Общероссийский математический портал

Г. Л. Харатишвили, Т. А. Тадумадзе, Формулы вариации решения дифференциального уравнения с запаздывающими аргументами и разрывным начальным условием, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 8, 49–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:31:14

УДК 517.929

Г. Л. Харатишвили, Т. А. Тадумадзе

**Формулы вариации решения дифференциального
уравнения с запаздывающими аргументами
и разрывным начальным условием**

В работе доказаны формулы вариации решения для нелинейного дифференциального уравнения с переменными запаздываниями и разрывным начальным условием. Разрывность начального условия означает, что в начальный момент времени значения начальной функции и траектории, вообще говоря, не совпадают. Полученные формулы содержат новое слагаемое, связанное с разрывностью начального условия и вариацией начального момента.

Библиография: 11 названий.

Формулы вариации решения дифференциального уравнения относительно правой части уравнения и начальных данных играют важную роль при доказательстве необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления [1]–[8]. Кроме того, они дают возможность получить аналитический вид приближенного решения возмущенного дифференциального уравнения с возмущенными начальными условиями.

В предлагаемой работе для нелинейного дифференциального уравнения с переменными запаздываниями и разрывным начальным условием доказаны формулы вариации решения в окрестности правого конца основного интервала $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ при возмущении начального момента $\tilde{t}_0$, правой части уравнения, начальной функции и начального значения решения.

Формулы вариации решения хорошо известны: для обыкновенных дифференциальных уравнений см. [6], [8], [9], в том числе для уравнений с запаздываниями см. [4], [5], [7]; для функционально-дифференциальных уравнений см. [4], [10]. Однако в [5], [7], [10] не рассматривается вариация начального момента, а в [4], [6], [8], [9] – разрывность начального условия.

В § 1 настоящей работы сформулированы основные теоремы, учитывающие левостороннюю, правостороннюю и двустороннюю вариации начального момента $\tilde{t}_0$. Эти теоремы обобщают результаты работ [5], [7], [11].

Доказательства основных теорем даны в §§ 3, 4.

В § 2 для одного класса функционально-дифференциальных уравнений установлен порядок приращения решения относительно малого параметра и получено аналитическое выражение приращения решения в начальный момент $\tilde{t}_0$. Эти результаты существенно используются при доказательстве основных теорем.

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть $J = [a, b]$ – конечный интервал, $O \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, E – множество функций $f: J \times O^s \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: для почти всех $t \in J$ функция $f(t, \cdot): O^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема; при каждом $(x_1, \dots, x_s) \in O^s$ функции $f(t, x_1, \dots, x_s)$, $f_{x_i}(t, x_1, \dots, x_s)$, $i = 1, \dots, s$, измеримы на J ; для любой $f \in E$ и любого компакта $K \subset O$ существует такая функция $m_{f,K}(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, что при любом $(x_1, \dots, x_s) \in K^s$ и для почти всех $t \in J$

$$|f(t, x_1, \dots, x_s)| + \sum_{i=1}^s |f_{x_i}(t, x_1, \dots, x_s)| \leq m_{f,K}(t).$$

Пусть, далее, скалярные функции $\tau_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, s$, абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям: $\tau_i(t) \leq t$, $\dot{\tau}_i(t) > 0$, $i = 1, \dots, s$; Φ – множество непрерывных функций $\varphi: J_1 = [\tau_0, b] \rightarrow O$, $\tau_0 = \min(\tau_1(a), \dots, \tau_s(a))$, при этом $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in J_1\}$.

Каждому элементу $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A = J \times O \times \Phi \times E$ будем ставить в соответствие дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t))) \quad (1.1)$$

с разрывным начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\tau_0, t_0], \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A$, $t_0 < b$. Функцию $x(t, \mu) \in O$, $t \in [\tau_0, t_1]$, $t_1 \in (t_0, b]$, будем называть *решением уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) или решением, соответствующим элементу μ и определенным на интервале $[\tau_0, t_1]$* , если она на интервале $[\tau_0, t_0]$ удовлетворяет условию (1.2), а на интервале $[t_0, t_1]$ абсолютно непрерывна и почти всюду (п.в.) на $[t_0, t_1]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Введем множество вариаций:

$$V = \left\{ \delta\mu = (\delta t_0, \delta x_0, \delta\varphi, \delta f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\Phi - \tilde{\varphi}) \times E : \right. \\ \left. |\delta t_0| \leq \alpha, |\delta x_0| \leq \alpha, \|\delta\varphi\| \leq \alpha, \delta f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta f_i, |\lambda_i| \leq \alpha, i = 1, \dots, k \right\}, \quad (1.3)$$

где $\delta f_i \in E$, $i = 1, \dots, k$, – фиксированные точки, $\tilde{\varphi} \in \Phi$ – фиксированная точка, $\alpha > 0$ – фиксированное число.

Пусть $\tilde{x}(t)$ – соответствующее элементу $\tilde{\mu} = (\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{f}) \in A$ решение, определенное на интервале $[\tau_0, \tilde{t}_1]$, $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$. Существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ элемент $\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in A$ и ему

соответствует решение $x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu)$, определенное на интервале $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1] \subset J_1$ (см. лемму 2.2).

В силу единственности решение $x(t, \tilde{\mu})$ на интервале $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$ является продолжением решения $\tilde{x}(t)$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что решение $\tilde{x}(t)$ с самого начала определено на всем интервале $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$.

По определению приращение решения $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{\mu})$ есть

$$\Delta x(t) = \Delta x(t, \varepsilon \delta \mu) = x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu) - \tilde{x}(t), \quad (t, \varepsilon, \delta \mu) \in [\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times V. \quad (1.4)$$

Для формулировки основных результатов введем следующие обозначения:

$$\sigma_i = (\tilde{t}_0, \underbrace{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_0}_i, \underbrace{\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0), \dots, \tilde{\varphi}(\tilde{t}_0)}_{(p-i)}, \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\tilde{t}_0)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\tilde{t}_0))), \quad i = 0, \dots, p$$

(роль числа p будет выясняться ниже); если $i = 0$, то σ_0 не содержит $\tilde{x}_0$; если $i = p$, то σ_p не содержит $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0)$; далее, $\gamma_i^0 = \gamma_i(\tilde{t}_0)$, $\gamma_i(t) = \tau_i^{-1}(t)$;

$$\begin{aligned} \sigma_i &= (\gamma_i^0, \tilde{x}(\tau_1(\gamma_i^0)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i^0)), \tilde{x}_0, \tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i^0)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\gamma_i^0))), \\ &\quad i = p+1, \dots, s; \\ \sigma_i^0 &= (\gamma_i^0, \tilde{x}(\tau_1(\gamma_i^0)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i^0)), \tilde{\varphi}(\tilde{t}_0), \tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i^0)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_i(\gamma_i^0))), \\ &\quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия:

- 1.1) $\gamma_i^0 = \tilde{t}_0$, $i = 1, \dots, p$, $\gamma_{p+1}^0 < \dots < \gamma_s^0 < \tilde{t}_1$;
- 1.2) существует такое число $\delta > 0$, что

$$\gamma_1(t) \leq \dots \leq \gamma_p(t), \quad t \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0];$$

- 1.3) существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i^- &= \dot{\gamma}_i(\tilde{t}_0-), \quad i = 1, \dots, s; \\ \lim_{\omega \rightarrow \sigma_i} \tilde{f}(\omega) &= f_i^-, \quad \omega = (t, x_1, \dots, x_s) \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0] \times O^s, \quad i = 0, \dots, p; \\ \lim_{(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\sigma_i, \sigma_i^0)} (\tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_2)) &= f_i^-, \\ (\omega_1, \omega_2) &\in (\gamma_i^0 - \delta, \gamma_i^0] \times O^s, \quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned}$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, что для произвольного

$$(t, \varepsilon, \delta \mu) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V^-, \quad V^- = \{\delta \mu \in V : \delta t_0 \leq 0\},$$

