Общероссийский математический портал

К. И. Чернышов, Об операторе Коши нестационарного линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производной, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 8, 75–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:14:49

УДК 517.98

К. И. Чернышов

Об операторе Коши нестационарного линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производной

Предложен алгоритм диагонализации матричного пучка, зависящего от переменной и от параметра, в случаях, когда предельная матрица при всех значениях переменной имеет простой спектр или кратное собственное значение. В алгоритме используется исчерпывающая суперпозиция специальных преобразований подобия. Получены формулы для оператора Коши линейного нестационарного уравнения с малым параметром при производной и матричным пучком при различных степенях вырождения структурной матрицы.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Пусть E – линейное конечномерное пространство размерности m , $\mathfrak{M}$ – линейное пространство вещественных матриц порядка $m \times m$, действующих в E и непрерывно зависящих от переменной t , изменяющейся на конечном отрезке $[0, T]$, и ε – малый параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Рассмотрим матричный пучок

$$D(t, \varepsilon) = D_0(t) - \sum_{i=1}^r \varepsilon^i D_i(t)$$

из $\mathfrak{M}$ и задачу Коши для нестационарного линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) вида

$$\varepsilon^p \dot{y} = D(t, \varepsilon)y, \quad y(0, \varepsilon) = y_0 \in E, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (1.1)$$

Для упрощения изложения далее будем считать, что $r = 1$, $p = 1$ в (1.1). Тогда соответствующий оператор Коши уравнения (1.1) является решением задачи

$$\varepsilon \dot{W} = (D_0(t) - \varepsilon D_1(t))W, \quad W(0, \varepsilon) = I, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (1.2)$$

где I – единичная матрица.

Решением задачи (1.2) назовем непрерывно дифференцируемую функцию

$$W: [0, T] \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathfrak{M}$$

такую, что $\dot{W} \in \mathfrak{M}$ при всех $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, и удовлетворяющую равенствам $W(0, \varepsilon) = I$ при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \dot{W} = (D_0(t) - \varepsilon D_1(t))W$ при всех $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало.

В настоящей работе предложен алгоритм диагонализации матричного пучка $D_0(t) - \varepsilon D_1(t)$, на основе которого ведется построение оператора Коши и его асимптотики. С единой точки зрения изучаются ситуации, когда матрица $D_0(t)$ (ее называют *главной* или *предельной*) имеет при всех $0 \leq t \leq T$

- I) различные собственные значения (простой спектр);
- II) m -кратное собственное значение (кратный спектр).

Алгоритм содержит серию различных типов преобразований подобия: $\Phi(t)$, $I + \varepsilon^\nu Z_*(t, \varepsilon)$, $I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)$, $\Lambda(\varepsilon)$, $\Phi^{(1)}(t)$, $I + \varepsilon^\nu Y(t, \varepsilon)$, $\nu > 0$, вводимых ниже в §§ 2, 6, 8, 10, 11, 14. Среди них:

- a) матрица, столбцами которой служат или собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, или собственный и присоединенные к нему векторы, отвечающие m -кратному собственному значению;
- b) преобразования, близкие к тождественным, которые возмущены малым слагаемым, являющимся матрицей или сплетающей, или однодиагональной, или имеющей нулевую диагональ; каждая из матриц является решением соответствующего уравнения с трансформатором (см. § 4);
- c) преобразование срезания Территина;
- d) матрица Вандермонда или ее обобщение.

С помощью указанных преобразований осуществляется смена базиса, по координатная или блочная диагонализация как в главном члене, так и в младших членах пучка, вводится иерархия среди однодиагональных матриц, выделяется главная часть однодиагональной матрицы, играющая решающую роль в перестройке пучка. Некоторые из этих преобразований иногда могут оказаться неустойчивыми, и тогда их заменяют матрицей I .

В случае простого, или стабильного спектра удается распространить алгоритм диагонализации матричного пучка на часто встречающуюся на практике ситуацию, когда весь пучок состоит из линейного непрерывно обратимого замкнутого симметрического оператора $A(t)$, действующего при каждом $t \in [0, T]$ в сепарабельном гильбертовом пространстве E (см. § 7, п. 7.3).

В случае, когда матрица $D_0(t)$ имеет m -кратное собственное значение $\lambda(t)$, т.е. когда она подобна матрице $J + \lambda(t)I$, где J – жорданова клетка $m \times m$, отвечающая нулевому собственному значению, в настоящей работе приводятся различные достаточные условия диагонализации матричного пучка в форме ограничений на структурную матрицу $\mathfrak{A}(t)$ (см. (2.4)). Для их описания введем неотрицательные целые числа n и m_1 такие, что $m_1 + n = m$, и обозначим

$$s = n - m_1 = 2n - m = m - 2m_1. \quad (1.3)$$

В работе предполагается, что справедливы неравенства $1 \leq s \leq m$, или $0 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, или $(m+1)/2 \leq n \leq m$. Одним из основных этапов алгоритма является перестройка пучка путем присоединения к J однодиагональной матрицы $\mathcal{D}_{1-n}$ с единственным ненулевым при всех $0 \leq t \leq T$ элементом $\gamma_{1-n}(t)$, расположенным в m -й строке и $(m_1 + 1)$ -м столбце. В результате придем (см. п. 11.2) к предельной матрице $\Gamma(t)$ с собственными значениями $q_1(t)$, возмущающими собственное значение $\lambda(t)$. Уравнение $\det(\Gamma(t) - q_1(t)I) \equiv 0$ приводит к разрешающему уравнению

$$q_1^{m_1}(q_1^n + \gamma_{1-n}(t)) \equiv 0. \quad (1.4)$$

Будем говорить о “невыврожденной” структурной матрице, если $m_1 = 0$, и о ее слабом вырождении, когда $m_1 = 1$. В обоих случаях собственные значения матрицы $\Gamma(t)$ попарно различны, однако при $m_1 = 0$ они все ненулевые (случай I)), при $m_1 = 1$ среди собственных значений имеется простой нуль (случай II)). Вместе случаи I) и II) назовем *каноническими*. Ситуацию, когда $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, назовем *случаем сильного вырождения* и подчеркнем, что матрица $\Gamma(t)$ имеет n попарно различных ненулевых собственных значений и одно нулевое m_1 -кратное собственное значение, что приводит к *дефициту* решений в полной системе.

Ранее многими авторами изучался эволюционный вариант этой задачи, ставшей классической, т.е. строилась асимптотика решения задачи (1.1). При этом случай простого спектра исследовался в [1] (в координатной форме), в [2], [3], а также в [4], [5] методом *регуляризации*. Что касается случая кратного спектра, то в [6]–[11] асимптотика решения задачи (1.1) строилась только в канонических случаях, в частности, случай II) исследовался в [9], [10] методом регуляризации, не позволившим отщепить возникающее скалярное ЛДУ. Случай сильного вырождения структурной матрицы в предшествующей литературе не рассматривался, в [9], [10] был лишь анонсирован случай $m_1 = 2$. Для полноты изложения упомянем о других способах расщепления линейных систем, приведенных в [12], [13].

Автором в [14]–[16] строилась асимптотика решения задачи (1.1) при сильном вырождении структурной матрицы, однако без использования преобразования подобия $I + \varepsilon^\nu Z_*(t, \varepsilon)$, $\nu > 0$, из §6, используемого здесь как в случае простого, так и в случае кратного спектра. В [17] велось построение асимптотики решения задачи (1.2) при сильном вырождении структурной матрицы для пучка $D(\varepsilon)$, не зависящего от переменной t .

В §7 приведен алгоритм диагонализации в случае простого спектра, модернизированный за счет возмущения собственных значений и специального формирования элементов диагональных матриц, что позволяет избежать появления ДУ в качестве условий разрешимости уравнений итерационной процедуры. В §15 содержится алгоритм диагонализации матричного пучка в случае кратного спектра при $0 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. В §§16, 17 для канонических случаев получено представление оператора Коши в виде

$$W(t, \varepsilon) = \mathcal{S}(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}) \mathcal{S}^{-1}(0, \varepsilon), \quad (1.5)$$

где $\mathcal{S}(t, \varepsilon)$ – *исчерпывающая суперпозиция* указанных преобразований подобия, скалярные функции $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$ зависят от ε *регулярно*, причем $\tilde{\mu}_i(t, \varepsilon) \neq \tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$, $i \neq j$, при всех $0 \leq t \leq T$ и всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 достаточно мало, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. Формула (1.5) находит применение также в случае *простого* спектра (при этом набор преобразований подобия, составляющих $\mathcal{S}(t, \varepsilon)$, будет иным) и в случае сильного вырождения, поскольку исходное уравнение удастся расщепить на два уравнения в дизъюнктивных подпространствах размерности n , m_1 соответственно. Оператор Коши преобразованного уравнения оказывается представимым в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых действует в своем подпространстве. Одно из них по форме не отличается от (1.5), и именно этим объясняется необходимость обращения к случаю простого спектра. Второе окончательно формируется, когда в соответствующем m_1 -мерном подпространстве имеет место один

из канонических случаев (см. § 18), иначе за первой редукцией задачи должна последовать вторая и т.д. Исследование завершается, когда все возмущения $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$, $1 \leq j \leq m$, становятся попарно различными.

Предложенный в настоящей работе метод построения оператора Коши и его асимптотики применим к различным типам уравнений с малым параметром при производной, с большим параметром в правой части, с медленно меняющимися коэффициентами.

§ 2. Матрица подобия $\Phi(t)$

2.1. Случай простого спектра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что матрица порядка $m \times m$ имеет *простой спектр на отрезке* $[0, T]$, если ее собственные значения при всех $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j; \quad \lambda_i(t) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В [2; гл. 5, § 2, п. 1.3] эти соотношения названы условием отсутствия точек поворота при $t \in [0, T]$.

Пусть матрица $D_0(t)$ порядка $m \times m$ имеет простой спектр на отрезке $[0, T]$. Обозначим через $\varphi_r(t)$ ее собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_r(t)$, $1 \leq r \leq m$, и выберем систему векторов $\{\varphi_r(t)\}$, $1 \leq r \leq m$, в качестве базиса пространства E . Обозначим через $\Phi(t)$ обратимую матрицу, столбцами которой служат координаты векторов $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ в ортонормированном базисе $\{e_r\}$, где e_r — вектор, единственным ненулевым элементом которого является единица, стоящая на r -м месте, $1 \leq r \leq m$. Применение преобразования $\Phi(t)$ позволяет снабдить пространство E базисом $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$, и рассматривать матрицы из $\mathfrak{N}$ при каждом t , $0 \leq t \leq T$, в алгебре $\text{End } E$.

Здесь и ниже через $\text{Hom}(E, F)$ обозначается банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из E в F , а через $\text{End } E$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в пространстве E .

Теперь от матрицы $D_0(t)$, являющейся диагональной в базисе $\{\varphi_r(t)\}$, можно перейти к диагональной матрице $Q(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$ в базисе $\{e_r\}$. Через $\mathfrak{H}(t)$ обозначим матрицу, столбцами которой являются координаты разложенных векторов $\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_m(t)$ в базисе $\{\varphi_r(t)\}$. Тогда

$$\mathfrak{H}(t) = \Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t). \quad (2.1)$$

Поскольку $0 = \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi) = \dot{\Phi}^{-1}\Phi + \mathfrak{H}$, то

$$\mathfrak{H} = -\dot{\Phi}^{-1}\Phi, \quad \dot{\Phi}^{-1} = -\mathfrak{H}\Phi^{-1}. \quad (2.2)$$

Равенства $\varphi_r(t) = \Phi(t)e_r$, $(D_0(t) - \lambda_r(t)I)\varphi_r(t) = 0$, $1 \leq r \leq m$, влекут соотношение

$$\Phi^{-1}(t)D_0(t)\Phi(t) = Q(t). \quad (2.3)$$

В дальнейшем важную роль играет матрица

$$\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{H}(t) + \Phi^{-1}(t)D_1(t)\Phi(t), \quad (2.4)$$

которую, следуя [9], [10], назовем *структурной*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Структурная матрица возникает и при $D_1(t) \equiv 0$.

2.2. Случай кратного спектра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что матрица порядка $m \times m$ имеет m -кратное собственное значение $\lambda(t)$ (кратный спектр) на отрезке $[0, T]$, если при всех $0 \leq t \leq T$ выполнены соотношения

$$(D_0(t) - \lambda(t)I)\varphi_1(t) = 0, \quad (D_0(t) - \lambda(t)I)\varphi_r(t) = \varphi_{r-1}(t), \quad 2 \leq r \leq m,$$

причем $\varphi_m(t) \notin \text{Im}(D_0(t) - \lambda(t)I)$.

Пусть матрица $D_0(t)$ имеет m -кратное собственное значение $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T]$. Систему векторов $\{\varphi_r(t)\}$, $1 \leq r \leq m$, можно выбрать в качестве базиса пространства E . Составим обратимую матрицу $\Phi(t)$, столбцами которой служат координаты векторов $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ в базисе $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$, а также матрицу $\mathfrak{H}(t)$, столбцами которой являются координаты векторов $\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_m(t)$ в базисе $\{\varphi_r(t)\}$, удовлетворяющую равенствам (2.2), (2.4). Кроме того, поскольку $\Phi^{-1}(t)(D_0(t) - \lambda(t)I)\Phi(t) = J$, то здесь удастся от матрицы $D_0(t)$, которая подобна матрице $J + \lambda(t)I$, перейти к J , и, значит,

$$\Phi^{-1}(t)((D(t, \varepsilon) - \lambda(t)I)\Phi(t) - \varepsilon\dot{\Phi}(t)) = J - \varepsilon\mathfrak{A}(t). \quad (2.5)$$

§ 3. Структура пространства $\mathfrak{N}$. Однодиагональные матрицы

3.1. Базис в пространстве $\mathfrak{N}$. В m^2 -мерном пространстве $\mathfrak{N}$ введем базис с помощью m^2 матриц $V_{i-m}^{r, i-1-r}$, $V_{m-i}^{r, i-1-r}$, у которых единственный ненулевой элемент равен 1 и расположен в $(m - i + r + 1)$ -й строке, $(r + 1)$ -м столбце или в $(r + 1)$ -й строке, $(m - i + r + 1)$ -м столбце соответственно, $0 \leq r \leq i - 1$, $1 \leq i \leq m$. Единица расположена на линии, параллельной диагонали и состоящей из i элементов, причем на этой линии выше единицы находятся r нулей, а ниже $i - 1 - r$ нулей (об этом свидетельствуют верхние индексы). В первой группе матриц указанная линия лежит не выше диагонали, во второй — не ниже ее.

Непосредственной проверкой устанавливается, что при умножении базисных элементов нижний индекс произведения равен сумме нижних индексов сомножителей, т.е. имеет место *логарифмический закон*. Этот закон справедлив также и для их коммутатора. Здесь и далее коммутатор матриц F, G , равный $FG - GF$, обозначается через $[F, G]$.

3.2. Однодиагональные матрицы. Обозначим элемент матрицы $X(t)$ из $\mathfrak{N}$, стоящий в r -й строке, l -м столбце, через $x_{r,l}(t)$ и представим $X(t)$ в виде суммы *однодиагональных матриц* $X_i(t)$, $1 - m \leq i \leq m - 1$. Элементами $X_i(t)$ являются $x_{r,l}(t)$, для которых $l - r = i$. При $1 - m \leq i \leq 0$ — это $x_{1-i,1}(t), \dots, x_{m, m+i}(t)$, при $0 \leq i \leq m - 1$ — это $x_{1, i+1}(t), \dots, x_{m-i, m}(t)$. Ненулевые элементы матрицы $X_i(t)$ занимают линию, параллельную диагонали с номером, отсчитываемым снизу вверх от $1 - m$ до $m - 1$. С помощью базисных элементов в $\mathfrak{N}$ находим, что

$$X_i(t) = \sum_{r=1}^{m+i} x_{r-i, r}(t) V_i^{r-1, m+i-r}, \quad 1 - m \leq i \leq 0, \quad (3.1)$$

$$X_i(t) = \sum_{r=1}^{m-i} x_{r, i+r}(t) V_i^{r-1, m-i-r}, \quad 0 \leq i \leq m - 1. \quad (3.2)$$

Теперь действия с однодиагональными матрицами $X_i(t)$ сводятся к действиям с базисными элементами. Используя логарифмический закон, заключаем, что нижний индекс произведения двух однодиагональных матриц или их коммутатора равен сумме нижних индексов сомножителей, причем суммарный нижний индекс ненулевой матрицы принимает значения от $1 - m$ до $m - 1$.

Условимся обозначать сумму элементов однодиагональной матрицы $X_i(t)$ через $\gamma_i^X(t)$ при всех $1 - m \leq i \leq m - 1$.

3.3. Прямые разложения пространства $\mathfrak{N}$. Следуя схеме из [18], используя идеи статьи [19], введем в $\mathfrak{N}$ при каждом t , $0 \leq t \leq T$, скалярное произведение

$$(A(t), B(t)) = \text{Tr}(B^T(t)A(t)),$$

где знак “ T ” означает транспонирование. Норму в $\mathfrak{N}$ при каждом t , $0 \leq t \leq T$, зададим формулой

$$\|A(t)\| = \sqrt{\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^m a_{j,r}^2(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Всюду в дальнейшем будем использовать обозначение $A(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)$, если матрица $A(\varepsilon)$ из алгебры $\text{End } E$ подчиняется оценке $\|A(\varepsilon)\| \leq M\varepsilon^\alpha$ для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где число M не зависит от ε и ε_0 достаточно мало.

Введем в $\mathfrak{N}$ три подпространства N , N' , M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Матрица $B(t) \in N'$, если ее ненулевые элементы занимают линии, параллельные диагонали с номерами от $1 - m$ до 0 , причем на каждой линии элементы одинаковы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Матрица $C(t) \in N$, если ее ненулевые элементы занимают линии, параллельные диагонали с номерами от 0 до $m - 1$, причем на каждой линии элементы одинаковы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Матрица $\Pi(t) \in M$, если ее ненулевые элементы занимают только m -ю строку.

