{N/b} \omega(E_a) a^{p-1} da \\ &\quad + \left(\frac{b}{\lambda_0} \right)^p \int_0^{N\lambda_0/b} \omega(E_a^*) a^{p-1} da. \end{aligned} \quad (30)$$

Переходя в (30) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\int_0^\infty \omega(E_a) a^{p-1} da \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega(E_a) a^{p-1} da + \left(\frac{b}{\lambda_0} \right)^p \int_0^\infty \omega(E_a^*) a^{p-1} da. \quad (31)$$

Выбрав в (31) $K^p = 2(b/\lambda_0)^p$, приходим к (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. а) Сразу заметим, что для функций f класса $C_0^\infty(\Omega)$ из известного представления Соболева

$$f(x) = c(-1)^l \int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right)^\alpha D^\alpha f(y) \frac{dy}{|y-x|^{n-l}}$$

следует поточечная оценка $|f(x)| \leq c_1 I_l(|\nabla_l f|)(x)$. Пусть $\{\psi_j\}$ – разбиение единицы из теоремы 5, соответствующее двойному B -покрытию $\Omega - \{Q^j, \widehat{Q}^j\}$, выделенному по теореме 4 из семейств

$$\left\{ \frac{1}{2} Q_{(\varepsilon)}(x), x \in \Omega \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{4} Q_{(\varepsilon)}(x), x \in \Omega \right\}, \quad \widehat{Q}^j = \frac{1}{2} Q^j, \quad Q^j = \frac{1}{2} Q_{(\varepsilon)}(x^j),$$

и пусть $\varkappa_1$ – кратность покрытия $\{Q^j\}$, распадающегося на не более чем $\varkappa_2$ подсемейств $\{Q^j, j \in J_\nu\}$ непересекающихся кубов. Оценим сверху сумму

$$\sum_{j \in J_\nu} \int_{Q^j} |\gamma u \psi_j|^q \omega$$

для функции $u \in C^\infty W_{\vec{p}}^l(\Omega; \vec{p})$. Так как $\text{supp}(u \psi_j) \subset Q^j$, то в силу леммы 1 и оценки d) теоремы 5

$$\begin{aligned} \int_{Q^j} |\gamma u \psi_j|^q \omega &\leq c_1^q \int_{Q^j} (I_l(|\nabla_l(u \psi_j)|))^q |\gamma|^q \omega \leq c_2^q \int_{Q^j} (M_l^*(|\nabla_l(u \psi_j)|))^q |\gamma|^q \omega \\ &\leq c_3^q \sum_{m=0}^l d(x^j)^{q(m-l)} \int_{Q^j} (M_l^*(|\nabla_l(u)|))^q |\gamma|^q \omega. \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что из включений $x \in Q^j$, $x \in Q_h \subset Q_{(\varepsilon)}(y)$ следует, что $d(x^j)^{m-l} \leq (\eta^{-2}(1-\varepsilon))^{l-m} h^{m-l}$, а значит,

$$\begin{aligned} &d(x^j)^{m-l} M_l^*(|\nabla_m u(x)|) \\ &= d(x^j)^{m-l} \sup_{Q_h \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}^\sim(x)} h^{l-n} \int_{Q_h} |\nabla_m u| \leq \left(\frac{1-\varepsilon}{\eta^2} \right)^{l-m} M_m^*(|\nabla_m u(x)|) \\ &\forall x \in Q^j, \end{aligned}$$

что вместе с (32) выводит на следующую оценку:

$$\int_{Q^j} |\gamma u \psi_j|^q \omega \leq c_4^q \sum_{m=0}^l \int_{Q^j} (M_m^*(|\nabla_m u|))^q |\gamma|^q \omega. \quad (33)$$

Далее, применяя на Ω к функции $f = |\nabla_m u|$ и весам $\omega_1 = |\gamma|^q \omega$, $v = \rho_m$ оценку (17) теоремы 2, показываем, что

$$\begin{aligned} |u\gamma; L_q(\Omega; \omega)| &\leq \varkappa_2^{1/q} \widehat{\varkappa}_2 \left(\max_{1 \leq \nu \leq \varkappa_2} \sum_{j \in J_\nu} \int_{Q^j} |\gamma u \psi_j|^q \omega \right)^{1/q} \\ &\leq \varkappa_2^{1/q} (c_4 \widehat{\varkappa}_2) \left(\sum_{m=0}^l \int_{\Omega} (M_m^*(|\nabla_m u|))^q |\gamma|^q \omega \right)^{1/q} \\ &\leq c_5 \sum_{m=0}^l K_m |u; W_{\vec{p}}^l(\Omega; \vec{p})|. \end{aligned} \quad (34)$$

Утверждение b) теоремы вытекает из доказанного утверждения а) и свойств мажоранты $M^*(|\gamma|^{q+\theta})^{1/(q+\theta)} \geq |\gamma|^q$ (см. замечание 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Утверждение следствия 2 теоремы 6 вытекает из следующей оценки: если $Q \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}^\nabla$, то при $1/q \geq 1/p - l/n$

$$|Q|^{-1+l/n} |Q|^{1/p'} \left(\int_Q (M^*(|\gamma|^{q+\theta}))^{q/q+\theta} \right)^{1/q} \leq \left(|Q|^{-1} \int_Q M^*(|\gamma|^{q+\theta}) \right)^{1/q+\theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3 теоремы 6 тривиально.

§ 3. Мультипликаторы в $M(W_1 \rightarrow W_2)$

В настоящем параграфе рассматриваются весовые пространства Соболева $W = W_p^l(\Omega; \rho, v)$, определяемые как пополнение линейного многообразия $C^\infty W = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_W < \infty\}$ по норме

$$\|u\|_W = |u; W_p^l(\Omega; \rho, v)| = \left(\int_\Omega |\nabla_l u|^p \rho \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |u|^p v \right)^{1/p}, \quad (35)$$

$W_p^l(\Omega; v) = W_p^l(\Omega; v, v)$. В этих обозначениях невесовое пространство Соболева $W_p^l(\Omega) = W_p^l(\Omega; v)$, где вес $v \equiv 1$.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $\delta \in (0, 1)$, $\mathcal{N}_\delta(Q) = \{e \subset Q : |e| \leq \delta|Q|\}$. Будем говорить, что вес v на Ω удовлетворяет *условию* $(\pi_{p,l})$ (*относительно функции* $d(x)$), если при некоторых $\delta \in (0, 1)$ и $\tau > 0$

$$\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d(x); v) \geq \tau \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

где

$$\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d; v) = d^{l-n/p} \inf_{e \in \mathcal{N}_\delta(Q)} \left(\int_{Q \setminus e} v \right)^{1/p},$$

$$Q = (1 - \varepsilon)Q_d(x), \quad Q_d(x) \subset \Omega.$$

Запись: $v \in \pi_{p,l} = \pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}$.