справедлива формула

$$\Delta x(t, \varepsilon \delta \mu) = \varepsilon \delta x(t, \delta \mu) + o(t, \varepsilon \delta \mu)^1, \quad (1.5)$$

где

$$\delta x(t, \delta \mu) = \left(Y(\tilde{t}_0, t) \sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- - \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \right) \delta t_0 + \beta(t, \delta \mu), \quad (1.6)$$

$$\hat{\gamma}_0^- = 1, \quad \hat{\gamma}_i^- = \dot{\gamma}_i^-, \quad i = 1, \dots, p, \quad \hat{\gamma}_{p+1}^- = 0;$$

$$\begin{aligned} \beta(t, \delta \mu) = & Y(\tilde{t}_0, t) \delta x_0 + \sum_{i=p+1}^s \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta \varphi(\xi) d\xi \\ & + \int_{\tilde{t}_0}^t Y(\xi, t) \delta f[\xi] d\xi, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{x_i}[\xi] = \tilde{f}_{x_i}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(\xi))), \quad \delta f[\xi] = \delta f(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(\xi)));$$

$Y(\xi, t)$ – матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial Y(\xi, t)}{\partial \xi} = - \sum_{i=1}^s Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi), \quad \xi \in [\tilde{t}_0, t], \quad (1.7)$$

и условию

$$Y(\xi, t) = \begin{cases} I, & \xi = t; \\ \Theta, & \xi > t, \end{cases} \quad (1.8)$$

где I – единичная матрица, Θ – нулевая матрица.

Функция $\delta x(t, \delta \mu)$ называется *вариацией решения* $\tilde{x}(t)$, $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$, а выражение (1.6) – *формулой вариации*.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условие 1.1) и нижеследующие условия:

1.4) существует такое число $\delta > 0$, что

$$\gamma_1(t) \leq \dots \leq \gamma_p(t), \quad t \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta];$$

1.5) существуют конечные пределы

$$\dot{\gamma}_i^+ = \dot{\gamma}_i(\tilde{t}_0 +), \quad i = 1, \dots, s;$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \sigma_i} \tilde{f}(\omega) = f_i^+, \quad \omega = (t, x_1, \dots, x_s) \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta] \times O^s, \quad i = 0, \dots, p;$$

$$\begin{aligned} \lim_{(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\sigma_i, \sigma_i^0)} (\tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_2)) &= f_i^+, \\ (\omega_1, \omega_2) &\in [\gamma_i^0, \gamma_i^0 + \delta] \times O^s, \quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned}$$

¹Здесь и далее величины (скалярные и векторные), имеющие равномерно относительно $(t, \delta \mu)$ соответствующий порядок малости по ε , обозначим через $O(t, \varepsilon \delta \mu)$, $o(t, \varepsilon \delta \mu)$.

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, что для произвольного

$$(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V^+, \quad V^+ = \{\delta\mu \in V : \delta t_0 \geq 0\},$$

справедлива формула (1.5), где $\delta x(t, \delta\mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \delta x(t, \delta\mu) &= \left(Y(\tilde{t}_0, t) \sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+) f_i^+ - \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^+ \dot{\gamma}_i^+ \right) \delta t_0 + \beta(t, \delta\mu), \\ \hat{\gamma}_0^+ &= 1, \quad \hat{\gamma}_i^+ = \dot{\gamma}_i^+, \quad i = 1, \dots, p, \quad \hat{\gamma}_{p+1}^+ = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Нижеприведенная теорема является следствием теорем 1.1 и 1.2.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнены условия теорем 1.1 и 1.2. Пусть, кроме того, выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- &= \sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+) f_i^+ = f_0, \\ f_i^- \dot{\gamma}_i^- &= f_i^+ \dot{\gamma}_i^+ = f_i, \quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned}$$

Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, что для произвольного

$$(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V$$

справедлива формула (1.5), где $\delta x(t, \delta\mu)$ имеет вид

$$\delta x(t, \delta\mu) = \left(Y(\tilde{t}_0, t) f_0 - \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i \right) \delta t_0 + \beta(t, \delta\mu).$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Пусть $\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$, тогда $\sigma_0 = \dots = \sigma_p$, $\sigma_i = \sigma_i^0$, $i = p+1, \dots, s$. Поэтому

$$f_0^- = \dots = f_p^-, \quad f_i^- = 0, \quad i = p+1, \dots, s.$$

В этом случае формула (1.6) принимает вид

$$\delta x(t, \delta\mu) = -Y(\tilde{t}_0, t) f_0^- + \beta(t, \delta\mu).$$

2) Пусть $\gamma_i^0 > \tilde{t}_0$, $i = 1, \dots, s$, тогда в формуле (1.6) предполагается, что $p = 0$. В этом случае условие 1.2) становится лишним.

3) Условие 1.2) выполнено, если $\dot{\gamma}_p^- < \dots < \dot{\gamma}_1^-$.

В самом деле,

$$\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t) = \int_{\tilde{t}_0}^t (\gamma_i(\xi) - \gamma_{i+1}(\xi)) d\xi = (\dot{\gamma}_i^- - \dot{\gamma}_{i+1}^-)(t - \tilde{t}_0) + o(|t - \tilde{t}_0|).$$

Очевидно, что при достаточно малом $\delta > 0$ из последнего равенства следуют неравенства

$$\gamma_i(t) \leq \gamma_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, p-1, \quad t \in [\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0].$$

Аналогично можно доказать, что если $\dot{\gamma}_1^+ < \dots < \dot{\gamma}_p^+$, то выполнено условие 1.4).

4) Очевидно, что все предпосылки теоремы 1.3 выполнены, если функция $\tilde{f} \in E$ непрерывна в точках σ_i , $i = 0, \dots, s$, и σ_i^0 , $i = p+1, \dots, s$, а функции $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1, \dots, s$, непрерывны в точке $\tilde{t}_0$. Ясно, что в этом случае $\dot{\gamma}_i(\tilde{t}_0) = 1$, $i = 1, \dots, p$ (см. условие 1.1)),

$$\begin{aligned} f_0 &= -\tilde{f}(\sigma_p), \\ f_i &= \dot{\gamma}_i(\tilde{t}_0)(\tilde{f}(\sigma_i) - \tilde{f}(\sigma_i^0)), \quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned}$$

5) Формулы вариации решения для дифференциального уравнения с одним запаздыванием и разрывным начальным условием при возмущении начальных данных и правой части уравнения доказаны в [11].

6) Доказанные формулы вариации непосредственно используются при доказательстве необходимых условий оптимальности для нелинейной управляемой дифференциальной системы с запаздываниями, нефиксированным начальным моментом и разрывным начальным условием.

§ 2. Леммы об оценке приращения решения

Каждому элементу $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A$ сопоставим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = f(t_0, \varphi, y)(t) = f(t, h(t_0, \varphi, y)(\tau_1(t)), \dots, h(t_0, \varphi, y)(\tau_s(t))) \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

где оператор $h(\cdot)$ определяется по формуле

$$h(t_0, \varphi, y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [\tau_0, t_0]; \\ y(t), & t \in [t_0, b]. \end{cases} \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mu = (t_0, x_0, \varphi, f) \in A$. Абсолютно непрерывную функцию $y(t) = y(t, \mu) \in O$, $t \in [r_1, r_2] \subset J$, будем называть *решением уравнения (2.1) с начальным условием (2.2)* или *решением, соответствующим элементу μ и определенным на интервале $[r_1, r_2]$* , если $t_0 \in [r_1, r_2]$, $y(t_0) = x_0$ и $y(t)$ на интервале $[r_1, r_2]$ п.в. удовлетворяет уравнению (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $y(t, \mu)$, $t \in [r_1, r_2]$, $\mu \in A$, – решение уравнения (2.1) с начальным условием (2.2). Тогда, как легко видеть, функция

$$x(t, \mu) = h(t_0, \varphi, y(\cdot, \mu))(t), \quad t \in [\tau_0, r_2], \quad (2.4)$$

будет решением уравнения (1.1) с начальным условием (1.2) (см. определение 1.1, (2.3)).