Отметим, что матрицы из N , N' , M содержат m параметров.

Далее, введем еще два подпространства F , $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Матрица $\Gamma(t) \in F$, если $(\Gamma(t), B(t)) = 0$ для любой матрицы $B(t) \in N'$ и всех $0 \leq t \leq T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Матрица $U(t) \in \mathcal{U}$, если $(U(t), C(t)) = 0$ для любой матрицы $C(t) \in N$ и всех $0 \leq t \leq T$.

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 3.1. Матрица $\Gamma(t) \in F \iff \gamma_i^\Gamma(t) \equiv 0, \quad 1 - m \leq i \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T$.

ЛЕММА 3.2. Матрица $U(t) \in \mathcal{U} \iff \gamma_i^U(t) \equiv 0, \quad 0 \leq i \leq m - 1, \quad 0 \leq t \leq T$.

Утверждения лемм 3.1, 3.2 проверяются непосредственно с учетом определения скалярного произведения в $\mathfrak{N}$. С помощью этих лемм устанавливается, что имеют место прямые разложения вида

$$\mathfrak{N} = N' \oplus F, \quad \mathfrak{N} = N \oplus \mathcal{U}, \quad \mathfrak{N} = M \oplus F.$$

Обозначим через J жорданову клетку $m \times m$, отвечающую нулевому собственному значению, а через J' сопряженную к J матрицу.

ЛЕММА 3.3. *С матрицами J, J' коммутируют матрицы из N, N' соответственно и только они.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В [20] фигурирует разложение $\mathfrak{N} = M \oplus F$ пространства $\mathfrak{N}$ в прямую сумму подпространств, одно из которых (F) характеризует интегрируемую (в определенном смысле) часть некоторого оператора, имеющего на другом подпространстве (M) ограниченную высоту.

§ 4. Уравнения с трансформатором

4.1. Уравнения $T_{Q, J_1} X = Y, \quad T_{J_1, Q} X = Y$. Пусть даны матрицы $L(t), M(t), Y(t)$ такие, что $L(t) \in \text{End } \mathbb{R}^l, \quad M(t) \in \text{End } \mathbb{R}^k, \quad Y \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ при каждом $0 \leq t \leq T$.

Как и в [21; гл. I, § 3, п. 1], введем в пространстве $\text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ линейные операторы $L_l(t)$ и $M_r(t)$, порождаемые умножением оператора $X(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ на оператор $L(t)$ слева и оператор $M(t)$ справа:

$$L_l(t)X(t) = L(t)X(t), \quad M_r(t)X(t) = X(t)M(t), \quad X(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l).$$

Следуя [21], назовем оператор

$$T_{L, M}(t) = L_l(t) - M_r(t), \quad T_{L, M}(t)X(t) = L(t)X(t) - X(t)M(t),$$

действующий при каждом $t \in [0, T]$ в $\text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$, *трансформатором Ляпунова*. Известно, что условия разрешимости и формула решения уравнения

$$T_{L, M}(t)X(t) = Y(t)$$

существенно зависят от взаимного расположения спектров матриц $L(t), M(t)$. Если их спектры не пересекаются, то трансформатор $T_{L, M}(t)$ обратим, т.е. уравнение

$$L(t)X(t) - X(t)M(t) = Y(t)$$

имеет единственное решение $X(t)$ при любом $Y(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$.

Пусть J_1 — жорданова клетка $m_1 \times m_1$, отвечающая нулевому собственному значению, и $Q(t) = \text{diag}(q_1(t), \dots, q_n(t))$ — матрица с ненулевыми попарно различными собственными значениями при всех $0 \leq t \leq T$. Поскольку матрица $Q(t)$ обратима при всех $0 \leq t \leq T$, а J_1 нильпотентна с индексом m_1 , т.е. $J_1^{m_1} = 0$, то

равенство $QX - XJ_1 = Y$ можно представить в форме $X = Q^{-1}(Y + XJ_1)$. После m_1 -кратного применения последнего равенства приходим к соотношению

$$\begin{aligned} X &= Q^{-1}(Y + XJ_1) = Q^{-1}Y + Q^{-1}(Q^{-1}(Y + XJ_1))J_1 = \dots \\ &= Q^{-1}Y + (Q^{-1})^2YJ_1 + (Q^{-1})^3YJ_1^2 + \dots + (Q^{-1})^{m_1}YJ_1^{m_1-1}, \end{aligned}$$

дающему формулу обратного оператора к трансформатору $T_{Q(t), J_1}$:

$$T_{Q(t), J_1}^{-1}Y(t) = \sum_{i=0}^{m_1-1} (Q^{-1}(t))^{i+1}Y(t)J_1^i. \quad (4.1)$$

По аналогии запишем равенство $J_1X - XQ = Y$ в форме $X = (-Y + J_1X)Q^{-1}$ и используем его m_1 раз, получим, что

$$X = -YQ^{-1} - J_1Y(Q^{-1})^2 - J_1^2Y(Q^{-1})^3 - \dots - J_1^{m_1-1}Y(Q^{-1})^{m_1}.$$

Отсюда вытекает формула обратного оператора к трансформатору $T_{J_1, Q(t)}$:

$$T_{J_1, Q(t)}^{-1}Y(t) = - \sum_{i=0}^{m_1-1} J_1^iY(t)(Q^{-1}(t))^{i+1}. \quad (4.2)$$

Равенства (4.1), (4.2) влекут следующие утверждения.

ЛЕММА 4.1. *Уравнение $T_{Q(t), J_1}X = Q(t)X - XJ_1 = Y(t)$ разрешимо для любой матрицы $Y(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^n)$. Элементы $x_{r,j}(t)$ матрицы $X(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^n)$ находятся единственным образом и характеризуются равенствами*

$$x_{j,r}(t) = \sum_{i=1}^r q_j^{r-1-i}(t)y_{j,i}(t), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq r \leq m_1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

ЛЕММА 4.2. *Уравнение $T_{J_1, Q(t)}X = J_1X - XQ(t) = Y(t)$ разрешимо для любой матрицы $Y(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m_1})$. Элементы $x_{r,j}(t)$ матрицы $X(t) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m_1})$ находятся единственным образом и характеризуются равенствами*

$$x_{r,j}(t) = - \sum_{i=r}^{m_1} q_j^{r-1-i}(t)y_{i,j}(t), \quad 1 \leq r \leq m_1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

4.2. Уравнение с трансформатором K_0 . Введем трансформатор $K_0(t) = T_{Q(t), Q(t)} = [Q(t), \cdot]$, действующий при каждом $0 \leq t \leq T$ в $\text{End } \mathbb{R}^n$, где $Q(t) = \text{diag}(q_1(t), \dots, q_n(t))$ — матрица с ненулевыми попарно различными собственными значениями при всех $0 \leq t \leq T$. Так как $\text{Ker } K_0(t)$ — это множество всех диагональных матриц, то уравнение $Q(t)X - XQ(t) = Y(t)$ не является разрешимым для любой матрицы $Y(t) \in \text{End } \mathbb{R}^n$. Проверяется, что $\text{Im } K_0(t)$ состоит из всевозможных матриц с нулевой диагональю.

Пусть $A(t) = (a_{k,l}(t))$, $k, l = 1, 2, \dots, m$, — произвольная матрица из $\mathfrak{M}$. Здесь и в дальнейшем будем обозначать

$$A_0(t) = \text{diag}(a_{1,1}(t), \dots, a_{m,m}(t)), \quad A_*(t) = A(t) - A_0(t). \quad (4.3)$$

В соответствии с представлением $A(t) = A_0(t) + A_*(t)$ имеем разбиение единицы $I = I_0 + I_*$, где $A_0(t) = I_0 A(t)$, $A_*(t) = I_* A(t)$. Очевидно, что $I_0^2 = I_0$, т.е. I_0, I_* — проекторы.

ЛЕММА 4.3. Уравнение $K_0(t)X(t) = Y(t)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} I_0 Y(t) \equiv 0; \\ X(t) = I_0 X(t) + \widehat{K}_0^{-1}(t) I_* Y(t), \end{cases}$$

где $\widehat{K}_0(t) = K_0(t) \upharpoonright \text{Im } K_0(t)$.

Проверяется, что если $Y(t) = (y_{ij}(t))$, то $\widehat{K}_0^{-1}(t) I_* Y(t) = (y_{ij}(t)/(q_i(t) - q_j(t)))$, $i \neq j$.

ЛЕММА 4.4. Уравнение $Q(t)X - XQ(t) = Y(t)$ разрешимо точно тогда, когда $y_{i,i}(t) \equiv 0$, $1 \leq i \leq n$. При выполнении этих условий существует единственная матрица $X(t) = X_*(t)$, элементы $x_{r,j}(t)$ которой характеризуются равенствами

$$\begin{aligned} x_{r,r}(t) &\equiv 0, & x_{r,j}(t) &= \frac{y_{r,j}(t)}{q_r(t) - q_j(t)}, & r &\neq j, \\ 1 \leq r \leq n, & & 1 \leq j \leq n, & & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3. Уравнение с трансформатором K_1 . Введем трансформатор $K_1 = T_{J,J} = [J, \cdot]$, действующий в $\mathfrak{M}$. Из леммы 3.3 вытекает, что $K_1 C(t) = 0$ для любой матрицы $C(t) \in N$, следовательно, $\text{Ker } K_1 = N$. Покажем, что

$$\text{Im } K_1 = F.$$

Возьмем произвольную матрицу $\Gamma(t) \in F$ и построим $U(t) \in \mathcal{U}$ такую, что $K_1 U(t) = \Gamma(t)$. Непосредственным образом проверяется, что если $\gamma_i^\Gamma(t) \equiv 0$, $1 - m \leq i \leq 0$, то элементы матрицы $U(t)$ с $\gamma_i^U(t) \equiv 0$, $0 \leq i \leq m - 1$, находятся единственным образом. Итак, справедливы разложения пространства $\mathfrak{M}$ в прямые суммы вида

$$\mathfrak{M} = \text{Ker } K_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{U}, \quad \mathfrak{M} = N' \overset{\perp}{\oplus} \text{Im } K_1, \quad \mathfrak{M} = M \oplus \text{Im } K_1,$$

причем оба подпространства N', M претендуют на роль подпространства $\text{Coker } K_1$. Из двух разложений, содержащих $\text{Im } K_1$, для наших целей предпочтительнее последнее, поскольку в матрицах из M имеется не только наименее возможное число независимых параметров, но и наименьшее число ненулевых элементов, расположенных в последней m -й строке. Таким образом, ниже будут использоваться прямые разложения

$$\mathfrak{M} = \text{Ker } K_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{U}, \quad \mathfrak{M} = M \oplus \text{Im } K_1 \quad (M = \text{Coker } K_1) \quad (4.5)$$

и соответствующие разбиения единиц

$$I = (I - Q) + Q, \quad I = (I - P) + P. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.5. Уравнение $K_1 X(t) = Y(t)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} (I - P)Y(t) = 0; \\ X(t) = (I - Q)X(t) + \hat{K}_1^{-1}PY(t), \end{cases}$$

где $\hat{K}_1 = K_1 \upharpoonright \mathcal{U}$.

Выясним, как действует проектор $I - P$ из $\mathfrak{N}$ на M . С этой целью возьмем произвольную матрицу $Y(t)$ из $\mathfrak{N}$ и представим ее в виде

$$Y(t) = \Pi(t) + F(t), \quad \Pi(t) \in M, \quad F(t) \in \text{Im } K_1.$$

Так как $(I - P)Y(t) = \Pi(t) = Y(t) - F(t)$, а элементы $F(t)$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_i^F(t) \equiv 0$, $1 - m \leq i \leq 0$, то, отнимая и добавляя $\gamma_i^Y(t)$ в m -й строке i -й линии, $1 - m \leq i \leq 0$, приходим к выводу: $(I - P)Y(t)$ — матрица $m \times m$, ненулевые элементы которой занимают m -ю строку и равны $\gamma_{1-m}^Y(t), \gamma_{2-m}^Y(t), \dots, \gamma_{-1}^Y(t), \gamma_0^Y(t)$.

Теперь можно переформулировать лемму 4.5 следующим образом.

ЛЕММА 4.6. Уравнение $K_1 X(t) = Y(t)$ разрешимо точно тогда, когда $\gamma_i^Y(t) \equiv 0$, $1 - m \leq i \leq 0$. При выполнении этих условий существует единственное решение $\hat{X}(t)$ из $\mathcal{U}$, обладающее свойством $\gamma_i^{\hat{X}}(t) \equiv 0$, $0 \leq i \leq m - 1$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $Y(t) = U_{1-n}^{(0)}(t)$, $2 \leq n \leq m - 1$, причем $\gamma_{1-n}^{(0)}(t) \equiv 0$, где $\gamma_{1-n}^{(0)}(t)$ — сумма элементов матрицы $U_{1-n}^{(0)}(t)$. Так как условие разрешимости из леммы 4.6 выполнено, то, обозначив элементы матрицы $U_{1-n}^{(0)}(t)$ через $\sigma_{r+n-1,r}^{(0)}(t)$, $1 \leq r \leq m_1 + 1$, и заметив, что

$$\sigma_{m,m_1+1}^{(0)}(t) \equiv - \sum_{r=1}^{m_1} \sigma_{n-1+r,r}^{(0)}(t),$$

найдем решение $\hat{X}(t)$ из $\mathcal{U}$. Проверяется, что $\hat{X}(t) = \Omega_{-n}(t) = (\omega_{n+r,r}(t))$, где

$$\omega_{n+r,r}(t) = \sum_{l=1}^r \sigma_{n-1+l,l}^{(0)}(t), \quad 1 \leq r \leq m_1. \quad (4.7)$$

§ 5. Операторы Коши некоторых вспомогательных уравнений в случае простого спектра предельной матрицы

5.1. Дифференциальные уравнения с диагональным пучком. Введем диагональные матрицы

$$Q(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)), \quad (5.1)$$

$$Q_r(t) = \text{diag}(q_{r,1}(t), \dots, q_{r,m}(t)), \quad r \in \mathbb{N}, \quad F(t, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^{r-1} Q_r(t). \quad (5.2)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5.1. Матрица $Q(t)$ имеет простой спектр на $[0, T]$.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \dot{W} = (Q(t) - \varepsilon F(t, \varepsilon))W, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнено предположение 5.1. Тогда решением уравнения (5.3) с диагональным матричным пучком

$$Q(t) - \varepsilon Q_1(t) - \varepsilon^2 Q_2(t) - \varepsilon^3 \dots$$

является матричная функция вида

$$W(t, \varepsilon) = \text{diag}(e^{\mu_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\mu_m(t, \varepsilon)})C(\varepsilon), \quad (5.4)$$

где матрица $C(\varepsilon)$ произвольна и

$$\mu_i(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) - \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q_{r,i}(\tau) \right) d\tau, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если выполнено предположение 5.1 и в уравнении (5.3) диагональные матрицы $Q(t)$, $Q_r(t)$, $r \in \mathbb{N}$, постоянные, то скалярные функции $\mu_i(t, \varepsilon)$ определяются равенствами

$$\mu_i(t, \varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon} \left(\lambda_i - \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q_{r,i} \right), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.6)$$

Рассмотрим задачу Коши $W(0, \varepsilon) = I$ для уравнения (5.3), тогда ее решение является оператором Коши. Справедлива

ЛЕММА 5.2. Если выполнено предположение 5.1, то оператор Коши уравнения (5.3) имеет вид

$$W_0(t, \varepsilon) = \text{diag}(e^{\mu_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\mu_m(t, \varepsilon)}), \quad (5.7)$$

где скалярные функции $\mu_i(t, \varepsilon)$ определяются соотношениями (5.5).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если выполнено предположение 5.1, то оператором Коши укороченного уравнения

$$\varepsilon \dot{W} = (Q(t) - \varepsilon Q_1(t))W$$

является матричная функция (5.7) со скалярными функциями $\mu_i(t, \varepsilon)$ вида (5.5) при $q_{r,i}(\tau) \equiv 0$, $r \geq 2$, $1 \leq i \leq m$.

Рассмотрим задачу Коши $\mathcal{W}(0, \varepsilon) = I$ для уравнения

$$\varepsilon \dot{\mathcal{W}} = -\mathcal{W}(Q(t) - \varepsilon F(t, \varepsilon)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.8)$$

союзного по отношению к (5.3).

ЛЕММА 5.3. Если выполнено предположение 5.1, то оператор Коши уравнения (5.8) имеет вид

$$\mathcal{W}_0(t, \varepsilon) = \text{diag}(e^{-\mu_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{-\mu_m(t, \varepsilon)}), \quad (5.9)$$

где скалярные функции $\mu_i(t, \varepsilon)$ определяются соотношениями (5.5).