К примеру, условию $(\pi_{p,l})$ удовлетворяют: функция $v(x) = d(x)^{-lp}$ относительно регулярного $d(x)$, функция $v(x) \equiv 1$ относительно $d(x) \equiv h$ на $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Пусть вес v на Ω таков, что при некоторых $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ функция Отелбаева

$$v^*(x) = v_{(\delta,\varepsilon),p,l}^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{d>0} \{d : Q_d(x) \subset \Omega \text{ и } \mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d; v) \leq 1\} < d(x),$$

где $d(x)$ — некоторая функция длины ребра на Ω . Запись: $v \in \pi_{p,l}^* = \pi_{(\delta,\varepsilon),p,l}^*$. В этом случае, как нетрудно увидеть, $\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, v^*(x); v) = 1$, а следовательно, вес v удовлетворяет условию $(\pi_{p,l})$ относительно $v^*(x)$. Для функции $v^*(x)$ введем обозначения $Q^*(x) = Q_{v^*(x)}(x)$, $Q_{(\varepsilon)}^*(x) = (1 - \varepsilon)Q^*(x)$.

Во всех сформулированных ниже теоремах m, l целые, $0 < m < l$, $\gamma \in C^\infty(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $p < q$ при $1 < p < n/l$, $W_1 = W_p^l(\Omega; 1, v)$, $W_2 = W_q^m(\Omega; \omega_1, \omega_2)$, $v \in \pi_{p,l}$, $\omega_i \in A^*$ относительно некоторой функции $d(x)$, $i = 1, 2$, и

$$K = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \left(\sup_{Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)} \left(|Q|^{-1/p+l/n} \left(\int_Q (|\nabla_m \gamma|^q M^* \omega_1 + |\gamma|^q \omega_2) \right)^{1/q} \right. \right. \\ \left. \left. + |Q|^{-1/p+(l-m)/n} \left(\int_Q |\gamma|^q M^* \omega_1 \right)^{1/q} \right) \right) < \infty.$$

Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$. Норма $\|\gamma\| \leq cK$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{p,q}(Q|\gamma;\omega) = \sup_{Q_h \subset Q} |Q_h|^{-1/p+l/n} & \left(\left(\int_{Q_h} |\nabla_m \gamma|^q M^* \omega \right)^{1/q} \right. \\ & \left. + |Q_h|^{-m/n} \left(\int_{Q_h} |\gamma|^q M^* \omega \right)^{1/q} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $1 < p < n/l$, $v \in \pi_{p,l}$, $\omega_i \in A^*$, $i = 1, 2$, относительно некоторой функции $d(x)$, и $K = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,p}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega_1 + \omega_2) < \infty$. Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$. Норма $\|\gamma\| \leq cK$.

Утверждения теорем 7, 8 можно объединить.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $pl \neq n$ при $p > 1$, $v \in \pi_{p,l}$, $\omega_i \in A^*$, $i = 1, 2$, относительно функции $d(x) \leq 1$, и

$$K = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,p}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega_1 + \omega_2) < \infty.$$

Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$. Норма $\|\gamma\| \leq cK$.

Существенным следствием теоремы 9 является точная в слабом смысле оценка нормы мультипликатора $\gamma \in M(W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n))$, $1 < p < n/l$, а именно:

$$\|\gamma\|_{M(W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n))} \sim \sup_{Q_h, 0 < h \leq 1} h^{l-n/p} (\|\nabla_m \gamma\|_{p,Q_h} + h^{-m} \|\gamma\|_{p,Q}).$$

Оценка снизу получена в работе [1], оценка сверху вытекает из теоремы 9, поскольку веса $v \equiv 1$, $\omega_i \equiv 1$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы относительно $d(x) \equiv 1$.

Приведем еще пример. Так достаточными условиями включения

$$\gamma \in M(W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n; (1 + |x|^2)^\mu)),$$

где $1 \leq p < \infty$, $pl \neq n$ при $p > 1$, являются следующие:

$$\begin{aligned} K_+ &= \sup_x \mathcal{K}(x) < \infty \quad \text{при } \mu < 0; \\ K_- &= \sup_{|x| \leq 1} \mathcal{K}(x) + \sup_{|x| > 1} (1 + |x|^2)^{\mu/p} \mathcal{K}(x) < \infty \quad \text{при } \mu > 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}_{p,p}(Q_1(x)|\gamma; 1)$. При этом $\|\gamma\| \leq cK_+$, если $\mu < 0$, $\|\gamma\| \leq cK_-$, если $\mu > 0$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $pl \neq n$ при $p > 1$, $W_1 = W_p^l(\Omega; 1, v)$, $W_2 = W_q^m(\Omega; \omega, \omega d(\cdot)^{-mq})$, $v \in \pi_{p,l}$, $\omega \in A^*$ относительно регулярной функции $d(x)$, и пусть

$$K = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,q}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega) < \infty.$$

Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$. Норма $\|\gamma\| \leq c_0 K$.

В теоремах 7–10 оценка нормы $\|\gamma\| \leq c_0 K$ зависит от выбора функции длины ребра $d(x)$. Рассмотрим вопрос о наименьшем допустимом K . Можно считать, что

$$M_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d(x)|v) \geq 1 \quad \text{для п.в. } x \text{ из } \Omega. \quad (37)$$

Указанное допущение отразится только на изменении постоянной c_0 . Пусть $\mathcal{D}_{(\delta),v}$ – совокупность всех функций длины ребра $d(x)$, относительно которых вес v удовлетворяет условию (37). Положим

$$d_v(x) = \inf_{d(\cdot) \in \mathcal{D}_{(\delta),v}} d(x).$$

Заметим следующее. Если в точке $x \in \Omega$ $d_v(x) > 0$, то $Q^* = Q_{d_v(x)}(x) \subset Q_{d(x)} \subset \Omega$ для всех $d(\cdot) \in \mathcal{D}_{(\delta),v}$. При этом $d_v(x)$ реализуется как предел $d_v(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_j(x)$ для некоторой последовательности $\{d_j(\cdot) \in \mathcal{D}_v\}$. Если $e \in \mathcal{N}_{(\delta)}((1-\varepsilon)Q^*)$, то $e \in \mathcal{N}_{(\delta)}(Q^j)$, где $Q^j = (1-\varepsilon)Q_{d_j(x)}(x)$. Следовательно,

$$(d_v(x))^{lp-n} |(1-\varepsilon)Q^* \setminus e|_v = \lim_{j \rightarrow \infty} (d_j(x))^{lp-n} |Q^j \setminus e|_v \geq 1,$$

а $M_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d_v(x)|v) \geq 1$.

