Общероссийский математический портал

В. В. Щиголев, О расширениях и правилах ветвления модулей, близких к вполне расщепляемым, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 8, 119–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:30:33

УДК 512.547.2

В. В. Шиголев

О расширениях и правилах ветвления модулей, близких к вполне расщепляемым

В работе описываются модули $D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}}$ и $D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{n+1}}$ для некоторых простых $K\Sigma_n$ -модулей (вполне расщепляемых или близких к ним) D^λ , где K – поле характеристики $p > 0$ и Σ_n – симметрическая группа степени n . Этот результат основан на оценке сверху размерностей Ext^1 -пространств между некоторыми простыми модулями.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Зафиксируем поле K характеристики $p > 0$. Обозначим через Σ_n симметрическую группу степени n . Мы будем предполагать естественное включение $\Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n$. Для теории представлений симметрической группы принципиальное значение имеет вычисление модулей $D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}}$ (в случае $n > 0$) и $D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{n+1}}$, где D^λ – простой $K\Sigma_n$ -модуль, соответствующий p -регулярному разбиению λ числа n . Имеет место следующее разложение по блокам алгебр $K\Sigma_{n-1}$ и $K\Sigma_{n+1}$ (см. [1; (55.2)] и [2; § 1]):

$$D^\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \text{Res}_\alpha D^\lambda, \quad D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{n+1}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \text{Ind}^\alpha D^\lambda.$$

В работах [3] и [4] содержится много информации о модулях $\text{Res}_\alpha D^\lambda$ и $\text{Ind}^\alpha D^\lambda$. Например, известны поколи этих модулей. Известно также, когда любой произвольно выбранный из этих модулей прост. С другой стороны, не все композиционные кратности непростых модулей $\text{Res}_\alpha D^\lambda$ и $\text{Ind}^\alpha D^\lambda$ в общем случае известны.

Однако для некоторых непростых блочных компонент все вышеупомянутые кратности могут быть точно найдены. Например, при помощи основного результата работы [5] в настоящей работе мы доказываем теоремы 9.4 и 9.5, которые вместе с известным утверждением 9.1 дают формулы композиционных кратностей

- 1) модуля $D^\lambda \uparrow^{\Sigma_{n+1}}$, где D^λ – вполне расщепляемый $K\Sigma_n$ -модуль (см. [6; определение 0.1]);
- 2) модуля $D^{\lambda^B} \downarrow_{\Sigma_n}$, где D^λ – вполне расщепляемый $K\Sigma_n$ -модуль, отличный от $D^{(1^{p-1})}$, и B – наименьшая λ -добавляемая клетка.

Теорема 6 работы [5] подсказывает, для каких еще модулей можно надеяться получить аналогичные результаты. Разбиение λ называется *большим* (для данного p), если модуль D^λ вполне расщепляемый, λ содержит более одной ненулевой

части и хотя бы один косой p -крюк. В этом случае через $\tilde{\lambda}$ обозначается разбиение, полученное из λ перемещением всех клеток из последней строки наивысшего косоугольного p -крюка разбиения λ в первую. Большие модули существуют только при $p > 2$. В этой работе мы доказываем оценку сверху (теорема 8.2) размерностей пространств $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^{\tilde{\lambda}}, D^{\mu})$, когда $\tilde{\lambda}$ не доминирует строго μ , аналогичную оценку теоремы 6 работы [5]. Существуют примеры, показывающие, что эта оценка не точна. Доказательству точной формулы планируется посвятить отдельную работу. Однако полученной оценки достаточно, чтобы

- 1) получить точную формулу (утверждение 9.1 и теорема 9.6) композиционных кратностей модуля $D^{\tilde{\lambda} \uparrow \Sigma_{n+1}}$, где λ – большое разбиение числа n такое, что $h(\lambda) \geq (p+3)/2$, $\lambda_1 + h(\lambda) \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $h_{2,1}(\lambda) \neq p-1$;
- 2) выдвинуть гипотезы о том, чему равны композиционные кратности некоторых модулей $\text{Ind}^{\alpha} D^{\lambda}$ и $\text{Res}_{\alpha} D^{\lambda}$ (гипотезы 9.7–9.9), подтвержденные вычислениями в пределах известных матриц разложения.

В [4] вычисляются композиционные кратности модуля D^{μ} в $\text{Ind}^{\alpha} D^{\lambda}$ и $\text{Res}_{\alpha} D^{\lambda}$ для μ , полученного соответственно добавлением или удалением одной клетки разбиения λ . Применяя отображение Муллино m (см. [7] и [8]), можно вычислить те же композиционные кратности в случае, когда $m(\mu)$ получается соответственно добавлением или удалением одной клетки разбиения $m(\lambda)$. Однако для доказательства гипотез 9.7–9.9 требуется показать, что выше упомянутые кратности равны 1 для некоторых разбиений μ , не имеющих ни одного из двух перечисленных видов. Сделаем предположение, что этого можно добиться методами работы [3].

Доказательство теоремы 9.6 требует много вычислений, которые изложены в §§ 4–9. Однако эта работа оправдана, потому что существует опасение, что вполне расщепляемые модули устроены слишком хорошо (например, известны их размерности) и теоремы 9.4 и 9.5 представляют исключительные случаи. Однако теорема 9.6 доказывает, что это не так и можно надеяться на получение новых точных правил ветвлений в окрестности вполне расщепляемых модулей.

Статья организована следующим образом. В § 2 вводятся основные объекты, используемые в тексте. Основным отличием техники настоящей работы от техники работы [5] является использование абаксов. Теория абаксов изложена в [9]. В § 3 доказываются неравенства. В частности, мы получаем наиболее полезные неравенства из § 3 работы [5] методом, стандартным для гомологической алгебры. В § 4 излагается индуктивный способ получения оценки сверху размерностей пространств $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^{\lambda}, D^{\mu})$. При помощи него мы заново получаем основной результат работы [5], но гораздо более простым и наглядным за счет использования абаксов способом. Небольшая, хотя и необходимая модификация этого способа используется для доказательства теоремы 8.2. Для получения более точной оценки в этой теореме требуется вспомогательная оценка сверху, полученная в § 7. Чтобы сделать эту вспомогательную оценку более точной, мы используем умножение на знакопеременное представление и связанное с ним отображение Муллино. Соответствующие вычисления изложены в § 6. Наконец, в § 9 доказаны выше упомянутые теоремы о композиционных кратностях ограниченных и индуцированных модулей.

§ 2. Обозначения и определения

2.1. Общие положения. На протяжении всей работы мы фиксируем поле K положительной характеристики p . Все кольца и модули будем считать конечномерными над K . Для $n \in \mathbb{Z}$ через $\bar{n}$ обозначим $n + p\mathbb{Z}$ – элемент кольца $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Для пары $n, m \in \mathbb{Z}$, где $m > 0$, через $\text{quo}(n, m)$ и $\text{rem}(n, m)$ обозначим целые числа такие, что $n = \text{quo}(n, m)m + \text{rem}(n, m)$ и $0 \leq \text{rem}(n, m) < m$. Для целых чисел r и s введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [r, s] &= \{i \in \mathbb{Z} : r \leq i \leq s\}, & (r, s] &= \{i \in \mathbb{Z} : r < i \leq s\}, \\ [r, s) &= \{i \in \mathbb{Z} : r \leq i < s\}, & (r, s) &= \{i \in \mathbb{Z} : r < i < s\}. \end{aligned}$$

Для произвольного утверждения ρ через $[\rho]$ обозначим 1, если это утверждение выполнено, и 0 в противном случае. Для любого подмножества S множества целых чисел определим его характеристическую функцию $\overline{S}(n) = [n \in S]$, где $n \in \mathbb{Z}$. Определим упорядоченное множество $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, где $+\infty > n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Для любого модуля M и простого модуля N через $[M : N]$ обозначим композиционную кратность модуля N в M .

2.2. Разбиения. Для любого набора a через $|a|$ будем обозначать его длину, а для натурального i такого, что $i \leq |a|$, если $|a| < +\infty$, через a_i будем обозначать i -й с начала элемент набора a .

Разбиением числа n называется бесконечный невозрастающий набор неотрицательных целых чисел, сумма элементов которого равна n . Утверждение о том, что λ – разбиение n , кратко обозначается записью $\lambda \vdash n$. На практике часто изображается только начальная часть разбиения конечной длины, за которой следуют нули (не путать с конечными наборами). Например, для разбиения λ запись $\lambda = (5, 3, 0)$ обозначает, что $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_i = 0$ при $i \geq 3$. *Высотой разбиения λ* называется число $h(\lambda)$, равное количеству ненулевых вхождений разбиения λ . Разбиение λ , не содержащее p и более одинаковых вхождений, называется *p -регулярным*. Через $\sum \lambda$ обозначим сумму всех компонент разбиения λ .

Для разбиения λ определим его *диаграмму Юнга* формулой

$$[\lambda] = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq h(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Элементы из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ будем называть *клетками*. Для клетки $A = (i, j)$ положим $r(A) = i$ и $\text{res } A = \bar{j} - \bar{i}$. Если диаграммы разбиений λ и μ содержат одинаковое количество клеток каждого p -вычета, то мы пишем $\lambda \sim \mu$. *Удаляемые, добавляемые, нормальные, хорошие, конормальные и кохорошие клетки разбиения λ* определены в [4]. Мы также используем обозначения λ_A и λ^B , где A – удаляемая и B – добавляемая клетки разбиения λ для разбиений с диаграммами $[\lambda] \setminus \{A\}$ и $[\lambda] \cup \{B\}$ соответственно. Обозначим также через λ^t разбиение, диаграмма которого получена транспонированием диаграммы $[\lambda]$.

Для разбиения λ и целого i положим $\sigma_i(\lambda) = \sum_{1 \leq j \leq i} \lambda_j$. Считается, что разбиение λ доминирует разбиение μ , если $\sigma_i(\lambda) \geq \sigma_i(\mu)$ для любого $i \geq 1$. Этот факт записывается в виде $\lambda \geq \mu$. Запись $\lambda \triangleright \mu$ означает, что $\lambda \geq \mu$ и $\lambda \neq \mu$.

Через $h_{i,j}(\lambda)$ обозначим длину крюка разбиения λ с основанием (i, j) . Имеем $h_{i,j}(\lambda) = \lambda_i + \lambda_j^t - i - j + 1$. *Граница (rim), p -сегмент (p-segment), p -граница (p-edge), косой p -крюк (rim p-hook), p -ядро (p-core) разбиения λ* определены в [9] и [7]. Обозначим через $e(\lambda)$ количество клеток в p -границе разбиения λ и через $\varphi(\lambda)$ – разбиение, полученное из λ удалением его p -границ.

2.3. Модули. Каждому разбиению λ числа n соответствует $K\Sigma_n$ -модуль S^λ , который называется *модулем Шпекта* (см., например, [10; определение 4.3]). Положим $D^\lambda = S^\lambda / \text{rad } S^\lambda$. Отображение $\lambda \mapsto D^\lambda$ задает взаимно однозначное соответствие между p -регулярными разбиениями числа n и простыми $K\Sigma_n$ -модулями.

Для $n \geq 0$ положим $\varepsilon_n = ((k+1)^d, k^{p-1-d})$, где $n = k(p-1) + d$, $k \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq d < p-1$. Важную роль в настоящей работе играет следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа n такие, что $h(\lambda) < p$, μ p -регулярно и $\lambda \not\preceq \mu$. Тогда

$$\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(S^\lambda, D^\mu) \cong \begin{cases} K, & \text{если } \lambda = \mu = \varepsilon_n \text{ и } n \geq p; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство фактически такое же, как и доказательство теоремы 2.9 работы [2]. Надо лишь установить, что $\mu = \varepsilon_n$ или $\mu = \varkappa_n$ (после того, как предположено $\lambda_A = \varepsilon_{n-1}$ и $\gamma = \varepsilon_{n-1}$) без использования леммы 1.6.

Действительно, так как $\mu_C \trianglelefteq \gamma = \varepsilon_{n-1} = \lambda_A$ и $\mu_C \not\trianglelefteq \lambda_A$, то мы имеем $\mu_C = \varepsilon_{n-1}$. Это значит, что $\mu = \varkappa_n$ или $\mu = \varepsilon_n$, или $\mu = \varepsilon_{n-1}^D$, где $D = (p, 1)$. Однако последний случай невозможен, так как $\varepsilon_{n-1}^D \triangleleft \varepsilon_n, \varkappa_n$ и $\lambda = \varepsilon_n$ или $\lambda = \varkappa_n$.