5.2. Дифференциальное уравнение с линейным пучком. Пусть выполнено предположение 5.1. Обратимся к уравнению

$$\varepsilon \dot{W} = (Q(t) - \varepsilon \mathfrak{A}(t))W, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.10)$$

с матрицей $Q(t)$ из (5.1), произвольной матрицей $\mathfrak{A}(t)$ и построим оператор Коши для него. Представим $\mathfrak{A}(t) = (\sigma_{i,j}(t))$ по формуле (4.3) в виде суммы ее диагонали $Q_1(t) = \mathfrak{A}_0(t)$ и матрицы $\mathfrak{A}_*(t)$ с нулевой диагональю. Запишем уравнение (5.10) в форме

$$\varepsilon \dot{W} = (Q(t) - \varepsilon Q_1(t))W - \varepsilon \mathfrak{A}_*(t)W, \quad 0 \leq t \leq T,$$

и воспользуемся методом вариации. Тогда решение уравнения (5.10) согласно следствию 5.2 представимо в виде

$$W(t, \varepsilon) = W_0(t, \varepsilon)C(t, \varepsilon), \quad (5.11)$$

где

$$\mu_i(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda_i(\tau) - \varepsilon \sigma_{i,i}(\tau)) d\tau, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (5.12)$$

и матричная функция $C(t, \varepsilon)$ с условием $C(0, \varepsilon) = I$ подлежит определению. Подставляя (5.10) в (5.11) и замечая, что диагональные матрицы $Q(t) - \varepsilon \mathfrak{A}_0(t)$ и $W_0(t, \varepsilon)$ коммутируют, получаем задачу Коши

$$\dot{C} = -W_0^{-1}(t, \varepsilon) \mathfrak{A}_*(t) W_0(t, \varepsilon) C(t, \varepsilon), \quad C(0, \varepsilon) = I. \quad (5.13)$$

Представим решение задачи (5.13) в виде

$$C(t, \varepsilon) = I - \int_0^t W_0^{-1}(\tau, \varepsilon) \mathfrak{A}_*(\tau) W_0(\tau, \varepsilon) C(\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (5.14)$$

Подставив (5.14) в (5.11), находим, что оператор Коши $W(t, \varepsilon)$ уравнения (5.10) является решением интегрального уравнения

$$W(t, \varepsilon) = W_0(t, \varepsilon) - \int_0^t W_0(t - \tau, \varepsilon) \mathfrak{A}_*(\tau) W(\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (5.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Матрица $Q(t)$ называется *устойчивой на отрезке* $[0, T]$, если при всех $0 \leq t \leq T$ выполняется неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq m} \text{Re } \lambda_i(t) \leq -\alpha < 0. \quad (5.16)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5.2. Матрица $Q(t)$ является устойчивой на $[0, T]$.

Далее устанавливается, что при выполненных предположениях 5.1, 5.2 уравнение (5.15) имеет единственное ограниченное решение $W(t, \varepsilon)$ при всех $0 \leq t \leq T$, причем

$$\|W(t, \varepsilon)\| \leq N_0 e^{-(\alpha/\varepsilon_0)t} + k\varepsilon_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.17)$$

где положительные постоянные N_0, k не зависят от ε .

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть для матрицы $Q(t)$ выполнены предположения 5.1, 5.2. Тогда оператор Коши $W(t, \varepsilon)$ уравнения (5.10) существует на всем отрезке $[0, T]$, удовлетворяет интегральному уравнению (5.15) и подчиняется оценке (5.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Предположение 5.1 в теореме 5.1 является основным. В то же время, не ограничивая общности, можно всегда считать выполненным предположение 5.2.

5.3. Дифференциальное уравнение с трансформатором. Пусть для матрицы $Q(t)$ выполнены предположения 5.1, 5.2. Рассмотрим уравнение Риккати

$$\varepsilon \dot{W} = (Q(t) - \varepsilon \mathfrak{A}(t))W - W(Q(t) - \varepsilon F(t, \varepsilon)) = (K_0(t) - \varepsilon T_{\mathfrak{A}(t), F(t, \varepsilon)})W. \quad (5.18)$$

Как и в [21; гл. III, § 1, п. 6], можно показать, что оператором Коши для него служит *трансформатор*

$$\mathcal{U}(t, \varepsilon)W = \mathcal{U}_I(t, \varepsilon)W\mathcal{U}_{II}(t, \varepsilon), \quad \mathcal{U}(0, \varepsilon)W = W, \quad (5.19)$$

где $\mathcal{U}_I(t, \varepsilon)$ — оператор Коши уравнения (5.10), о котором шла речь в теореме 5.1, а $\mathcal{U}_{II}(t, \varepsilon)$ — оператор Коши вида (5.9) уравнения (5.8).

В самом деле, продифференцируем (5.19) по t и умножим на ε , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\mathcal{U}}{dt} W &= \varepsilon \frac{d\mathcal{U}_I}{dt} W \mathcal{U}_{II} + \mathcal{U}_I W \varepsilon \frac{d\mathcal{U}_{II}}{dt} \\ &= (Q - \varepsilon \mathfrak{A})\mathcal{U}_I(t, \varepsilon)W\mathcal{U}_{II}(t, \varepsilon) - \mathcal{U}_I(t, \varepsilon)W\mathcal{U}_{II}(t, \varepsilon)(Q - \varepsilon F) \\ &= (Q - \varepsilon \mathfrak{A})\mathcal{U}(t, \varepsilon)W - \mathcal{U}(t, \varepsilon)W(Q - \varepsilon F). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что любое решение неоднородного уравнения

$$\varepsilon \dot{W} = (K_0(t) - \varepsilon T_{\mathfrak{A}(t), F(t, \varepsilon)})W + \varepsilon \mathcal{R}(t, \varepsilon) \quad (5.20)$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(t, \varepsilon) &= \mathcal{U}(t, \varepsilon)W(0, \varepsilon) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s, \varepsilon)\mathcal{R}(s, \varepsilon)ds \\ &= \mathcal{U}_I(t, \varepsilon)W(0, \varepsilon)\mathcal{U}_{II}(t, \varepsilon) + \int_0^t \mathcal{U}_I(t-s, \varepsilon)\mathcal{R}(s, \varepsilon)\mathcal{U}_{II}(t-s, \varepsilon)ds. \end{aligned} \quad (5.21)$$

§ 6. Матрица подобия $I + \xi Z(t, \xi)$

Пусть матрица $Q(t) = \text{diag}(q_1(t), \dots, q_m(t))$, имеющая простой спектр на отрезке $[0, T]$, возмущена некоторым малым слагаемым, являющимся полной матрицей. В соответствии с п. 4.2 возьмем матрицу $Z(t, \xi) = Z_*(t, \xi)$ с нулевой диагональю и рассмотрим преобразование подобия $I + \xi Z(t, \xi)$, в котором ξ – малый параметр.

6.1. Преобразование линейного пучка. В § 7 речь пойдет о диагонализации с помощью матрицы $I + \xi Z(t, \xi)$ линейного матричного пучка $Q(t) - \xi \mathfrak{A}(t)$ при $q_j(t) = \lambda_j(t)$, $1 \leq j \leq m$, $\xi = \varepsilon$. Для корректности этой процедуры потребуем, чтобы при всех $0 \leq t \leq T$ выполнялось равенство

$$(I + \xi Z)^{-1}((Q - \xi \mathfrak{A})(I + \xi Z) - \xi^2 \dot{Z}) = Q - \xi \mathcal{G}, \quad (6.1)$$

где $Q(t) - \xi \mathcal{G}(t, \xi)$ – некоторая диагональная матрица. Равенство (6.1) выполнено, если существует единственное ограниченное решение дифференциального уравнения

$$\xi \dot{Z} = (K_0(t) - \xi T_{\mathfrak{A}(t), \mathcal{G}(t, \xi)})Z - \mathfrak{A}(t) + \mathcal{G}(t, \xi) \quad (6.2)$$

относительно $Z(t, \xi) = Z_*(t, \xi)$ при всех $0 \leq t \leq T$ и всех достаточно малых ξ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если матрица $\mathfrak{A}(t)$ оказывается диагональной в базисе $\{e_r\}$, то считаем $Z_*(t, \xi) \equiv 0$.

Примем $\xi = 0$ в (6.2), получим матричное уравнение

$$K_0(t)Z_*(t, 0) = \mathfrak{A}(t) - \mathcal{G}(t, 0), \quad (6.2')$$

из которого согласно лемме 4.3 находим

$$Q_1(t) = \mathcal{G}(t, 0) = \mathfrak{A}_0(t), \quad Z_*^{(1)}(t) = Z_*(t, 0) = \hat{K}_0^{-1}(t)\mathfrak{A}_*(t). \quad (6.3)$$

Следовательно, в неизвестной пока матрице $\mathcal{G}(t, \xi)$ можно взять $Q_1(t) = \mathfrak{A}_0(t) = \text{diag}(\sigma_{1,1}(t), \dots, \sigma_{m,m}(t))$. Положим

$$\mathcal{G}(t, \xi) = \mathfrak{A}_0(t) + \mathcal{G}_0(t, \xi), \quad Z_*(t, \xi) = Z_*^{(1)}(t) + \Psi(t, \xi), \quad (6.4)$$

заметим, что $\mathcal{G}_0(t, 0) \equiv 0$, $\Psi(t, 0) \equiv 0$, и подставим (6.4) в (6.1). После преобразований от (6.1) перейдем к уравнению

$$\varepsilon \dot{\Psi} = (K_0(t) - \varepsilon T_{\mathfrak{A}(t), \mathcal{G}(t, \varepsilon)})\Psi - \varepsilon(\dot{Z}_*^{(1)} + T_{\mathfrak{A}(t), \mathcal{G}(t, \varepsilon)}Z_*^{(1)}) + \mathcal{G}_0(t, \varepsilon) \quad (6.5)$$

с $\mathcal{G}_0(t, 0) \equiv 0$. Если выполнено дополнительное предположение об устойчивости матрицы $Q(t)$ на $[0, T]$, то оператор Коши соответствующего однородного уравнения построен в п. 5.3. Тогда решение уравнения (6.5) существует на $[0, T]$, единственно и представимо по формуле (5.21). Значит, на $[0, T]$ существует единственное ограниченное решение дифференциального уравнения (6.2). Имеет место

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть матрица $Q(t)$ удовлетворяет предположениям 5.1, 5.2. Тогда существует единственное ограниченное на $[0, T]$ решение уравнения (6.1) при некоторой диагональной матрице $\mathcal{G}(t, \xi)$.

6.2. Преобразование полиномиального пучка. В § 16 (см. п. 16.1) предстоит от уравнения

$$\xi^{n-1}\dot{\Psi} = (Q(t) - \xi G(t, \xi))\Psi = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i G^{(i)}(t) \right) \Psi, \quad \xi = \varepsilon^{1/n}, \quad (6.6)$$

с полными матрицами $G^{(i)}(t)$ перейти к уравнению $\xi^{n-1}\dot{W} = (Q(t) - \xi \mathcal{G}(t, \xi))W$ с диагональным пучком. Отметим, что оператор Коши уравнения (6.6) строится по схеме п. 5.2, и потребуем, чтобы при всех $0 \leq t \leq T$ выполнялось равенство

$$(I + \xi Z)^{-1}((Q - \xi G)(I + \xi Z) - \xi^n \dot{Z}) = Q - \xi \mathcal{G}, \quad (6.7)$$

где $\mathcal{G}(t, \xi)$ — некоторая диагональная матрица. В свою очередь, равенство (6.7) будет выполняться, если существует единственное ограниченное решение дифференциального уравнения

$$\xi^{n-1}\dot{Z} = (K_0(t) - \xi T_{G(t, \xi), \mathcal{G}(t, \xi)})Z - G(t, \xi) + \mathcal{G}(t, \xi) \quad (6.8)$$

относительно $Z(t, \xi) = Z_*(t, \xi)$ при всех $0 \leq t \leq T$ и всех достаточно малых ξ .

Действуя далее, как в п. 6.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть матрица $Q(t)$ удовлетворяет предположениям 5.1, 5.2. Тогда существует единственное ограниченное на $[0, T]$ решение уравнения (6.7) при некоторой диагональной матрице $\mathcal{G}(t, \xi)$.

§ 7. Об операторе Коши уравнения с малым параметром при производной. Случай простого спектра

7.1. Уравнение в конечномерном пространстве. Обратимся к задаче Коши

$$\varepsilon \dot{W} = (D_0(t) - \varepsilon D_1(t))W, \quad 0 \leq t \leq T, \quad W(0, \varepsilon) = I, \quad (7.1)$$

с матрицей $D_0(t)$, имеющей простой спектр. Уравнение (7.1) служит непосредственным обобщением уравнения (5.10).

Как в п. 2.1, введем обратимую матрицу $\Phi(t)$, а также матрицу $\mathfrak{H}(t)$. Спектры подобных матриц $D_0(t)$ и $Q(t)$ совпадают и

$$Q(t) = \Phi^{-1}(t)D_0(t)\Phi(t), \quad \mathfrak{H}(t) = \Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t). \quad (7.2)$$

Будем искать решение задачи (7.1) в форме

$$W(t, \varepsilon) = \mathfrak{S}(t, \varepsilon)W_0(t, \varepsilon)\mathfrak{S}^{-1}(0, \varepsilon), \quad W_0(0, \varepsilon) = I, \quad (7.3)$$

где $W_0(t, \varepsilon)$ — оператор Коши уравнения (5.3), а оператор-функция $\mathfrak{S}(t, \varepsilon)$ подлежит определению в дальнейшем. Подставив (7.3) в (7.1), приходим к равенству

$$\varepsilon \dot{W}_0 = \mathfrak{S}^{-1}(t, \varepsilon)((D_0(t) - \varepsilon D_1(t))\mathfrak{S}(t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{\mathfrak{S}}(t, \varepsilon))W_0. \quad (7.4)$$

На *первом шаге* алгоритма полагаем $\mathfrak{S}(t, \varepsilon) = \Phi(t)\mathfrak{S}_1(t, \varepsilon)$. Тогда

$$\Phi^{-1}(t)\varepsilon\dot{\mathfrak{S}}(t, \varepsilon) = \varepsilon\mathfrak{H}(t)\mathfrak{S}_1(t, \varepsilon) + \varepsilon\dot{\mathfrak{S}}_1(t, \varepsilon),$$

откуда в согласии с (2.4) получаем

$$\varepsilon\dot{W}_0 = \mathfrak{S}_1^{-1}(t, \varepsilon)((Q(t) - \varepsilon\mathfrak{A}(t))\mathfrak{S}_1(t, \varepsilon) - \varepsilon\dot{\mathfrak{S}}_1(t, \varepsilon))W_0. \quad (7.5)$$

Матрица $D_0(t)$ является диагональной в базисе $\{\varphi_r\}$. Привлечение матрицы $\Phi(t)$ дало возможность диагонализировать матрицу $D_0(t)$ в базисе $\{e_r\}$, получив вместо нее $Q(t)$.

На *втором шаге* алгоритма примем $\mathfrak{S}_1(t, \varepsilon) = I + \varepsilon Z_*(t, \varepsilon)$, где $Z_*(t, \varepsilon)$ — матрица с нулевой диагональю (см. п. 4.3). Поскольку $\varepsilon\dot{\mathfrak{S}}_1(t, \varepsilon) = \varepsilon^2\dot{Z}_*(t, \varepsilon)$, то (7.5) записывается в форме

$$\varepsilon\dot{W}_0 = (I + \varepsilon Z_*)^{-1}((Q - \varepsilon\mathfrak{A})(I + \varepsilon Z_*) - \varepsilon^2\dot{Z}_*)W_0. \quad (7.6)$$

Чтобы с помощью матрицы $I + \varepsilon Z_*(t, \varepsilon)$ диагонализировать в базисе $\{e_r\}$ младшие члены матричного пучка, потребуем выполнения равенства (6.1) с $\xi = \varepsilon$, $\mathcal{G} \equiv F$ при всех $0 \leq t \leq T$ и всех достаточно малых ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Тогда уравнение (7.6) примет вид рассмотренной выше задачи (5.3). Это произойдет, если существует единственное ограниченное решение дифференциального уравнения (6.2). Таким образом, мы оказались в условиях п. 6.1, согласно которому справедлива

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть матрица $D_0(t)$ удовлетворяет предположениям 5.1, 5.2. Тогда решением задачи (7.1) является матричный пучок (7.3), в котором

$$\mathfrak{S}(t, \varepsilon) = \Phi(t)(I + \varepsilon Z_*(t, \varepsilon)), \quad (7.7)$$

а матрица $W_0(t, \varepsilon)$ определяется из следствия 5.2.

В частном случае, когда в (7.1) матрица $D_0(t)$ является диагональной в базисе $\{e_r\}$, т.е. когда $D_0(t) = Q(t)$, вместо матрицы $\Phi(t)$ следует взять тождественное преобразование I и положить $\mathfrak{A}(t) = D_1(t)$. Тогда

$$W(t, \varepsilon) = (I + \varepsilon Z_*(t, \varepsilon))W_0(t, \varepsilon)(I + \varepsilon Z_*(0, \varepsilon))^{-1}. \quad (7.8)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Если матрица $D_0(t)$ имеет простой спектр и к тому же является диагональной, то $\mathfrak{A}(t) = D_1(t)$ и решение задачи (7.1) имеет вид (7.8).

7.2. Асимптотика оператора Коши. Пусть для матрицы $D_0(t)$ выполнено предположение 5.1. Получим явный вид решения уравнения

$$\varepsilon\dot{Z} = (K_0(t) - \varepsilon T_{\mathfrak{A}(t), F(t, \varepsilon)})Z - \mathfrak{A}(t) + F(t, \varepsilon), \quad (7.9)$$

положив

$$Z_*(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Z_*^{(i+1)}(t). \quad (7.10)$$

Для нахождения неизвестных матриц $Z_*^{(i)}(t)$, $Q_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, запишем (7.9) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{Z}_* &= (K_0 - \varepsilon T_{\mathfrak{A}, Q_1})Z_* + \varepsilon^2 Z_*(Q_2 + \varepsilon Q_3 + \varepsilon^2 \dots) \\ &\quad + (Q_1 - \mathfrak{A}) + \varepsilon Q_2 + \varepsilon^2 Q_3 + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (7.11)$$

и приравняем коэффициенты при ε^i , $i \in \mathbb{N}$. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} K_0 Z_*^{(1)} &= \mathfrak{A} - Q_1, \\ K_0 Z_*^{(2)} &= \dot{Z}_*^{(1)} + T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(1)} - Q_2, \\ K_0 Z_*^{(3)} &= \dot{Z}_*^{(2)} + T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(2)} - Z_*^{(1)} Q_2 - Q_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

Будем решать их последовательно с помощью леммы 4.3. Поскольку $Q(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$ и $\mathfrak{A}(t) = (\sigma_{ij}(t))$, то, как указано в п. 4.2,

$$\hat{K}_0^{-1} \mathfrak{A}_*(t) = ((\lambda_i(t) - \lambda_j(t))^{-1} \sigma_{ij}(t)), \quad i \neq j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m.$$

В итерационной процедуре одновременно находятся матрицы $Q_i(t)$ из условий разрешимости уравнений (7.12), а также матрицы $Z_*^{(i)}(t)$, служащие решениями этих уравнений. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_1 &= I_0 \mathfrak{A}, & Z_*^{(1)} &= \hat{K}_0^{-1} I_* \mathfrak{A}, \\ Q_2 &= I_0 (T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(1)}), & Z_*^{(2)} &= \hat{K}_0^{-1} I_* (\dot{Z}_*^{(1)} + T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(1)}), \\ Q_3 &= I_0 (T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(2)} - Z_*^{(1)} Q_2), & Z_*^{(3)} &= \hat{K}_0^{-1} I_* (\dot{Z}_*^{(2)} + T_{\mathfrak{A}, Q_1} Z_*^{(2)} - Z_*^{(1)} Q_2) \end{aligned} \quad (7.13)$$

и т.д. Таким образом, решение $W(t, \varepsilon)$ задачи (7.1), заданное формулами (7.3), (7.7), может быть определено с любой наперед заданной точностью. На основании леммы 5.1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть матрица $D_0(t)$ удовлетворяет предположению 5.1. Тогда формальным решением задачи (7.1) является матричный пучок (7.3), в котором матрицы Q_i , $Z_*^{(i)}$ определяются соотношениями (7.13).