Пусть $d(x) \in \mathcal{D}_{(\delta),v}$. Легко увидеть, что для п.в. $x \in \Omega$

$$d(x)^{lp} \geq (d(x)^{-n} |Q_{(\varepsilon)}(x)|_v)^{-1} \geq ((1-\varepsilon)^n M^* v(x))^{-1} > 0.$$

Но тогда и $d_v(x) > (M^* v(x))^{-1/(lp)} > 0$ п.в. в Ω . Покажем, что

$$\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, d_v(x)|v) = 1, \quad \text{если } d_v(x) > 0. \quad (38)$$

Действительно, пусть в точке x $d_v(x) > 0$ и $\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x_0, d_v(x)|v) = \lambda > 1$. Возьмем $\tau = 1 - 1/\sqrt{\lambda}$, а x соотнесем такое $\tau_x > 0$, что $\tilde{d}(x) = d_v(x) - \tau_x > 0$, $(\tilde{d}(x)/d_v(x))^{lp-n} > 1 - \tau$, а

$$|(1-\varepsilon)\tilde{Q} \setminus e| |(1-\varepsilon)Q^* \setminus e|^{-1} > 1 - \tau \quad \forall e \in \mathcal{N}_{(\delta)}((1-\varepsilon)\tilde{Q}), \quad (39)$$

где $\tilde{Q} = Q_{\tilde{d}(x)}(x)$. Из (39) следует, что $\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon),p,l}(x, \tilde{d}(x)|v) \geq 1$. Далее, полагая $\tilde{d}(x) = d_v(x)$ в тех точках, где имеет место равенство (38), мы получаем функцию $\tilde{d}(x) \in \mathcal{D}_{(\delta),v}$, для которой $\tilde{d}(x) \geq d_v(x) > \tilde{d}(x)$ хотя бы в одной точке $x \in \{d_v(\cdot) > 0\}$, что невозможно.

Итак, если $v \in \pi_{p,l}$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что вес $cv \in \pi_{p,l}$ относительно функции длины ребра $d_{cv}(x)$, причем $d_{cv}(x)$ является наименьшей из всех $d(x) \in \mathcal{D}_{(\delta),cv}$. Легко увидеть, что если $v \in \pi_{(0,\varepsilon),p,l}$, $pl > n$, то $d_v(x) = v^*(x) = v_{(0,\varepsilon),p,l}^*$.

Для пары $W_1 = W_p^l(\Omega; 1, v)$, где $v \in \pi_{(0,\varepsilon),p,l}^*$, $W_2 = W_p^m(\Omega; \omega, \omega(v^*)^{-mp})$ справедлива

ТЕОРЕМА 11. Пусть $1 < p < \infty$, $pl > n$, $v \in A_\infty^*$, $\omega \in A_1^* \cap A_1^*$ относительно $d(x) = v_{(0,\varepsilon),p,l}^*(x)$, u пусть $K^* = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,p}(Q_{(\varepsilon)}^*(x)|\gamma; \omega) < \infty$. Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$. При этом

$$c_1 K^* \geq \|\gamma\| \geq c_2(\tau) \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,p}(\tau Q_{(\varepsilon)}^*(x)|\gamma; \omega), \quad 0 < \tau < 1.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $1 < p < \infty$, $pl \neq n$, вес ρ медленно колеблется относительно базиса $\mathcal{B}^\sim$, $W_1 = W_p^l(\Omega; \rho, \rho d(\cdot)^{-lp})$, $W_2 = W_p^m(\Omega; \rho, \rho d(\cdot)^{-mp})$. Тогда $\gamma \in M(W_1 \rightarrow W_2)$, если

$$K^\sim = \sup_{Q \in \mathcal{B}^\sim} |Q|^{-1/p+l/n} \left(\left(\int_Q |\nabla_m \gamma|^p \right)^{1/p} + |Q|^{-m/n} \left(\int_Q |\gamma|^p \right)^{1/p} \right) < \infty. \quad (40)$$

При этом

$$c_1 K^\sim \geq \|\gamma\| \geq c_2(\tau) \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \in \mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}} \mathcal{K}_{p,p}(Q|\gamma; 1).$$

§ 4. Доказательство теоремы о мультипликаторах в $M(W_1 \rightarrow W_2)$

Пусть $l > 0$ целое. Нами будет использовано следующее неравенство вложения Мазы [9]

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p d\mu \right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_l u|^p \right)^{1/p}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (41)$$

$|\nabla_l u| = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}$, справедливое для борелевских мер μ , удовлетворяющих условию $C_\mu < \infty$, где

$$C_\mu^p = \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{lp-n} \mu(B(x, r))^{p/q} & \text{при } 1 \leq p < q < \infty, pl < n, \\ & \text{либо } 1 = p \leq q < \infty, l = n; \\ \sup_{\operatorname{cap}_{p,l}(F) > 0} \left(\frac{\mu(F)}{\operatorname{cap}_{p,l}(F)} \right) & \text{при } 1 < p = q < \frac{n}{l}. \end{cases} \quad (42)$$

Для компактного F емкость $\operatorname{cap}_{p,l}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \|u\|_{p,l,\mathbb{R}^n} : u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), u \geq 1 \text{ на } F \}$. Наилучшая постоянная в (41) $C \leq cC_\mu$ (см. [9])

Введем обозначение: $\|u\|_{p,l,\Omega} = |\nabla_l u|_{L_p(\Omega)}$. Пусть $1 \leq p, q < \infty$. Замена переменных $y = x + d\xi$, $d > 0$, $\xi \in Q_1(0)$, позволяет вывести из известных неравенств вложения пространств Соболева [9]

$$\|u\|_{q,k,Q_1} \leq c(\|u\|_{p,l,Q_1} + \|u\|_{p,Q_1})$$

следующие оценки:

$$\|u\|_{q,k,Q_d} \leq cd^{l-k-n/p+n/q} (\|u\|_{p,l,Q_d} + d^{-l} \|u\|_{p,Q_d}), \quad (43)$$

если $1 < p \leq n/(l-k)$, $1 \leq q \leq np/(n-p(l-k))$ либо $p = 1 < n/(l-k)$, $1 \leq q \leq n/(n-(l-k))$;

$$\sup_{Q_d} |\nabla_k u| \leq cd^{l-k-n/p} (\|u\|_{p,l,Q_d} + d^{-l} \|u\|_{p,Q_d}), \quad (44)$$

если $p > 1$, $p > n/(l-k)$ либо $p = 1$, $l-k \geq n$.

Пусть $1 \leq p < \infty$, φ – функция из класса $C_0^\infty(Q_d)$ такая, что

$$\max_{Q_d} |D^\alpha \varphi| \leq cd^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| = \sum \alpha \leq l.$$

Из (43) и (44) тривиально выводится оценка

$$\|D^\alpha(\varphi u)\|_{p,Q_d} \leq c_1 (\|u\|_{p,l,Q_d} + d^{-l} \|u\|_{p,Q_d}). \quad (45)$$

Опираясь на теорему продолжения Стейна [4] и неравенства (43)–(45), можно построить оператор продолжения $S = S_{Q \rightarrow aQ}$, $a > 1$, функции $u \in C^\infty(\overline{Q_d})$ такой, что $Su \in C_0^\infty(aQ_d)$ и

$$\|Su\|_{p,l} \leq c (\|u\|_{p,l,Q_d} + d^{-l} \|u\|_{p,Q_d}), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (46)$$

где постоянная $c = c(a)$, но не зависит от выбора куба Q_d и функции u .