Следующее утверждение доказывается так же, как теорема 2.10 работы [2], только с использованием утверждения 2.1 вместо теоремы 2.9 из [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $p > 2$ и λ, μ – разбиения числа n такие, что $h(\lambda) < p$, μ p -регулярно и $\lambda \not\preceq \mu$. Тогда $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \cong \text{Hom}_{\Sigma_n}(\text{rad } S^\lambda, D^\mu)$.

Наконец, отметим утверждение, следующее непосредственно из работы [9] и теоремы 2.10 работы [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. В случае, когда $\lambda \not\preceq \mu$ или когда $p > 2$, $\lambda = \mu$ и $h(\lambda) < p$, имеем $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) = 0$.

Модули $\text{Ind}^\alpha M$ и $\text{Res}_\alpha M$, где M – $K\Sigma_n$ -модуль, определены, например, в §1 работы [2].

2.4. Абаки. Мы несколько модифицируем классическое определение абака, данное в [9], чтобы сделать его более симметричным и удобным для работы как с удалением, так и с добавлением клеток. Все ниже следующие факты могут быть доказаны методами работ [9] и [8].

Абаком называется любое отображение $\Lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$, для которого существует число N такое, что $\Lambda(n) = 1$ при $n \leq -N$ и $\Lambda(n) = 0$ при $n \geq N$. *Смещением абака* Λ называется предел $\text{shift}(\Lambda) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sum_{n \geq x} \Lambda(n)$, взятый по целым x . Каждый абак Λ задает инъективное отображение $\text{node}_\Lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ по формуле

$$\text{node}_\Lambda(a) = \left(1 + \sum_{n > a} \Lambda(n), \sum_{n \leq a} (1 - \Lambda(n)) \right).$$

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} c - r &= a - \text{shift}(\Lambda), \quad \text{где } \text{node}_\Lambda(a) = (r, c); \\ \text{res node}_\Lambda(a) &= \bar{a} - \overline{\text{shift}(\Lambda)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Действительно, выберем произвольное целое x такое, что $\Lambda(n) = 1$ при $n < x$. Имеем

$$c - r = \sum_{x \leq n \leq a} (1 - \Lambda(n)) - 1 - \sum_{n > a} \Lambda(n) = a - x - \sum_{x \leq n} \Lambda(n) = a - \text{shift}(\Lambda).$$

Элемент $a \in \mathbb{Z}$ такой, что $\Lambda(a) = 1$, называется *бусинкой* (*bead*) *абака* Λ , а элемент $b \in \mathbb{Z}$ такой, что $\Lambda(b) = 0$, называется *пробелом* (*space*) *абака* Λ .

Бусинка a абака Λ называется

- 1) *собственной*, если существует пробел b абака Λ , строго меньший a ;
- 2) *начальной*, если $\Lambda(a - 1) = 0$;
- 3) *нормальной*, если она начальная и $\sum_{0 < k \leq s} (\Lambda(a + pk) - \Lambda(a - 1 + pk)) \geq 0$ для любого $s > 0$;
- 4) *хорошей*, если она наименьшая нормальная бусинка данного p -вычета;
- 5) *поднимаемой*, если $\Lambda(a - p) = 0$.

Пробел b абака Λ называется

- 1) *начальным*, если $\Lambda(b - 1) = 1$;
- 2) *конормальным*, если он начальный и $\sum_{0 < k \leq s} (\Lambda(b - 1 - pk) - \Lambda(b - pk)) \geq 0$ для любого $s > 0$;
- 3) *хорошим*, если он наибольший конормальный пробел данного p -вычета.

Если абак содержит хотя бы одну собственную бусинку, то он называется *собственным*. В противном случае он называется *несобственным*.

Первая из формул (2.1) показывает, какое разбиение поставить в соответствие абак Λ . Пусть $a_1, a_2, \dots$ – все бусинки абака Λ , перечисленные в порядке убывания. Тогда имеем $\text{node}_\Lambda(a_i) = (i, \lambda_i)$ для некоторых чисел λ_i . Определим разбиение $P(\Lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Считается, что Λ – *абак разбиения* $P(\Lambda)$. Обозначим через h количество собственных бусинок абака Λ . Тогда $P(\Lambda)$ имеет высоту h . В связи с этим количество собственных бусинок абака будем называть его *высотой*. Имеем $h_{i,1}(P(\Lambda)) = a_i - b$ для $1 \leq i \leq h$, где b – наименьший пробел абака Λ , который, как видно, равен $\text{shift}(\Lambda) - h$.

Пусть Λ – произвольный абак и $m \in \mathbb{Z}$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$(m + \Lambda)(n) = \Lambda(n + m).$$

Элементарная проверка показывает, что

$$P(m + \Lambda) = P(\Lambda), \quad \text{shift}(m + \Lambda) = -m + \text{shift}(\Lambda). \quad (2.2)$$

Заметим, что для любого разбиения λ существует в точности один абак Λ фиксированного смещения такой, что $\lambda = P(\Lambda)$. Из этого факта и формул (2.2) следует, что если $P(\Lambda) = P(M)$, то $\text{shift}(\Lambda) + \Lambda = \text{shift}(M) + M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Отображение node_Λ задает взаимно однозначное соответствие*

- 1) *множества Λ -начальных бусинок и множества $P(\Lambda)$ -удаляемых клеток;*
- 2) *множества Λ -нормальных бусинок и множества $P(\Lambda)$ -нормальных клеток;*
- 3) *множества Λ -хороших бусинок и множества $P(\Lambda)$ -хороших клеток;*

- 4) множества Λ -начальных пробелов и множества $P(\Lambda)$ -добавляемых клеток;
- 5) множества Λ -конормальных пробелов и множества $P(\Lambda)$ -конормальных клеток;
- 6) множества Λ -кохороших пробелов и множества $P(\Lambda)$ -кохороших клеток.

Пусть c – начальная бусинка или начальный пробел абак Λ . Обозначим через Λ_c в первом случае и через Λ^c во втором абак, значение которого в точке n равно $1 - \Lambda(n)$, когда $n = c$ или $n = c - 1$, и равно $\Lambda(n)$, когда $n \neq c$ и $n \neq c - 1$. С операциями удаления и добавления клеток только что описанные преобразования абак Λ связаны следующими формулами:

$$\begin{aligned} P(\Lambda_c) &= P(\Lambda)_{\text{node}_\Lambda(c)}, & \text{если } c \text{ – начальная бусинка,} \\ P(\Lambda^c) &= P(\Lambda)^{\text{node}_\Lambda(c)}, & \text{если } c \text{ – начальный пробел.} \end{aligned}$$

Одной из основных причин использования абак Λ является то, что при помощи них легко проследить удаление косых p -крюков и p -граней. Пусть a – поднимаемая бусинка абак Λ . Обозначим через $\text{hook}_\Lambda(a)$ косой крюк разбиения $P(\Lambda)$ с основанием $(\sum_{n \geq a} \Lambda(n), \sum_{n \leq a-p} (1 - \Lambda(n)))$. Абак, значение которого в точке n равно $1 - \Lambda(n)$, когда $n = a$ или $n = a - p$, и равно $\Lambda(n)$, когда $n \neq a$ и $n \neq a - p$, считается полученным из Λ поднятием бусинки a на одну позицию.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. *Отображение hook_Λ – биекция множества поднимаемых бусинок абак Λ и множества косых p -крюков разбиения $P(\Lambda)$. При этом если абак $\bar{\Lambda}$ получен из Λ поднятием бусинки a на одну позицию, то $P(\bar{\Lambda})$ – разбиение, полученное из $P(\Lambda)$ удалением крюка $\text{hook}_\Lambda(a)$.*

Введенная выше терминология объясняется следующим способом изображения абак. Пусть Λ – произвольный абак. На позиции (r, c) таблицы T , где $r \in \mathbb{Z}$ и $c = 0, \dots, p - 1$, поставим символ “.”, если $\Lambda(pr + c) = 0$, и символ “о”, если $\Lambda(pr + c) = 1$. По определению абак существуют два числа r_1 и r_2 такие, что в строке r таблицы T стоят только “о”, если $r < r_1$, и стоят только “.”, если $r > r_2$. Нарисуем только строки r , где $r_1 \leq r \leq r_2$, таблицы T и укажем номер какой-нибудь строки.

В связи с этой конструкцией множество $\{n \in \mathbb{Z} : n = i \pmod{p}\}$, где $0 \leq i \leq p - 1$, назовем i -м столбцом (i -th runner).

ПРИМЕР. Абак $\Lambda = \overline{(-\infty, 0] \cup \{4, 8, 9, 11, 14, 17\}}$ и его изображение в случае $p = 7$:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & . & . & . & \circ & . & . \\ . & \circ & \circ & . & \circ & . & . \\ \circ & . & . & \circ & . & . & . \end{array}$$

Здесь нулевая строка самая верхняя. Имеем $P(\Lambda) = (11, 9, 7, 6, 6, 3)$.

Продолжим определенные в п. 2.2 функции φ и e на множество абак так, чтобы $P(\varphi(\Lambda)) = \varphi(P(\Lambda))$ и $e(\Lambda) = e(P(\Lambda))$ для любого абак Λ .

Пусть Λ – произвольный абак. Обозначим через a наибольшую бусинку и через b наименьший пробел этого абак.

Положим $\varphi(\Lambda) = \Lambda$ и $e(\Lambda) = 0$ для любого несобственного абак Λ . В оставшейся части пункта будем считать, что абак Λ собственный. Следуя определению 1.3 из [8], рассмотрим множество бусинок $\{m_1, \dots, m_N\}$ абак Λ (в цитируемой работе оно называется “set of r-movable beads”), определенное следующим образом. Положим $m_1 = a$. Предположим, что бусинки $m_1, \dots, m_i$ уже определены. Если выполнено одно из условий:

- 1) $m_i - p$ – несобственная бусинка;
- 2) $m_i - p$ – пробел и не существует собственных бусинок меньших, чем $m_i - p$,

то положим $N = i$ и процесс построения окончен. В противном случае положим m_{i+1} равной наибольшей бусинке s абак Λ такой, что $s \leq m_i - p$. Легко видеть, что все построенные бусинки $m_1, \dots, m_N$ собственные.

Построим абак $\varphi(\Lambda)$ следующим образом. Если $m_N - p$ – несобственная бусинка, то передвинем m_N на позицию b . Иначе передвинем m_N на позицию $m_N - p$. Оставшиеся бусинки $m_{N-1}, \dots, m_1$ поднимем на одну позицию по очереди, начиная с m_{N-1} и кончая m_1 . Получившийся абак обозначим через $\varphi(\Lambda)$. Положим

$$e(\Lambda) = \sum P(\Lambda) - \sum P(\varphi(\Lambda)).$$

2.5. Операция $\mathcal{H}_\varepsilon$. В дальнейшем для произвольного абак Λ и натурального i через $b^\Lambda(i)$ будем обозначать i -ю бусинку абак Λ , считая с наибольшей, а через $b_\Lambda(i)$, если $i \leq h(\Lambda)$, – i -ю собственную бусинку абак Λ , считая с наименьшей. В случае, когда абак Λ собственный, положим для краткости $b^\Lambda = b^\Lambda(1)$ и $b_\Lambda = b_\Lambda(1)$.

Пусть ε – конечный набор целых чисел. Рассмотрим следующее отображение:

$$\Lambda + \sum_{i=1}^{|\varepsilon|} (\overline{\{b^\Lambda(i) + p\varepsilon_i\}} - \overline{\{b^\Lambda(i)\}}). \quad (2.3)$$

Так как в результате мы снова хотим получить абак, то мы будем считать, что операция $\mathcal{H}_\varepsilon$ применима к Λ тогда и только тогда, когда формула (2.3) определяет абак. В этом случае положим $\mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda)$ равным отображению (2.3). Для любого разбиения λ положим $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda) = P(\mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda))$, где $\lambda = P(\Lambda)$. Легко проверить, что такое определение корректно.

Другими словами, если $\mathcal{H}_\varepsilon$ применима к Λ , то $\mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda)$ получен из Λ перемещением каждой бусинки $b^\Lambda(i)$, где $1 \leq i \leq |\varepsilon|$, на позицию $b^\Lambda(i) + p\varepsilon_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Абак (разбиение) называется ε -большим, если он вполне расщепляемый высоты $|\varepsilon|$ и к нему применима операция $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Имеет место следующее очевидное утверждение.