В прикладных задачах широкое применение находят формулы асимптотических разложений решений векторных ЛДУ, в которых используется асимптотика оператора Коши. Преобразуем $W(t, \varepsilon)$, получив вначале представление для $(I + \varepsilon Z_*(0, \varepsilon))^{-1}$. С этой целью положим

$$(I + \varepsilon Z_*(\varepsilon))^{-1} = I + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \varepsilon^3 K_3 + \varepsilon^4 \dots \quad (7.14)$$

и найдем постоянные матрицы K_i , $i \in \mathbb{N}$, из равенства

$$(I + \varepsilon Z_*^{(1)} + \varepsilon^2 Z_*^{(2)} + \varepsilon^3 \dots)(I + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \varepsilon^3 K_3 + \varepsilon^4 \dots) = I.$$

Приравняем коэффициенты при ε^i , $i \in \mathbb{N}$, придем к системе

$$\begin{aligned} K_1 + Z_*^{(1)} &= 0, \\ K_2 + Z_*^{(1)} K_1 + Z_*^{(2)} &= 0, \\ K_3 + Z_*^{(1)} K_2 + Z_*^{(2)} K_1 + Z_*^{(3)} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} K_1 &= -Z_*^{(1)}, \\ K_2 &= -Z_*^{(2)} + (Z_*^{(1)})^2, \\ K_3 &= -Z_*^{(3)} + Z_*^{(2)} Z_*^{(1)} + Z_*^{(1)} Z_*^{(2)} - (Z_*^{(1)})^3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{7.15}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} (I + \varepsilon Z_*(0, \varepsilon))^{-1} &= I - \varepsilon Z_*^{(1)}(0) - \varepsilon^2 (Z_*^{(2)}(0) - (Z_*^{(1)}(0))^2) \\ &\quad - \varepsilon^3 (Z_*^{(3)}(0) - Z_*^{(2)}(0) Z_*^{(1)}(0) - Z_*^{(1)}(0) Z_*^{(2)}(0) + (Z_*^{(1)}(0))^3) - \varepsilon^4 \dots \end{aligned}$$

Подставляя (7.7), (7.14) в (7.3), получаем, что

$$\begin{aligned} W(t, \varepsilon) &= \Phi(t) (W_0 - \varepsilon (W_0 Z_*^{(1)}(0) - Z_*^{(1)}(t) W_0) - \varepsilon^2 (W_0 Z_*^{(2)}(0) - Z_*^{(2)}(t) W_0 \\ &\quad - (W_0 Z_*^{(1)}(0) - Z_*^{(1)}(t) W_0) Z_*^{(1)}(0)) - \varepsilon^3 \dots) \Phi^{-1}(0). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Поскольку $W_0(0, \varepsilon) = I$ и $[I, A(t)] = 0 \ \forall A(t) \in \mathfrak{A}$, то $W(0, \varepsilon) = I$.

ТЕОРЕМА 7.3. *Если матрица $D_0(t)$ имеет простой спектр, то решение задачи (7.1) представимо в форме асимптотического разложения (7.16) по целым степеням ε с матрицами Q_i , $Z_*^{(i)}$, определяемыми соотношениями (7.13).*

В частном случае, когда матрицы D_0 , D_1 постоянные, матрицы Φ , $\mathfrak{A}$ также являются постоянными и оператор Коши $W(t, \varepsilon)$ превращается в матричную экспоненту $\exp(\varepsilon^{-1}(D_0 - \varepsilon D_1)t)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Если матрицы D_0 , D_1 постоянные и D_0 имеет простой спектр, то формула (7.16) с учетом (5.6) принимает вид*

$$\begin{aligned} \exp(\varepsilon^{-1}(D_0 - \varepsilon D_1)t) &= \Phi(W_0 - \varepsilon[W_0, Z_*^{(1)}] - \varepsilon^2([W_0, Z_*^{(2)}] \\ &\quad - [W_0, Z_*^{(1)}]Z_*^{(1)}) - \varepsilon^3 \dots) \Phi^{-1}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если матрица $I_0 \mathfrak{A}(t)$ зависит от t , а разности $\lambda_i(t) - \lambda_j(t)$, $i \neq j$, вместе с матрицей $I_* \mathfrak{A}(t)$ не зависят от t , то $Z_*^{(1)}$ — постоянная матрица. При этом матрицы $Z_*^{(i)}(t)$, $i = 2, 3, \dots$, вообще говоря, не являются постоянными.

7.3. Уравнение в сепарабельном гильбертовом пространстве. Случай стабильного спектра. Пусть E – сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $A(t)$ – линейный замкнутый симметрический оператор, действующий при каждом $t \in [0, T]$ в E и такой, что

- 1) область определения $D(A)$ оператора $A(t)$ не зависит от t и плотна в E ;
- 2) оператор $A(t)$ сильно непрерывен на $D(A)$ (см. [22; гл. II, §1]);
- 3) задача Коши

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0, \varepsilon) = x^0 \in E, \quad (7.18)$$

равномерно корректна [22; гл. II, §3] при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

- 4) спектр оператора $A(t)$ при всех $0 \leq t \leq T$ *стабилен*, т.е. удовлетворяет соотношениям

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{N};$$

- 5) при каждом $t \in [0, T]$ существует ограниченный оператор $A^{-1}(t)$.

Как известно [23; гл. IV, п. 53], $A(t)$ допускает матричное представление в некотором ортонормированном базисе, принадлежащем плотному в E множеству $D(A)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon \dot{u} = A(t)u + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, \varepsilon) = u^0 \in E. \quad (7.19)$$

Общее решение уравнения (7.19) будем, как обычно, искать в виде суммы общего решения $\bar{u}(t, \varepsilon)$ уравнения (7.18) и частного решения $u^*(t, \varepsilon)$ уравнения (7.19).

Непосредственно проверяется, что если потребовать от $A^{-1}(t)$ и функции $f(t)$ непрерывной дифференцируемости бесконечного порядка, то

$$u^*(t, \varepsilon) = - \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right)^r A^{-1}(t) f(t). \quad (7.20)$$

Решение $\bar{u}(t, \varepsilon)$ ищем в форме

$$\bar{u}(t, \varepsilon) = W(t, \varepsilon)c(\varepsilon),$$

где $c(\varepsilon)$ – произвольный вектор, а оператор Коши $W(t, \varepsilon)$ является решением задачи

$$\varepsilon \dot{W} = A(t)W, \quad 0 \leq t \leq T, \quad W(0, \varepsilon) = I. \quad (7.21)$$

Схема построения оператора Коши $W(t, \varepsilon)$ и его асимптотики совпадает с соответствующими результатами из пп. 7.1, 7.2 с учетом очевидных обобщений и поправок. Так, оператор $W(t, \varepsilon)$ определен на $D(A)$ и ограничен при каждом фиксированном t . Следовательно, по непрерывности его можно расширить на все пространство E , сохранив прежнее обозначение [22; гл. II, §3]. Поскольку оператор $A(t)$ обратим при всех $0 \leq t \leq T$, то он преобразует любой ортонормированный базис пространства E в другой базис (Рисса) из E . Выбирая собственные векторы $\varphi_k(t)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k(t)$, в качестве базиса Рисса в E , построим из векторов $\varphi_k(t)$, записанных в столбцы, матрицу $\Phi(t)$, а также матрицы $\mathfrak{A}(t) = \Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t)$, $Q(t) = \Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)$. В формуле (7.3) для $W(t, \varepsilon)$ следует принять

$$W_0(t, \varepsilon) = \text{diag}(e^{\mu_1(t, \varepsilon)}, e^{\mu_2(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\mu_m(t, \varepsilon)}, \dots), \quad (7.22)$$

$$\mu_i(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) - \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r q_{r,i}(\tau) \right) d\tau, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (7.23)$$

ТЕОРЕМА 7.4. *Формальным решением задачи (7.19) в пространстве E с оператор-функцией $A(t)$, подчиняющейся условиям 1)–5), является оператор-функция $W(t, \varepsilon)$ вида (7.3), где $W_0(t, \varepsilon)$ определяется из (7.22), а $\mu_i(t, \varepsilon)$ – из (7.23).*

§ 8. Матрица подобия $I + \Omega_{-n}(t)$

Всюду в дальнейшем исследуется случай кратного спектра.

Обозначим через $U_i(t)$ однодиагональные матрицы (см. п. 3.2), дающие в сумме структурную матрицу $\mathfrak{A}(t)$ из $\mathfrak{N}$, и предположим, что $U_{1-m}(t) \equiv \dots \equiv U_{-n}(t) \equiv 0$, т.е. матрица $U_{1-n}(t)$ является в определенном смысле *главной*. Преобразование подобия $I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)$ позволяет (см. пример 4.1) выделить в $U_{1-n}(t)$ главную часть $\mathcal{D}_{1-n}(t)$ и избавиться от слагаемого $U_{1-n}^{(0)}(t) \neq 0$ с $\gamma_{1-n}^{(0)}(t) \equiv 0$ в представлении $U_{1-n}(t) = \mathcal{D}_{1-n}(t) + U_{1-n}^{(0)}(t)$, где $\mathcal{D}_{1-n}(t) \in M$, $U_{1-n}^{(0)}(t) \in \text{Im } K_1$ (см. формулу (8.4)). С учетом логарифмического закона введем обозначения

$$\begin{aligned} U_{i,0}(t) &= [U_{i+n}(t), \Omega_{-n}(t)], \quad 1-m \leq i \leq m_1-1, \quad i \neq -n, \\ U_{-n,0}(t) &= \dot{\Omega}_{-n}(t) + [U_0(t), \Omega_{-n}(t)], \\ U_{i,1}(t) &= (-\Omega_{-n}(t))U_{i+2n}(t)\Omega_{-n}(t), \quad 1-m \leq i \leq -s-1. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Напомним (см. (1.3)), что $s = n - m_1$, $n + m_1 = m$, причем числа s, m одинаковой четности. Всюду далее будем считать выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 8.1. Справедливы неравенства $1 \leq s \leq m$, или $0 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, или $(m+1)/2 \leq n \leq m$.

Из условия $s \geq 1$, записанного в форме $2(1-n) \leq 1-m$, вытекают тождества

$$U_{1-2n,0}(t) \equiv U_{1-n}(t)\Omega_{-n}(t) \equiv 0, \quad \Omega_{-n}^2(t) \equiv 0. \quad (8.2)$$

Значит, при достаточно малых ε

$$(I + \varepsilon \Omega_{-n}(t))^{-1} = I - \varepsilon \Omega_{-n}(t) \quad (8.3)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & (I + \varepsilon \Omega_{-n}(t))^{-1} ((J - \varepsilon \mathfrak{A}(t))(I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)) - \varepsilon^2 \dot{\Omega}_{-n}(t)) \\ &= J - \varepsilon \left(\mathcal{D}_{1-n}(t) + \sum_{i=2-n}^{m-1} U_i(t) \right) - \varepsilon^2 \sum_{i=1-m}^{m_1-1} U_{i,0}(t) - \varepsilon^3 \sum_{i=1-m}^{-s-1} U_{i,1}(t). \end{aligned} \quad (8.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Пусть $m_1 = 0$. Тогда $n = m$, $\Omega_{-m}(t) \equiv 0$, следовательно, $U_{1-m}^{(0)}(t) \equiv 0$, $\mathcal{D}_{1-m}(t) \equiv U_{1-m}(t)$, и преобразование $I + \varepsilon \Omega_{-m}(t)$ превращается в тождественное.

§ 9. Случай общего положения

Обозначим через $\sigma_{r,l}(t)$ элемент из r -й строки, l -го столбца структурной матрицы $\mathfrak{A}(t)$, а через $\gamma_i(t)$ (без указания $\mathfrak{A}$ в качестве верхнего индекса) сумму элементов однодиагональной матрицы $U_i(t)$, или ее “след”, $1 - m \leq i \leq m - 1$.

Случай общего положения (СОП) охарактеризуем соотношениями

$$\gamma_{1-m}(t) \equiv \dots \equiv \gamma_{-n}(t) \equiv 0, \quad \gamma_{1-n}(t) \neq 0, \quad 0 \leq m_1 \leq \frac{m-1}{2}. \quad (9.1)$$

Напомним, что во введении случай I), когда $m_1 = 0, n = m$,

$$\gamma_{1-m}(t) = \sigma_{m,1}(t) \neq 0,$$

назван *невыврожденным*, случай II), когда $m_1 = 1, n = m - 1, m \geq 3$,

$$\sigma_{m,1}(t) \equiv 0, \quad \gamma_{2-m}(t) = \sigma_{m-1,1}(t) + \sigma_{m,2}(t) \neq 0,$$

назван случаем *слабого вырождения*. При $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ говорят о случаях *сильного вырождения* матрицы $\mathfrak{A}(t)$.

В § 8 было показано, что преобразование подобия $I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)$ с матрицей $\Omega_{-n}(t)$ из (4.3) приводит матрицу $\mathfrak{A}(t)$, у которой однодиагональная матрица $U_i(t) \neq 0$ с наименьшим номером i (наибольшим “весом”) имеет нулевой “след” $\gamma_i(t) \equiv 0$, к матрице с $U_i(t) \equiv 0$. Вследствие такой возможности будем всюду в дальнейшем характеризовать СОП несколько более жесткими по сравнению с (9.1) ограничениями

$$U_{1-m}(t) \equiv \dots \equiv U_{-n}(t) \equiv 0, \quad \gamma_{1-n}(t) \neq 0, \quad 0 \leq m_1 \leq \frac{m-1}{2}. \quad (9.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Для случаев I), II) соотношения (9.1) и (9.2) совпадают.

§ 10. Матрица подобия $\Lambda(\varepsilon)$

Введем матрицу *срезания* [24]

$$\Lambda(\varepsilon) = \text{diag}(1, \varepsilon^\nu, \varepsilon^{2\nu}, \dots, \varepsilon^{(m-1)\nu}), \quad \nu > 0, \quad (10.1)$$

дающую возможность отщепить от матрицы $\mathfrak{A}(t)$ однодиагональную матрицу $\mathfrak{D}_{1-n}(t)$ с наименьшим индексом и возмутить ею матрицу J так, чтобы у новой предельной матрицы пучка имелись различные собственные значения. Такого рода процедура в различных ситуациях использовалась, например, в [5], [14]; в [20] она названа присоединением к J матрицы наибольшего веса, или *перестройкой*.

Матрица $\Lambda(\varepsilon)$ при действии на однодиагональные матрицы $X_i(t)$ обладает замечательным свойством:

$$\Lambda^{-1}(\varepsilon) X_i(t) \Lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{i\nu} X_i(t), \quad 1 - m \leq i \leq m - 1, \quad (10.2)$$

в частности, $\Lambda^{-1} J \Lambda = \varepsilon^\nu J$. Формула (10.2) дает возможность ввести иерархию среди однодиагональных матриц, присваивая различные “веса” в зависимости от их номеров.

Наряду с $\Lambda(\varepsilon)$ далее используется матрица срезания

$$\bar{\Lambda}_1(\varepsilon) = \text{diag}(1, \varepsilon^{\bar{\nu}}, \varepsilon^{2\bar{\nu}}, \dots, \varepsilon^{(m_1-1)\bar{\nu}}), \quad \bar{\nu} > 0, \quad (10.3)$$

действующая в подпространстве $\text{End } PE$, а также матрицы

$$\Lambda_1(\varepsilon) = \text{diag}(\bar{\Lambda}_1(\varepsilon); 0_n), \quad \Lambda_1^{-1}(\varepsilon) = \text{diag}(\bar{\Lambda}_1^{-1}(\varepsilon); 0_n),$$

действующие в пространстве $\mathfrak{N}$.

Положим $\nu = 1/n$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\varepsilon) & \left(J - \varepsilon \left(\mathcal{D}_{1-n}(t) + \sum_{i=2-n}^{m-1} U_i(t) \right) \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon^2 \sum_{i=1-m}^{m_1-1} U_{i,0}(t) - \varepsilon^3 \sum_{i=1-m}^{-s-1} U_{i,1}(t) \right) \Lambda(\varepsilon) \\ & = \varepsilon^{1/n} \left(\Gamma(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \varepsilon^{i/n} H_{i+1-n}(t) \right), \end{aligned} \quad (10.4)$$

где для краткости использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= J - \mathcal{D}_{1-n}(t); \quad H_{i+1-n}(t) = U_{i+1-n}(t), \quad 1 \leq i \leq s-1; \\ H_{i+1-n}(t) &= U_{i+1-n}(t) + U_{i+1-2n,0}(t), \quad s \leq i \leq s+n-1; \\ H_{i+1-n}(t) &= U_{i+1-n}(t) + U_{i+1-2n,0}(t) + U_{i+1-3n,1}(t), \quad s+n \leq i \leq m+n-2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Матрицы $\Omega_{-n}(t)$ и $\Lambda(\varepsilon)$ не коммутируют.