ЛЕММА 5. Пусть $0 \leq k < l$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $p(l-k) \neq n$ при $p > 1$, $Q^* = Q_d$, $\overline{Q^*} \subset \Omega$, μ – борелевская мера в Ω и $\mathcal{R}_{p,q,k,l}(Q^*; \mu) < \infty$, где

$$\mathcal{R}_{p,q,k,l}(Q^*; \mu) = \begin{cases} \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{l-k-n/p} (\mu(Q_h))^{1/q}, & \text{если } p = 1 \leq q \text{ либо } 1 < p \leq q < \infty, \\ & p \neq q \text{ при } p(l-k) < n; \\ \sup_{\text{cap}_{p,l-k}(F) > 0} \left(\frac{\mu(F \cap Q^*)}{\text{cap}_{p,l-k}(F)} \right)^{1/p} & \text{при } 1 < p = q < \frac{n}{(l-k)}. \end{cases}$$

Тогда для всех $u \in C^\infty(\overline{Q^*})$

$$\left(\int_{Q^*} |\nabla_k u|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c \mathcal{R}_{p,q,k,l}(Q^*; \mu) (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}). \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – оператор продолжения с куба $\overline{Q^*}$ из (46), μ_{Q^*} – мера, определенная равенством $\mu_{Q^*}(e) = \mu(e \cap Q^*)$. Из неравенства (41) следует, что для каждой производной $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| = k > l - n/p$

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q^*} |D^\alpha u|^q d\mu \right)^{1/q} &= \left(\int_{Q^*} |D^\alpha Su|^q d\mu_{Q^*} \right)^{1/q} \\ &\leq c \mathcal{R}_{p,q,k,l}(Q^*; \mu) \left(\int_{Q^*} |\nabla_l(Su)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq c_1 \mathcal{R}_{p,q,k,l}(Q^*; \mu) (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}), \end{aligned}$$

что очевидным образом влечет оценку (47). В случае $p(l - k) \geq n$ оценка (47) следует из вложения (44).

Ряд нижеследующих утверждений позволяет при применении леммы 5 в случае $1 < p = q < n/(l - k)$ перейти от емкостных характеристик компактов к интегральным весовым оценкам на кубах базиса $\mathcal{B}$, построенного по некоторой функции $d(x)$.

Пусть Φ — неотрицательная неубывающая функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $\Psi(t) = t\Phi(1/t)$ не возрастает, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$ и

$$\int_t^\infty (\Psi(\xi))^{p'-1} \frac{d\xi}{\xi} \leq b(\Psi(t))^{p'-1} \quad \forall t > 0, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \quad (48)$$

ЛЕММА А [9; §8.5]. Пусть $1 < p < n/l$, $a > 0$, F — компакт в $\mathbb{R}^n$ с $\text{cap}_{p,l}(F) > 0$. Тогда существует не более чем счетное покрытие $\{B_j\}$ множества F шарами $B_j = B(x^j; r_j)$ такое, что

$$\sum_j \Phi(a \text{cap}_{p,l}(B_j)) \leq c\Phi((b+c)^{p-1}a \text{cap}_{p,l}(F)). \quad (49)$$

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{A}(\xi)$ — монотонно не убывающая на промежутке $(0, d]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\mathcal{A}(d) < \infty, \quad (50)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{A}(\xi) = 0, \quad (51)$$

$$\int_0^t (\mathcal{A}(\xi))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} \leq R(\mathcal{A}(t))^{p'}, \quad 0 < t \leq d, \quad (52)$$

и пусть $\theta > 0$, $\lambda = 1 + (\theta(p' - 1)R)^{-1}$. Тогда функция

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \xi(\mathcal{A}(\xi^{1/\theta}))^p, & \text{если } 0 < \xi < d^\theta; \\ d^\theta (\mathcal{A}(d))^p \left(\frac{\xi}{d^\theta}\right)^\lambda, & \text{если } \xi \geq d^\theta, \end{cases} \quad (53)$$

не убывает на $(0, \infty)$, а $\Psi(\xi) = \xi\Phi(1/\xi)$ не возрастает на $(0, \infty)$,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Psi(\xi) = 0$$

и выполнено условие (48) с постоянной $b = 2R\theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства $\Phi \nearrow$ на $(0, \infty)$, $\Psi \searrow$ на $(0, \infty)$ и $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Psi(\xi) = 0$ очевидны в силу (53) и следующих двух равенств: $\Psi(\xi) = (\mathcal{A}(\xi^{-1/\theta}))^p$ при $\xi > d^{-\theta}$, $\Psi(\xi) = d^{\theta(1-\lambda)}(\mathcal{A}(d))^p \xi^{1-\lambda}$ при $0 < \xi \leq d^{-\theta}$. Далее, если $t \geq d^{-\theta}$, то

$$\int_t^\infty (\Psi(\xi))^{p'-1} \frac{d\xi}{\xi} = \theta \int_0^{t^{-1/\theta}} (\mathcal{A}(\xi))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} \leq \theta R(\mathcal{A}(t^{-1/\theta}))^{p'} = \theta R\Psi(t)^{p'-1}.$$

Если $0 < t < d^{-\theta}$, то

$$\begin{aligned} \int_t^\infty (\Psi(\xi))^{p'-1} \frac{d\xi}{\xi} &\leq \theta R \Psi(d^{-\theta})^{p'-1} + (\mathcal{A}(d))^{p'} d^{\theta(1-\lambda)(p'-1)} \int_t^{d^{-\theta}} \xi^{(1-\lambda)(p'-1)} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \left(\theta R - \frac{1}{(\lambda-1)(p'-1)} \right) (\mathcal{A}(d))^{p'} + \frac{1}{(\lambda-1)(p'-1)} (\Psi(t))^{p'-1} \\ &= \frac{1}{(\lambda-1)(p'-1)} (\Psi(t))^{p'-1}. \end{aligned}$$

Пусть ω – вес на Ω , $1 < p < n/l$, $Q^* = Q_d \in \mathcal{B}$. Положим

$$\mathcal{A}_l(\xi|\omega) = \sup_{0 < h \leq \xi} \left\{ \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{l-n/p} |Q_h|_\omega^{1/p} \right\}, \quad 0 < \xi \leq d. \quad (54)$$

ЛЕММА 7. Пусть $1 < p < n/l$, $\omega \in A^*$. Тогда функция $\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}_l(\xi|\omega)$, определенная равенством (54), удовлетворяет условиям (50)–(52).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раз $\omega \in A^*$, то существуют такие $\delta \in (0, 1)$ и $R_1 > 1$, что (см. замечание 1)

$$\sup_{Q_h} M(\omega \chi_{Q_h}) \leq R_1 |Q_h|^{-1} |Q_h|_\omega \quad \forall Q_h \subset Q^*. \quad (55)$$