ЛЕММА 2.7. Пусть Λ – ε -большой абак и $1 \leq i \leq |\varepsilon|$ такие, что в столбце, содержащем $b^\Lambda(i) + 1$, нет собственных бусинок абак Λ . Тогда $\Lambda^{b^\Lambda(i)+1} - \varepsilon$ -большой абак и $\mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda^{b^\Lambda(i)+1}) = \mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda)^{b^\Lambda(i)+1+p\varepsilon_i}$.

§3. Неравенства

Сформулируем следующий стандартный факт для дальнейших ссылок.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть A, B, C – конечномерные K -пространства и R – K -алгебра.

а) Если $A \rightarrow B \rightarrow C$ – точная последовательность, то

$$\dim B \leq \dim A + \dim C.$$

б) Если A, B и C – R -модули и A изоморфен подмодулю B , то

$$\dim \operatorname{Hom}_R(C, A) \leq \dim \operatorname{Hom}_R(C, B).$$

в) Если A, B и C – R -модули и A – гомоморфный образ B , то

$$\dim \operatorname{Hom}_R(A, C) \leq \dim \operatorname{Hom}_R(B, C).$$

3.1. Случай ограниченной высоты. Положим

$$\varepsilon(\lambda, \mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = \mu^B \text{ для некоторой } \mu\text{-конормальной клетки } B; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\gamma(\mu, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \lambda_A \text{ для некоторой } \lambda\text{-нормальной клетки } A; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $p > 2$, λ и μ – p -регулярные разбиения числа $n > 0$, $h(\lambda) < p$, $\lambda \not\prec \mu$ и A – μ -хорошая клетка вычета α . Тогда

$$\dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n-1}}^1(\operatorname{Res}_\alpha D^\lambda, D^{\mu_A}) + \varepsilon(\lambda, \mu_A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждения 2.3 можно считать, что $\lambda \sim \mu$. Действуя функтором $\operatorname{Res}_\alpha$ на точную последовательность $0 \rightarrow \operatorname{rad} S^\lambda \rightarrow S^\lambda \rightarrow D^\lambda \rightarrow 0$, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} S^\lambda \rightarrow \operatorname{Res}_\alpha S^\lambda \rightarrow \operatorname{Res}_\alpha D^\lambda \rightarrow 0.$$

Применяя $\operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(-, D^{\mu_A})$ к последней последовательности, получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\operatorname{Res}_\alpha S^\lambda, D^{\mu_A}) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} S^\lambda, D^{\mu_A}) \\ &\rightarrow \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n-1}}^1(\operatorname{Res}_\alpha D^\lambda, D^{\mu_A}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу закона взаимности Фробениуса, теоремы E(iii) работы [4] и $\lambda \sim \mu$ имеем

$$\dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\operatorname{Res}_\alpha S^\lambda, D^{\mu_A}) = \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, \operatorname{Ind}^\alpha D^{\mu_A}) = \varepsilon(\lambda, \mu_A).$$

В силу закона взаимности Фробениуса, того, что D^μ изоморфен подмодулю модуля $\operatorname{Ind}^\alpha D^{\mu_A}$, утверждения 3.1, б) и утверждения 2.2 получаем

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} S^\lambda, D^{\mu_A}) &= \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} S^\lambda, \operatorname{Ind}^\alpha D^{\mu_A}) \\ &\geq \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} S^\lambda, D^\mu) = \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu). \end{aligned}$$

Теперь осталось применить утверждение 3.1, а) к последовательности (3.1).

Двойственным образом доказывается

ЛЕММА 3.3. Пусть $p > 2$, λ и μ — p -регулярные разбиения числа n , $h(\lambda) < p$, $\lambda \not\vdash \mu$ и A — μ -хорошая клетка вычета α . Тогда

$$\dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(\operatorname{Ind}^\alpha D^\lambda, D^{\mu^A}) + \gamma(\lambda, \mu^A).$$

3.2. Случай произвольной высоты. При отсутствии ограничения $h(\lambda) < p$ оценку размерности пространства $\operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu)$ можно провести другим способом.

ЛЕММА 3.4. Пусть λ и μ — различные p -регулярные разбиения числа $n > 0$ и A — λ -хорошая клетка вычета α . Имеем

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) &\leq \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n-1}}^1(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha D^\mu) \\ &\quad + \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I — инъективная оболочка модуля D^μ . Так как $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(D^\lambda, I) = 0$, то $\operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \cong \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(D^\lambda, I/D^\mu)$. Пусть M — такой $K\Sigma_n$ -подмодуль модуля I , что $D^\mu \subset M$ и $M/D^\mu \cong \operatorname{soc}(I/D^\mu)$. Действуя функтором $\operatorname{Res}_\alpha$ на точную последовательность $0 \rightarrow D^\mu \rightarrow M \rightarrow M/D^\mu \rightarrow 0$ и затем применяя $\operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, -)$, получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha M) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha(M/D^\mu)) \\ &\rightarrow \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n-1}}^1(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha D^\mu). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу закона взаимности Фробениуса, того, что D^λ — гомоморфный образ модуля $\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}$, и утверждения 3.1, с) получаем

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha(M/D^\mu)) &= \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M/D^\mu) \\ &\geq \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(D^\lambda, \operatorname{soc}(I/D^\mu)) = \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(D^\lambda, I/D^\mu) \\ &= \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu). \end{aligned}$$

Применим $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(-, M)$ к точной последовательности

$$0 \rightarrow \operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A} \rightarrow \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A} \rightarrow D^\lambda \rightarrow 0$$

и получим точную последовательность

$$\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(D^\lambda, M) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M). \quad (3.3)$$

Первый член этой последовательности равен 0, так как $\mu \neq \lambda$.

Посмотрим, чему равен образ последнего морфизма последовательности (3.3). Возьмем произвольный $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M)$. Так как модуль M/D^μ полупростой, то $\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A} \subset \operatorname{Ker}(\pi \circ \varphi)$, где $\pi: M \rightarrow M/D^\mu$ — естественная проекция. Отсюда $\varphi(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}) \subset D^\mu$.

Следовательно, последний член последовательности (3.3) может быть заменен на $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu)$. Отсюда и из двойственности Фробениуса

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha M) &= \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M) \\ &\leq \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu). \end{aligned}$$

Теперь осталось применить утверждение 3.1, а) к последовательности (3.2).

Двойственным образом доказывается

ЛЕММА 3.5. Пусть λ и μ – различные p -регулярные разбиения числа n и A – λ -хорошая клетка вычета α . Имеем

$$\dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq \dim \operatorname{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(D^{\lambda^A}, \operatorname{Ind}^\alpha D^\mu) + \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Res}_\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2.10 работы [2] следует, что леммы 3.4 и 3.5 остаются верны и для $\lambda = \mu$ в случае $p > 2$ и $h(\lambda) < p$.

Оказывается, что возникающие в леммах 3.4 и 3.5 параметры

$$\dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu), \quad \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Res}_\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu)$$

иногда допускают оценку сверху.

ЛЕММА 3.6. Пусть λ – p -регулярное разбиения числа n и M – $K\Sigma_n$ -модуль такие, что $\operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(S^\lambda, \operatorname{rad} M) = 0$, $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, \operatorname{rad} M) = 0$ и $\operatorname{head}(M) \cong D^\lambda$. Тогда M – $K\Sigma_n$ -гомоморфный образ модуля S^λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, -)$ к точной последовательности $0 \rightarrow \operatorname{rad} M \rightarrow M \rightarrow D^\lambda \rightarrow 0$, получаем точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, \operatorname{rad} M) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, M) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, D^\lambda) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(S^\lambda, \operatorname{rad} M) = 0.$$

Отсюда $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, M) \cong \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, D^\lambda) \cong K$ и существует ненулевой гомоморфизм $\varphi: S^\lambda \rightarrow M$. Так как $\operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(S^\lambda, \operatorname{rad} M) = 0$, то $\operatorname{Im} \varphi \not\subset \operatorname{rad} M$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \varphi = M$.

ЛЕММА 3.7. Пусть λ и μ – различные p -регулярные разбиения числа $n > 0$ такие, что $\operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(S^\lambda, D^\mu) = 0$. Предположим, что существуют λ -хорошая клетка A и μ -хорошая клетка B вычета α и что A – единственная λ -нормальная клетка вычета α и $\lambda_A \neq \mu_B$. Тогда $\dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu) \leq \varepsilon(\lambda, \mu_B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждения 2.3 можно считать, что $\lambda \sim \mu$. Положим для краткости $n = \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu)$. Пусть V – $K\Sigma_n$ -подмодуль модуля $\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}$ такой, что $(\operatorname{rad} \operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A})/V \cong \bigoplus n D^\mu$. Положим $M = (\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A})/V$. Действуя функтором $\operatorname{Res}_\alpha$ на точную последовательность $0 \rightarrow \operatorname{rad} M \rightarrow M \rightarrow D^\lambda \rightarrow 0$ и учитывая эквивалентность $\operatorname{Res}_\alpha D^\lambda \cong D^{\lambda^A}$, следуящую из того, что A – единственная λ -нормальная клетка вычета α , получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} M \rightarrow \operatorname{Res}_\alpha M \xrightarrow{\pi} D^{\lambda^A} \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

В силу двойственности Фробениуса имеем

$$0 \neq \operatorname{Hom}_{\Sigma_n}(\operatorname{Ind}^\alpha D^{\lambda^A}, M) \cong \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(D^{\lambda^A}, \operatorname{Res}_\alpha M).$$

Пусть χ – произвольный ненулевой элемент последнего пространства. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{soc} \operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} M &\cong \operatorname{soc} \operatorname{Res}_\alpha \left(\bigoplus n D^\mu \right) \cong \operatorname{soc} \left(\bigoplus n \operatorname{Res}_\alpha D^\mu \right) \\ &\cong \bigoplus n \operatorname{soc} \operatorname{Res}_\alpha D^\mu \cong \bigoplus n D^{\mu_B}. \end{aligned}$$

В силу условия $\lambda_A \neq \mu_B$ мы получаем отсюда, что $\operatorname{Im} \chi \cap \operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} M = 0$. Следовательно, χ расщепляет эпиморфизм π из последовательности (3.4) и

$$\operatorname{Res}_\alpha M \cong D^{\lambda_A} \oplus \operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} M. \quad (3.5)$$

Так как модуль D^{μ_B} – гомоморфный образ модуля $\operatorname{Res}_\alpha D^\mu$, то $\bigoplus n D^{\mu_B}$ – гомоморфный образ модуля $\operatorname{Res}_\alpha \operatorname{rad} M$, который по формуле (3.5) – гомоморфный образ модуля $\operatorname{Res}_\alpha M$.

В силу $\operatorname{head}(M) \cong D^\lambda$ и $\operatorname{rad} M \cong \bigoplus n D^\mu$ к модулю M применима лемма 3.6. Следовательно, M – гомоморфный образ модуля S^λ . Отсюда $\operatorname{Res}_\alpha M$ – гомоморфный образ модуля $\operatorname{Res}_\alpha S^\lambda$. В результате получаем, что $\bigoplus n D^{\mu_B}$ – гомоморфный образ модуля $\operatorname{Res}_\alpha S^\lambda$.

В силу утверждения 3.1, с), закона двойственности Фробениуса, теоремы E(iii) работы [4] и $\lambda \sim \mu$ получаем

$$\begin{aligned} n &= \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}} \left(\bigoplus n D^{\mu_B}, D^{\mu_B} \right) \leq \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_{n-1}} (\operatorname{Res}_\alpha S^\lambda, D^{\mu_B}) \\ &= \dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n} (S^\lambda, \operatorname{Ind}^\alpha D^{\mu_B}) = \varepsilon(\lambda, \mu_B). \end{aligned}$$

Двойственным образом доказывается

ЛЕММА 3.8. Пусть λ и μ – различные p -регулярные разбиения числа n такие, что $\operatorname{Ext}_{\Sigma_n}^1(S^\lambda, D^\mu) = 0$. Предположим, что существуют λ -кохорошая клетка A и μ -кохорошая клетка B вычета α и что A – единственная λ -кономальная клетка вычета α и $\lambda^A \neq \mu^B$. Тогда

$$\dim \operatorname{Hom}_{\Sigma_n} (\operatorname{rad} \operatorname{Res}_\alpha D^{\lambda^A}, D^\mu) \leq \gamma(\lambda, \mu^B).$$

3.3. Фильтрации и самодвойственность. До конца текущего параграфа будем использовать обозначения §2 работы [4].