§ 11. Матрица подобия $\Phi^{(1)}(t)$

11.1. Корни степени n из 1. Свойства решений уравнения $q^n + \gamma(t) = 0$, $n \geq 2$. Известно, что если $n \geq 2$, то $\sqrt[n]{1} = \exp(2\pi j \sqrt{-1}/n)$, $1 \leq j \leq n$, причем одним из первообразных корней из единицы является число $e = \exp(2\pi \sqrt{-1}/n) = \cos(2\pi/n) + \sqrt{-1} \sin(2\pi/n)$, а все остальные корни равны e^j и различны при различных j .

ЛЕММА 11.1. *Разности $e^j - e^k$ при некотором k и всех j , $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$, попарно различны и не обращаются в нуль.*

ЛЕММА 11.2. *При всех $n \geq 2$ справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^n e^j = 0.$$

ЛЕММА 11.3. Если p — целое число, $1 \leq |p| \leq n-1$, то при всех $n \geq 2$ справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^n (e^j)^p = \sum_{j=1}^{n-1} (e^j)^p = 0.$$

Далее предположим, что $\gamma(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, T]$, и рассмотрим алгебраическое уравнение $q^n + \gamma(t) = 0$, $n \geq 2$. Его корнями служат n различных функций

$$q_j(t) = \sqrt[n]{-\gamma(t)} e^j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Следствиями леммы 11.3 являются

ЛЕММА 11.4. Справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{q_k(t)}{q_r(t)} \right)^j \equiv 0, \quad 1 \leq |k-r| \leq n-1.$$

ЛЕММА 11.5. Справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^n (q_j(t))^p \equiv 0, \quad 1 \leq |p| \leq n-1.$$

ЛЕММА 11.6. Отношение $\dot{q}_j(t)/q_j(t)$ не зависит от j и

$$\frac{\dot{q}_j(t)}{q_j(t)} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{n\gamma(t)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

11.2. Матрица $\Gamma(t)$. Предельной матрицей перестроенного пучка (см. (10.4)) является $\Gamma(t) = J - \mathcal{D}_{1-n}(t)$. Заметим, что если $m_1 = 0$, то выполняется равенство $\det \Gamma(t) = (-1)^m \sigma_{m,1}(t) \neq 0$. В то же время $\det \Gamma(t) \equiv 0$ при $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$.

Найдем все собственные значения $q_1(t)$ матрицы $\Gamma(t)$. Проверяется, что уравнение $\det(\Gamma(t) - q_1(t)I) \equiv 0$ эквивалентно тождеству

$$q_1^{m_1}(q_1^n + \gamma_{1-n}(t)) \equiv 0, \quad m_1 + n = m. \quad (11.1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_{1,j}(t) &= \sqrt[n]{-\gamma_{1-n}(t)} \exp\left(\frac{2\pi j \sqrt{-1}}{n}\right), & 1 \leq j \leq n, \\ q_{1,j}(t) &\equiv 0, & n+1 \leq j \leq m. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Таким образом, при $m_1 = 0$ и при $m_1 = 1$ все собственные значения матрицы $\Gamma(t)$ попарно различны. При $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ у матрицы $\Gamma(t)$ имеются n попарно различных ненулевых собственных значений и одно нулевое m_1 -кратное собственное значение.

11.3. Матрица Вандермонда и ее обобщение. Введем в рассмотрение обратимую матрицу $\Phi^{(1)}(t)$, играющую роль преобразования подобия, с помощью которой удастся перейти от матрицы $\Gamma(t)$ к подобной ей матрице $\Gamma^{(1)}(t)$, записанной в ортонормированном базисе $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$. Предположим, что $q_j^n(t) = -\gamma_{1-n}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, $1 \leq j \leq n$, и введем в рассмотрение n -мерные вектор-строки и вектор-столбцы

$$\chi_i(t) = (q_1^i(t), \dots, q_n^i(t)), \quad \theta_i(t) = \text{col}(q_1^i(t), \dots, q_n^i(t)), \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. Составим матрицу Вандермонда $\mathcal{V}(t)$ порядка $n \times n$, $n \geq 2$, строками которой служат $\chi_i(t)$, $0 \leq i \leq n-1$. Проверяется, что столбцами обратной матрицы $\mathcal{V}^{-1}(t)$ являются векторы $(1/n)\theta_{-i}(t)$, $0 \leq i \leq n-1$.

В дальнейшем будут использоваться матрицы блочной структуры. В пространстве $\mathfrak{N}$ введем проекторы

$$P = \text{diag}(I_{m_1}; 0_n), \quad I - P = \text{diag}(0_{m_1}; I_n) \quad (11.3)$$

и станем обозначать блоки любой матрицы $A(t)$, $0 \leq t \leq T$, следующим образом:

$$A_{11} = PAP, \quad A_{12} = PA(I - P), \quad A_{21} = (I - P)AP, \quad A_{22} = (I - P)A(I - P). \quad (11.4)$$

Далее, рассмотрим матрицу $\Phi^{(1)}(t)$ порядка $m \times m$, $m \geq n$, столбцами которой служат орты $e_1, \dots, e_{m_1}$, а также векторы $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$, где $\omega_j(t) = \text{col}(1, q_j(t), \dots, q_j^{m_1-1}(t))$, $1 \leq j \leq n$. Последние n векторов образуют блок размеров $m \times n$, строками которого служат $\chi_i(t)$, $0 \leq i \leq m-1$. При $n = m$, $m_1 = 0$ получаем $\Phi^{(1)}(t) = \mathcal{V}(t)$, поэтому $\Phi^{(1)}(t)$ – обобщение матрицы Вандермонда. Разложением по элементам первых m_1 столбцов устанавливается, что

$$\det \Phi^{(1)}(t) = \left(\prod_{j=1}^n q_j^{m_1}(t) \right) \det \mathcal{V}(t) \neq 0.$$

Поскольку $0 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, то

$$(\Phi^{(1)}(t))^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0_{m_1 \times s} & \left(\frac{1}{\gamma_{1-n}(t)} \right) I_{m_1} \\ 0_{n \times m_1} & (\Phi^{(1)}(t))_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

где $(\Phi^{(1)}(t))_{22}^{-1} = (1/n)(\theta_{-m_1}(t), \dots, \theta_{1-m}(t))$ – матрица порядка $n \times n$ вида

$$(\Phi^{(1)}(t))_{22}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} q_{1,1}^{-m_1}(t) & \dots & q_{1,1}^{1-m}(t) \\ q_{1,2}^{-m_1}(t) & \dots & q_{1,2}^{1-m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{1,n}^{-m_1}(t) & \dots & q_{1,n}^{1-m}(t) \end{pmatrix}.$$

11.4. Матрица $\Gamma^{(1)}(t)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} &= (\Phi^{(1)})^{-1} \Gamma \Phi^{(1)}, \quad H^{(0)} = (\Phi^{(1)})^{-1} H_0 \Phi^{(1)} + \mathfrak{A}^{(1)}, \\ H^{(i+1-n)} &= (\Phi^{(1)})^{-1} H_{i+1-n} \Phi^{(1)}, \quad i \neq n-1, \quad 1 \leq i \leq m+n-2,\end{aligned}\quad (11.5)$$

где все матрицы зависят от t . Тогда согласно (10.4), (11.5) имеем

$$\begin{aligned}(\Phi^{(1)}(t))^{-1} &\left(\left(\Gamma(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \varepsilon^{i/n} H_{i+1-n}(t) \right) \Phi^{(1)}(t) - \varepsilon^{(n-1)/n} \dot{\Phi}^{(1)}(t) \right) \\ &= \Gamma^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \varepsilon^{i/n} H^{(i+1-n)}(t).\end{aligned}\quad (11.6)$$

Устанавливается, что если $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, то $\Gamma^{(1)}(t) = \text{diag}(J_1; Q(t))$, где J_1 — матрица порядка $m_1 \times m_1$ типа J , а $Q(t) = \text{diag}(q_{1,1}(t), \dots, q_{1,n}(t))$. При $m_1 = 1$ имеем $\Gamma^{(1)}(t) = \text{diag}(0; Q(t))$, $Q(t) = \text{diag}(q_{1,1}(t), \dots, q_{1,m-1}(t))$. Таким образом, при $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ предельная матрица $\Gamma^{(1)}(t)$ оказывается блочно-диагональной в базисе $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$. При $m_1 = 0$ имеется всего один блок и $\Gamma^{(1)}(t) = Q(t) = \text{diag}(q_{1,1}(t), \dots, q_{1,m}(t))$.

§ 12. Формулы для элементов блочных матриц

Чтобы иметь возможность выразить коэффициенты расщепленных ЛДУ через коэффициенты исходного ЛДУ, нам потребуются представления блочных матриц $H_{kl}^{(i+1-n)}(t)$, $-m_1 \leq i \leq m+n-2$, $k, l = 1, 2$. В п. 12.1 рассмотрен случай $m_1 = 0$, в п. 12.2 — случай $m_1 = 1$, в п. 12.3 — случай $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$.

Обозначим через $X_{i+1-n}(t)$ матрицы, определяемые соотношениями

$$X_{i+1-n}(t) = \sum_{r=1}^{m_1+1+i} x_{n-1+r-i,r}(t) V_{i+1-n}^{r-1, m_1+1+i-r}, \quad -m_1 \leq i \leq n-1, \quad (12.1)$$

$$X_{i+1-n}(t) = \sum_{r=1}^{m-1+n-i} x_{r,i+1+r-n}(t) V_{i+1-n}^{r-1, m+n-1-i-r}, \quad n-1 \leq i \leq m+n-2, \quad (12.2)$$

а через $X^{(i+1-n)}(t)$ — подобные им матрицы $(\Phi^{(1)})^{-1}(t) X_{i+1-n}(t) \Phi^{(1)}(t)$, $-m_1 \leq i \leq m+n-2$, где в роли матрицы подобия будут выступать матрица Вандермонда $\mathcal{V}(t)$ или ее обобщение $\Phi^{(1)}(t)$ из п. 11.3. Приведем соответствующие формулы для элементов матриц $X_{kl}^{(i+1-n)}(t)$, $k, l = 1, 2$, $-m_1 \leq i \leq m+n-2$ (условимся опускать аргумент t).

12.1. Случай $m_1 = 0$. Заметим, что $n = m = s$, и обозначим через $\eta_{l,j}^{i+1-m}$ элемент матрицы $X^{(i+1-m)} = \mathcal{V}^{-1} X_{i+1-m} \mathcal{V}$, стоящий в l -й строке, j -м столбце, $l, j = 1, \dots, m$, $0 \leq i \leq 2(m-1)$.

ЛЕММА 12.1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\eta_{l,j}^{i+1-m} &= \sum_{r=1}^{i+1} x_{r+m-1-i,r} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{mq_l^{m-1-i}}, & 0 \leq i \leq m-1, \\ \eta_{l,j}^{i+1-m} &= q_j^{i+1-m} \sum_{r=1}^{2m-1-i} x_{r,r+i+1-m} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{m}, & m-1 \leq i \leq 2(m-1).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 12.1. *При $l = j$ имеем*

$$\begin{aligned}\eta_{j,j}^{i+1-m} &= \frac{\gamma_{i+1-m}^X}{mq_j^{m-1-i}}, & 0 \leq i \leq m-1, \\ \eta_{j,j}^{i+1-m} &= q_j^{i+1-m} \frac{\gamma_{i+1-m}^X}{m}, & m-1 \leq i \leq 2(m-1),\end{aligned}$$

в частности,

$$\eta_{j,j}^0 = \frac{\gamma_0^X}{m} = \frac{1}{m} \operatorname{Tr} X. \quad (12.3)$$

12.2. Случай $m_1 = 1$. Здесь $n = m - 1$, $s = m - 2$, $P = P_1$ и имеет место

ЛЕММА 12.2. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}X_{11}^{(1-m)} &= \frac{1}{\gamma_{1-n}} x_{m,1} V_{0,1}^{0,0}, \\ X_{11}^{(0)} &= x_{1,1} V_{0,1}^{0,0}, \\ X_{11}^{(i+2-m)} &\equiv 0, & 0 \leq i \leq 2m-3, \quad i \neq m-2.\end{aligned}$$

Через $V_{0,1}^{0,0}$ обозначена матрица порядка 1×1 с элементом, равным 1, т.е. $X_{11}^{(0)}$ — скаляр, равный $x_{1,1}$.

ЛЕММА 12.3. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}X_{12}^{(i+2-m)} &= \frac{1}{\gamma_{1-n}} x_{m,i+2} \chi_{i+1}, & -1 \leq i \leq m-3, \\ X_{12}^{(0)} &= (x_{1,1} - x_{m,m}) \chi_0, \\ X_{12}^{(i+2-m)} &= x_{1,i+3-m} \chi_{i+2-m}, & m-1 \leq i \leq 2m-3.\end{aligned}$$

ЛЕММА 12.4. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}X_{21}^{(i+2-m)} &= \frac{1}{m-1} x_{m-1-i,1} \theta_{i+2-m}, & -1 \leq i \leq m-3, \\ X_{21}^{(i+2-m)} &\equiv 0, & m-2 \leq i \leq 2m-3.\end{aligned}$$

Далее, через $\eta_{l,j}^{i+2-m}$ обозначим элемент матрицы $X_{22}^{(i+2-m)}$ из l -й строки, j -го столбца, $l, j = 1, \dots, m-1$, $-1 \leq i \leq m-3$.

ЛЕММА 12.5. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}\eta_{l,j}^{i+2-m} &= \sum_{r=1}^{i+2} x_{r+m-2-i,r} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{nq_l^{m-2-i}}, & -1 \leq i \leq m-3, \\ \eta_{l,j}^{i+2-m} &= q_j^{i+2-m} \sum_{r=2}^{2(m-1)-i} x_{r,r+i+2-m} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{n}, & m-2 \leq i \leq 2(m-2), \\ \eta_{l,j}^{m-1} &\equiv 0.\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 12.2. *Если $l = j$, то*

$$\begin{aligned}\eta_{j,j}^{i+2-m} &= \frac{\gamma_{i+2-m}^X}{nq_j^{n-1-i}}, & -1 \leq i \leq m-3, \\ \eta_{j,j}^{i+2-m} &= \frac{1}{n} q_j^{i+2-m} (\gamma_{i+2-m}^X - x_{i+3-m,1}), & m-2 \leq i \leq 2(m-2),\end{aligned}$$

в частности,

$$\eta_{j,j}^0 = \frac{1}{m-1} q_j^{i+2-m} (\text{Tr } X - x_{1,1}). \quad (12.4)$$

12.3. Случай $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. Блок $X_{11}^{(i+1-n)}$ является однодиагональной (или, как ниже в (12.12), двухдиагональной) матрицей, поэтому он представляется с помощью базиса из m_1^2 матриц $V_{i-m_1,1}^{r,i-1-r}$, $V_{m_1-i,1}^{r,i-1-r}$, $0 \leq r \leq i-1$, $1 \leq i \leq m_1$, порядка $m_1 \times m_1$. При этом приходится различать следующие возможные соотношения между числами s и m_1 :

- а) $s \geq m_1 \geq 2$, или $2 \leq m_1 \leq m/3$;
- б) $s = m_1 - 1 \geq 1$, или $m_1 = (m+1)/3$ ($m = 3l+2$, $l \in \mathbb{N}$);
- в) $1 \leq s \leq m_1 - 2$, или $(m+2)/3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, $m_1 \geq 3$.

ЛЕММА 12.6. *Если $s \geq m_1 \geq 2$, то верны соотношения*

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \frac{1}{\gamma_{1-n}} \sum_{r=1}^{m_1+1+i} x_{n-1+r-i,r} V_{i+1,1}^{r-1,m_1+1+i-r}, \quad -m_1 \leq i \leq -1, \quad (12.5)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \frac{1}{\gamma_{1-n}} \sum_{r=1}^{m_1-1-i} x_{r+n,r+i+1} V_{i+1,1}^{r-1,m_1-1-i-r}, \quad 0 \leq i \leq m_1-2, \quad (12.6)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} \equiv 0, \quad m_1-1 \leq i \leq s-1, \quad (12.7)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \sum_{r=1}^{i+1-s} x_{n-1+r-i,r} V_{i+1-n,1}^{r-1,i+1-s-r}, \quad s \leq i \leq n-2, \quad (12.8)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \sum_{r=1}^{m-1-i} x_{r,r+i+1-n} V_{i+1-n,1}^{r-1,m-1-i-r}, \quad n-1 \leq i \leq m-2, \quad (12.9)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} \equiv 0, \quad m-1 \leq i \leq m+n-2. \quad (12.10)$$

ЛЕММА 12.7. Если $1 \leq s \leq m_1 - 2$, то наряду с (12.5), (12.9), (12.10) справедливы соотношения

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \frac{1}{\gamma_{1-n}} \sum_{r=1}^{m_1-1-i} x_{r+n, r+i+1} V_{i+1,1}^{r-1, m_1-1-i-r}, \quad 0 \leq i \leq s-1, \quad (12.11)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \frac{1}{\gamma_{1-n}} \sum_{r=1}^{m_1-1-i} x_{r+n, r+i+1} V_{i+1,1}^{r-1, m_1-1-i-r} + \sum_{r=1}^{i+1-s} x_{r+n-1-i, r} V_{i+1-n,1}^{r-1, i+1-r-s}, \quad 1 \leq s \leq i \leq m_1 - 2, \quad (12.12)$$

$$X_{11}^{(i+1-n)} = \sum_{r=1}^{i+1-s} x_{r+n-1-i, r} V_{i+1-n,1}^{r-1, i+1-r-s}, \quad m_1 \leq i \leq n-2. \quad (12.13)$$

ЛЕММА 12.8. Если $s = m_1 - 1$, то матрицы $X_{11}^{(i+1-n)}$ определяются равенствами (12.5), (12.6), (12.8)–(12.10).

Отметим, что структура остальных блоков *не зависит* от соотношений между s и m_1 , и обозначим, как в лемме 12.5, через $\eta_{l,j}^{i+1-n}$ элемент матрицы $X_{22}^{(i+1-n)}$, стоящий в l -й строке, j -м столбце, $l, j = 1, \dots, n$.