ЛЕММА 2.1. Пусть $\tilde{y}(t)$ – соответствующее элементу $\tilde{\mu} \in A$ решение, определенное на $[r_1, r_2] \subset (a, b)$, $K_1 \subset O$ – компакт, содержащий некоторую окрестность множества $\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{y}([r_1, r_2])$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ элемент $\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in A$ и ему соответствует решение $y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$, определенное на $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \subset J$. При этом

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) \in K_1, & t \in J_1; \\ y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) &\in K_1, & t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) &= y(t, \tilde{\mu}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

равномерно по $(t, \delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times V$.

Эта лемма является аналогом леммы 2.1 [5] и доказывается аналогичным способом.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\tilde{x}(t)$ – соответствующее элементу $\tilde{\mu} \in A$ решение, определенное на $[\tau_0, \tilde{t}_1]$, $\tilde{t}_i \in (a, b)$, $i = 0, 1$, $K_1 \subset O$ – компакт, содержащий некоторую окрестность множества $\tilde{\varphi}(J_1) \cup \tilde{x}([\tilde{t}_0, \tilde{t}_1])$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ элемент $\tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in A$ и ему соответствует решение $x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$, определенное на $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1] \subset J_1$. При этом

$$x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, \quad t \in [\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]. \quad (2.6)$$

Нетрудно заметить, что если в лемме 1.1 $r_1 = \tilde{t}_0$, $r_2 = \tilde{t}_1$, то $\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t)$, $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_2]$; $x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = h(t_0, \varphi, y(\cdot, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu))(t)$ при $t \in [\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, $\delta\mu \in V$ (см. (2.4)).

Следовательно, лемма 2.2 является непосредственным следствием леммы 2.1 (см. (2.5)).

В силу единственности решение $y(t, \tilde{\mu})$ на отрезке $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$ является продолжением решения $\tilde{y}(t)$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что решение $\tilde{y}(t)$ с самого начала определено на всем отрезке $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$.

По определению приращение решения $\tilde{y}(t) = y(t, \tilde{\mu})$ есть

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= \Delta y(t, \varepsilon\delta\mu) = y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \tilde{y}(t), \\ (t, \varepsilon, \delta\mu) &\in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times [0, \varepsilon] \times V. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно (см. лемму 2.1), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta y(t, \varepsilon\delta\mu) = 0 \quad (2.8)$$

равномерно по $(t, \delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times V$.

ЛЕММА 2.3 [5]. Для произвольного компакта $K \subset O$ и $f \in E$ существует такая функция $L_{f,K}(\cdot) \in L(J, \mathbb{R}_+)$, что почти для всех $t \in J$ и для любых $x'_i, x''_i \in K$, $i = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$|f(t, x'_1, \dots, x'_s) - f(t, x''_1, \dots, x''_s)| \leq L_{f,K}(t) \sum_{i=1}^s |x'_i - x''_i|. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $\gamma_i^0 = \tilde{t}_0$, $i = 1, \dots, p$, $\gamma_{p+1}^0 < \dots < \gamma_s^0 \leq r_2$, и пусть выполнены условия 1.2) и 1.3) теоремы 1.1. Тогда существует такое число $\varepsilon_2 > 0$, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V$ выполнено неравенство

$$\max_{t \in [\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon \delta\mu). \quad (2.10)$$

При этом

$$\Delta y(\tilde{t}_0) = \varepsilon \left(\delta x_0 + \left(\sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- \right) \delta t_0 \right) + o(\varepsilon \delta\mu). \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ настолько мало, что для произвольного $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V^-$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} t_0 &= \tilde{t}_0 + \varepsilon \delta t_0 \in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0], \\ \tilde{t}_0 &< \gamma_{p+1}(t_0) < \gamma_{p+1}^0 < \gamma_{p+2}(t_0) < \dots < \gamma_{s-1}^0 < \gamma_s(t_0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функция $\Delta y(t)$ на интервале $[\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta y}(t) = a(t, \varepsilon \delta\mu) + b(t, \varepsilon \delta\mu), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} a(t, \varepsilon \delta\mu) &= \tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) - \tilde{f}(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(t), \\ b(t, \varepsilon \delta\mu) &= \varepsilon \delta f(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Уравнение (2.13) перепишем в интегральной форме

$$\Delta y(t) = \Delta y(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0}^t (a(\xi, \varepsilon \delta\mu) + b(\xi, \varepsilon \delta\mu)) d\xi, \quad t \in [\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} |\Delta y(t)| &\leq |\Delta y(\tilde{t}_0)| + \int_{\tilde{t}_0}^t |a(\xi, \varepsilon \delta\mu)| d\xi + \int_{\tilde{t}_0}^{r_2 + \delta_1} |b(\xi, \varepsilon \delta\mu)| d\xi \\ &= |\Delta y(\tilde{t}_0)| + a_1(t, \varepsilon \delta\mu) + b_1(\varepsilon \delta\mu). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Докажем формулу (2.11). Имеем

$$\Delta y(\tilde{t}_0) = y(\tilde{t}_0, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta\mu) - \tilde{y}(\tilde{t}_0) = \varepsilon \delta x_0 + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (\tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) + b(t, \varepsilon \delta\mu)) dt.$$

Но

$$h(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(\tau_i(t)) \in K_1, \quad t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1], \quad i = 1, \dots, s$$

(см. (2.5)).

Поэтому

$$|b(t, \varepsilon \delta \mu)| \leq \varepsilon \alpha \sum_{i=1}^k m_{\delta f_i, K_1}(t), \quad t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \quad (2.16)$$

(см. (2.14), (1.3)).

Следовательно,

$$\Delta y(\tilde{t}_0) = \varepsilon \delta x_0 + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) dt + o(\varepsilon \delta \mu). \quad (2.17)$$

Теперь преобразуем интегральное слагаемое

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(t_0, \varphi, \tilde{y} + \Delta y)(t) dt &= \sum_{i=0}^p \int_{\varrho_i(t_0)}^{\varrho_{i+1}(t_0)} \tilde{f}(t, \tilde{y}(\tau_1(t)) + \Delta y(\tau_1(t)), \dots, \tilde{y}(\tau_i(t)) \\ &+ \Delta y(\tau_i(t)), \varphi(\tau_{i+1}(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t))) dt = \sum_{i=0}^p I_i, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\varrho_0(t) = t, \quad \varrho_{p+1}(t_0) = \tilde{t}_0, \quad \varrho_i(t) = \gamma_i(t), \quad i = 1, \dots, p$$

(см. условие 1.2), (2.3)).

Ясно, что

$$\begin{aligned} I_0 &= \varepsilon(\dot{\gamma}_1^- - 1)f_0^- \delta t_0 + o(\varepsilon \delta \mu) + \int_{t_0}^{\gamma_1(t_0)} (\tilde{f}(t, \varphi(\tau_1(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t))) - f_0^-) dt \\ &= \varepsilon(\dot{\gamma}_1^- - 1)f_0^- \delta t_0 + o(\varepsilon \delta \mu) + \alpha(\varepsilon \delta \mu). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Покажем, что

$$\alpha(\varepsilon \delta \mu) = o(\varepsilon \delta \mu). \quad (2.20)$$

В самом деле, согласно условию 1.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, \gamma_1(t_0)]} |\tilde{f}(t, \varphi(\tau_1(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t))) - f_0^-| &= \lim_{\omega \rightarrow \sigma_0} |\tilde{f}(\omega) - f_0^-| = 0, \\ \omega &\in (\tilde{t}_0 - \delta, \tilde{t}_0] \times O^s. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает (2.20). Аналогичным образом доказываются равенства

$$I_i = \varepsilon(\dot{\gamma}_{i+1}^- - \dot{\gamma}_i^-)f_i^- \delta t_0 + o(\varepsilon \delta \mu), \quad i = 1, \dots, p-1, \quad I_p = -\varepsilon \dot{\gamma}_p^- \delta t_0 + o(\varepsilon \delta \mu). \quad (2.21)$$

Из (2.17) с учетом (2.18)–(2.21) следует (2.11). Прежде чем доказать неравенство (2.10), заметим, что если $i = p+1, \dots, s$, $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi, \tilde{y}(\tau_1(\xi)) + \Delta y(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{y}(\tau_i(\xi)) \\ + \Delta y(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) &= \sigma_i, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi, \tilde{y}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{y}(\tau_{i-1}(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) &= \sigma_i^0 \end{aligned}$$

(см. (2.8)).