ЛЕММА 3.9. Фиксируем $\lambda \in X^+(n)$ и вычет $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Пусть $s_1 < \dots < s_k$ – множество всех j таких, что j кономален для λ и $\operatorname{res}(j, \lambda_j + 1) = \alpha$. Предположим, что $\gamma \in X^+(n)$ такой, что

$$[\operatorname{Tr}^\alpha L_n(\lambda) : L_n(\gamma)] > 2 \sum_{i=2}^k [\Delta_n(\lambda + \varepsilon_{s_i}) : L_n(\gamma)].$$

Тогда $\gamma = \lambda + \varepsilon_{s_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $N = \text{Tr}^\alpha L_n(\lambda)$. По теореме С из [4] существует фильтрация $0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_k = N$ такая, что для $1 \leq j \leq k$ модуль N_j/N_{j-1} — ненулевой гомоморфный образ модуля $\Delta_n(\lambda + \varepsilon_{s_i})$.

Предположим, что $\gamma \neq \lambda + \varepsilon_{s_1}$. Тогда $[N_1 : L_n(\gamma)] = [\text{rad } N_1 : L_n(\gamma)]$. Так как модуль N контравариантно самодвойственный, то существует подмодуль $M \subset N$, контравариантно двойственный модулю $N/\text{rad } N_1$. Предположение $N_1 \subset M$ (на самом деле даже $\text{rad } N_1 \subset M$) приводит к противоречию следующим образом:

$$\begin{aligned} [N : L_n(\gamma)] &= [N/\text{rad } N_1 : L_n(\gamma)] + [\text{rad } N_1 : L_n(\gamma)] \leq 2[M : L_n(\gamma)] \\ &= 2[N/\text{rad } N_1 : L_n(\gamma)] = 2[N/N_1 : L_n(\gamma)] \leq 2 \sum_{i=2}^k [\Delta_n(\lambda + \varepsilon_{s_i}) : L_n(\gamma)]. \end{aligned}$$

Теперь по второй теореме об изоморфизме имеем $0 \neq N_1 + M/M \cong N_1/N_1 \cap M$, откуда следует $[N_1 + M/M : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] = 1$. Напомним, что $[N : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] = 1$ в силу теоремы В (iv) из [4] и

$$[\text{rad } N_1 : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] \leq [\text{rad } \Delta_n(\lambda + \varepsilon_{s_1}) : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] = 0.$$

Получаем противоречие:

$$\begin{aligned} [M : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] &= [N : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] - [\text{rad } N_1 : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] = 1, \\ [N_1 + M/M : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] &\leq [N : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] - [M : L_n(\lambda + \varepsilon_{s_1})] = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.10. *Фиксируем p -регулярное разбиение $\lambda \vdash r$ и вычет $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Пусть $B_1, \dots, B_k$ — все λ -конормальные клетки вычета α , перечисленные снизу вверх. Предположим, что для некоторого p -регулярного $\gamma \vdash r + 1$ выполнено*

$$[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^\gamma] > 2 \sum_{i=2}^k [S^{\lambda^{B_i}} : D^\gamma].$$

Тогда $\gamma = \lambda^{B_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $n > r$. В силу теоремы 4.16 из [11] имеем

$$[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^\gamma] = [\text{Tr}^\alpha L_n(\lambda^t) : L_n(\gamma^t)]$$

и в силу леммы (6.6b) из [12] имеем

$$[S^{\lambda^{B_i}} : D^\gamma] = [\Delta_n((\lambda^{B_i})^t) : L_n(\gamma^t)],$$

где $\lambda^t, \gamma^t, (\lambda^{B_i})^t$ надо понимать как элементы из $X^+(n)$. Теперь требуемый результат следует из леммы 3.9.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выскажем предположение, что результат для функтора Res_α , двойственный лемме 3.10, также справедлив и что он следует (при помощи теорем С', В' (iv) работы [4]) из леммы для функтора Tr_α , двойственной лемме 3.9, леммы 7.4 из [4] при подходящем выборе n и теоремы 2.11 (v) из [13].

§4. Вполне расщепляемые разбиения

4.1. Общая конструкция. Выберем некоторое множество X , каждый элемент которого имеет вид (λ, μ) , где λ и μ — p -регулярные разбиения такие, что $h(\lambda) < p$, $\lambda \not\sim \mu$, $\lambda \sim \mu$ и существует не более чем одна λ -нормальная клетка каждого вычета.

Определим отображение $U: X \rightarrow \mathbb{Z}'$ по индукции следующим образом. Положим $U(\emptyset, \emptyset) = 0$. Пусть теперь (λ, μ) — пара непустых разбиений из X . Для каждой μ -хорошей клетки A положим $m_A(\lambda, \mu)$ равным следующему числу:

- 1) $\varepsilon(\lambda, \mu_A)$, если не существует λ -хороших клеток вычета $\text{res } A$;
- 2) $U(\lambda_B, \mu_A) + \varepsilon(\lambda, \mu_A)$, если существует λ -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$ и $(\lambda_B, \mu_A) \in X$;
- 3) $+\infty$, если существует λ -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$ и $(\lambda_B, \mu_A) \notin X$.

Положим $U(\lambda, \mu) = \min\{m_A(\lambda, \mu) : A - \mu\text{-хорошая клетка}\}$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $p > 2$ и $(\lambda, \mu) \in X$. Тогда $\dim \text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \leq U(\lambda, \mu)$, где $\lambda, \mu \vdash n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается индукцией по n с использованием леммы 3.2.

4.2. Случай вполне расщепляемых разбиений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6; 0.1]. Неприводимый $K\Sigma_n$ -модуль D^λ называется *вполне расщепляемым* (*completely splittable*) тогда и только тогда, когда ограничение $D^\lambda \downarrow_{\Sigma^\mu}$ на любую подгруппу Юнга $\Sigma^\mu \subset \Sigma_n$ полупросто.

Для разбиения λ положим $\chi(\lambda) = 0$, если $\lambda = \emptyset$, и $\chi(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_{h(\lambda)} + h(\lambda)$ иначе. Точное описание вполне расщепляемых модулей дает следующая

ТЕОРЕМА [6; 2.1]. Модуль D^λ вполне расщепляем тогда и только тогда, когда $\chi(\lambda) \leq p$.

Разбиение λ и любой его абак Λ такие, что модуль D^λ вполне расщепляем, будем также называть *вполне расщепляемыми*.

Первая из формул (2.1) показывает, что для любого собственного абак

$$\chi(P(\Lambda)) = b^\Lambda - b_\Lambda + 1. \quad (4.1)$$

Из этой формулы следует, что собственный абак Λ вполне расщепляем тогда и только тогда, когда $b_\Lambda > b^\Lambda - p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. $(-1, 0^n, 1)$ -большой абак (разбиение), где $n \geq 0$, будем называть просто *большим*. Для любого большого абак (разбиения) высоты h положим $\tilde{\Lambda} = \mathcal{H}_{(-1, 0^{h-2}, 1)}(\Lambda)$.

Легко видеть, что абак Λ большой тогда и только тогда, когда он собственный, $b^\Lambda > b_\Lambda > b^\Lambda - p$ и b^Λ — поднимаемая бусинка.

Пусть γ — произвольное разбиение и C — его удаляемая клетка. Тогда

$$\sigma_i(\gamma_C) = \begin{cases} \sigma_i(\gamma), & \text{если } i < r(C); \\ \sigma_i(\gamma) - 1, & \text{если } i \geq r(C). \end{cases} \quad (4.2)$$

ЛЕММА 4.3. *Справедливо следующее.*

- а) Если λ – вполне расщепляемое разбиение, μ – произвольное разбиение, A – μ -удаляемая клетка, B – λ -хорошая клетка, $\text{res } A = \text{res } B$ и $\lambda \not\geq \mu$, то $\lambda_B \not\geq \mu_A$.
- б) Если ν – разбиение, не содержащее различных удаляемых клеток одного вычета, μ – произвольное разбиение, A – μ -удаляемая клетка, B – ν -хорошая клетка, $\text{res } A = \text{res } B$ и $\nu \triangleleft \mu$, то $\nu_B \not\geq \mu_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости $x = r(A)$ и $y = r(B)$.

а) Предположим, что $\lambda_B \geq \mu_A$. Из того, что B – λ -нормальная клетка, получаем $\lambda_1 - \lambda_y + y < p$. Из формулы (4.2) следует, что $\sigma_i(\lambda) \geq \sigma_i(\mu)$ при $i < x$ и $i \geq y$. Если $\sigma_i(\lambda) \geq \sigma_i(\mu)$ выполнено и для каждого i такого, что $x \leq i < y$, то мы получим $\lambda \geq \mu$ вопреки условию. Поэтому будем считать, что существует j такое, что $x \leq j < y$, $\sigma_j(\lambda) < \sigma_j(\mu)$ и $\sigma_i(\lambda) \geq \sigma_i(\mu)$ для всех $i < j$. Так как $(\lambda_B)_1 \geq (\mu_A)_1$, то $\lambda_1 \geq \mu_1 - 1 \geq \mu_x - x$. Отсюда получаем

$$p > \lambda_1 - \lambda_y + y \geq (\mu_x - x) - (\lambda_y - y) \geq (\mu_j - j) - (\lambda_y - y).$$

Докажем, что правая часть последнего неравенства больше 0. Предположим противное. Из неравенств $\sigma_j(\lambda_B) \geq \sigma_j(\mu_A)$, $\sigma_j(\lambda) < \sigma_j(\mu)$ и формулы (4.2) получаем, что $\sigma_j(\lambda) = \sigma_j(\mu) - 1$, или в другой форме $\lambda_j + \sigma_{j-1}(\lambda) - \mu_j - \sigma_{j-1}(\mu) + 1 = 0$. Отсюда

$$(\sigma_{j-1}(\lambda) - \sigma_{j-1}(\mu)) + (\lambda_j - \lambda_y + 1) + (y - j) \leq 0.$$

Это противоречие, так как выражение в первой паре скобок неотрицательно, а в других двух положительно. Таким образом, мы получили $p > (\mu_x - x) - (\lambda_y - y) > 0$ и $\text{res } A \neq \text{res } B$.

б) Предположим, что $\nu_B \geq \mu_A$. Из формулы (4.2) следует, что $\sigma_i(\nu) \geq \sigma_i(\mu)$ при $i < x$ и $i \geq y$. Если $\sigma_i(\nu) \geq \sigma_i(\mu)$ выполнено и для каждого i такого, что $x \leq i < y$, то мы получим $\nu \geq \mu$ вопреки условию $\nu \triangleleft \mu$. Поэтому будем считать, что существует j такое, что $x \leq j < y$, $\sigma_j(\nu) < \sigma_j(\mu)$ и $\sigma_i(\nu) \geq \sigma_i(\mu)$ для всех $i < j$. Так как $\nu \triangleleft \mu$, то $\sigma_i(\nu) = \sigma_i(\mu)$ для всех $i < j$ и, следовательно, $\nu_i = \mu_i$ для всех $0 \leq i < j$. Как и в п. а), имеем $\sigma_j(\nu) = \sigma_j(\mu) - 1$, откуда $\nu_j = \mu_j - 1$.

Если $x < j$, то A и B – различные ν -удаляемые клетки одного вычета. Противоречие. Поэтому $x = j$ и A – ν -добавляемая клетка. По определению нормальных клеток существует ν -удаляемая клетка вычета $\text{res } B$, расположенная строго между B и A . Это опять противоречие.

Применим конструкцию, описанную в п. 4.1, к множеству

$$X = \{(\lambda, \mu) : \lambda \text{ вполне расщепляемо, } \mu \text{ } p\text{-регулярно, } \lambda \not\geq \mu, \lambda \sim \mu\},$$

которое мы зафиксируем до конца параграфа. Заметим, что $X = \emptyset$ в случае $p = 2$, так как в этом случае следующие условия не выполнимы одновременно: λ вполне расщепляемо, $\lambda \not\geq \mu$, $\lambda \sim \mu$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $(\lambda, \mu) \in X$. Тогда $U(\lambda, \mu) = 0$, за исключением случая $\mu = \tilde{\lambda}$, в котором мы имеем $U(\lambda, \tilde{\lambda}) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $n = \sum \lambda$. В случае $n = 0$ имеем $U(\lambda, \mu) = 0$ по определению.