ЛЕММА 12.9. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \eta_{l,j}^{i+1-n} &= \sum_{r=1}^{m_1+1+i} x_{r+n-1-i, r} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{nq_l^{n-1-i}}, \quad -m_1 \leq i \leq s-1, \\ \eta_{l,j}^{i+1-n} &= \sum_{r=i+2-s}^{m_1+1+i} x_{r+n-1-i, r} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{nq_l^{n-1-i}}, \quad s \leq i \leq n-1, \\ \eta_{l,j}^{i+1-n} &= q_j^{i+1-n} \sum_{r=m_1+1}^{m+n-1-i} x_{r, r+i+1-n} \frac{(q_j/q_l)^{r-1}}{n}, \quad n-1 \leq i \leq 2(n-1), \\ \eta_{l,j}^{i+1-n} &\equiv 0, \quad 2n-1 \leq i \leq m+n-2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 12.3. При $l = j$ имеем

$$\begin{aligned} \eta_{j,j}^{i+1-n} &= \frac{\gamma_{i+1-n}^X}{nq_j^{n-1-i}}, \quad -m_1 \leq i \leq s-1, \\ \eta_{j,j}^{i+1-n} &= \frac{1}{nq_j^{n-1-i}} \left(\gamma_{i+1-n}^X - \sum_{r=1}^{i+1-s} x_{r+n-1-i, r} \right), \quad s \leq i \leq n-1, \\ \eta_{j,j}^{i+1-n} &= \frac{q_j^{i+1-n}}{n} \left(\gamma_{i+1-n}^X - \sum_{r=1}^{m_1} x_{r, r+i+1-n} \right), \quad n-1 \leq i \leq 2(n-1), \end{aligned}$$

в частности,

$$\eta_{j,j}^{-n} = \frac{\gamma_{-n}^X}{nq_j^n} = -\frac{\gamma_{-n}^X}{n\gamma_{1-n}}, \quad \eta_{j,j}^0 = \frac{1}{n} \left(\text{Tr } X - \sum_{r=1}^{m_1} x_{r,r} \right).$$

Блок $X_{12}^{(i+1-n)}$ размеров $m_1 \times n$ описывается с помощью вектор-строк χ_i . Имеет место

ЛЕММА 12.10. При $-m_1 \leq i \leq -2$ первые $-i-1$ строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ нулевые, остальные m_1+1+i строк равны соответственно $(1/\gamma_{1-n})x_{n-i,1}\chi_0, \dots, (1/\gamma_{1-n})x_{m,i+m_1+1}\chi_{i+m_1}$.

При $-1 \leq i \leq s-1$ все m_1 строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ равны соответственно $(1/\gamma_{1-n})x_{n+1,i+2}\chi_{i+1}, \dots, (1/\gamma_{1-n})x_{m,i+m_1+1}\chi_{i+m_1}$.

При $s \leq i \leq n-1$ первые $n-1-i$ строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ равны $(1/\gamma_{1-n}) \times x_{n+1,i+2}\chi_{i+1}, \dots, (1/\gamma_{1-n})x_{2n-1-i,n}\chi_{n-1}$, остальные $i+1-s$ строк равны соответственно $(x_{n-i,1} - x_{2n-i,n+1})\chi_0, \dots, (x_{m_1,i+1-s} - x_{m,i+m_1+1})\chi_{i-s}$.

При $n-1 \leq i \leq m-2$ первые $m-1-i$ строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ равны $(x_{1,i+2-n} - x_{n+1,i+2})\chi_{i+1-n}, \dots, (x_{m-1-i,m_1} - x_{m+n-1-i,m})\chi_{m_1-1}$, остальные $i+1-n$ строк равны соответственно $x_{m-i,m_1+1}\chi_{m_1}, \dots, x_{m_1,i+1-s}\chi_{i-s}$.

При $m-1 \leq i \leq 2n-1$ все m_1 строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ равны соответственно $x_{1,i+2-n}\chi_{i+1-n}, \dots, x_{m_1,i+1-s}\chi_{i-s}$.

Наконец, при $2n \leq i \leq m+n-2$ первые $m+n-i-1$ строк блока $X_{12}^{(i+1-n)}$ равны соответственно $x_{1,i+2-n}\chi_{i+1-n}, \dots, x_{m+n-1-i,m}\chi_{m-1}$, а остальные $i+1-2n$ строк состоят из нулей.

Блок $X_{21}^{(i+1-n)}$ размеров $n \times m_1$ описывается с помощью вектор-столбцов θ_i . Справедлива

ЛЕММА 12.11. При $-m_1 \leq i \leq -2$ первые m_1+1+i столбцов блока $X_{21}^{(i+1-n)}$ равны соответственно $(1/n)x_{n-i,1}\theta_{i+1-n}, \dots, (1/n)x_{m,m_1+1+i}\theta_{1-m}$, остальные $-i-1$ столбцов нулевые.

При $-1 \leq i \leq s-1$ все m_1 столбцов блока $X_{21}^{(i+1-n)}$ равны соответственно $(1/n)x_{n-i,1}\theta_{i+1-n}, \dots, (1/n)x_{m-1-i,m_1}\theta_{i+2-m}$.

При $s \leq i \leq n-2$ первые $i+1-s$ столбцов блока $X_{21}^{(i+1-n)}$ нулевые, а остальные $n-1-i$ столбцов равны соответственно $(1/n)x_{m_1+1,i+2-s}\theta_{-m_1}, \dots, (1/n)x_{m-1-i,m_1}\theta_{i+2-m}$.

Наконец, при $n-1 \leq i \leq m+n-2$ блок $X_{21}^{(i+1-n)}$ является нулевой матрицей.

§ 13. Блочная структура матрицы $\mathfrak{A}^{(1)}(t)$

Обозначим через $\mathfrak{A}^{(1)}(t)$ матрицу $(\Phi^{(1)}(t))^{-1}\dot{\Phi}^{(1)}(t)$ и изучим ее блочную структуру, взяв в качестве $\Phi^{(1)}$ поочередно матрицу Вандермонда $\mathcal{V}$ и ее обобщение (см. п. 11.3).

13.1. Случай $m_1 = 0, n = m$. Матрица $(\mathcal{V}(t))^{-1}\dot{\mathcal{V}}(t)$ состоит из одного блока размеров $m \times m$. Проверяется, что ее элемент из l -й строки, j -го столбца равен

$$\frac{\dot{\gamma}_{1-m}(t)}{m^2\gamma_{1-m}(t)} \sum_{r=1}^m (r-1) \left(\frac{q_j(t)}{q_l(t)} \right)^{r-1}, \quad l, j = 1, \dots, m. \quad (13.1)$$

В частности, при $l = j$ имеем

$$\frac{m-1}{2m} \frac{\dot{\gamma}_{1-m}(t)}{\gamma_{1-m}(t)}. \quad (13.2)$$

13.2. Случай $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. Выделим блоки $\mathfrak{A}^{(1)}(t)$ в соответствии с (11.4). Поскольку первые m_1 столбцов матрицы $\dot{\Phi}^{(1)}(t)$ состоят из нулей, то $\mathfrak{A}_{11}^{(1)}(t) \equiv \mathfrak{A}_{21}^{(1)}(t) \equiv 0$. Строки блока $\mathfrak{A}_{12}^{(1)}(t)$ размеров $m_1 \times n$ имеют вид $(-\dot{\gamma}_{1-n}(t)/\gamma_{1-n}(t))\chi_0(t), \dots, (-\dot{\gamma}_{1-n}(t)/\gamma_{1-n}(t))\chi_{m_1-1}(t)$ (векторы $\chi_i(t)$ определены в п. 8.3). Элемент, стоящий в l -й строке, j -м столбце блока $\mathfrak{A}_{22}^{(1)}(t)$, равен

$$\frac{\dot{\gamma}_{1-n}(t)}{n^2\gamma_{1-n}(t)} \sum_{r=m_1+1}^m (r-1) \left(\frac{q_j(t)}{q_l(t)} \right)^{r-1}, \quad l, j = 1, \dots, n. \quad (13.3)$$

При $l = j$ найдем диагональные элементы

$$\frac{m+m_1-1}{2n} \frac{\dot{\gamma}_{1-n}(t)}{\gamma_{1-n}(t)} \quad (13.4)$$

и отметим, что они не зависят от j , $1 \leq j \leq n$.

§ 14. Матрица подобия $I + \xi Y(t, \xi)$

В этом параграфе будем предполагать, что $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. Обозначим для краткости

$$\xi = \varepsilon^{1/n}, \quad \varepsilon = \xi^n, \quad \frac{m+1}{2} \leq n \leq m, \quad (14.1)$$

и условимся сохранять за матричнозначными функциями прежние обозначения при замене аргумента ε на ξ и обратно.

14.1. Расщепление уравнения (14.7). Правая часть равенства (11.5) в новых обозначениях принимает вид

$$\Gamma^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i H^{(i+1-n)}(t). \quad (14.2)$$

Матрицы $H^{(i+1-n)}(t)$, $1 \leq i \leq m+n-2$, в (14.2) не являются диагональными, поэтому представим их согласно обозначениям (11.4) в виде блочных матриц и введем в рассмотрение преобразование подобия $I + \xi Y(t, \xi)$, которое приведет младшие члены пучка к блочно-диагональному виду. С этой целью в согласии с (11.3) введем блочно-диагональную матрицу

$$\mathfrak{B}(t, \xi) = \text{diag}(F(t, \xi); G(t, \xi)) = \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^{i-1} \mathfrak{B}^{(i)}(t), \quad (14.3)$$

где

$$\mathfrak{B}^{(i)}(t) = \text{diag}(F^{(i)}(t); G^{(i)}(t)), \quad 1 \leq i \leq m+n-2. \quad (14.4)$$

Потребуем, чтобы при всех $0 \leq t \leq T$ выполнялось равенство

$$(I + \xi Y)^{-1} \left(\left(\Gamma^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i H^{(i+1-n)}(t) \right) (I + \xi Y) - \xi^n \dot{Y} \right) = \Gamma^{(1)}(t) - \xi \mathfrak{B}(t, \xi), \quad (14.5)$$

в котором

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} - \xi \mathfrak{B} &= \text{diag}(J_1 - \xi F; Q - \xi G), \quad \xi = \varepsilon^{1/n}, \quad 2 \leq m_1 \leq \frac{m-1}{2}, \\ \Gamma^{(1)} - \xi \mathfrak{B} &= \text{diag}(-\xi f; Q - \xi G), \quad \xi = \varepsilon^{1/(m-1)}, \quad m_1 = 1,\end{aligned}\quad (14.6)$$

причем $\xi f(t, \xi) = \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i f^{(i)}(t)$ – скалярная функция. Равенство (14.5) представляет собой дифференциальное уравнение

$$\xi^{n-1} \dot{Y} = [\Gamma^{(1)}(t), Y] - \xi T_{H(t, \xi), \mathfrak{B}(t, \xi)} Y - H(t, \xi) + \mathfrak{B}(t, \xi) \quad (14.7)$$

относительно матричнозначной функции

$$Y(t, \xi) = \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^{i-1} Y^{(i)}(t). \quad (14.8)$$

Найденный в §12 вид блоков матриц $H^{(i+1-n)}(t)$ обуславливает структуру сплетающих матриц $Y^{(i)}(t)$, $1 \leq i \leq m+n-2$. Положим $Y_{11}(t, \xi) \equiv Y_{22}(t, \xi) \equiv 0$ и перепишем (14.7) в блочном виде. Воспользуемся легко проверяемыми соотношениями

$$\begin{aligned}[\Gamma^{(1)}(t), Y]_{11} &\equiv 0, & [\Gamma^{(1)}(t), Y]_{22} &\equiv 0, \\ [\Gamma^{(1)}(t), Y]_{12} &= T_{J_1, Q} Y_{12}, & [\Gamma^{(1)}(t), Y]_{21} &= T_{Q, J_1} Y_{21}; \\ (T_{H, \mathfrak{B}} Y)_{11} &= H_{12} Y_{21}, & (T_{H, \mathfrak{B}} Y)_{21} &= T_{H_{22}, F} Y_{21}, \\ (T_{H, \mathfrak{B}} Y)_{22} &= H_{21} Y_{12}, & (T_{H, \mathfrak{B}} Y)_{12} &= T_{H_{11}, G} Y_{12}.\end{aligned}\quad (14.9)$$

Тогда дифференциальное уравнение (14.7) распадается на два алгебраических и два дифференциальных уравнения вида

$$\xi^{n-1} \dot{Y}_{21} = T_{Q, J_1} Y_{21} - \xi T_{H_{22}, F} Y_{21} - H_{21}, \quad F = H_{11} + \xi H_{12} Y_{21}, \quad (14.10)$$

$$\xi^{n-1} \dot{Y}_{12} = T_{J_1, Q} Y_{12} - \xi T_{H_{11}, G} Y_{12} - H_{12}, \quad G = H_{22} + \xi H_{21} Y_{12}. \quad (14.11)$$

ТЕОРЕМА 14.1. Пусть $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ в (9.2). Тогда уравнение (14.7) имеет единственное ограниченное на отрезке $[0, T]$ решение $Y(t, \xi)$ при любой матрице $H(t, \xi)$ и при некоторой матрице $\mathfrak{B}(t, \xi)$.

14.2. Асимптотика решения уравнения (14.7). Соотношения (14.10), (14.11) позволяют найти одновременно внедиагональные блоки Y_{12} , Y_{21} , а также матрицы F , G , являющиеся диагональными блоками в (14.7). Получим явный вид решений уравнений (14.10), (14.11), выбрав $Y(t, \xi)$ из (14.8).

Вернемся к вопросу о структуре матриц $Y^{(i)}(t)$, $1 \leq i \leq m+n-2$. В качестве строк матрицы $Y_{12}^{(i)}(t)$ порядка $m_1 \times n$ выберем n -мерные вектор-строки $b_{i,1}(t)\chi_{i+1}(t), b_{i,2}(t)\chi_{i+2}(t), \dots, b_{i,m_1}(t)\chi_{i+m_1}(t)$, а в качестве столбцов матрицы $Y_{21}^{(i)}(t)$ порядка $n \times m_1$ примем n -мерные вектор-столбцы $a_{i,1}(t)\theta_{i+1}(t), a_{i,2}(t)\theta_i(t), \dots, a_{i,m_1}(t)\theta_{i+2-m_1}(t)$, введенные в п. 11.3 в предположении, что при всех $0 \leq t \leq T$, $1 \leq j \leq n$ $q_{1,j}^n \equiv -\gamma_{1-n}(t) \neq 0$. Здесь $a_{i,r}(t), b_{i,r}(t)$, $1 \leq i \leq m+n-2$, $1 \leq r \leq m_1$, – некоторые скалярные функции, поиск которых проводился в [15].

14.2.1. *Случай* $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. Для нахождения неизвестных матриц $Y_{12}^{(i)}(t)$, $Y_{21}^{(i)}(t)$, $F^{(i)}(t)$, $G^{(i)}(t)$ представим компоненты F , G матрицы $\mathfrak{B}$ в виде (14.3), (14.4) и приравняем коэффициенты при ξ^i , $1 \leq i \leq m+n-2$, в (14.10), (14.11). В результате придем к рекуррентным соотношениям

$$F^{(i)} = H_{11}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} H_{12}^{(i+1-n-l)} Y_{21}^{(l)}, \quad 1 \leq i \leq m+n-2, \quad (14.12)$$

$$T_{Q,J_1} Y_{21}^{(i)} = H_{21}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{22}^{(i+1-n-l)}, F^{(i-l)}} Y_{21}^{(l)}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$T_{Q,J_1} Y_{21}^{(i)} = \dot{Y}_{21}^{(i+1-n)} + H_{21}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{22}^{(i+1-n-l)}, F^{(i-l)}} Y_{21}^{(l)}, \quad (14.13)$$

$$n \leq i \leq m+n-2;$$

$$G^{(i)} = H_{22}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} H_{21}^{(i+1-n-l)} Y_{12}^{(l)}, \quad 1 \leq i \leq m+n-2, \quad (14.14)$$

$$T_{J_1,Q} Y_{12}^{(i)} = H_{12}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{11}^{(i+1-n-l)}, G^{(i-l)}} Y_{12}^{(l)}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$T_{J_1,Q} Y_{12}^{(i)} = \dot{Y}_{12}^{(i+1-n)} + H_{12}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{11}^{(i+1-n-l)}, G^{(i-l)}} Y_{12}^{(l)}, \quad (14.15)$$

$$n \leq i \leq m+n-2.$$

С помощью лемм 4.1, 4.2 (см. формулы (4.1), (4.2)) можно отыскать любое наперед заданное число коэффициентов разложений по степеням ξ матричных функций $Y_{21}(t, \xi)$, $Y_{12}(t, \xi)$, $F(t, \xi)$, $G(t, \xi)$.