Пусть $x \in Q = Q_d$. Тогда

$$\begin{aligned} M(f \chi_Q)(x) &= \sup_{0 < h \leq d, Q_h \ni x} h^{-n} \int_{Q \cap Q_h} |f| = \sup_{Q \supset Q_h \ni x} h^{-n} \int_{Q_h} |f|, \\ \sup_{x \in Q} M(f \chi_Q)(x) &= \sup_{x \in Q} \left(\sup_{0 < h \leq d, Q_h \ni x} h^{-n} \int_{Q \cap Q_h} |f| \right) \\ &\geq \sup_{Q_h \subset Q} h^{-n} \int_{Q_h} |f| \geq \sup_{x \in Q} M(f \chi_Q)(x). \end{aligned} \quad (56)$$

Пусть $Q \subset Q^*$. В силу (56)

$$\sup_{x \in Q} M(\omega \chi_Q)(x) = \sup_{Q_\xi \subset Q} \xi^{-n} \int_{Q_\xi} \omega. \quad (57)$$

Возьмем $\varphi(t) = \sup_{0 < \xi \leq t} \left(\sup_{Q_\xi \subset Q^*} \left(\sup_{Q_\xi} M(\omega \chi_{Q_\xi}) \right) \right)$, $0 < t \leq d$. Используя соотношения (56) и (57), выводим, что

$$\varphi(t) \leq R_1 \sup_{Q \subset Q^*} |Q|^{-1} |Q|_\omega \leq R_1 \sup_{Q^*} M(\omega \chi_{Q_\xi}) \leq R_1^2 d^{-n} |Q^*|_\omega. \quad (58)$$

Если $0 < \xi \leq t \leq d$, то

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_l(\xi|\omega))^p &\leq \sup_{0 < h \leq \xi} \left(\sup_{Q_h \subset Q^*} h^{lp} \sup_{Q_h} M(\omega \chi_{Q^*}) \right) \\ &\leq \xi^{lp} \sup_{Q_\xi \subset Q^*} \left(\sup_{Q_\xi} M(\omega \chi_{Q^*}) \right) \leq \xi^{lp} \varphi(t). \end{aligned} \quad (59)$$

Из оценок (58), (59) следует выполнение условий (50) и (51), а также обоснованность следующих выкладок

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathcal{A}_l(\xi|\omega))^{p'} \frac{d\xi}{\xi} &\leq (\varphi(t))^{1/(p-1)} \int_0^t \xi^{lp'-1} d\xi = \frac{lp}{p-1} (t^{lp} \varphi(t))^{1/(p-1)} \\ &\leq \frac{lp}{p-1} \left(t^{lp} \sup_{Q_t \subset Q^*} \left(\sup_{Q_t} M(\omega \chi_{Q_1}) \right) \right)^{1/(p-1)} \leq R \mathcal{A}_l(t|\omega)^{p'} \end{aligned}$$

с постоянной $R = R_1^{1/(p-1)} lp/(p-1)$.

ЛЕММА 8. Пусть k, l целые, $0 \leq k < l$, $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A^*$. Тогда существует такая не зависящая от $Q^* = Q_d \in \mathcal{B}$ и $u \in C^\infty(\Omega)$ постоянная $c > 0$, что

$$\left(\int_{Q^*} |\nabla_k u|^p \omega \right)^{1/p} \leq c d^{l-k-n/p} \left(\int_{Q^*} \omega \right)^{1/p} (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}). \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $k = 0$. Если $p = 1$ либо $p > 1$, $pl > n$, то оценка (60) тривиально следует из (47). При этом нужно учесть, что при $p = 1$, $l < n$ из условия (A^*) на вес ω следует оценка

$$\mathcal{R}_{1,1,0,l}(Q^*; \omega dx) \leq d^l \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{-n} |Q_h|_\omega = d^l \sup_{Q^*} M(\omega \chi_{Q^*}) \leq R d^{l-n} |Q^*|_\omega.$$

Рассмотрим случай $1 < p < n/l$. Пусть $\mu = \omega dx$. В силу леммы 5

$$\left(\int_{Q^*} |u|^p \omega \right)^{1/p} \leq c (T_l(Q^*; \omega))^{1/p} (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}), \quad (61)$$

где $T_l(Q^*; \omega) = \sup\{\mu(F \cap Q)/\text{cap}_{p,l}(F) : \text{cap}_{p,l}(F) > 0\}$. Для оценки сверху величины $T_l(Q^*; \omega)$ используем лемму А. Пусть $\Phi(\xi) = \Phi_l(\xi|\omega)$ — функция из леммы 6, где $\theta = n - lp$, а F — произвольное компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Согласно утверждению леммы А

$$\sum_j \Phi(a \text{cap}_{p,l}(B_j)) \leq c_1 \Phi(c_2 a \text{cap}_{p,l}(F)), \quad (62)$$

где $a > 0$, $\{B_j\}$ — некоторое покрытие F шарами $B_j = B(x^j; r_j)$. Пусть $B_j \cap Q^* \neq \emptyset$. Если $2r_j \geq d$, то

$$\begin{aligned} \mu(B_j \cap Q^*) &\leq |Q^*|_\omega \leq d^{n-pl} (\mathcal{A}_l(d|\omega))^p \left(\frac{2r_j}{d} \right)^{\lambda(n-lp)} = \Phi(2^{n-lp} r_j^{n-lp}) \\ &= \Phi(c_1 \text{cap}_{p,l}(\overline{B_j})), \end{aligned}$$

так как $\text{cap}_{p,l}(\overline{B_j}) = c_0 r_j^{n-lp}$, где $c_0 = \text{cap}_{p,l}(\overline{B(0,1)})$. Если $2r_j < d$, то $B_j \cap Q^* \subset Q_{2r_j}$ для некоторого куба $Q_{2r_j} \subset Q^*$, а

$$\begin{aligned} \mu(B_j \cap Q^*) &\leq (2r_j)^{n-lp} \sup_{Q_h \subset Q^*, h \leq 2r_j} h^{lp-n} |Q_h|_\omega \leq (2r_j)^{n-lp} (\mathcal{A}_l(2r_j|\omega))^p \\ &= \Phi(c_1 \text{cap}_{p,l}(\overline{B_j})). \end{aligned}$$

Поэтому из (62) вытекает оценка

$$\mu(F \cap Q^*) \leq \sum_j \mu(B_j \cap Q^*) \leq \sum_j \Phi(c_1 \operatorname{cap}_{p,l}(\overline{B}_j)) \leq c_2 \Phi(c_2 \operatorname{cap}_{p,l}(F)). \quad (63)$$

Возьмем $\xi^{n-lp} = c_2 \operatorname{cap}_{p,l}(F)$. Если $\xi \geq d$, то

$$\mu(F \cap Q^*) (\operatorname{cap}_{p,l}(F))^{-1} \leq c_2 |Q^*|_\omega d^{lp-n}.$$