Пусть теперь $n > 0$ и теорема верна для разбиений чисел, меньших чем n . Выберем некоторые абак M и Λ одинакового смещения такие, что $\mu = P(M)$ и $\lambda = P(\Lambda)$. Пусть A – произвольная μ -хорошая клетка. Она существует в силу непустоты и p -регулярности μ . Обозначим через a бусинку абак M , соответствующую клетке A .

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 1$. Тогда $\Lambda = (M_a)^c$ для некоторого конормального пробела c абак M_a . Так как $\lambda \sim \mu$ и $\lambda \not\geq \mu$, то a и c лежат в одном столбце, причем a ниже, чем c . Имеем $M = (\Lambda_c)^a$. Отсюда мы легко получаем $c = b_\Lambda$, $a = b_\Lambda + p$, $b^\Lambda + 1 = b_\Lambda + p$ (т.е. $\chi(\lambda) = p$) и $M = \tilde{\Lambda}$ (т.е. $\mu = \tilde{\lambda}$). Заметим, что в данном случае единственной бусинкой абак Λ , лежащей в том же столбце, что и a , является бусинка c , которая не нормальна. Поэтому не существует λ -хороших клеток вычета $\text{ges } A$ и $U(\lambda, \mu) \leq m_A(\lambda, \mu) = \varepsilon(\lambda, \mu_A) = 1$.

Будем теперь считать, что $\varepsilon(\lambda, \mu_A) = 0$. Если не существует λ -хороших клеток вычета $\text{ges } A$, то $U(\lambda, \mu) = m_A(\lambda, \mu) = 0$. Поэтому будем считать, что существует λ -хорошая клетка B вычета $\text{ges } A$. Применяя лемму 4.3, а), получаем $\lambda_B \not\geq \mu_A$, откуда $(\lambda_B, \mu_A) \in X$. Отсюда $U(\lambda, \mu) \leq m_A(\lambda, \mu) = U(\lambda_B, \mu_A)$. Поэтому далее мы будем рассматривать случай $U(\lambda_B, \mu_A) > 0$.

Пусть b – бусинка абак Λ , соответствующая клетке B . В силу индуктивного предположения получаем $\mu_A = \tilde{\lambda}_B$, $M_a = \tilde{\Lambda}_b$ и $U(\lambda_B, \mu_A) \leq 1$. Отсюда $s \leq b^{\Lambda_b} - p$, где s – наименьший пробел абак Λ_b . Следовательно, $b \neq s$, так как иначе мы получили бы $b^\Lambda - b_\Lambda = b^{\Lambda_b} - s \geq p$, что противоречит вполне расщепляемости абак Λ .

Напомним, что a и b – кохорошие пробелы абак M_a и Λ_b соответственно, так как a и b – хорошие бусинки абак M и Λ соответственно. Имеем $b = b^{\Lambda_b}(i) + 1 < b_{\Lambda_b} + p$ для $1 \leq i \leq h(\Lambda)$, так как $b_{\Lambda_b} + p$ – не кохороший пробел абак Λ_b . Теперь к абак Λ_b можно применить лемму 2.7 и получить $\tilde{\Lambda} = M_a^{b+p\varepsilon_i}$, где $\varepsilon = (-1, 0^{h(\Lambda)-2}, 1)$. Так как a и b лежат в одном столбце и единственным кохорошим пробелом абак M_a , который равен $\tilde{\Lambda}_b$, лежащим в том же столбце, что и b , является пробел $b + 1 + p\varepsilon_i$, то $a = b + 1 + p\varepsilon_i$ и $M = \tilde{\Lambda}$.

4.3. Точная формула. Следующая лемма показывает, что определение 4.2 настоящей работы большого разбиения и преобразования $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ эквивалентно определению 4 из [5].

ЛЕММА 4.5. *Разбиение λ большое тогда и только тогда, когда λ вполне расщепляемо высоты более единицы и $h_{1,1}(\lambda) \geq p$. В этом случае $[\tilde{\lambda}]$ получено из $[\lambda]$ перемещением всех клеток p -крюка с основанием $(1, \lambda_1 + h(\lambda) - p)$ из последней строки в первую.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть следует из формулы $h_{1,1}(\lambda) = b^\Lambda - c$, где Λ – собственный абак и c – его наименьший пробел.

Предположим теперь, что λ – большое разбиение, и для краткости положим $h = h(\lambda)$ и $j = \lambda_1 + h - p$. Так как $1 \leq j \leq \lambda_1$, то клетка $(1, j)$ принадлежит диаграмме $[\lambda]$. Имеем $\lambda_j^t \leq h$. Если бы $\lambda_j^t < h$, то мы бы получили $\lambda_h < j$ и $\chi(\lambda) > p$. Отсюда $\lambda_j^t = h$ и $h_{1,j}(\lambda) = \lambda_1 - j + \lambda_j^t = p$.

Так как $b^\Lambda - p < b_\Lambda$ и $b^\Lambda < b_\Lambda + p$, то для любой бусинки d абак Λ такой, что $b_\Lambda < d < b^\Lambda$, количества пробелов, предшествующих d в абак Λ и $\tilde{\Lambda}$, совпадают

и количества бусинок, следующих за d в абаксах Λ и $\tilde{\Lambda}$, тоже совпадают. Бусинки $b^\Lambda - p$ и $b_\Lambda + p$ соответственно наименьшая и наибольшая бусинки абакса $\tilde{\Lambda}$. Первой из них в абаксе $\tilde{\Lambda}$ предшествует $b^\Lambda - p - c = \lambda_1 - 1 + h - p$ пробелов, а второй предшествует $b_\Lambda + p - c - (h - 1) = \lambda_h - h + p + 1$ пробелов (c – наименьший пробел абакса Λ). Таким образом, $\tilde{\lambda} = (\lambda_h - h + p + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h-1}, \lambda_1 + h - p - 1)$, а последнее разбиение и есть то разбиение, чья диаграмма получается из $[\lambda]$ перемещением всех клеток p -крюка с основанием $(1, j)$ из последней строки в первую.

ТЕОРЕМА 4.6 [5; теорема 6]. Пусть $p > 2$ и λ, μ – p -регулярные разбиения числа n такие, что модуль D^λ вполне расщепляемый и $\lambda \not\prec \mu$. Тогда

$$\mathrm{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) \cong \begin{cases} K, & \text{если } \mu = \tilde{\lambda}; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\mathrm{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^\mu) = 0$ в случае, когда λ – не большое разбиение или $\mu \neq \tilde{\lambda}$, следует из леммы 4.4 и утверждения 2.3.

Предположим теперь, что $\mu = \tilde{\lambda}$. По лемме 4.5 получаем, что длина крюка $h_{i,j}(\lambda)$, где $j = \lambda_1 + h(\lambda) - p$ и $1 \leq i \leq \lambda_j^t = h(\lambda)$, делится на p только при $i = 1$. Так как $h(\lambda) > 1$, то по гипотезе Картера, доказанной в [14], модуль S^λ не прост. По лемме 4.4 единственным верхним композиционным фактором ненулевого модуля $\mathrm{rad} S^\lambda$ является $D^{\tilde{\lambda}}$. Отсюда и из второго утверждения леммы 4.4 получаем $\dim \mathrm{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\lambda, D^{\tilde{\lambda}}) = 1$.

4.4. Почти вполне расщепляемые разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Абак (разбиение) M называется *почти вполне расщепляемым*, если $M = \tilde{\Lambda}$ для некоторого вполне расщепляемого Λ , который называется *прообразом* M .

Важно заметить, что прообраз Λ однозначно восстанавливается по M . Действительно, положим $a = b^M$. Если M – вполне расщепляемый абак, то обозначим через b его наибольшую несобственную бусинку, а если M – не вполне расщепляемый абак, то положим $b = b_M$. Тогда Λ получается из M поднятием a и опусканием b на одну позицию.

Модуль D^λ , где λ – почти вполне расщепляемое разбиение, назовем также *почти вполне расщепляемым*.

Многие абаксы, встречающиеся в этой статье, удобно задавать при помощи следующей конструкции. Возьмем $x \in \mathbb{Z}$ и $S \subset [0, p - 1]$. Пусть $x_0, \dots, x_i, \dots$ – все элементы множества $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x, \mathrm{rem}(n, p) \in S\}$, перечисленные в порядке возрастания. Для $i \geq 0$ положим $\langle x, S, i \rangle = \{x_k : i \leq k < i + |S|\}$. Заметим, что в случае $i > 0$ множество $\langle x, S, i - 1 \rangle$ получено из $\langle x, S, i \rangle$ заменой наибольшего элемента a последнего множества на $a - p$ (поднятие a на одну позицию).

ПРИМЕР. Пусть $p = 7$ и $S = \{1, 3, 4, 6\}$. Имеем $\langle 9, S, 5 \rangle = \{18, 20, 22, 24\}$ и $\langle 9, S, 6 \rangle = \{20, 22, 24, 25\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть h, i, x – целые числа такие, что $0 < i \leq h < p$ и $x \geq 0$. Положим $\Lambda^{(h,i,x)} = (-\infty, 0) \cup (0, [0, i), x) \cup [i, h)$ и $\lambda^{(h,i,x)} = P(\Lambda^{(h,i,x)})$.

Легко видеть, что разбиение $\lambda^{(h,i,x)}$ имеет p -вес x и, следовательно, является разбиением числа px . Кроме того, если $x > 0$, то высота $\lambda^{(h,i,x)}$ равна h ,

$\text{core}(\lambda^{(h,i,x)}) = \emptyset$, наивысшая удаляемая клетка разбиения $\lambda^{(h,i,x)}$ – его единственная нормальная клетка и она имеет вычет $-\bar{h}$. Легко видеть, что равенства $\lambda^{(h,i,0)} = \emptyset$ и $\lambda^{(h,i,x)} = \lambda^{(h,x,x)}$ (следующее из $\Lambda^{(h,i,x)} = \Lambda^{(h,x,x)}$) при $x < i$ исчерпывают все случаи совпадений разбиений $\lambda^{(h,i,x)}$. Для краткости положим $\lambda^{(H,x)} = \lambda^{(H,H,x)}$. В явном виде $\Lambda^{(h,i,x)}$ записывается следующим образом:

$$\Lambda^{(h,i,x)} = (-\infty, 0) \cup [(q+1)p, (q+1)p+r) \cup [qp+r, qp+i) \cup [i, h),$$

где $q = \text{quo}(x, i)$ и $r = \text{rem}(x, i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [15] разбиения $\lambda^{(H,x)}$ называются *минимальными*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.9. Если λ – вполне расщепляемое разбиение, то

$$\chi(\text{core}(\lambda)) < p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (4.1) и того, что разбиение $\text{core}(\lambda)$ вполне расщепляемое.

ЛЕММА 4.10. Пусть λ – вполне расщепляемое разбиение, $\chi(\lambda) = p$ и вычет любой $\text{core}(\lambda)$ -нормальной клетки равен вычету самой нижней λ -удаляемой клетки. Тогда $\lambda = \lambda^{(H,x)}$, где $1 < H < p$ и $H \nmid x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{core}(\lambda)$ – непустое разбиение. В силу утверждения 4.9 получаем, что $\chi(\text{core}(\lambda)) < p$ и $\text{core}(\lambda)$ содержит только одну удаляемую клетку. Отсюда $\text{core}(\lambda) = P((-\infty, 0) \cup [b, a])$, где $0 < b \leq a < p$. Следовательно, $\lambda = P((-\infty, 0) \cup [(q+1)p+b, (q+1)p+r) \cup [qp+r, qp+a])$ для q и r таких, что $q \geq 0$ и $b \leq r \leq a$.

Случай $r = b$ невозможен потому, что мы получили бы противоречие $\chi(\lambda) = \chi(\text{core}(\lambda)) < p$. Случай $r > b$ тоже невозможен. Действительно, тогда наименьшая начальная бусинка абак $(-\infty, 0) \cup [(q+1)p+b, (q+1)p+r) \cup [qp+r, qp+a]$, равная $qp+r$, и нормальная бусинка b абак $(-\infty, 0) \cup [b, a]$ находились бы в разных столбцах. Приходим к противоречию.

Теперь требуемое утверждение следует из $\text{core}(\lambda) = \emptyset$ и $\chi(\lambda) = p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.11. Пусть λ – непустое разбиение и Λ – его абак. Тогда $\lambda - (1^{h(\lambda)}) = P(\Lambda')$, где абак Λ' получен из Λ заменой его наименьшего пробела на бусинку.