14.2.2. *Случай* $m_1 = 1$. Если $m_1 = 1$, или $n = m-1$, то

$$Y_{12}^{(i)} = b_{i,1}(q_{1,1}^{i+1}, \dots, q_{1,m-1}^{i+1}), \quad Y_{21}^{(i)} = a_{i,1} \operatorname{col}(q_{1,1}^{i+1}, \dots, q_{1,m-1}^{i+1}). \quad (14.16)$$

Вместо соотношений (14.13), (14.15), (14.12) получим соответственно

$$Y_{21}^{(i)} = Q^{-1} \left(H_{21}^{(i+2-m)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{22}^{(i+2-m-l)}, F^{(i-l)}} Y_{21}^{(l)} \right), \quad 1 \leq i \leq m-2,$$

$$Y_{21}^{(i)} = Q^{-1} \left(\dot{Y}_{21}^{(i+2-m)} + H_{21}^{(i+2-m)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{22}^{(i+2-m-l)}, F^{(i-l)}} Y_{21}^{(l)} \right), \quad (14.17)$$

$$m-1 \leq i \leq 2m-3;$$

$$Y_{12}^{(i)} = - \left(H_{12}^{(i+2-m)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{11}^{(i+2-m-l)}, G^{(i-l)}} Y_{12}^{(l)} \right) Q^{-1}, \quad 1 \leq i \leq m-2,$$

$$Y_{12}^{(i)} = - \left(\dot{Y}_{12}^{(i+1-n)} + H_{12}^{(i+1-n)} + \sum_{l=1}^{i-1} T_{H_{11}^{(i+1-n-l)}, G^{(i-l)}} Y_{12}^{(l)} \right) Q^{-1}, \quad (14.18)$$

$$m-1 \leq i \leq 2m-3;$$

$$f^{(i)}(t) = H_{11}^{(i+2-m)}(t) + \sum_{l=1}^{i-1} H_{12}^{(i+2-m-l)}(t) Y_{21}^{(l)}(t), \quad 1 \leq i \leq 2m-3. \quad (14.19)$$

Согласно леммам 12.2, 12.3, а также (14.16) имеем

$$\begin{aligned} H_{11}^{(i)}(t) \neq 0 &\iff i \geq 3-m, \quad i = k(m-1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ H_{12}^{(r)}(t) Y_{21}^{(i)}(t) \neq 0 &\iff r+i+1 = k(m-1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Это означает, что при $m_1 = 1$ имеем скалярное уравнение

$$\dot{\psi} = - \sum_{i=0}^{2m-3} \varepsilon^i f^{(i+1)}(t) \psi. \quad (14.20)$$

В [15] показано, что $H_{11}^{(0)} = (1/\gamma_{2-m})(\dot{\sigma}_{m-1,1} + \sigma_{1,1}\sigma_{m,2} + \sigma_{m-1,1}\sigma_{m,m})$, откуда находится главный член $-f^{(1)}(t)$ асимптотики решения, где

$$f^{(1)} = H_{11}^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-3} H_{12}^{(-l)} Y_{21}^{(l)} = \frac{1}{\gamma_{2-m}} \left(\dot{\sigma}_{m-1,1} + \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{k,1} \sigma_{m,k+1} \right). \quad (14.21)$$

§ 15. Об операторе Коши уравнения с малым параметром при производной. Случай кратного спектра

15.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon \dot{W} = (D_0(t) - \varepsilon D_1(t))W, \quad 0 \leq t \leq T, \quad W(0, \varepsilon) = I, \quad (15.1)$$

с предельной матрицей $D_0(t)$, которая при всех $0 \leq t \leq T$ подобна матрице $\lambda(t)I + J$, где J — жорданова клетка $m \times m$, отвечающая нулевому собственному значению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Матрица $D_0(t)$ называется *устойчивой на отрезке* $[0, T]$, если при всех $0 \leq t \leq T$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda(t) \leq -\alpha < 0.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 15.1. Матрица $D_0(t)$ является устойчивой на $[0, T]$.

Пусть выполнены соотношения (9.2). Будем искать решение задачи (15.1) в форме

$$W(t, \varepsilon) = e^{(1/\varepsilon) \int_0^t \lambda(s) ds} \mathfrak{M}(t, \varepsilon) \Psi(t, \varepsilon) \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon), \quad \Psi(0, \varepsilon) = I, \quad (15.2)$$

где матрица $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$ подлежит определению в дальнейшем. Матрица $\Psi(t, \varepsilon)$ в итоге будет блочно-диагональной, причем ее блоки являются операторами Коши соответственно двух уравнений

- 1) с предельной матрицей J_1 порядка $m_1 \times m_1$, если $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ (здесь J_1 – жорданова клетка того же типа, что J);
- 2) с диагональной предельной матрицей, имеющей простой спектр.

При $m_1 = 1$ первое уравнение превращается в скалярное и регулярно зависит от малого параметра. При $m_1 = 0$ первый блок, а вместе с ним и первое уравнение отсутствуют.

Подставив (15.2) в (15.1), придем к равенству

$$\varepsilon \dot{\Psi} = \mathfrak{M}^{-1}(t, \varepsilon) ((D_0(t) - \lambda(t)I - \varepsilon D_1(t)) \mathfrak{M}(t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{\mathfrak{M}}(t, \varepsilon)) \Psi. \quad (15.3)$$

15.2. Первый шаг алгоритма. Используем формулы (2.4), (2.5) и положим

$$\mathfrak{M}(t, \varepsilon) = \Phi(t) \mathfrak{M}_I(t, \varepsilon) \quad (15.4)$$

в (15.3). Тогда согласно равенству $\Phi^{-1}(t) \varepsilon \dot{\mathfrak{M}}(t, \varepsilon) = \varepsilon \mathfrak{H}(t) \mathfrak{M}_I(t, \varepsilon) + \varepsilon \dot{\mathfrak{M}}_I(t, \varepsilon)$ получаем

$$\varepsilon \dot{\Psi} = \mathfrak{M}_I^{-1}(t, \varepsilon) ((J - \varepsilon \mathfrak{A}(t)) \mathfrak{M}_I(t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{\mathfrak{M}}_I(t, \varepsilon)) \Psi. \quad (15.5)$$

С точностью до малого слагаемого нами получено уравнение с пучком, подобным исходному, в базисе $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$, причем главной матрицей пучка является J .

ЗАМЕЧАНИЕ 15.1. Если с самого начала $D_0(t) \equiv J$, то в (15.2) следует взять $\mathfrak{M}(t, \varepsilon) = \mathfrak{M}_I(t, \varepsilon)$ и $\lambda(t) \equiv 0$.

15.3. Второй шаг алгоритма. Положим в (15.5)

$$\mathfrak{M}_I(t, \varepsilon) = (I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)) \mathfrak{M}_{II}(t, \varepsilon)$$

и согласно равенствам (8.1), (8.3), (8.4) от (15.5) перейдем к эквивалентному уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\Psi} = \mathfrak{M}_{II}^{-1}(t, \varepsilon) & \left(\left(J - \varepsilon \left(\mathcal{D}_{1-n}(t) + \sum_{i=2-n}^{m-1} U_i(t) \right) - \varepsilon^2 \sum_{i=1-m}^{m_1-1} U_{i,0}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon^3 \sum_{i=1-m}^{-s-1} U_{i,1}(t) \right) \mathfrak{M}_{II}(t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{\mathfrak{M}}_{II}(t, \varepsilon) \right) \Psi. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Тем самым в структурной матрице выделена главная часть $\mathcal{D}_{1-n}(t)$.

15.4. Третий шаг алгоритма. Матрица $\mathcal{D}_{1-n}(t)$ участвует в перестройке пучка путем создания новой предельной матрицы $\Gamma(t)$. Одновременно происходит смена базиса $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$, на базис, составленный из собственных и присоединенных векторов матрицы $\Gamma(t)$. Положим в (15.6)

$$\mathfrak{M}_{\text{II}}(t, \varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) \mathfrak{M}_{\text{III}}(t, \varepsilon),$$

воспользуемся равенствами (10.2), (10.4), (10.5). Тогда уравнение (15.6) записывается в форме

$$\varepsilon^{(n-1)/n} \dot{\Psi} = \mathfrak{M}_{\text{III}}^{-1} \left(\left(\Gamma(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \varepsilon^{i/n} H_{i+1-n}(t) \right) \mathfrak{M}_{\text{III}} - \varepsilon^{(n-1)/n} \dot{\mathfrak{M}}_{\text{III}} \right) \Psi. \quad (15.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. Поскольку матрицы $\Omega_{-n}(t)$ и $\Lambda(\varepsilon)$ не коммутируют, то 2-й и 3-й шаги алгоритма нельзя менять местами.

Равенство (15.7) в обозначениях (14.1) принимает вид

$$\xi^{n-1} \dot{\Psi} = \mathfrak{M}_{\text{III}}^{-1} \left(\left(\Gamma(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i H_{i+1-n}(t) \right) \mathfrak{M}_{\text{III}} - \xi^{n-1} \dot{\mathfrak{M}}_{\text{III}} \right) \Psi. \quad (15.7')$$

15.5. Четвертый шаг алгоритма. Вернемся в базис $\{e_r\}$, $1 \leq r \leq m$, положив в (15.7')

$$\mathfrak{M}_{\text{III}}(t, \varepsilon) = \Phi^{(1)}(t) \mathfrak{M}_{\text{IV}}(t, \varepsilon).$$

По аналогии с обозначением (2.1) примем $\mathfrak{H}^{(1)}(t) = (\Phi^{(1)}(t))^{-1} \dot{\Phi}^{(1)}(t)$ и заметим, что

$$(\Phi^{(1)}(t))^{-1} \xi^{n-1} \dot{\mathfrak{M}}_{\text{III}}(t, \varepsilon) = \xi^{n-1} \mathfrak{H}^{(1)}(t) \mathfrak{M}_{\text{IV}}(t, \varepsilon) + \xi^{n-1} \dot{\mathfrak{M}}_{\text{IV}}(t, \varepsilon).$$

Кроме того, используем формулы (11.5). После преобразований уравнение (15.7') записывается в форме

$$\xi^{n-1} \dot{\Psi} = \mathfrak{M}_{\text{IV}}^{-1} \left(\left(\Gamma^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i H^{(i+1-n)}(t) \right) \mathfrak{M}_{\text{IV}} - \xi^{n-1} \dot{\mathfrak{M}}_{\text{IV}} \right) \Psi, \quad (15.8)$$

где, как указано в п. 11.4, $\Gamma^{(1)}(t) = \text{diag}(J_1; Q(t))$ при $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, $\Gamma^{(1)}(t) = \text{diag}(0; Q(t))$ при $m_1 = 1$. Если $m_1 = 0$, $n = m$, то следует положить $\mathfrak{M}_{\text{IV}}(t, \varepsilon) = I$, и тогда

$$\varepsilon^{(m-1)/m} \dot{\Psi} = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon^{i/m} H^{(i+1-m)}(t) \right) \Psi. \quad (15.8')$$

Уравнение (15.8') соответствует случаю простого спектра при $D_0(t) = Q(t)$. Как и в § 7, здесь следует диагонализировать младшие члены пучка, применив преобразование подобия $I + \xi Z_*(t, \xi)$. Позже в п. 16.2 мы вновь обратимся к случаю $m_1 = 0$.

15.6. Пятый шаг алгоритма. Пусть $1 \leq m_1 \leq (m-1)/2$. Представим матрицы в форме блочно-диагональных, диагонализуем младшие члены пучка с помощью сплетающих матриц $Y(t, \varepsilon)$, что позволит в конечном итоге расщепить уравнение. С этой целью примем $\mathfrak{M}_V(t, \varepsilon) \equiv I$ и положим

$$\mathfrak{M}_{IV}(t, \varepsilon) = I + \varepsilon^{1/n} Y(t, \varepsilon) = I + \xi Y(t, \xi)$$

в (15.8). Согласно равенству $\xi^{n-1} \dot{\mathfrak{M}}_{IV} = \xi^n \dot{Y}$ вместо (15.8) получим эквивалентное уравнение

$$\xi^{n-1} \dot{\Psi} = (I + \xi Y)^{-1} \left\{ \left(\Gamma^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i H^{(i+1-n)}(t) \right) (I + \xi Y) - \xi^n \dot{Y} \right\} \Psi. \quad (15.9)$$

Введем матрицу $\mathfrak{B} = \text{diag}(F; G)$, где $F(t, \xi)$, $G(t, \xi)$ определены в (14.3), (14.4), и потребуем, чтобы выражение в фигурных скобках в (15.9) при всех $0 \leq t \leq T$ совпадало с матрицей $\Gamma^{(1)} - \xi \mathfrak{B}$ из (14.6). Далее представим Ψ как блочно-диагональную матрицу $\text{diag}(\Psi_1; \Psi_2)$. Тогда уравнение (15.9) при $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ записывается в виде расщепленной системы

$$\xi^{n-1} \dot{\Psi}_1 = \left(J_1 - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i F^{(i)}(t) \right) \Psi_1, \quad \xi^{n-1} \dot{\Psi}_2 = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i G^{(i)}(t) \right) \Psi_2, \quad (15.10)$$

причем $\Psi_1(0, \xi) = I_{m_1}$, $\Psi_2(0, \xi) = I_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.3. В результате всех пяти шагов алгоритма

$$\mathfrak{M}(t, \varepsilon) = \Phi(t) (I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)) \Lambda(\varepsilon) \Phi^{(1)}(t) (I + \varepsilon^{1/n} Y(t, \varepsilon)). \quad (15.11)$$

Если $m_1 = 1$, то первое уравнение в (15.10) с учетом (14.16) является скалярным и принимает форму

$$\dot{\psi} = - \sum_{i=0}^{2m-3} \varepsilon^i f^{(i+1)}(t) \psi. \quad (15.12)$$

Обозначим $H(t, \xi) = \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^{i-1} H^{(i+1-n)}(t)$ и заметим, что переход от (15.9) к (15.10) возможен, если разрешимо дифференциальное уравнение (14.7) относительно сплетающей матрицы $Y(t, \xi)$ из (14.8). Записывая (14.7) в виде блоков и используя результаты §14, приходим к формулам (14.12)–(14.15).

Обратившись к системе (15.10), отметим, что первое уравнение напоминает с учетом замечания 15.1 исходное уравнение (15.1). Разница в том, что, во-первых, оно рассматривается не в $\mathfrak{N}$, а в подпространстве $\text{End } PE$ матриц размерности $m_1 \times m_1$, зависящих от переменной t , $0 \leq t \leq T$, во-вторых, изменился *ранг* малого параметра (показатель степени параметра при производной) и, в-третьих, правая часть разложена не по целым степеням ε , а по степеням $\xi = \varepsilon^{1/n}$. Что касается второго уравнения, то оно соответствует случаю простого спектра при $D_0(t) = Q(t)$ (см. также (15.8'), где $n = m$).

§ 16. Уравнение в подпространстве $\text{End}(I - P)E$. Случай I)

16.1. Представление для $W_{I-P}(t, \varepsilon)$. Действуя по схеме п. 6.2, перейдем от уравнения

$$\xi^{n-1} \dot{\Psi}_2 = (Q(t) - \xi G(t, \xi)) \Psi_2 = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{m+n-2} \xi^i G^{(i)}(t) \right) \Psi_2 \quad (16.1)$$

в подпространстве $\text{End}(I - P)E$ к уравнению $\xi^{n-1} \dot{W} = (Q(t) - \xi \mathcal{G}(t, \xi)) W$ с диагональным пучком в том же подпространстве. Такой переход возможен в силу теоремы 6.2 о существовании единственного ограниченного решения дифференциального уравнения (6.8) относительно матрицы $Z(t, \xi) = Z_*(t, \xi)$ с нулевой диагональю при некоторой диагональной матрице $\mathcal{G}(t, \xi)$ при всех $0 \leq t \leq T$ и всех достаточно малых ξ . В результате имеем

$$W_{I-P}(t, \varepsilon) = \mathfrak{M}(t, \varepsilon) \text{diag}(0_{m_1}; e^{\tilde{\mu}_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_n(t, \varepsilon)}) \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon), \quad (16.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(t, \varepsilon) &= \Phi(t)(I + \varepsilon \Omega_{-n}(t)) \Lambda(\varepsilon) \Phi^{(1)}(t)(I + \varepsilon^{1/n} Y(t, \varepsilon)) \\ &\quad \times (I + \varepsilon^{1/n} Z_*(t, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (16.3)$$

$$\mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-m)/n}),$$

$$\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda(\tau) - \varepsilon^{1/n} q_{1,j}(\tau) - \varepsilon^{2/n} \frac{\gamma_{2-n}(\tau)}{n q_{1,j}^{n-2}(\tau)} - \varepsilon^{3/n} \dots \right) d\tau, \quad (16.4)$$

$$1 \leq j \leq n.$$

16.2. Случай I). Так как $m_1 = 0$, или $n = m$, то, используя равенства (2.5), (10.4), (11.5), после применения преобразования подобия $\Phi(t) \Lambda(\varepsilon) \Psi(t)$ получаем уравнение (15.8'), т.е. уравнение (16.1) в $\text{End } E$ при $\xi = \varepsilon^{1/m}$, $G^{(i)} = H^{(i+1-m)}$, $1 \leq i \leq 2(m-1)$. Как и в § 7, здесь следует диагонализировать младшие члены пучка, применив преобразование подобия $I + \xi Z_*(t, \xi)$. Напомним, что согласно (10.5) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= J - \mathcal{D}_{1-m}(t); \quad H_{i+1-m}(t) = U_{i+1-m}(t), \quad 1 \leq i \leq m-1; \\ H_{i+1-m}(t) &= U_{i+1-m}(t) + U_{i+1-2m,0}(t), \quad m \leq i \leq 2(m-1). \end{aligned}$$

Из (11.4) находим

$$\begin{aligned} G^{(m-1)}(t) &= H^{(0)}(t) = \Psi^{-1}(t)(U_0(t) \Psi(t) + \dot{\Psi}(t)), \\ H^{(i+1-m)} &= \Psi^{-1}(t) H_{i+1-m}(t) \Psi(t), \\ i &\neq m-1, \quad 1 \leq i \leq 2(m-1). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 16.1. Если выполнено предположение 15.1 и

$$\sigma_{m,1}(t) \neq 0, \quad m \geq 2,$$

при всех $0 \leq t \leq T$, то оператор Коши уравнения (15.1) имеет вид (16.10), причем матрица $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$ находится из (16.9) и скалярные функции $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$ определяются равенствами (16.11).