Таким образом, в силу условия 1.3) для достаточно малого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ функции

$$\sup_{t \in [t_0, \tilde{t}_0]} \dot{\gamma}_i(t), \quad \sup_{t \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]} |a(t, \varepsilon \delta \mu)|, \quad i = p+1, \dots, s,$$

ограничены на множестве $[0, \varepsilon_2] \times V^-$.

Следовательно, для произвольного $(\varepsilon, \delta \mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V^-$ справедливы оценки

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} |a(t, \varepsilon \delta \mu)| dt \leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad i = p+1, \dots, s. \quad (2.22)$$

Теперь оценим $a_1(t, \varepsilon \delta \mu)$, $t \in [\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1]$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

Пусть $t \in [\tilde{t}_0, \gamma_{p+1}(t_0)]$. Тогда, учитывая вид оператора $h(\cdot)$ и неравенство (2.9), будем иметь (см. (2.5))

$$\begin{aligned} a_1(t, \varepsilon \delta \mu) &\leq \int_{\tilde{t}_0}^t L_{\tilde{f}, K_1}(t) \left(\sum_{i=1}^p |\Delta y(\tau_i(\xi))| + \varepsilon \sum_{i=p+1}^s |\delta \varphi(\tau_i(t))| \right) d\xi \\ &\leq O(\varepsilon \delta \mu) + \sum_{i=1}^p \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi \\ &\leq O(\varepsilon \delta \mu) + \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$L(\xi) = \sum_{i=1}^s \chi(\gamma_i(\xi)) L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi), \quad (2.24)$$

$\chi(\xi)$ — характеристическая функция интервала J . При $\gamma_i(\xi) > b$ предполагается, что

$$\chi(\gamma_i(\xi)) L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) = 0.$$

Если $t \in [\gamma_{p+1}(t_0), \gamma_{p+1}^0]$, то согласно (2.22), (2.23) получим

$$\begin{aligned} a_1(t, \varepsilon \delta \mu) &\leq a_1(\gamma_{p+1}(t_0), \varepsilon \delta \mu) + \int_{\gamma_{p+1}(t_0)}^{\gamma_{p+1}^0} |a(\xi, \varepsilon \delta \mu)| d\xi \\ &\leq O(\varepsilon \delta \mu) + \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (2.23) справедлива на всем интервале $[\tilde{t}_0, \gamma_{p+1}^0]$.

Пусть $t \in [\gamma_{p+1}^0, \gamma_{p+2}(t_0)]$, тогда

$$\begin{aligned} a_1(t, \varepsilon \delta \mu) &\leq a_1(\gamma_{p+1}^0, \varepsilon \delta \mu) + \int_{\gamma_{p+1}^0}^t L_{\tilde{f}, K_1}(\xi) \left(\sum_{i=1}^{p+1} |\Delta y(\tau_i(\xi))| + \varepsilon \sum_{i=p+2}^s |\delta \varphi(\tau_i(\xi))| \right) d\xi \\ &\leq a_1(\gamma_{p+1}^0, \varepsilon \delta \mu) + \sum_{i=1}^{p+1} \int_{\tau_i(\gamma_{p+1}^0)}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi + O(\varepsilon \delta \mu). \end{aligned}$$

Так как $\tau_i(\gamma_{p+1}^0) \geq \tilde{t}_0$, $\tau_i(t) \leq t$, $i = 1, \dots, p+1$, то полученное неравенство можно записать следующим образом:

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq O(\varepsilon \delta \mu) + a_1(\gamma_{p+1}^0, \varepsilon \delta \mu) + \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi.$$

Итак, при $t \in [\tilde{t}_0, \gamma_{p+2}(t_0)]$ справедлива оценка

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq O(\varepsilon \delta \mu) + 2 \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi. \quad (2.25)$$

Аналогичным рассуждением, используя (2.22), можно установить справедливость неравенства (2.25) и на интервале $[\tilde{t}_0, \gamma_{p+2}^0]$.

Продолжая этот процесс, докажем, что

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq O(\varepsilon \delta \mu) + (i+1) \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \\ t \in [\tilde{t}_0, \gamma_{p+i+1}^0], \quad i = 1, \dots, s-p-1.$$

Далее, если $t \in [\gamma_s^0, r_2 + \delta_1]$, то

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq a_1(\gamma_s^0, \varepsilon \delta \mu) + \sum_{i=1}^s \int_{\gamma_s^0}^t L_{\tilde{f}, K_1}(\xi) |\Delta y(\tau_i(\xi))| d\xi \\ = a_1(\gamma_s^0, \varepsilon \delta \mu) + \sum_{i=1}^s \int_{\tau_i(\gamma_i^0)}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi.$$

В силу неравенств $\tau_i(\gamma_s^0) \geq \tilde{t}_0$, $i = 1, \dots, s$, имеем

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq a_1(\gamma_s^0, \varepsilon \delta \mu) + \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi \\ \leq O(\varepsilon \delta \mu) + (s-p+1) \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \quad t \in [\gamma_s^0, r_2 + \delta_1].$$

Таким образом, на отрезке $[\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1]$ выполнено

$$a_1(t, \varepsilon \delta \mu) \leq O(\varepsilon \delta \mu) + (s-p+1) \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi. \quad (2.26)$$

В силу (2.16)

$$b_1(\varepsilon \delta \mu) = O(\varepsilon \delta \mu). \quad (2.27)$$

Согласно (2.11), (2.26), (2.27) из неравенства (2.15) непосредственно следует

$$|\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon \delta \mu) + (s-p+1) \int_{\tilde{t}_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \quad t \in [\tilde{t}_0, r_2 + \delta_1].$$

Из этого в силу леммы Гронуолла вытекает (2.10).

ЛЕММА 2.5. Пусть $\gamma_i^0 = \tilde{t}_0$, $i = 1, \dots, p$, $\gamma_{p+1}^0 < \dots < \gamma_s^0 \leq r_2$, и пусть выполнены условия 1.4) и 1.5) теоремы 1.2. Тогда существует такое число $\varepsilon_2 > 0$, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V^+$ выполнено неравенство

$$\max_{t \in [t_0, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon \delta\mu). \quad (2.28)$$

При этом

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon(\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0) + o(\varepsilon \delta\mu). \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ настолько мало, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V^+$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} t_0 &\in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta], \\ \gamma_p(t_0) &< \gamma_{p+1}^0 < \gamma_{p+1}(t_0) < \gamma_{p+2}^0 < \dots < \gamma_s^0 < \gamma_s(t_0) < r_2 + \delta_1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Функция $\Delta y(t)$ на интервале $[t_0, r_2 + \delta_1]$ удовлетворяет уравнению (2.13), которое запишем в интегральной форме

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \int_{t_0}^t (a(\xi, \varepsilon \delta\mu) + b(\xi, \varepsilon \delta\mu)) d\xi, \quad t \in [t_0, r_2 + \delta_1].$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} |\Delta y(t)| &\leq |\Delta y(t_0)| + \int_{t_0}^t |a(\xi, \varepsilon \delta\mu)| d\xi + \int_{t_0}^{r_2 + \delta_1} |b(\xi, \varepsilon \delta\mu)| d\xi \\ &= |\Delta y(t_0)| + a_2(t, \varepsilon \delta\mu) + b_2(\varepsilon \delta\mu). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Докажем формулу (2.29). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta y(t_0) &= \varepsilon \delta x_0 - \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} \tilde{f}(\tilde{t}_0, \tilde{\varphi}, \tilde{y})(t) dt \\ &= \varepsilon \delta x_0 - \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} \tilde{f}(t, \tilde{y}(\tau_1(t)), \dots, \tilde{y}(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t))) dt \\ &= \varepsilon(\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0) + o(\varepsilon \delta\mu). \end{aligned}$$