СЛЕДСТВИЕ 4.12. Пусть λ и μ – разбиения такие, что $h(\lambda) = h(\mu)$ и $\text{core}(\lambda) = \text{core}(\mu)$. Тогда $\text{core}(\lambda - (1^{h(\lambda)})) = \text{core}(\mu - (1^{h(\mu)}))$.

ЛЕММА 4.13. Пусть $\chi(\lambda) = p$, $\text{core}(\lambda) = \text{core}(\mu) = \emptyset$, $h(\mu) \leq h(\lambda) < p$ и вычет любой μ -нормальной клетки равен вычету самой нижней λ -удаляемой клетки. Тогда $h(\mu) < h(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $h(\mu) = h(\lambda)$. Положим $h = h(\lambda)$ и $n = \sum \lambda$.

Случай $n > p$. Имеем $\lambda = P(\Lambda^{(h,x)})$. Положим $\alpha = \text{res}(h, \lambda_h)$, $\bar{\lambda} = \lambda - (1^h)$ и $\bar{\mu} = \mu - (1^h)$. В рассматриваемом случае $x > 1$. Следовательно, $\lambda_h > 1$ и $\chi(\bar{\lambda}) = p$. По следствию 5.3 (см. §5) для любой $\text{core}(\bar{\mu})$ -нормальной клетки существует $\bar{\mu}$ -нормальная клетка того же вычета. Однако все $\bar{\mu}$ -нормальные клетки имеют вычет $\alpha - 1$, равный вычету самой нижней $\bar{\lambda}$ -удаляемой клетки $(h, \lambda_h - 1)$.

Так как $\text{core}(\bar{\mu}) = \text{core}(\bar{\lambda})$ по следствию 4.12, то вычет любой $\text{core}(\bar{\lambda})$ -нормальной клетки равен вычету самой нижней $\bar{\lambda}$ -удаляемой клетки. По лемме 4.10 получаем $\text{core}(\bar{\lambda}) = \emptyset$. Противоречие, так как $\bar{\lambda}$ – разбиение числа $n - h$, не делящегося на p .

Случай $n = p$ сводится к предыдущему рассмотрением пары разбиений $\hat{\lambda} = \lambda + (p^h)$ и $\hat{\mu} = \mu + (p^h)$.

§ 5. Удаление локально наивысших p -крюков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть u – поднимаемая бусинка абак Λ . Соответствующий ей косой p -крюк называется *локально наивысшим*, если $u + 1$ не является поднимаемой бусинкой.

ЛЕММА 5.2. Пусть λ – разбиение и $\bar{\lambda}$ – разбиение, полученное из λ удалением его локально наивысшего косого p -крюка R . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ количество $\bar{\lambda}$ -нормальных клеток вычета α не превосходит количества λ -нормальных клеток того же вычета.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ и $\bar{\Lambda}$ – абак разбиений λ и $\bar{\lambda}$ соответственно, имеющие смещения p -вычета $1 - \alpha$, и $\text{hook}_{\Lambda}^{-1}(R) = pi + j$, где $0 \leq j < p$.

В силу утверждения 2.4 и второй из формул (2.1) теорема будет доказана, если мы определим вложение ι множества нормальных бусинок первого столбца абак $\bar{\Lambda}$ в множество нормальных бусинок первого столбца абак Λ . Ясно, что в случае $j > 1$ в качестве ι можно взять тождественное отображение. Поэтому будем считать, что $0 \leq j \leq 1$.

Рассмотрим сначала случай $j = 0$. Пусть $a = px + 1$ – нормальная бусинка абак $\bar{\Lambda}$.

Если $x > i$, то очевидно, что a – нормальная бусинка абак Λ . Положим в этом случае $\iota(a) = a$.

Если $x = i$, то $a - p$ – бусинка абак Λ , так как иначе в абак Λ бусинку a можно переместить на одну позицию вверх, что противоречит тому, что удаленный косой p -крюк является локально наивысшим. Возьмем произвольное $s > i - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i-1 < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) &= \sum_{i < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) \\ &= \sum_{i < k \leq s} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \geq 0. \end{aligned}$$

Теперь понятно, что $a - p$ – нормальная бусинка абак Λ . Положим $\iota(a) = a - p$.

Случай $x = i - 1$ невозможен, так как мы получили бы, что бусинка a не начальная в абак $\bar{\Lambda}$.

Пусть, наконец, $x < i - 1$. Для любого $s > x$ имеем

$$\sum_{x < k \leq s} \bar{\Lambda}(pk) \geq \sum_{x < k \leq s} \Lambda(pk)$$

и, следовательно,

$$\sum_{x < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) \geq \sum_{x < k \leq s} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \geq 0.$$

Следовательно, a – нормальная бусинка абака Λ . Положим $\iota(a) = a$.

Рассмотрим теперь случай $j = 1$. Определим параметр x_0 следующим образом. Пусть $px + 1$ и $py + 1$ – нормальные бусинки абака $\bar{\Lambda}$ такие, что $y < x < i - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{y < k \leq i-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) &= \sum_{y < k \leq x-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) + 1 \\ &+ \sum_{x < k \leq i-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \geq 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поэтому может существовать не более одного числа $x_0 < i - 1$ такого, что $px_0 + 1$ – нормальная бусинка абака $\bar{\Lambda}$ и

$$\sum_{x_0 < k \leq i-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) = 0. \quad (5.2)$$

Если такого числа вообще не существует, то положим $x_0 = +\infty$. При таком определении мы получаем

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ЭЛЕМЕНТА x_0 . Пусть $px + 1$ – нормальная бусинка абака $\bar{\Lambda}$ такая, что $x < i - 1$. Тогда $x \leq x_0$ и $\sum_{x < k \leq i-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) > 0$ в случае $x \neq x_0$.

Действительно, в случае $x_0 < +\infty$ этот факт следует из формулы (5.1). В случае $x_0 = +\infty$ рассматриваемая сумма не равна нулю по определению x_0 и, следовательно, строго положительна.

Если $x > i$, то аналогично предыдущему случаю получаем, что a – нормальная бусинка абака Λ . Положим $\iota(a) = a$.

Случай $x = i$ невозможен, так как $\bar{\Lambda}(pi + 1) = 0$ и $\bar{\Lambda}(px + 1) = 1$.

Если $x = i - 1$, то $\Lambda(pi) = \bar{\Lambda}(pi) = 0$, потому что $\bar{\Lambda}(pi + 1) = 0$ и $a = p(i - 1) + 1$ – нормальная бусинка абака $\bar{\Lambda}$. Возьмем произвольное $s > i$. Имеем

$$\sum_{i < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) = \sum_{i-1 < k \leq s} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \geq 0.$$

Теперь понятно, что $pi + 1$ – нормальная бусинка абака Λ . Положим $\iota(a) = pi + 1$.

Если $x = x_0$, то в силу свойства (5.2) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{x_0 < k \leq i} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) = -\Lambda(pi), \\ 0 &= \sum_{x_0 < k \leq i-1} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \\ &= \sum_{x_0 < k \leq i-2} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) + 1 - \Lambda(p(i - 1)) \geq 1 - \Lambda(p(i - 1)). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda(pi) = 0$ и $\Lambda(p(i - 1)) = 1$.

Возьмем произвольное $s > i$. Имеем

$$\sum_{i < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) = \sum_{x_0 < k \leq s} (\bar{\Lambda}(pk + 1) - \bar{\Lambda}(pk)) \geq 0.$$

Для преобразования в последней формуле мы воспользовались свойством (5.2) и тем, что $\overline{\Lambda}(pi) = \overline{\Lambda}(pi + 1) = 0$. Следовательно, $pi + 1$ – нормальная бусинка абака Λ . Положим $\iota(a) = pi + 1$.

Пусть, наконец, $x < i - 1$ и $x \neq x_0$. Понятно, что для произвольного $s > x$, не равного $i - 1$, мы имеем

$$\sum_{x < k \leq s} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) = \sum_{i < k \leq s} (\overline{\Lambda}(pk + 1) - \overline{\Lambda}(pk)) \geq 0.$$

С другой стороны, в силу основного свойства элемента x_0 имеем

$$\sum_{x < k \leq i-1} (\Lambda(pk + 1) - \Lambda(pk)) = \sum_{x < k \leq i-1} (\overline{\Lambda}(pk + 1) - \overline{\Lambda}(pk)) - 1 \geq 0.$$

Следовательно, a – нормальная бусинка абака Λ . Положим $\iota(a) = a$.

Прообраз бусинки b , принадлежащей образу ι , задается следующими формулами.

Случай $j > 1$: $\iota^{-1}(b) = b$.

Случай $j = 0$: $\iota^{-1}(b) = \begin{cases} b, & \text{если } b \neq p(i-1) + 1; \\ pi + 1, & \text{если } b = p(i-1) + 1. \end{cases}$

Случай $j = 1$: $\iota^{-1}(b) = \begin{cases} b, & \text{если } b \neq pi + 1; \\ p(i-1) + 1, & \text{если } b = pi + 1 \text{ и } \Lambda(p(i-1)) = 0; \\ px_0 + 1, & \text{если } b = pi + 1 \text{ и } \Lambda(p(i-1)) = 1. \end{cases}$

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть λ – разбиение. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ количество $\text{core}(\lambda)$ -нормальных клеток вычета α не превосходит количества λ -нормальных клеток того же вычета.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что для получения $\text{core}(\lambda)$ можно на каждом шаге удалять наивысший косой p -крюк.

§ 6. Действие отображения Муллино на некоторые разбиения

Для вычисления отображения Муллино от разбиения λ будем применять символ Муллино, введенный в [16], который есть массив

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_z \\ R_0 & \dots & R_z \end{pmatrix},$$

где $A_j = e(\varphi^j(\lambda))$, $R_j = h(\varphi^j(\lambda))$ и $\varphi^{z+1}(\lambda) = \emptyset$. Произведение таких массивов будем понимать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_z \\ R_0 & \dots & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 & \dots & A'_{z'} \\ R'_0 & \dots & R'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_z A'_0 & \dots & A'_{z'} \\ R_0 & \dots & R_z R'_0 & \dots & R'_{z'} \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $1 < H < p$, $x > 0$ и $H \nmid x$. Положим $Q = \text{quo}(x, H)$ и $R = \text{rem}(x, H)$. Тогда если $R > 1$, то

$$G_p(\widetilde{\lambda^{(H,x)}}) = \begin{pmatrix} 2p \\ H \end{pmatrix}^Q \begin{pmatrix} p + R - 1 \\ H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ H - 1 \end{pmatrix}^{x-2(Q+1)} \begin{pmatrix} p - R + 1 \\ H - R + 1 \end{pmatrix},$$

и если $R = 1$, то

$$G_p(\widetilde{\lambda^{(H,x)}}) = \begin{pmatrix} 2p \\ H \end{pmatrix}^Q \begin{pmatrix} p \\ H - 1 \end{pmatrix}^{x-2Q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S = [0, H-1] \setminus \{R-1\}$, $\Lambda = \widetilde{\Lambda^{(H,x)}}$ и $\lambda = \widetilde{\lambda^{(H,x)}}$. Легко проверить, что

$$\varphi^j(\Lambda) = \overline{(-\infty, 0) \cup \langle 0, \{R-1\}, Q-j \rangle \cup \langle 0, S, x-Q-j \rangle}, \quad 1 \leq j \leq Q.$$

Отсюда видно, что $h(\varphi^j(\lambda)) = H$ и $e(\varphi^j(\lambda)) = 2p$ при $0 \leq j < Q$.

Случай $R > 1$. Тогда $h(\varphi^Q(\lambda)) = H$. Имеем

$$\varphi^{Q+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, 0] \cup \langle 1, S, x-2Q-1-j \rangle}, \quad 1 \leq j \leq x-2Q-1.$$

Отсюда $e(\varphi^Q(\lambda)) = p+R-1$, $h(\varphi^{Q+j}(\lambda^{(H,x)})) = H-1$, $e(\varphi^{Q+j}(\lambda^{(H,x)})) = p$ при $1 \leq j < x-2Q-1$ и $h(\varphi^{x-Q-1}(\lambda^{(H,x)})) = H-R+1$. Наконец, $\varphi^{x-Q}(\lambda^{(H,x)}) = \emptyset$ и $e(\varphi^{x-Q-1}(\lambda^{(H,x)})) = p-R+1$.