Если же $\xi < d$, то в силу (63), (58) и (59)

$$\frac{\mu(F \cap Q^*)}{\operatorname{cap}_{p,l}(Q^*)} \leq c_2^2 \frac{\Phi(\xi^{n-lp})}{\xi^{n-lp}} = c_2^2 \mathcal{A}_l(\xi|\omega) \leq c_2^2 \mathcal{A}_l(d|\omega) \leq (c_2 R_1)^2 d^{lp-n} |Q^*|_\omega.$$

Итак, $T_l(Q^*; \omega) \leq c_3 d^{lp-n} |Q^*|_\omega$, $c_3 = \max\{c_2, (c_2 R_1)^2\}$, что вместе с (61) приводит к неравенству (60). Пусть $1 < p = n/l$. Для $q > 1$ из интервала $(p/2, p)$ согласно лемме 5

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q^*} |u|^p \omega \right)^{1/p} &\leq c_1 \mathcal{R}_{q,p,0,l}(Q^*; \mu) (\|u\|_{q,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{q,Q^*}) \\ &\leq c_1 d^{n/q-n/p} \mathcal{R}_{q,p,0,l}(Q^*; \mu) (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{-l} \|u\|_{p,Q^*}), \end{aligned} \quad (64)$$

где в силу условия (A^*) на ω

$$\begin{aligned} d^{n/q-n/p} \mathcal{R}_{q,p,0,l}(Q^*; \mu) &= d^{n/q-n/p} \sup_{Q_h \subset Q^*} h^{2n/p-n/q} \left(\frac{1}{|Q_h|} \int_{Q_h} \omega \right)^{1/p} \\ &\leq d^{n/p} \left(\sup_{Q^*} M^* \omega \right)^{1/p} \leq R d^{l-n/p} \left(\int_{Q^*} \omega \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

2) Для $k \geq 1$ оценка (60) следует из неравенства

$$|\nabla_k u|; L_p(Q^*; \omega) \leq c \mathcal{R}_{q,p,k,l}(Q^*; \mu) (\|u\|_{p,l,Q^*} + d^{k-l} \|u\|_{p,k,Q^*})$$

с последующим применением неравенств (43) либо (44).

ЛЕММА 9. Пусть $\beta \in Z_+^n$, $0 \leq |\beta| = k \leq m < l$, $s = l - m + k$, $1 < p < n/l$; $\omega \in A^*$, $\mu_\beta = |D^\beta \gamma|^p \omega dx$. Тогда существует $c > 0$ такое, что для любого $Q^* = Q_d \in \mathcal{B}$

$$T_{p,s}(Q^*; \mu_\beta) = \sup_{\operatorname{cap}_{p,s}(F) > 0} \left(\frac{\mu(F \cap Q^*)}{\operatorname{cap}_{p,s}(F)} \right) \leq (c \mathcal{K}_{p,p}(Q^*|\gamma; \omega))^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\omega_0 = |\gamma|^p$, $\omega_m = |\nabla_m \gamma|^p$. Если $k < m$, то в силу леммы 8

$$\begin{aligned} \mu_\beta(Q_h) &\leq c_1 h^{p(m-k)-n} |Q_h|_\omega (|Q_h|_{\omega_m}^p + h^{-pm} |Q_h|_{\omega_0}^p) \\ &\leq c_1 h^{-sp} |Q_h|_\omega (\mathcal{A}_l(h|\omega_m) + \mathcal{A}_{l-m}(h|\omega_0))^p. \end{aligned} \quad (65)$$

Для $k = m$ оценка (65) тривиально вытекает из условий $\omega \in A^*$, $\omega(x) \leq M^* \omega(x)$ для п.в. $x \in \Omega$. Положим $\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{A}_l(\xi|\omega_m) + \mathcal{A}_{l-m}(\xi|\omega_0)$. Из леммы 2 следует, что $\mathcal{A}(\xi)$ удовлетворяет условиям (50)–(52) с постоянной $R_2 = R2^{p'}$. Пусть $\Phi(\xi)$ – функция, заданная равенством (53) при $\theta = n - sp$, $\lambda = 1 + (\theta(p' - 1)R_2)^{-1}$. Исходя из (65), выводим оценки

$$\begin{aligned} \mu_\beta(B(x; r) \cap Q^*) &\leq \begin{cases} c_1 |Q^*|^{-1} |Q^*|_\omega \Phi((2r)^\theta), & \text{если } 2r \geq d; \\ c_1 \left(\sup_{Q_h \subset Q^*} |Q_h|^{-1} |Q_h|_\omega \right) \Phi((2r)^\theta), & \text{если } 0 < 2r < d, \end{cases} \\ &\leq c_2 |Q^*|^{-1} |Q^*|_\omega \Phi(c_3 \operatorname{cap}_{p,s}(\overline{B(x; r)})). \end{aligned} \quad (66)$$

Из (66) с помощью уже проводившихся при доказательстве леммы 8 рассуждений показываем, что

$$\begin{aligned} T_{p,s}(Q^*; \mu_\beta) &\leq c_4 \left(d^{lp-n} \int_{Q^*} |\nabla_m \gamma|^p \left(\frac{1}{|Q^*|} \int_{Q^*} \omega \right) dx \right. \\ &\quad \left. + d^{(l-m)p-n} \int_{Q^*} |\gamma|^p \left(\frac{1}{|Q^*|} \int_{Q^*} \omega \right) dx \right) \leq (c_4 \mathcal{K}_{p,p}(Q^*|\gamma; \omega))^p. \end{aligned}$$

ЛЕММА 10. Пусть $0 < m < l$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $pl \neq n$ при $p > 1$, $\alpha, \beta \in Z_+^n$, $0 \leq |\beta| = k \leq m = |\alpha|$, $\omega \in A^*$. Тогда существует такое $c > 0$, что для любых $Q = Q_d \in \mathcal{B}$ и $u \in C^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_Q |D^{\alpha-\beta} u|^q |D^\beta \gamma|^q \omega \leq c (\mathcal{K}_{p,q}(Q|\gamma; \omega) (\|u\|_{p,l,Q} + d^{-l} \|u\|_{p,Q}))^q. \quad (67)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (67) следует из лемм 5 и 9, если $1 < p = q < n/l$; из лемм 5 и 8, если $1 < p < q < \infty$, $pl < n$ либо $1 = p \leq q < \infty$, $l \leq n$. В случае $p(l - m + k) = n$, $p > 1$ неравенство (67) выводится посредством оценок, аналогичных тем, что были проведены при доказательстве леммы 8.