В силу условия 1.5) для достаточно малого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ функции

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\tilde{t}_0, t_0]} \dot{\gamma}_i(t), & \quad i = 1, \dots, s, \\ \sup_{t \in [\gamma_{i-1}(t_0), \gamma_i(t_0)]} |a(t, \varepsilon \delta\mu)|, & \quad i = 1, \dots, p, \quad \gamma_0(t_0) = t_0, \\ \sup_{t \in [\gamma_i^0, \gamma_i(t_0)]} |a(t, \varepsilon \delta\mu)|, & \quad i = p+1, \dots, s, \end{aligned}$$

ограничены на множестве $[0, \varepsilon_2] \times V^+$. Ясно, что при $i = 1, \dots, p$

$$|\gamma_i(t_0) - \gamma_{i-1}(t_0)| \leq |\gamma_i(t_0) - \gamma_i(\tilde{t}_0)| + |\gamma_{i-1}(\tilde{t}_0) - \gamma_{i-1}(t_0)| \leq O(\varepsilon \delta \mu).$$

Из этих условий вытекает, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta \mu) \in [0, \varepsilon_2] \times V^+$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{i-1}(t_0)}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi, \varepsilon \delta \mu)| d\xi &\leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad i = 1, \dots, p, \\ \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi, \varepsilon \delta \mu)| d\xi &\leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad i = p+1, \dots, s. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Теперь оценим $a_2(t, \varepsilon \delta \mu)$, $t \in [t_0, r_2 + \delta_1]$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

Пусть $t \in [t_0, \gamma_p(t_0)]$. Тогда

$$a_2(t, \varepsilon \delta \mu) \leq \sum_{i=1}^p \int_{\gamma_{i-1}(t_0)}^{\gamma_i(t_0)} |a(\xi, \varepsilon \delta \mu)| d\xi \leq O(\varepsilon \delta \mu) \quad (2.33)$$

(см. (2.32)).

Если $t \in [\gamma_p(t_0), \gamma_{p+1}^0]$, то

$$\begin{aligned} a_2(t, \varepsilon \delta \mu) &\leq a_2(\gamma_p(t_0), \varepsilon \delta \mu) \\ &\quad + \int_{\gamma_p(t_0)}^t L_{\tilde{f}, K_1}(\xi) \left(\sum_{i=1}^p |\Delta y(\tau_i(\xi))| + \varepsilon \sum_{i=p+1}^s |\delta \varphi(\tau_i(\xi))| \right) d\xi \\ &\leq O(\varepsilon \delta \mu) + \sum_{i=0}^p \int_{\tau_i(\gamma_p(t_0))}^{\tau_i(t)} L_{\tilde{f}, K_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Так как

$$\tau_i(\gamma_p(t_0)) \geq \tau_i(\gamma_i(t_0)) = t_0, \quad \tau_i(t) \leq t, \quad i = 1, \dots, p,$$

то

$$a_2(t, \varepsilon \delta \mu) \leq O(\varepsilon \delta \mu) + \int_{t_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \quad t \in [t_0, \gamma_{p+1}^0]$$

(см. (2.24), (2.33)).

После этого с учетом (2.29), (2.32) аналогичным способом (см. доказательство леммы 2.4) получаем

$$|\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon \delta \mu) + (s - p + 1) \int_{t_0}^t L(\xi) |\Delta y(\xi)| d\xi, \quad t \in [t_0, r_2 + \delta_1]$$

(см. (2.31)).

Из этого в силу леммы Гронуолла следует (2.28).

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $r_1 = \tilde{t}_0$, $r_2 = \tilde{t}_1$, тогда для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V^-$ решение $y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tilde{t}_0 - \delta_1, \tilde{t}_1 + \delta_1]$, а решение $x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ определено на $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$, при этом

$$y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu), \quad t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$$

(см. леммы 2.1, 2.2, (2.4)). Таким образом, (см. (1.4), (2.7))

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & t \in [\tau_0, t_0]; \\ y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \tilde{\varphi}(t), & t \in [t_0, \tilde{t}_0]; \\ \Delta y(t), & t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть $\delta_2 \in (0, \min\{\delta_1, \tilde{t}_1 - \gamma_s\})$. В силу леммы 2.4 существует такое число $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, что

$$|\Delta x(t)| \leq O(\varepsilon\delta\mu) \quad \forall (t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V^-, \quad (3.2)$$

$$\Delta x(\tilde{t}_0) = \varepsilon \left(\delta x_0 + \left(\sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- \right) \delta t_0 \right) + o(\varepsilon\delta\mu) \quad (3.3)$$

(см. (3.1)).

Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta x}(t) = \sum_{i=1}^s \tilde{f}_{x_i}[t] \Delta x(\tau_i(t)) + \varepsilon \delta f[t] + \sum_{i=1}^2 R_i(t, \varepsilon\delta\mu), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(t, \varepsilon\delta\mu) &= \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_s(t))) \\ &\quad - \tilde{f}[t] - \sum_{i=1}^s \tilde{f}_{x_i}[t] \Delta x(\tau_i(t)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$R_2(t, \varepsilon\delta\mu) = \varepsilon(\delta f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_s(t))) - \delta f[t]). \quad (3.6)$$

Дифференциальное уравнение (3.4) будем рассматривать как линейное неоднородное уравнение с запаздывающим аргументом. Тогда $\Delta x(t)$, $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$, с помощью формулы Коши может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= Y(\tilde{t}_0, t) \Delta x(\tilde{t}_0) + \varepsilon \int_{\tilde{t}_0}^t Y(\xi, t) \delta f[\xi] d\xi + \sum_{i=0}^2 h_i(t, \tilde{t}_0, \varepsilon\delta\mu), \\ &\quad t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{cases} h_0(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu) = \sum_{i=p+1}^s \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \Delta x(\xi) d\xi, \\ h_i(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu) = \int_{\tilde{t}_0}^t Y(\xi, t) R_i(\xi, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

$Y(\xi, t)$ – матричная функция, удовлетворяющая уравнению (1.7) и условию (1.8).

В силу леммы 3.4 [5] функция $Y(\xi, t)$ непрерывна на множестве

$$\Pi = \{(\xi, t) : a \leq \xi \leq t, t \in J\}.$$

Поэтому

$$Y(\tilde{t}_0, t) \Delta x(\tilde{t}_0) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0, t) \left(\delta x_0 + \left(\sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^- \right) \delta t_0 \right) + o(t, \varepsilon \delta \mu) \quad (3.9)$$

(см. (3.3)).

Теперь преобразуем $h_0(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu)$. Имеем

$$\begin{aligned} h_0(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=p+1}^s \left(\varepsilon \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\dot{\gamma}_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta \varphi(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \Delta x(\xi) d\xi \right) \\ &= \varepsilon \sum_{i=p+1}^s \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta \varphi(\xi) d\xi \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(см. (2.12)).