Случай $R = 1$. Тогда $h(\varphi^Q(\lambda)) = H-1$. Имеем

$$\varphi^{Q+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, 0] \cup \langle 1, S, x-2Q-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x-2Q.$$

Отсюда $h(\varphi^{Q+j}(\lambda)) = H-1$ при $1 \leq j < x-2Q$, $\varphi^{x-Q}(\lambda) = \emptyset$ и $e(\varphi^{Q+j}(\lambda)) = p$ при $0 \leq j < x-2Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть H и x — целые числа такие, что $1 < H < p$, $x > 0$ и $H \nmid x$. Положим

$$\begin{aligned} N^{(H,x)} &= \overline{(-\infty, H) \cup \langle H, S_1, Q \rangle \cup \langle p+H-R, S_2, x-Q \rangle}, \\ \nu^{(H,x)} &= P(N^{(H,x)}), \end{aligned}$$

где $Q = \text{quo}(x, H)$, $R = \text{rem}(x, H)$, $S_1 = [0, p-1] \setminus \{H-R\}$ и $S_2 = \{H-R\} \cup [H, p-1]$.

Для лучшего понимания устройства абак $N^{(H,x)}$ введем следующие обозначения. Пусть $a_0^{(H,x)}, a_1^{(H,x)}, \dots$ — все элементы множества $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq H, \text{rem}(n, p) \in S_1\}$ и $b_0^{(H,x)}, b_1^{(H,x)}, \dots$ — все элементы множества $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq p+H-R, \text{rem}(n, p) \in S_2\}$, перечисленные в порядке возрастания. Элементарная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} a_y^{(H,x)} &= H + y + \left\lfloor \frac{R-1+y}{p-1} \right\rfloor, \\ b_y^{(H,x)} &= p + H - 1 + y + (H-R) \left\lfloor \frac{y}{p-H+1} \right\rfloor + (R-1) \left\lfloor \frac{y-1}{p-H+1} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (6.1)$$

ЛЕММА 6.3. Пусть H и x — целые числа такие, что $1 < H < p$, $x > 0$ и $H \nmid x$. Тогда $m(\widetilde{\lambda^{(H,x)}}) = \nu^{(H,x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q, R, S_1, S_2 будут как в определении 6.2 и $N = N^{(H,x)}$, $\nu = \nu^{(H,x)}$. В силу основного результата работы [8] и леммы 6.1 достаточно показать, что если $R > 1$, то

$$G_p(\nu) = \binom{2p}{2p-H}^Q \binom{p+R-1}{p+R-H} \binom{p}{p-H+1}^{x-2(Q+1)} \binom{p-R+1}{p-H+1}, \quad (6.2)$$

и если $R = 1$, то

$$G_p(\nu) = \binom{2p}{2p-H}^Q \binom{p}{p-H+1}^{x-2Q}. \quad (6.3)$$

Для начала выясним, как расположены друг относительно друга множества $\langle H, S_1, y \rangle$ и $\langle p+H-R, S_2, x-2Q+y \rangle$. Обозначим через u_y максимальный элемент первого множества и через v_y минимальный элемент второго множества. Имеем $u_y = a_{y+p-2}^{(H,x)}$ и $v_y = b_{x-2Q+y}^{(H,x)}$.

Для $y \geq 0$ из формул (6.1) получаем

$$\begin{aligned} v_{y-1} - u_y &= b_{x-2Q+y-1}^{(H,x)} - a_{y+p-2}^{(H,x)} = x-2Q + (H-R) \left[\frac{x-2Q+y-1}{p-H+1} \right] \\ &\quad + (R-1) \left[\frac{x-2Q+y-2}{p-H+1} \right] - \left[\frac{R+y+p-3}{p-1} \right] \\ &\geq x-2Q-1 + \left[\frac{x-2Q+y+p-H}{p-H+1} \right] - \left[\frac{R+y+p-3}{p-1} \right] \\ &\quad + (R-1) \left[\frac{x-2Q+y-2}{p-H+1} \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Так как $x-2Q \geq R$, то первое и последнее слагаемые последней суммы неотрицательны при любом $y \geq 0$. Кроме этого, $p-H+1 \leq p-1$. В случае $Q > 0$ имеем $x-2Q+y+p-H = (H-2)Q + R+y+p-H > p+y+R-3$ и, следовательно,

$$\left[\frac{x-2Q+y+p-H}{p-H+1} \right] \geq \left[\frac{R+y+p-3}{p-1} \right]. \quad (6.5)$$

В случае $Q = y = 0$ получаем

$$\left[\frac{x+p-H}{p-H+1} \right] \geq 1 \geq \left[\frac{R+p-3}{p-1} \right].$$

Таким образом, мы доказали, что $v_{y-1} \geq u_y$ при $0 \leq y \leq Q$. Напомним, что если $y \geq 0$, то v_{y-1} — та позиция, куда переходит максимальная бусинка множества $\langle p+H-R, S_2, x-2Q+y \rangle$ при поднятии на одну позицию.

Теперь легко проверить, что

$$\varphi^j(N) = \overline{(-\infty, H) \cup \langle H, S_1, Q-j \rangle \cup \langle p+H-R, S_2, x-Q-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq Q.$$

Отсюда $h(\varphi^j(\nu)) = 2p-H$ и $e(\varphi^j(\nu)) = 2p$ при $0 \leq j < Q$. Кроме этого, $h(\varphi^Q(\nu)) = p+R-H$.

В случае $R > 1$ имеем $x-2Q \geq 2$ и

$$\varphi^{Q+j}(N) = \overline{(-\infty, p+H-1) \cup \langle p+H, S_2, x-2Q-1-j \rangle}, \quad 1 \leq j \leq x-2Q-1.$$

Отсюда $e(\varphi^Q(\nu)) = p+R-1$, $e(\varphi^{Q+j}(\nu)) = p$ при $1 \leq j < x-2Q-1$, $h(\varphi^{Q+j}(\nu)) = p-H+1$ при $1 \leq j \leq x-2Q-1$, $e(\varphi^{x-Q-1}(\nu)) = p-R+1$ и $\varphi^{x-Q}(\nu) = \emptyset$.

В случае $R = 1$ имеем

$$\varphi^{Q+j}(\mathbf{N}) = \overline{(-\infty, p+H-1) \cup \langle p+H-1, S_2, x-2Q-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x-2Q.$$

Отсюда $e(\varphi^{Q+j}(\nu)) = p$ и $h(\varphi^{Q+j}(\nu)) = p-H+1$ при $0 \leq j < x-2Q$ и $\varphi^{x-Q}(\nu) = \emptyset$.

ЛЕММА 6.4. Пусть h, i, x — целые числа такие, что $0 < i \leq h < p$ и $x \geq i$. Тогда если $i \geq h/2$ и $x \geq h$, то

$$G_p(\lambda^{(h,i,x)}) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{h-i-1} \\ R_0 & \dots & R_{h-i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}^{x-2(h-i)} \times \begin{pmatrix} A_0 - 2i & \dots & A_{h-i-1} - 2i \\ R_0 - i & \dots & R_{h-i-1} - i \end{pmatrix},$$

если $i < h/2$ и $x \geq 2i$, то

$$G_p(\lambda^{(h,i,x)}) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{i-1} \\ R_0 & \dots & R_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}^{x-2i} \times \begin{pmatrix} A_0 - 2(h-i) & \dots & A_{i-1} - 2(h-i) \\ R_0 - (h-i) & \dots & R_{i-1} - (h-i) \end{pmatrix},$$

если $x < 2i, h$, то

$$G_p(\lambda^{(h,i,x)}) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{x-i-1} \\ R_0 & \dots & R_{x-i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ i+h-x \end{pmatrix}^{2i-x} \times \begin{pmatrix} A_0 - 2(i+h-x) & \dots & A_{x-i-1} - 2(i+h-x) \\ R_0 - (i+h-x) & \dots & R_{x-i-1} - (i+h-x) \end{pmatrix},$$

где $A_j = p+h-1-2j$ и $R_j = h-j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S = [0, i-1]$, $\Lambda = \Lambda^{(h,i,x)}$ и $\lambda = \lambda^{(h,i,x)}$.

Случай $i \geq h/2$ и $x \geq h$. Для $0 \leq j < h-i$ имеем $x-j-1 \geq x-h+i \geq i$ и, следовательно, первый элемент множества $\langle 0, S, x-j-1 \rangle$ не менее p . Отсюда получаем

$$\varphi^j(\Lambda) = \overline{(-\infty, j) \cup \langle 0, S, x-j \rangle \cup [i, h-j]}, \quad 0 \leq j \leq h-i.$$

Следовательно, $h(\varphi^j(\lambda)) = R_j$ при $0 \leq j \leq h-i$ и $e(\varphi^j(\lambda)) = A_j$ при $0 \leq j < h-i$. Далее,

$$\varphi^{h-i+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, h-i) \cup \langle h-i, S, x-2(h-i)-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x-2(h-i).$$

Отсюда $e(\varphi^{h-i+j}(\lambda)) = p$ при $0 \leq j < x-2(h-i)$, $h(\varphi^{h-i+j}(\lambda)) = i$ при $1 \leq j < x-2(h-i)$ и $h(\varphi^{x-(h-i)}(\lambda)) = h-i$. Наконец,

$$\varphi^{x-(h-i)+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, i+j) \cup [p, p+h-i-j]}, \quad 0 \leq j \leq h-i.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-(h-i)+j}(\lambda)) = A_j - 2i$ при $0 \leq j < h - i$ и $h(\varphi^{x-(h-i)+j}(\lambda)) = R_j - i$ при $1 \leq j \leq h - i$.

Случай $i < h/2$ и $x \geq 2i$. Для $0 \leq j < i$ имеем $x - j - 1 \geq i$ и, следовательно, первый элемент множества $\langle 0, S, x - j - 1 \rangle$ не менее p . Отсюда получаем

$$\varphi^j(\Lambda) = \overline{(-\infty, j) \cup \langle 0, S, x - j \rangle \cup [i, h - j]}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

Следовательно, $h(\varphi^j(\lambda)) = R_j$ и $e(\varphi^j(\lambda)) = A_j$ при $0 \leq j < i$. Далее,

$$\varphi^{i+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, h - i) \cup \langle p, S, x - 2i - j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x - 2i.$$

Отсюда $e(\varphi^{i+j}(\lambda)) = p$ и $h(\varphi^{i+j}(\lambda)) = i$ при $0 \leq j < x - 2i$. Наконец,

$$\varphi^{x-i+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, h - i + j) \cup [p, p + i - j]}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-i+j}(\lambda)) = A_j - 2(h - i)$ при $0 \leq j < i$ и $h(\varphi^{x-i+j}(\lambda)) = R_j - (h - i)$ при $0 \leq j \leq i$.

Случай $x < 2i$, h . Для $0 \leq j < x - i$ имеем $x - j - 1 \geq i$ и, следовательно, первый элемент множества $\langle 0, S, x - j - 1 \rangle$ не менее p . Отсюда получаем

$$\varphi^j(\Lambda) = \overline{(-\infty, j) \cup \langle 0, S, x - j \rangle \cup [i, h - j]}, \quad 0 \leq j \leq x - i.$$

Следовательно, $h(\varphi^j(\lambda)) = R_j$ при $0 \leq j \leq x - i$ и $e(\varphi^j(\lambda)) = A_j$ при $0 \leq j < x - i$. Далее,

$$\varphi^{x-i+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, x - i) \cup \langle x - i, S, 2i - x - j \rangle \cup [h, h - x + i]}, \quad 0 \leq j \leq 2i - x.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-i+j}(\lambda)) = p$ при $0 \leq j < 2i - x$ и $h(\varphi^{x-i+j}(\lambda)) = i + h - x$ при $1 \leq j < 2i - x$. Наконец,

$$\varphi^{i+j}(\Lambda) = \overline{(-\infty, h - x + i + j) \cup [p, p + x - i - j]}, \quad 0 \leq j \leq x - i.$$

Отсюда $e(\varphi^{i+j}(\lambda)) = A_j - 2(i + h - x)$ при $0 \leq j < x - i$ и $h(\varphi^{i+j}(\lambda)) = R_j - (i + h - x)$ при $0 \leq j \leq x - i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Пусть h, i, x — целые числа такие, что $0 < i \leq h < p$ и $x \geq i$. Положим

$$\begin{aligned} M^{(h,i,x)} &= \overline{(-\infty, p) \cup [p + h - m, p + h) \cup \langle p, S, x \rangle}, \\ \mu^{(h,i,x)} &= P(M^{(h,i,x)}), \end{aligned}$$

где $m = \max\{i, i + h - x\}$ и $S = [0, h - m) \cup [h, p - 1]$.