ЛЕММА 11 [5; разд. 1.5]. Пусть $1 \leq p < \infty$, $v \in \pi_{p,l}$. Тогда для всех $u \in C^\infty(\overline{Q})$, где $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$,

$$d(x)^{-l} \|u\|_{p,Q} \leq c |u; W_p^l(Q; 1, v)|. \quad (68)$$

ЛЕММА 12. Пусть $1 \leq p \leq q < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$, $\mathcal{K}: \mathcal{B} \rightarrow [0; \infty)$ – ограниченная функция на некотором базисе $\mathcal{B}$, g_i , $i = 1, 2$, – измеримые функции в Ω , удовлетворяющие условиям

$$\int_{Q^j} \sum_{i=1}^2 |g_i|^q \leq (c\mathcal{K}(Q^j))^q \left(\int_{Q^j} |f|^p \right)^{q/p}, \quad (69)$$

где постоянная c не зависит от $R > 0$ и B -покрытия $\{Q^j\} \subset \mathcal{B}$ множества $\Omega_R = \Omega \cap \{|x| < R\}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^2 |g_i; L_q(\Omega)| \leq cK|f; L_p(\Omega)|, \quad K = \sup_{Q \in \mathcal{B}} \mathcal{K}(Q). \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть $Q \in \mathcal{B}$. Для $\alpha \in Z_+^n$ из формулы

$$D^\alpha(u\gamma) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \gamma D^{\alpha - \beta} u$$

следует простая оценка

$$\int_Q |\nabla_m(u\gamma)|^q \omega \leq c_1 \sum_{|\alpha|=m} \sum_{\beta \leq \alpha} \int_Q |D^{\alpha - \beta} u|^q |D^\beta \gamma|^q \omega. \quad (71)$$

На каждом кубе $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$ из леммы 10 и неравенства (71) вытекает оценка

$$\int_Q |\nabla_m(u\gamma)|^q \omega_1 \leq (c_2 \mathcal{K}_{p,q}(Q|\gamma; \omega_1)(\|u\|_{p,l,Q} + d(x)^{-l}\|u\|_{p,Q}))^q, \quad (72)$$

а в силу леммы 5

$$\left(\int_Q |u\gamma|^q \omega_2 \right)^{1/q} \leq c_3 \sup_{Q_h \subset Q} h^{l-n/p} \left(\int_{Q_h} |\gamma|^q \omega_2 \right)^{1/q} (\|u\|_{p,l,Q} + d(x)^{-l}\|u\|_{p,Q}). \quad (73)$$

Из неравенств (72), (73) и леммы 11 следует, что

$$\int_Q (|\nabla_m(u\gamma)|^q \omega_1 + |u\gamma|^q \omega_2) \leq (c_4 \mathcal{K}(Q))^q \left(\int_Q (|\nabla_l u| + v^{1/p}|u|)^p \right)^{q/p},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(Q) = & \sup_{Q_h \subset Q} h^{l-n/p} \left(\left(\int_{Q_h} (|\nabla_m \gamma|^q M^* \omega_1 + |\gamma|^q \omega_2) \right)^{1/q} \right. \\ & \left. + h^{-m} \left(\int_{Q_h} |\gamma|^q M^* \omega_1 \right)^{1/q} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Далее, обращаясь к лемме 12, выводим оценку

$$\|\gamma\| \leq c \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}(Q_{(\varepsilon)}(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Доказательство повторяет предыдущее со следующими поправками: в силу лемм 7, 9 и 11 на кубе $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$

$$\left(\int_Q |u\gamma|^p \omega_2 \right)^{1/p} \leq c_1 \mathcal{K}_{p,p}(Q|\gamma; \omega_2) |u; W_p^l(Q; 1, v)|. \quad (75)$$

В итоге

$$\begin{aligned} & \int_{Q_h} (|\nabla_m(u\gamma)|^p \omega_1 + |u\gamma|^p \omega_2) \\ & \leq c \left((\mathcal{K}_{p,p}(Q|\gamma; \omega_1) + \mathcal{K}_{p,p}(Q|\gamma; \omega_2)) |u; W_p^l(Q; 1, v)| \right)^p \\ & \leq c \left(\mathcal{K}_{p,p}(Q|\gamma; \omega_1 + \omega_2) |u; W_p^l(Q; 1, v)| \right)^p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Пусть $Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)$. Тогда

$$|Q| \leq ((1 - \varepsilon)d(x))^n \leq 1$$

и в силу леммы 8

$$\begin{aligned} |Q|^{-1/p+l/n} \left(\int_Q |\gamma|^q \omega_2 \right)^{1/q} & \leq c_1 |Q|^{m/n} \left(|Q|^{-1/p+l/n} \left(\int_Q |\nabla_m \gamma|^q M^* \omega_2 \right)^{1/q} \right. \\ & \left. + |Q|^{-1/p+(l-m)/n} \left(\int_Q |\gamma|^q M^* \omega_2 \right)^{1/q} \right) \leq c_1 \mathcal{K}_{p,q}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega_2). \end{aligned}$$

Следовательно, в оценке (74)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(Q_{(\varepsilon)}(x)) & \leq c_2 (\mathcal{K}_{p,q}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega_1) + \mathcal{K}_{p,q}(Q_{(\varepsilon)}(x)|\gamma; \omega_2)) \\ & \leq c_3 \mathcal{K}_{p,q}(Q_{(\varepsilon)}(x)|v; \omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (76)$$

Утверждение теоремы 9 вытекает теперь из (76) и теорем 7 и 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Пусть $Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)$. По свойству регулярности $d(x)$ для всех $y \in Q$ $d(y) \geq \eta d(x)$. Из (73) для $\omega_2 = \omega$ следует, что

$$\int_Q |u\gamma|^q \omega d(\cdot)^{-mq} \leq c_1 (\eta d(x))^{-mq} \int_Q |u|^q \omega \leq (c_2 \mathcal{K}_{p,q}(Q|\gamma; \omega))^q. \quad (77)$$

Теперь, объединяя оценки (72) при $\omega = \omega_1$ и (77), (75) при всех допустимых p и q , получаем, что

$$\int_Q (|\nabla_m(u\gamma)|^q + |u\gamma|^q d(\cdot)^{-mq}) \omega \leq (c_3 \mathcal{K}_{p,q}(Q|\gamma; \omega))^q |u; W_p^l(Q; 1, v)|^q.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют соответствующую часть доказательства теоремы 7.