Согласно неравенствам (2.12) выражение $h_1(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu)$ при $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_1]$ можно представить в виде

$$h_1(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu) = \sum_{k=1}^4 \alpha_k(t, \varepsilon \delta \mu), \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(t, \varepsilon \delta \mu) &= \int_{\tilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}(t_0)} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\ \alpha_2(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\ \alpha_3(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=p+1}^{s-1} \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_{i+1}(t_0)} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\ \alpha_4(t, \varepsilon \delta \mu) &= \int_{\gamma_s^0}^t \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\ \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) &= Y(\xi, t) R_1(\xi, \varepsilon \delta \mu). \end{aligned}$$

Оценим $\alpha_1(t, \varepsilon \delta \mu)$ (см. (3.5)). Имеем

$$\begin{aligned}
|\alpha_1(t, \varepsilon \delta \mu)| &\leq \|Y\| \int_{\tilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}(t_0)} \left| \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) \right. \\
&\quad + \Delta x(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(t)) + \Delta x(\tau_p(t)), \varphi(\tau_{p+1}(t)), \dots, \varphi(\tau_s(t))) \\
&\quad - \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t))) \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^p \tilde{f}_{x_i}[t] \Delta x(\tau_i(t)) - \varepsilon \sum_{i=p+1}^s \tilde{f}_{x_i}[t] \delta \varphi(\tau_i(t)) \right| dt \\
&\leq \|Y\| \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \left(\int_0^1 \left| \frac{d}{d\xi} \tilde{f}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(\xi)) \right. \right. \\
&\quad + \xi \Delta x(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)) + \xi \varepsilon \delta \varphi(\tau_{p+1}(t)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t)) + \xi \varepsilon \delta \varphi(\tau_s(t))) \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^p \tilde{f}_{x_i}[t] \Delta x(\tau_i(t)) - \varepsilon \sum_{i=p+1}^s \tilde{f}_{x_i}[t] \delta \varphi(\tau_i(t)) \right| d\xi \right) dt \\
&\leq \|Y\| \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^p |\tilde{f}_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \dots) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tilde{f}_{x_i}[t] |\delta \varphi(\tau_i(t))| \right) d\xi \right) dt \\
&\leq \|Y\| \left(O(\varepsilon \delta \mu) \sum_{i=1}^p \sigma_i(\varepsilon \delta \mu) + \varepsilon \alpha \sum_{i=p+1}^s \sigma_i(\varepsilon \delta \mu) \right), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\|Y\| &= \sup_{(\xi, t) \in \Pi} |Y(\xi, t)|, \\
\sigma_i(\varepsilon \delta \mu) &= \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \left(\int_0^1 |\tilde{f}_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \dots) - \tilde{f}_{x_i}[t]| d\xi \right) dt, \\
i &= 1, \dots, s.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + \varepsilon \xi \delta \varphi(t) \rightarrow \tilde{\varphi}(t), \quad \Delta x(\tau_i(t)) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

равномерно по $(\xi, t, \delta \mu) \in [0, 1] \times [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times V^-$.

Поэтому в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_i(\varepsilon \delta \mu) = 0$$

равномерно по $\delta \mu \in V^-$.

Таким образом,

$$\alpha_1(t, \varepsilon \delta \mu) = o(t, \varepsilon \delta \mu).$$

Теперь преобразуем $\alpha_2(t, \varepsilon \delta \mu)$. Нетрудно заметить, что при $t \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]$

$$\begin{aligned} |\Delta x(\tau_j(t))| &\leq O(\varepsilon \delta \mu), & j = 1, \dots, i-1, \\ \Delta x(\tau_j(t)) &= \varepsilon \delta \varphi(\tau_j(t)), & j = i+1, \dots, s, \quad i = p+1, \dots, s \end{aligned}$$

(см. (3.1), (3.2)).

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi &= \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \beta_i(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_i(\xi) &= \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)) \\ &\quad + \Delta x(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) \\ &\quad - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))), \\ o(t, \varepsilon \delta \mu) &= - \sum_{j=1}^{i-1} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi \\ &\quad - \varepsilon \sum_{j=i+1}^s \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \delta \varphi(\tau_j(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \beta_i(\xi) d\xi &= \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) (\beta_i(\xi) - f_i^-) d\xi + \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) f_i^- d\xi \\ &= \alpha_5(t, \varepsilon \delta \mu) + \alpha_6(t, \varepsilon \delta \mu). \end{aligned}$$

Далее, при $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]$ $\tau_j(\xi) \geq \tilde{t}_0$, $j = 1, \dots, i-1$, $i = p+1, \dots, s$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{x}(\tau_j(\xi)) + \Delta x(\tau_j(\xi))) = \lim_{\xi \rightarrow \gamma_i^0} \tilde{x}(\tau_j(\xi)) = \tilde{x}(\tau_j(\gamma_i^0)), \quad j = 1, \dots, i-1.$$

При $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]$ $\tau_i(\xi) \in [t_0, \tilde{t}_0]$, поэтому

$$\tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)) = x(\tau_i(\xi), \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu) = y(\tau_i(\xi), \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu) = \tilde{y}(\tau_i(\xi)) + \Delta y(\tau_i(\xi))$$

(см. (2.7)).

Таким образом, учитывая непрерывность функции $\tilde{y}(t)$, $t \in [\tilde{t}_0 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$, равенство (2.8) и условие $\tilde{y}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$, будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi))) = \lim_{\xi \rightarrow \gamma_i} \tilde{y}(\tau_i(\xi)) = \tilde{x}_0.$$

Принимая во внимание соотношения, полученные выше, можно заключить, что при $i = p+1, \dots, s$, $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)) \\ + \Delta x(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) = \sigma_i. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_i(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) = \sigma_i^0, \quad i = p+1, \dots, s.$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i^0]} |\beta_i(\xi) - f_i^-| = 0$$

равномерно по $\delta\mu \in V^-$.

Функция $Y(\xi, t)$ непрерывна на $[\gamma_i(t_0), \gamma_i^0] \times [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2] \subset \Pi$ и, кроме того,

$$\gamma_i^0 - \gamma_i(t_0) = -\varepsilon \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 + o(\varepsilon \delta\mu).$$

Следовательно, $\alpha_5(t, \varepsilon \delta\mu)$ имеет порядок $o(t, \varepsilon \delta\mu)$, а $\alpha_6(t, \varepsilon \delta\mu)$ имеет вид

$$\alpha_6(t, \varepsilon \delta\mu) = -\varepsilon Y(\gamma_i^0, t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 + o(t, \varepsilon \delta\mu).$$

Итак,

$$\begin{aligned} \alpha_2(t, \varepsilon \delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 \\ - \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta\mu). \end{aligned}$$

Аналогичным способом лишь с незначительными изменениями доказываются равенства

$$\alpha_i(t, \varepsilon \delta\mu) = o(t, \varepsilon \delta\mu), \quad i = 3, 4$$

(см. (3.12)).

Теперь выпишем для $h_1(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta\mu)$ окончательную формулу

$$\begin{aligned} h_1(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta\mu) = -\varepsilon \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^- \dot{\gamma}_i^- \delta t_0 \\ - \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i^0} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta\mu) \quad (3.13) \end{aligned}$$

(см. (3.11)).

Наконец, оценим $h_2(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu)$. Имеем

$$\begin{aligned} |h_2(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu)| &\leq \varepsilon \alpha \|Y\| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} L_{\delta f_i, K_1}(t) |\Delta x(\tau_j(t))| dt \\ &= \varepsilon \alpha \|Y\| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s \sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) \end{aligned} \quad (3.14)$$

(см. (2.6)).

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.15)$$

равномерно по $\delta \mu \in V^-$.

Пусть $j \in \{1, \dots, p\}$, тогда $\tau_j(t) \geq \tilde{t}_0$ при $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$. Поэтому

$$|\Delta x(\tau_j(t))| \leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_1].$$

Следовательно, в этом случае равенство (3.15) доказано.

Пусть $j \in \{p+1, \dots, s\}$. Тогда $\tau_j(t) < t_0$ при $t \in [\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0))$, $\tau_j(t) \in [t_0, \tilde{t}_0]$ при $t \in [\gamma_j(t_0), \gamma_j^0]$, $\tau_j(t) > \tilde{t}_0$ при $t > \gamma_j^0$. Поэтому

$$|\Delta x(\tau_j(t))| = \varepsilon \delta \varphi(\tau_j(t)), \quad t \in [\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0)), \quad |\Delta x(\tau_j(t))| \leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad t \in [\gamma_j^0, \tilde{t}_1 + \delta_2].$$

Легко видеть, что $\gamma_j(t_0) - \gamma_j^0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ ограничена. Кроме того,

$$\sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) = \sigma_{ij}(\tilde{t}_0, \gamma_j(t_0); \varepsilon \delta \mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j(t_0), \gamma_j; \varepsilon \delta \mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu).$$

Все слагаемые последнего равенства в силу вышеприведенных рассуждений стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\delta \mu \in V^-$. Равенство (3.15) доказано.