В частности, когда $D(t, \varepsilon) \equiv D(\varepsilon)$, имеем

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)t) = e^{(\lambda/\varepsilon)t} \mathfrak{M}(\varepsilon) \operatorname{diag}(e^{t\mu_1(\varepsilon)}, \dots, e^{t\mu_m(\varepsilon)}) \mathfrak{M}^{-1}(\varepsilon), \quad (16.12)$$

где

$$\mu_j(\varepsilon) = -\varepsilon^{(1-m)/m} \left(q_{1,j} + \varepsilon^{1/m} \frac{\gamma_{2-m}}{mq_{1,j}^{m-2}} + \varepsilon^{2/m} \dots \right), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (16.13)$$

§ 17. Скалярное уравнение в $\operatorname{End} PE$. Случай II)

Пусть $m_1 = 1$ в (9.2). В подпункте 14.2.2 указано, что после расщепления получаем одномерное (скалярное) уравнение (14.20), а также уравнение

$$\xi^{m-2} \dot{\Psi}_2 = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{2m-3} \xi^i G^{(i)}(t) \right) \Psi_2 \quad (17.1)$$

в подпространстве $\operatorname{End}(I - P)E$ размерности $n = m - 1$, в котором $\xi = \varepsilon^{1/(m-1)}$, $G^{(i)} = H^{(i+2-m)}$, $1 \leq i \leq 2m - 3$. После применения преобразования подобия $I + \xi Z(t, \xi)$ уравнение (17.1) примет вид

$$\xi^{m-2} \dot{W} = \left(Q(t) - \sum_{i=1}^{2m-3} \xi^i Q_i(t) \right) W. \quad (17.2)$$

Таким образом, при $m_1 = 1$ в итоге всех шести преобразований подобия находим $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$ из (16.3), полагая $n = m - 1$. Тогда

$$W(t, \varepsilon) = \mathfrak{M}(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}, e^{\tilde{\mu}_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_{m-1}(t, \varepsilon)}) \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon), \quad (17.3)$$

где $\mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_j(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t & \left(\lambda(\tau) - \varepsilon^{1/(m-1)} q_{1,j}(\tau) \right. \\ & \left. - \varepsilon^{2/(m-1)} \frac{\gamma_{3-m}(\tau)}{(m-1)q_{1,j}^{m-3}(\tau)} - \varepsilon^{3/(m-1)} \dots \right) d\tau, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\ \tilde{\mu}_m(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t & (\lambda(\tau) - \varepsilon f^{(1)}(\tau) - \varepsilon^2 f^{(2)}(\tau) - \varepsilon^3 \dots) d\tau. \end{aligned} \quad (17.4)$$

ТЕОРЕМА 17.1. Если выполнено предположение 15.1 и

$$\sigma_{m,1}(t) \equiv 0, \quad \gamma_{2-m}(t) \neq 0, \quad m \geq 3,$$

при всех $0 \leq t \leq T$, то оператор Коши уравнения (15.1) имеет вид (17.3), причем матрица $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$ находится из (16.3) при $n = m - 1$ и скалярные функции $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$ определяются равенствами (17.4).

В частности, когда $D(t, \varepsilon) \equiv D(\varepsilon)$, получаем

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon) t) = e^{(\lambda/\varepsilon)t} \mathfrak{M} \operatorname{diag}(e^{t\mu_m(\varepsilon)}; e^{t\mu_1(\varepsilon)}, \dots, e^{t\mu_{m-1}(\varepsilon)}) \mathfrak{M}^{-1}, \quad (17.5)$$

где $\mu_m(\varepsilon) = -f^{(1)} - \varepsilon f^{(2)} - \varepsilon^2 \dots$,

$$\mu_j(\varepsilon) = -\varepsilon^{(2-m)/(m-1)} \left(q_{1,j} + \varepsilon^{1/(m-1)} \frac{\gamma_{3-m}}{(m-1)q_{1,j}^{m-3}} + \varepsilon^{2/(m-1)} \dots \right),$$

$$1 \leq j \leq m-1$$

(ср. с (16.13)).

ЗАМЕЧАНИЕ 17.1. Если $\sigma_{1,m-1} = 0$, то $\Omega_{1-m} = 0$ и преобразование $I + \varepsilon \Omega_{1-m}$ превращается в тождественное.

§ 18. Сильное вырождение структурной матрицы. Случаи I), II) в подпространстве $\operatorname{End} PE$

18.1. Переход к системе независимых уравнений. Пусть теперь $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ в соотношениях (9.2). Обратимся к расщепленной системе (15.10) и заметим, что второе уравнение из (15.10) в $\operatorname{End}(I - P)E$ с функциями $G^{(i)}(t)$ из (14.14) изучено в п. 16.1. Первое уравнение из (15.10) в $\operatorname{End} PE$ с функциями $F^{(i)}(t)$ из (14.12) рассматривалось в п. 15.6. Оно по форме напоминает уравнение (15.5) в пространстве $\mathfrak{N}$, поэтому можно использовать алгоритм, изложенный в § 15, и ввести в рассмотрение преобразование подобия

$$\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}(\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon); 0_n) \quad (18.1)$$

типа (16.3), действующее в $\operatorname{End} PE$.

По аналогии с предположением 8.1 и формулами (8.2), (8.3) будем считать выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 18.1. Справедливы неравенства $1 \leq s_1 \leq m_1$, или $0 \leq m_2 \leq (m_1 - 1)/2$.

Здесь используются обозначения $m_1 = m_2 + n_1$, $s_1 = n_1 - m_2$. Важно отметить, что исследование заканчивается, когда в $\operatorname{End} PE$ имеет место случай I) (при $m_2 = 0$) или случай II) (при $m_2 = 1$). Если же в подпространстве $\operatorname{End} PE$ возникает случай сильного вырождения (при $2 \leq m_2 \leq (m_1 - 1)/2$), то после первой редукции задачи следует повторить аналогичные рассуждения.

В согласии с формулами из п. 16.2 и § 17 получаем, что в случае I)

$$W_P(t, \varepsilon) = \mathfrak{M}(t, \varepsilon) P \mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_{n+1}(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}; 0_n) \\ \times \mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon) P \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon), \quad (18.2)$$

а в случае II)

$$W_P(t, \varepsilon) = \mathfrak{M}(t, \varepsilon) P \mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}; e^{\tilde{\mu}_{n+1}(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_{m-1}(t, \varepsilon)}; 0_n) \\ \times \mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon) P \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon). \quad (18.3)$$

И тогда в силу (16.2), (18.2), (18.3) получаем

$$W(t, \varepsilon) = W_P(t, \varepsilon) + W_{I-P}(t, \varepsilon).$$

Далее опишем структуру матрицы $\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon)$ и укажем вид скалярных функций $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$, $n+1 \leq j \leq m$, в каждом из случаев I), II).

Предварительно отметим, что матрицы $F^{(i)}(t)$ порядка $m_1 \times m_1$ действуют в $\operatorname{End} PE$ и ведут свое происхождение от матриц $H_{i+1-n}(t)$, имеющих от одной до трех ненулевых линий, параллельных диагонали (см. (8.1), (10.5), (11.5)). В §12 (см. п. 12.3) указано, что номера линий однодиагональных (или двухдиагональных, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$) матриц $F^{(i)}(t)$ при всех $1 \leq i \leq m+n-2$ могут изменяться от $1 - m_1$ до $m_1 - 1$. Из лемм 12.6–12.8 вытекает, что ненулевые элементы однодиагональных матриц $F^{(1)}(t), \dots, F^{(s-1)}(t)$ располагаются на линиях с *неотрицательными* номерами. Матрица $F^{(s)}(t)$ содержит один ненулевой элемент, стоящий в m_1 -й строке и 1-м столбце, и является первой однодиагональной матрицей с *отрицательным* номером, причем наименьшим.

Поскольку матрица $F^{(i)}(t)$ по структуре совпадает с $H_{11}^{(i+1-n)}(t)$, то случай I) в $\operatorname{End} PE$ может возникнуть только при $i = s, i = s+n, i = s+2n$ (последний имеет место, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$), а случай II) в $\operatorname{End} PE$ — только при $i = s+1, i = s+n+1, i = s+2n+1$ (последний также имеет место, когда $1 \leq s \leq m_1 - 2$).

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случаев $i = s, i = s+1$. Будем обозначать сумму элементов матрицы $F^{(i)}(t)$ через $\gamma_{i,1}(t)$. Если матрица $F^{(i)}(t)$ является двухдиагональной, то условимся, что $\gamma_{i,1}(t)$ — это сумма элементов матрицы с меньшим номером (большим весом).

18.2. Случай I) в $\operatorname{End} PE$. Пусть $m_2 = 0, n_1 = m_1$. Случай I) в подпространстве $\operatorname{End} PE$ характеризуется соотношением

$$\gamma_{s,1}(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.4)$$

Возьмем матрицу срезания $\bar{A}_1(\varepsilon)$ из (10.3), матрицу Вандермонда $\mathcal{V}_1(t)$ порядка $m_1 \times m_1$, матрицу $Z_1(t, \varepsilon)$ с нулевой диагональю и положим

$$\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) = \bar{A}_1(\varepsilon) \mathcal{V}_1(t) (I + \varepsilon^{\nu_1} Z_1(t, \varepsilon)). \quad (18.5)$$

Как показано в [15], $\bar{\nu} = s/(nm_1)$, $\nu_1 = \nu + \bar{\nu} = 1/m_1$, $\Gamma_1(t) = J_1 - F^{(s)}(t)$. При выполнении условия (18.4) все ненулевые попарно различные собственные значения $q_1^{(1)}(t)$ матрицы $\Gamma_1(t)$ находятся из тождества

$$(q_1^{(1)}(t))^{m_1} + \gamma_{s,1}(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.6)$$

Так как $\mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-m)/n})$, $\mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{s(1-m_1)/nm_1})$, то

$$P \mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon) P \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-2m_1)/m_1}). \quad (18.7)$$

Следовательно, в (18.2) имеем

$$\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda(\tau) - \varepsilon^{1/m_1} q_{1,j}^{(1)}(\tau) - \varepsilon^{2/m_1} \dots) d\tau, \quad n+1 \leq j \leq m. \quad (18.8)$$

ТЕОРЕМА 18.1. Пусть выполнены соотношения (9.2) при $2 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и справедливо предположение 15.1. Если, кроме того, $\gamma_{s,1}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то оператор Коши уравнения (15.1) имеет вид

$$\begin{aligned} W(t, \varepsilon) &= W_P(t, \varepsilon) + W_{I-P}(t, \varepsilon) \\ &= \mathfrak{M}(t, \varepsilon) (P \mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_{n+1}(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}; 0_n) \mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon) P \\ &\quad + \operatorname{diag}(0_{m_1}; e^{\tilde{\mu}_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_n(t, \varepsilon)})) \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (18.9)$$

где матрицы $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$, $\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon)$ определяются равенствами (16.3), (18.5) соответственно, а скалярные функции $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$ – равенствами (16.4), (18.8).

В [15] установлено, что

$$\gamma_{s,1}(t) = \frac{1}{\gamma_{1-n}(t)} \sum_{r=m_1}^n \sigma_{r,1}(t) \sigma_{m,r+1}(t),$$

поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 18.1. Если в условиях предположения 15.1 выполнены соотношения (9.2) и, кроме того, $\sum_{r=m_1}^n \sigma_{r,1}(t) \sigma_{m,r+1}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то справедливо представление (18.9) оператора Коши уравнения (15.1) с матрицами $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$, $\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon)$ из (16.3), (18.5) соответственно и скалярными функциями $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$, определяемыми равенствами (16.4), (18.8).

18.3. Случай II) в $\operatorname{End} PE$. Пусть $m_2 = 1$, $n_1 = m_1 - 1$. Напомним, что через $\gamma_{s+1,1}(t)$ обозначена сумма двух элементов однодиагональной матрицы $F^{(s+1)}(t) = F_{s+1,1}^{(0)}(t) + \mathcal{D}_{s+1,1}(t)$ с номером диагонали, равным $2 - m_1$. Примем

$$\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) = (I + \varepsilon^{(s+1)\nu} \Omega_{-n_1,1}(t)) \bar{\Lambda}_1(\varepsilon) \Phi^{(2)}(t) (I + \varepsilon^{\nu_1} Y_1(t, \varepsilon)) (I + \varepsilon^{\nu_1} Z_1(t, \varepsilon)). \quad (18.10)$$

Здесь $\nu = 1/n$, $m_2 = 1$, матрица $\bar{\Lambda}_1(\varepsilon)$, $\bar{\nu} > 0$, определяется в (10.3), $\nu_1 = \nu + \bar{\nu}$, матрицы $\Omega_{-n_1,1}(t)$ (однодиагональная), $\Phi^{(2)}(t)$, $Y_1(t, \varepsilon)$ (сплетающая), $Z_1(t, \varepsilon)$ (с нулевой диагональю) аналогичны описанным выше.

Случай II) в подпространстве $\operatorname{End} PE$ характеризуется соотношениями

$$F^{(s)}(t) \equiv 0, \quad \gamma_{s+1,1}(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.11)$$

Отдельно следует рассмотреть случай $m_1 = 2$, отличающийся от рассмотренного в п. 18.1 случая $m = 2$, $m_1 = 0$ тем, что здесь $s = 2 > 1$, но $s_1 = n_1 - m_2 = 0 < 1$, и предположение 18.1 не выполнено. Такое исследование было проведено в [15].

Пусть $3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$, $m_2 = 1$. Тогда согласно [15] имеем $\nu_1 = 1/(m_1 - 1)$, $\bar{\nu} = (s+1)/(n(m_1 - 1))$, $\Gamma_1(t) = J_1 - \mathcal{D}_{2-m_1,1}(t)$. При выполнении условия (18.11) все попарно различные собственные значения $q_1^{(1)}(t)$ матрицы $\Gamma_1(t)$ находятся из тождества

$$q_1^{(1)}(t) ((q_1^{(1)}(t))^{m_1-1} + \gamma_{s+1,1}(t)) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.12)$$

По аналогии с § 17 находим, что

$$\begin{aligned}
 (I - P)\mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{(1-m)/n}), \quad P\mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon)P\mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-2}), \\
 \tilde{\mu}_j(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda(\tau) - \varepsilon^{1/(m_1-1)} q_{1,j}^{(1)}(\tau) - \varepsilon^{2/(m_1-1)} \dots) d\tau, \\
 n+1 &\leq j \leq m-1, \\
 \tilde{\mu}_m(t, \varepsilon) &= - \int_0^t (q_{1,m}(\tau) + \varepsilon q_{2,m}(\tau) + \varepsilon^2 \dots) d\tau.
 \end{aligned} \tag{18.13}$$

ТЕОРЕМА 18.2. Пусть выполнены соотношения (9.2) при $3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и справедливо предположение 15.1. Если, кроме того, $\gamma_{s,1}(t) \equiv 0$, $\gamma_{s+1,1}(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t \leq T$, то оператор Коши уравнения (15.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 W(t, \varepsilon) &= W_P(t, \varepsilon) + W_{I-P}(t, \varepsilon) \\
 &= \mathfrak{M}(t, \varepsilon) (P\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon) \operatorname{diag}(e^{\tilde{\mu}_m(t, \varepsilon)}; e^{\tilde{\mu}_{n+1}(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_{m-1}(t, \varepsilon)}; 0_n) \mathfrak{M}_1^{-1}(0, \varepsilon)P \\
 &\quad + \operatorname{diag}(0_{m_1}; e^{\tilde{\mu}_1(t, \varepsilon)}, \dots, e^{\tilde{\mu}_n(t, \varepsilon)})) \mathfrak{M}^{-1}(0, \varepsilon),
 \end{aligned} \tag{18.14}$$

где матрицы $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$, $\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon)$ определяются равенствами (16.3), (18.10) соответственно, а скалярные функции $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$ — равенствами (16.4), (18.13).

В [15] показано, что

$$\gamma_{s+1,1}(t) = \frac{1}{\gamma_{1-n}(t)} \sum_{r=m_1-1}^n (\sigma_{r,1}(t) \sigma_{m-1,r+1}(t) + (\sigma_{r,1}(t) + \sigma_{r+1,2}(t)) \sigma_{m,r+2}(t)).$$

Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 18.2. Если в условиях предположения 15.1 выполнены соотношения (9.2) при $3 \leq m_1 \leq (m-1)/2$ и, кроме того,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=m_1}^n \sigma_{r,1}(t) \sigma_{m,r+1}(t) &\equiv 0, \\
 \sum_{r=m_1-1}^n (\sigma_{r,1}(t) \sigma_{m-1,r+1}(t) + (\sigma_{r,1}(t) + \sigma_{r+1,2}(t)) \sigma_{m,r+2}(t)) &\neq 0
 \end{aligned}$$

при всех $0 \leq t \leq T$, то справедливо представление (18.14) оператора Коши уравнения (15.1) с матрицами $\mathfrak{M}(t, \varepsilon)$, $\mathfrak{M}_1(t, \varepsilon)$ из (16.3), (18.10) соответственно и скалярными функциями $\tilde{\mu}_j(t, \varepsilon)$, определяемыми равенствами (16.4), (18.13).

Список литературы

1. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.
2. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. Федорюк М. В. Асимптотические методы в анализе // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1986. С. 93–210.
4. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
5. Коняев Ю. А. Теория возмущений в прикладных задачах. М.: Изд-во МЭИ, 1990.
6. Феценко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966.
7. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
8. Сотниченко Н. А., Феценко С. Ф. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений // Препринт № 80.3. Киев: ИМ АН УССР, 1980.
9. Елисеев А. Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №5. С. 999–1020; 1984. Т. 48. №6. С. 1171–1195.
10. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // УМН. 1988. Т. 43. №3. С. 3–53.
11. Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1989.
12. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1968.
13. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973.
14. Чернышов К. И. Метод стандартного расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. №6. С. 1311–1316.
15. Чернышов К. И. Асимптотический анализ уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Киев: ИМ НАН Украины, 1992.
16. Чернышов К. И. Асимптотические разложения решения задачи Коши для одного линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №5. С. 765–779.
17. Чернышов К. И. Об экспоненте матричного пучка, зависящего от параметра, в случае кратного спектра предельной матрицы // Spectral and evolution problems. V. 13. Proc. of the Thirteenth Crimean Autumn Math. School-Symposium (18–29 сентября 2003 г., Симферополь, Украина). Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2003. Р. 65–81.
18. Колесов Ю. С., Кубышкин Е. П. Минимальный алгоритм исследования устойчивости линейных систем // Исследования по устойчивости в теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1977. С. 142–155.
19. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // УМН. 1971. Т. 25. №2. С. 101–114.
20. Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987.
21. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
22. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
23. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
24. Территин Х. Л. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Математика. Сб. пер. 1957. Т. 1. №2. С. 29–59.