ЛЕММА 13. Пусть $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\tilde{Q})$, где $\tilde{Q} = Q_1(0)$, $1 < p < \infty$, $0 < \tau < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|\nabla_m \tilde{\gamma}\|_{M(W_p^l(\tau \tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau \tilde{Q}))} + \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau \tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau \tilde{Q}))} \\ & \leq c \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^l(\tau \tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau \tilde{Q}))}. \end{aligned} \quad (78)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем, рассуждая, по сути, как при доказательстве леммы 1 [1; § 1.3.2], показать, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & \tilde{\varepsilon} \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau\tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau\tilde{Q}))} + c(\tilde{\varepsilon}) \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^l(\tau\tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau\tilde{Q}))} \\ & \geq \sup_{\tilde{u} \in C^\infty(\tau\tilde{Q})} |u; W_p^l(\tau\tilde{Q})|^{-1} (\|\tilde{\gamma} \nabla_m \tilde{u}\|_{p, \tau\tilde{Q}} + \|\tilde{\gamma} \tilde{u}\|_{p, \tau\tilde{Q}}) = C \end{aligned} \quad (79)$$

и

$$\begin{aligned} \|u \nabla_m \tilde{\gamma}\|_{p, \tau\tilde{Q}} & \leq (\tilde{\varepsilon} \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau\tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau\tilde{Q}))} \\ & + c(\tilde{\varepsilon}) \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau\tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau\tilde{Q}))}) \|\tilde{u}\|_{W_p^l(\tau\tilde{Q})}, \end{aligned} \quad (80)$$

где $\tilde{\varepsilon} > 0$ — произвольно выбранное малое число. Теперь используем эквивалентность (см. [1; § 1.3.1])

$$\sup_{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{W_p^l}^{-1} (\|\tilde{\gamma} \nabla_m f\|_{p, \tau\tilde{Q}} + \|\tilde{\gamma} f\|_{p, \tau\tilde{Q}}) \sim \|\tilde{\gamma} \chi_{\tau\tilde{Q}}\|_{M(W_p^{l-m} \rightarrow L_p)},$$

в силу которой

$$\begin{aligned} C & \geq \sup_{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \|S_{\tau\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}}(f \chi_{\tau\tilde{Q}})\|_{W_p^l}^{-1} (\|\tilde{\gamma} \nabla_m f\|_{p, \tau\tilde{Q}} + \|\tilde{\gamma} f\|_{p, \tau\tilde{Q}}) \\ & \geq c_3 \sup_{\tilde{u} \in C^\infty(\tau\tilde{Q})} \|S_{\tau\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}} \tilde{u}\|_{W_p^{l-m}}^{-1} \|\tilde{\gamma} S_{\tau\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}} \tilde{u}\|_{p, \tau\tilde{Q}} \\ & \geq c_4 \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau\tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau\tilde{Q}))}. \end{aligned} \quad (81)$$

Из (79) и (81) следует, что

$$\|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^l(\tau\tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau\tilde{Q}))} \geq c_5 \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^{l-m}(\tau\tilde{Q}) \rightarrow L_p(\tau\tilde{Q}))}.$$

Последнее неравенство вместе с (80) приводит к оценке (78).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Оценка сверху $\|\gamma\|_{M(W_1 \rightarrow W_2)} \leq cK^*$ содержится в теореме 10. Пусть $Q^* = Q_{(\varepsilon)}^*(x)$, $d^* = (1 - \varepsilon)v^*(x)$. В силу леммы 5 для $u \in C^\infty(\overline{Q^*})$

$$\begin{aligned} |u; W_p^l(Q^*; 1, v)| & \leq \|u\|_{p, l, Q^*} + c_1 v^*(x)^{l-n/p} |Q^*|_v^{1/p} (\|u\|_{p, l, Q^*} + d^{*-l} \|u\|_{p, Q^*}) \\ & \leq c_2 (\|u\|_{p, l, Q^*} + d^{*-l} \|u\|_{p, Q^*}). \end{aligned}$$

Полагая $\tilde{\gamma}(\xi) = \gamma(x + d^* \xi)$, $u(y) = S_{\tau\tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}} \tilde{u}((y - x)/d^*)$, где $\xi \in \tilde{Q} = Q_1(0)$, $0 < \tau < 1$, выводим

$$\begin{aligned} & \|\gamma\|_{M(W_1 \rightarrow W_2)} \\ & \geq c_3 \sup_{\tilde{u} \in C^\infty(\tau\tilde{Q})} |u; W_p^l(Q^*; 1, v)|^{-1} \left(\int_{Q^*} (|\nabla_m(\gamma u)|^p + |\gamma u|^p (v^*)^{-mp}) \omega \right)^{1/p} \\ & \geq c_4 (d^*)^{(l-m)} \left(\inf_{Q^*} \omega \right)^{1/p} \|\tilde{\gamma}\|_{M(W_p^l(\tau\tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau\tilde{Q}))}. \end{aligned} \quad (82)$$

В силу оценки (78)

$$\begin{aligned}
& \|\gamma\|_{M(W_p^l(\tau\tilde{Q}) \rightarrow W_p^m(\tau\tilde{Q}))} \\
& \geq c_5 \sup_{Q \subset \tau\tilde{Q}} \left(\sup_{f \in C^\infty(Q)} (|S_{Q \rightarrow \tau^{-1}Q} f; W_p^l(\tilde{Q})|^{-1} \|f \nabla_m \tilde{\gamma}\|_{p,Q} \right. \\
& \quad \left. + |S_{Q \rightarrow \tau^{-1}Q} f; W_p^{l-m}(\tilde{Q})|^{-1} \|f \tilde{\gamma}\|_{p,Q} \right) \\
& \geq c_6 \sup_{Q \subset \tau\tilde{Q}} |Q|^{l/n-1/p} (\|\nabla_m \tilde{\gamma}\|_{p,Q} + |Q|^{-m/n} \|\tilde{\gamma}\|_{p,Q}). \tag{83}
\end{aligned}$$

Однозначное соответствие $\tau\tilde{Q} \supset Q = Q_h(t) \mapsto Q_{d^*h}(z) \subset \tau Q^*$, $z = x + d^*t$, позволяет вывести из (82) и (83) окончательную оценку (см. также замечание 1):

$$\|\gamma\|_{M(W_1 \rightarrow W_2)} \geq c_7 \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}(\tau Q_{(\varepsilon)}^* | \gamma; \omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Оценка $\|\gamma\| \leq cK^\sim$ следует из неравенства на кубах $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$:

$$\begin{aligned}
& \int_Q (|\nabla_m(u\gamma)|^p + d(\cdot)^{-mp} |u\gamma|^p) \rho \\
& \leq c_1 \rho(x) (\mathcal{K}_{p,p}(Q | \gamma; 1))^p \int_Q (|\nabla_l u|^p + d(\cdot)^{-lp} |u|^p).
\end{aligned}$$

Для оценки снизу нормы $\|\gamma\|$ здесь применимы оценки (82), где $\omega = 1$, и (83).

Список литературы

1. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
2. Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их применения // Матем. анализ. Итоги науки и техники. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 42–129.
3. Sawyer E. T. Two weight norm inequalities for certain maximal and integral operators // Lecture Notes in Math. 1982. V. 108. P. 102–127.
4. Стейн И. Сингулярные интегральные и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
5. Кусаинова Л. К. Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Алматы: Ин-т матем. МОН РК, 1999.
6. Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
7. Берг И., Лефстрем И. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.
8. Muckenhoupt B., Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 261–174.
9. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова, Казахстан
E-mail: kusainova@kargu.krg.kz

Поступила в редакцию
05.05.2005