Таким образом,

$$h_2(t, \tilde{t}_0, \varepsilon \delta \mu) = o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (3.16)$$

Из (3.7), принимая во внимание (3.9), (3.10), (3.13), (3.16), получаем (1.5), где $\delta x(t, \delta \mu)$ имеет вид (1.6).

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $r_1 = \tilde{t}_0$, $r_2 = \tilde{t}_1$. Тогда для произвольного $(\varepsilon, \delta \mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V^+$ решение $y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu)$ определено на $[\tilde{t}_1 - \delta_1, \tilde{t}_1 + \delta_1]$, а решение $x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu)$ определено на $[\tau_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$, при этом

$$y(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu) = x(t, \tilde{\mu} + \varepsilon \delta \mu), \quad t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]$$

(см. леммы 2.1, 2.2, (2.4)).

Таким образом (см. (1.4), (2.7)),

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon \delta \varphi(t), & t \in [\tau_0, \tilde{t}_0]; \\ \varphi(t) - \tilde{x}(t), & t \in [\tilde{t}_0, t_0]; \\ \Delta y(t), & t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть числа $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ и $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, существование которых доказывается в лемме 2.5, настолько малы, что для произвольного элемента $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2] \times V^+$ выполнено неравенство

$$\gamma_s(t_0) < \tilde{t}_1 - \delta_2.$$

В силу леммы 2.5 с учетом (4.1) будем иметь

$$|\Delta x(t)| \leq O(\varepsilon \delta \mu) \quad \forall (t, \varepsilon \delta \mu) \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V^+, \quad (4.2)$$

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon(\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0) + o(\varepsilon \delta \mu). \quad (4.3)$$

Функция $\Delta x(t)$ на интервале $[t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ удовлетворяет уравнению (3.4). Поэтому согласно формуле Коши ее можно представить в виде

$$\Delta x(t) = Y(t_0, t) \Delta x(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^t Y(\xi, t) \delta f[\xi] d\xi + \sum_{i=0}^2 h_i(t, t_0, \varepsilon \delta \mu), \quad (4.4)$$

$$t \in [t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2],$$

где

$$h_0(t, t_0, \varepsilon \delta \mu) = \sum_{i=1}^s \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \Delta x(\xi) d\xi, \quad (4.5)$$

а $h_i(t, t_0, \varepsilon \delta \mu)$, $i = 1, 2$, имеют соответственно вид (3.8).

В силу леммы 3.4 [5] функция $Y(\xi, t)$ непрерывна на множестве

$$[\tilde{t}_0, \tau_s(\tilde{t}_1 - \delta_2)] \times [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2].$$

Ясно, что $t_0 \in [\tilde{t}_0, \tau_s(\tilde{t}_1 - \delta_2)]$, поэтому

$$Y(t_0, t) \Delta x(t_0) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0, t) (\delta x_0 - f_p^+ \delta t_0) + o(t, \varepsilon \delta \mu) \quad (4.6)$$

(см. (4.3)).

Теперь преобразуем (4.5). Имеем

$$\begin{aligned}
 h_0(t, t_0, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=1}^p \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \Delta x(\xi) d\xi \\
 &\quad + \sum_{i=p+1}^s \left(\varepsilon \int_{\tau_i(t_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta \varphi(\xi) d\xi \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\tilde{t}_0}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \Delta x(\xi) d\xi \right) \\
 &= \sum_{i=1}^p \int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi \\
 &\quad + \varepsilon \sum_{i=p+1}^s \int_{\tau_i(\tilde{t}_0)}^{\tilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi), t) \tilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)] \dot{\gamma}_i(\xi) \delta \varphi(\xi) d\xi \\
 &\quad + \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

После элементарных преобразований легко получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^p \int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\gamma_j(t_0)}^{\gamma_{j+1}(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi, \quad \gamma_0(t_0) = t_0. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Согласно неравенствам (2.30) $h_1(t, t_0, \varepsilon \delta \mu)$ при $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ можно представить в виде

$$h_1(t, t_0, \varepsilon \delta \mu) = \sum_{k=1}^5 \beta_k(t, \varepsilon \delta \mu), \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 \beta_1(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\
 \beta_2(t, \varepsilon \delta \mu) &= \int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}^0} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\
 \beta_3(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\
 \beta_4(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=p+1}^{s-1} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}^0} \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\
 \beta_5(t, \varepsilon \delta \mu) &= \int_{\gamma_s(t_0)}^t \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) d\xi, \\
 \omega(\xi, t, \varepsilon \delta \mu) &= Y(\xi, t) R_1(\xi, \varepsilon \delta \mu).
 \end{aligned}$$

Для $\beta_1(t, \varepsilon \delta \mu)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \beta_1(t, \varepsilon \delta \mu) &= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) (\tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi))) \\ &\quad + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) \\ &\quad - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) d\xi \\ &\quad - \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) \sum_{j=1}^s \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi = \beta_{11}(t, \varepsilon \delta \mu) - \beta_{12}(t, \varepsilon \delta \mu). \end{aligned} \quad (4.10)$$

При $\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_{i+1}(t_0)]$

$$\tau_j(\xi) \geq t_0, \quad j = 1, \dots, i, \quad \tau_j(\xi) < t_0, \quad j = i+1, \dots, p, \quad \tau_j(\xi) < \tilde{t}_0, \quad j = p+1, \dots, s,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta x(\tau_j(\xi))| &\leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad j = 1, \dots, i, \\ \Delta x(\tau_j(\xi)) &= \varepsilon \delta \varphi(\tau_j(\xi)), \quad j = p+1, \dots, s \end{aligned}$$

(см. (4.1), (4.3)).

Для каждого $i = 0, \dots, p-1$ $\gamma_{i+1}(t_0) - \gamma_i(t_0) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\beta_{12}(t, \varepsilon \delta \mu) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.11)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_{i+1}(t_0)]} &| \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)) \\ &\quad + \Delta x(\tau_i(\xi)), \varphi(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) - f_i^- + f_p^+ \\ &\quad - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) | = 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \end{aligned}$$

равномерно по $\delta \mu \in V^+$.

Из свойств функций $Y(\xi, t)$, $\gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, p$, непосредственно следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i(t_0), \gamma_{i+1}(t_0)]} |Y(\xi, t) - Y(\tilde{t}_0, t)| = 0, \quad i = 0, \dots, p-1,$$

равномерно по $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$,

$$\gamma_{i+1}(t_0) - \gamma_i(t_0) = \varepsilon(\dot{\gamma}_{i+1}^+ - \dot{\gamma}_i^+) \delta t_0 + o(\varepsilon \delta \mu), \quad i = 0, \dots, p-1, \quad \dot{\gamma}_0 = 1.$$

Эти условия для $\beta_{11}(t, \varepsilon \delta \mu)$ дают

$$\beta_{11}(t, \varepsilon \delta \mu) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0, t) \sum_{i=0}^p (f_i^+ - f_p^+) (\dot{\gamma}_{i+1}^+ - \dot{\gamma}_i^+) \delta t_0 + o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.12)$$

Из (4.10) с учетом (4.11), (4.12) вытекает

$$\begin{aligned} \beta_1(t, \varepsilon \delta \mu) = \varepsilon Y(\tilde{t}_0, t) & \left(\sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+) f_i^+ + f_p^+ \right) \delta t_0 \\ & - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \beta_2(t, \varepsilon \delta \mu) = \int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}^0} Y(\xi, t) & \left(\tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_i(\xi))) \right. \\ & + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(\xi)) + \Delta x(\tau_p(\xi)), \varphi(\tau_{p+1}(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) \\ & - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) \\ & \left. - \sum_{j=1}^p \tilde{f}_{x_j}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) - \varepsilon \sum_{j=p+1}^s \tilde{f}_{x_j}[\xi] \delta \varphi(\tau_j(\xi)) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Стандартным способом (см. (3.12)) доказывается, что

$$|\beta_2(t, \varepsilon \delta \mu)| \leq \|Y\| \left(O(\varepsilon \delta \mu) \sum_{i=1}^p \sigma_i(t_0, \varepsilon \delta \mu) + \varepsilon \alpha \sum_{i=p+1}^s \sigma_i(t_0, \varepsilon \delta \mu) \right), \quad (4.14)$$

где

$$\sigma_i(t_0, \varepsilon \delta \mu) = \int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}^0} \left(\int_0^1 |\tilde{f}_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \dots) - \tilde{f}_{x_i}[t]| d\xi \right) dt.$$

При $t \in [\gamma_p(t_0), \gamma_{p+1}^0]$ $\tau_j(t) \geq t_0$, $j = 1, \dots, p$. Поэтому (см. (4.1))

$$\Delta x(\tau_j(t)) = \Delta y(\tau_j(t)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_i(t_0, \varepsilon \delta \mu) = \int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}^0} & \left(\int_0^1 |\tilde{f}_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) \right. \\ & + \xi \Delta y(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(t)) + \xi \Delta y(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)) \\ & + \xi \varepsilon \delta \varphi(\tau_{p+1}(t)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t)) + \xi \varepsilon \delta \varphi(\tau_s(t)) \\ & \left. - \tilde{f}_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)), \dots, \tilde{x}(\tau_p(t)), \tilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t)))| d\xi \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, как легко видеть (см. (2.8)),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_i(t_0, \varepsilon \delta \mu) = 0$$

равномерно по $\delta \mu \in V^+$.

Таким образом,

$$\beta_2(t, \varepsilon \delta \mu) = o(t, \varepsilon \delta \mu) \quad (4.15)$$

(см. (4.14)).

Преобразуем остальные слагаемые выражения (4.9). Имеем

$$\begin{aligned} \beta_3(t, \varepsilon \delta \mu) = & \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) (\tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi))) \\ & + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)) + \Delta x(\tau_{i-1}(\xi)), \varphi(\tau_i(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) \\ & - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) d\xi \\ & - \sum_{i=p+1}^s \left(\sum_{j=1}^{i-1} \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + \varepsilon \sum_{j=i+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_j}[\xi] \delta \varphi(\tau_j(\xi)) d\xi \right). \end{aligned}$$

Согласно условию 1.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i^0, \gamma_i(t_0)]} & |\tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)) + \Delta x(\tau_{i-1}(\xi)), \varphi(\tau_i(\xi)), \dots, \varphi(\tau_s(\xi))) \\ & - \tilde{f}(\xi, \tilde{x}(\tau_1(\xi)), \dots, \tilde{x}(\tau_i(\xi)), \tilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\xi)), \dots, \tilde{\varphi}(\tau_s(\xi))) + f_i^+| = 0, \\ & i = p+1, \dots, s, \end{aligned}$$

равномерно по $\delta \mu \in V^+$.

Далее,

$$\begin{aligned} |\Delta x(\tau_j(\xi))| & \leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad j = 1, \dots, i-1, \quad \xi \in [\gamma_i^0, \gamma_i(t_0)], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [\gamma_i^0, \gamma_i(t_0)]} & |Y(\xi, t) - Y(\gamma_i, t)| = 0, \quad i = p+1, \dots, s, \end{aligned}$$

равномерно по $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$.

В силу этих соотношений получаем

$$\begin{aligned} \beta_3(t, \varepsilon \delta \mu) = & -\varepsilon \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^+ \delta t_0 \\ & - \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_i(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Аналогичным рассуждением (см. (3.12)) доказывается, что

$$\beta_i(t, \varepsilon \delta \mu) = o(t, \varepsilon \delta \mu), \quad i = 4, 5. \quad (4.17)$$

В силу соотношений (4.13), (4.15)–(4.17) выпишем окончательное выражение

$$\begin{aligned} h_1(t, t_0, \varepsilon \delta \mu) = & \varepsilon \left(Y(\tilde{t}_0, t) \sum_{i=0}^p (\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+) - \sum_{i=p+1}^s Y(\gamma_i^0, t) f_i^+ \right) \delta t_0 \\ & - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi \\ & - \sum_{i=p+1}^s \int_{\gamma_i^0}^{\gamma_i(t_0)} Y(\xi, t) \tilde{f}_{x_i}[\xi] \Delta x(\tau_j(\xi)) d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu) \end{aligned} \quad (4.18)$$

(см. (4.9)).

Наконец, оценим $h_2(t, t_0, \varepsilon \delta \mu)$. Имеем

$$|h_2(t, t_0, \varepsilon \delta \mu)| \leq \varepsilon \alpha \|Y\| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s \sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu)$$

(см. (3.14)).

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.19)$$

равномерно по $\delta \mu \in V^+$.

Пусть $i \in \{1, \dots, p\}$, тогда при $t \in [\gamma_i(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2]$

$$|\Delta x(\tau_i(t))| \leq O(\varepsilon \delta \mu).$$

Легко видеть, что $\gamma_j(t_0) - \tilde{t}_0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция $\Delta x(t)$ на интервале $[\tau, \tilde{t}_1 + \delta_2]$ ограничена. Кроме того,

$$\sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) = \sigma_{ij}(t_0, \gamma_j(t_0); \varepsilon \delta \mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu). \quad (4.20)$$

Пусть $j \in \{p+1, \dots, s\}$, тогда

$$\Delta x(\tau_j(t)) = \varepsilon \delta \varphi(\tau_j(t)), \quad t \in [t_0, \gamma_j^0], \quad |\Delta x(\tau_j(t))| \leq O(\varepsilon \delta \mu), \quad t \in [\gamma_j(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2].$$

Ясно, что $\gamma_j(t_0) - \gamma_j^0 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1; \varepsilon \delta \mu)$ можно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}(t_0, \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu) = \sigma_{ij}(t_0, \gamma_j^0; \varepsilon \delta \mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j^0, \gamma_j(t_0); \varepsilon \delta \mu) + \sigma_{ij}(\gamma_j(t_0), \tilde{t}_1 + \delta_2; \varepsilon \delta \mu). \quad (4.21)$$

Очевидно, что все слагаемые в выражениях (4.20), (4.21) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Следовательно, доказано равенство (4.19), которое в свою очередь дает

$$h_2(t, t_0, \varepsilon \delta \mu) = o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.22)$$

В заключение заметим, что при $t \in [\tilde{t}_1 - \delta_2, \tilde{t}_1 + \delta_2]$

$$\varepsilon \int_{t_0}^t Y(\xi, t) \delta f[t] d\xi = \varepsilon \int_{\tilde{t}_0}^t Y(\xi, t) \delta f[t] d\xi + o(t, \varepsilon \delta \mu). \quad (4.23)$$

Из (4.4), принимая во внимание (4.6)–(4.8), (4.18), (4.22), (4.23), получаем (1.5), где $\delta x(t, \delta \mu)$ имеет вид (1.9).

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. Gamkrelidze R. V. On some extremal problems in the theory of differential equation with application to the theory of optimal control // SIAM J. Control Optim. 1965. V. 3. P. 505–527.
3. Харатишвили Г. Л. Оптимальные процессы с запаздываниями. Тбилиси: Мецниереба, 1966.
4. Ogustoreli N. Time-lag control systems. New York: Academic Press, 1966.
5. Banks H. T. Necessary conditions for control problems with variable time lags // SIAM J. Control Optim. 1968. V. 6. №1. P. 9–47.
6. Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г. Л. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. №4. С. 781–839.
7. Харатишвили Г. Л., Мачаидзе З. А., Маркозашвили Н. И., Тадумадзе Т. А. Абстрактная вариационная теория и ее применения к оптимальным задачам с запаздываниями. Тбилиси: Мецниереба 1973.
8. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1975.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.
10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
11. Kharatishvili G., Tadumadze T., Gorgodze N. Continuous dependence and differentiability of solution with respect to initial data and right-hand side for differential equations with deviating argument // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2000. V. 19. P. 3–105.

Институт кибернетики АН Грузии, Тбилиси
 Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа
 Тбилисского государственного университета
 E-mail: kharatishvili@cybernet.ge
 tamaz_1@hotmail.com
 tamaztad@yahoo.com

Поступила в редакцию
 17.06.2003 и 27.10.2004