Пусть $c_0^{(h,i,x)}, c_1^{(h,i,x)}, \dots$ — все элементы множества

$$\{n \in \mathbb{Z} : n \geq p, \text{rem}(n, p) \in S\},$$

перечисленные в порядке возрастания. Элементарная проверка показывает, что

$$c_y^{(h,i,x)} = p + y + m + m \left\lceil \frac{y + m - h}{p - m} \right\rceil. \quad (6.6)$$

ЛЕММА 6.6. Пусть h, i, x — целые числа такие, что $0 < i \leq h < p$ и $x \geq i$. Тогда $m(\lambda^{(h,i,x)}) = \mu^{(h,i,x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m и S будут как в определении 6.5, A_j и R_j — как в лемме 6.4 и $M = M^{(h,i,x)}$, $\mu = \mu^{(h,i,x)}$, $S_j = p - j$.

Случай $i \geq h/2$ и $x \geq h$. Тогда $m = i$. Имеем

$$2p > A_0 > \dots > A_{h-i-1} > p > A_0 - 2i > \dots > A_{h-i-1} - 2i > 0.$$

Следовательно, в силу основного результата работы [8] и леммы 6.4 достаточно показать, что

$$G_p(\mu) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{h-i-1} \\ S_0 & \dots & S_{h-i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p-i \end{pmatrix}^{x-2(h-i)} \begin{pmatrix} A_0 - 2i & \dots & A_{h-i-1} - 2i \\ S_0 - i & \dots & S_{h-i-1} - i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $x-2(h-i) \geq 0$. Поэтому для $0 \leq j < h-i$ имеем $x-j-1 \geq h-i$ и, следовательно, первый элемент множества $\langle p, S, x-j-1 \rangle$ не менее $p+h$. Отсюда получаем

$$\varphi^j(M) = \overline{(-\infty, p+j) \cup [p+h-i, p+h-j) \cup \langle p, S, x-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq h-i.$$

Следовательно, $e(\varphi^j(\mu)) = A_j$ и $h(\varphi^j(\mu)) = S_j$ при $0 \leq j < h-i$. Далее,

$$\varphi^{h-i+j}(M) = \overline{(-\infty, p+i) \cup \langle p+h, S, x-2(h-i)-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x-2(h-i).$$

Отсюда $e(\varphi^{h-i+j}(\mu)) = p$ и $h(\varphi^{h-i+j}(\mu)) = p-i$ при $0 \leq j < x-2(h-i)$. Имеем

$$\varphi^{x-(h-i)+j}(M) = \overline{(-\infty, p+i+j) \cup [p+h, 2p+h-i-j) \cup \langle p, S, x-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq h-i.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-(h-i)+j}(\mu)) = A_j - 2i$ и $h(\varphi^{x-(h-i)+j}(\mu)) = S_j - i$ при $0 \leq j < h-i$ и $\varphi^x(\mu) = \emptyset$.

Случай $i < h/2$ и $x \geq 2i$. Имеем

$$2p > A_0 > \dots > A_{i-1} > p > A_0 - 2(h-i) > \dots > A_{i-1} - 2(h-i) > 0.$$

Следовательно, в силу основного результата работы [8] и леммы 6.4 достаточно показать, что

$$G_p(\mu) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{i-1} \\ S_0 & \dots & S_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p-i \end{pmatrix}^{x-2i} \begin{pmatrix} A_0 - 2i & \dots & A_{i-1} - 2(h-i) \\ S_0 - i & \dots & S_{i-1} - (h-i) \end{pmatrix}.$$

Для $0 \leq j < i$ имеем $x-j-1 \geq h-m$. Следовательно, первый элемент множества $\langle p, S, x-j-1 \rangle$ не менее $p+h$. Отсюда получаем

$$\varphi^j(M) = \overline{(-\infty, p+j) \cup [p+h-m, p+h-j) \cup \langle p, S, x-j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

Следовательно, $e(\varphi^j(\mu)) = A_j$ и $h(\varphi^j(\mu)) = S_j$ при $0 \leq j < i$. Для $0 \leq j \leq x-2i$ имеем

$$\begin{aligned} & \varphi^{i+j}(M) \\ &= \begin{cases} \overline{(-\infty, p+i) \cup [p+x-i-j, p+h-i) \cup [p+h, 2p+x-i-j)}, & \text{если } x < h; \\ \overline{(-\infty, p+i) \cup \langle p+i, S, x-2i-j \rangle}, & \text{если } x \geq h. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда $e(\varphi^{i+j}(\mu)) = p$ и $h(\varphi^{i+j}(\mu)) = p - i$ при $0 \leq j < x - 2i$. Наконец,

$$\varphi^{x-i+j}(\mathbf{M}) = \overline{(-\infty, p + h - i + j) \cup [p + h, 2p + i - 1 - j]}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-i+j}(\mu)) = A_j - 2(h - i)$, $h(\varphi^{x-i+j}(\mu)) = S_j - (h - i)$ при $0 \leq j < i$ и $\varphi^x(\mu) = \emptyset$.

Случай $x < 2i, h$. Тогда $m = i + h - x$. Имеем

$$2p > A_0 > \dots > A_{x-i-1} > p > A_0 - 2(i + h - x) > \dots > A_{x-i-1} - 2(i + h - x) > 0.$$

Следовательно, в силу основного результата работы [8] и леммы 6.4 достаточно показать, что

$$G_p(\mu) = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_{x-i-1} \\ S_0 & \dots & S_{x-i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p - (i + h - x) \end{pmatrix}^{2i-x} \\ \times \begin{pmatrix} A_0 - 2(i + h - x) & \dots & A_{x-i-1} - 2(i + h - x) \\ S_0 - (i + h - x) & \dots & S_{x-i-1} - (i + h - x) \end{pmatrix}.$$

Для $0 \leq j < x - i$ имеем $x - j - 1 \geq i > x - i$ и, следовательно, первый элемент множества $\langle p, S, x - j - 1 \rangle$ не менее $p + h$. Отсюда получаем

$$\varphi^j(\mathbf{M}) = \overline{(-\infty, p + j) \cup [p + x - i, p + h - j] \cup \langle p, S, x - j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq x - i.$$

Следовательно, $e(\varphi^j(\mu)) = A_j$ и $h(\varphi^j(\mu)) = S_j$ при $0 \leq j < x - i$. Далее,

$$\varphi^{x-i+j}(\mathbf{M}) = \overline{(-\infty, p + i + h - x) \cup \langle p + h, S, 2i - x - j \rangle}, \quad 0 \leq j \leq 2i - x.$$

Отсюда $e(\varphi^{x-i+j}(\mu)) = p$ и $h(\varphi^{x-i+j}(\mu)) = p - (i + h - x)$ при $0 \leq j < 2i - x$. Наконец,

$$\varphi^{i+j}(\mathbf{M}) = \overline{(-\infty, p + i + h - x + j) \cup [p + h, 2p + x - i - 1 - j]}, \quad 0 \leq j \leq x - i.$$

Отсюда $e(\varphi^{i+j}(\mu)) = A_j - 2(i + h - x)$ и $h(\varphi^{i+j}(\mu)) = S_j - (i + h - x)$ при $0 \leq j < x - i$ и $\varphi^x(\mu) = \emptyset$.

Интересно посмотреть на разбиения $\nu(2, x)$, когда $p > 2$ и x — нечетное число, большее двух. В силу лемм 6.3 и 6.6 получаем $m(\widetilde{\lambda^{(2,x)}}) = \nu^{(2,x)}$ и $m(\lambda^{(2,x)}) = \mu^{(2,2,x)} = \lambda^{(p-2,x)}$. Имеем $h(\nu^{(2,x)}) = 2p - 2$ и $h(\lambda^{(p-2,x)}) = p - 2$. Отсюда $\nu^{(2,x)} \not\leq \lambda^{(p-2,x)}$ и $(\nu^{(2,x)})^t \not\leq (\lambda^{(p-2,x)})^t$. Применяя самодвойственность простых Σ_{px} -модулей и теорему 4.6 (или теорему 3.5 (iv) работы [17]), теорему 4.4 (b) работы [18] и утверждения [19; П.2.14(4)], [20; 2.1f], получаем

$$K \cong \text{Ext}_{\Sigma_{px}}^1(D^{\widetilde{\lambda^{(2,x)}}}, D^{\lambda^{(2,x)}}) \cong \text{Ext}_{S(N, px)}^1(L((\nu^{(2,x)})^t), L((\lambda^{(p-2,x)})^t)) \\ \cong \text{Hom}_{S(N, px)}(\text{rad } \Delta((\nu^{(2,x)})^t), L((\lambda^{(p-2,x)})^t)),$$

где $N \geq px$ и $S(N, px)$ обозначает алгебру Шура. Определение 6.2 и формулы (6.1) показывают, что $\nu^{(2, x+2(p-1))} = \nu^{(2,x)} + (p^{2p-2})$. Применяя следствие 5 (4), теорему 4 (а) и лемму 4 работы [21], получаем отрицательное решение проблемы 2 работы [21] для следующих значений параметров: $\lambda := \nu^{(2,3)}$, $q_i := pi$, $n := 2p - 2$, $V_i := \text{rad } S^{\lambda+(q_i^n)}$.

В оставшейся части параграфа зафиксируем целые числа H, x, i такие, что $1 < H < p$, $H \nmid x$ и $0 < i \leq x, h$, где $h = H - \text{rem}(x, H)$. Положим также $Q = \text{quo}(x, H)$, $R = \text{rem}(x, H)$, $m = \max\{i, i + h - x\}$, $S_1 = [0, p - 1] \setminus \{h\}$, $S_2 = \{h\} \cup [H, p - 1]$ и $S = [0, h - m] \cup [h, p - 1]$.

ЛЕММА 6.7. *Справедливо следующее:*

- а) если $c_y^{(h,i,x)} \geq b_z^{(H,x)}$ и $y, z > 0$, то $c_{y-1}^{(h,i,x)} \geq b_{z-1}^{(H,x)}$;
- б) если $a_y^{(h,i,x)} \leq z$ и $y > 0$, то $a_{y-1}^{(h,i,x)} \leq z - 1$;
- в) если $a_y^{(h,i,x)} > z$ и $y \geq m - 1$, $0 \leq m \leq p$, то $a_{y-j}^{(h,i,x)} \geq z - j$ для $0 \leq j < m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из взаимного расположения множеств S, S_1, S_2 .

ТЕОРЕМА 6.8. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $m(\widetilde{\lambda^{(H,x)}}) \leq m(\lambda^{(h,i,x)})$;
- 2) $m\left[\frac{p-h+x-1}{p-m}\right] \geq H-Q-1 + h\left[\frac{x-Q-1}{p-H+1}\right] + (R-1)\left[\frac{x-Q-2}{p-H+1}\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{shift}(N^{(H,x)}) = \text{shift}(M^{(h,i,x)}) = 2p$ (именно для этого равенства мы добавили лишнюю строку в определении абака $M^{(h,i,x)}$), то в силу первой из формул (2.1) и лемм 6.3 и 6.6 условие 1) данной теоремы эквивалентно тому, что $u \leq v$, где

$$u = (b_{x-Q+p-H}^{(H,x)}, \dots, b_{x-Q}^{(H,x)}, a_{Q+p-2}^{(H,x)}, \dots, a_Q^{(H,x)}, H-1, \dots, 0),$$

$$v = (c_{x+p-m-1}^{(h,i,x)}, \dots, c_x^{(h,i,x)}, p+h-1, \dots, p+h-m, p-1, \dots, 0).$$

Легко видеть, что условие 2) данной теоремы эквивалентно тому, что $u_1 \leq v_1$. Поэтому из 1) следует 2).

Предположим теперь, что условие 2) выполнено. Заметим, что $m \leq h < H$ и, следовательно, $p-m \geq p-H+1$. Из эквивалентности предыдущего абзаца и леммы 6.7, а) получаем $u_j \leq v_j$ при $1 \leq j \leq p-H+1$.

Пусть теперь $p-H+1 < j \leq p-m$. В силу формул (6.1) и (6.6) имеем

$$\begin{aligned} v_j - u_j &= c_{x+p-m-j}^{(h,i,x)} - a_{Q+2p-H-j}^{(H,x)} \\ &= x-Q + m\left[\frac{x+p-j-h}{p-m}\right] - \left[\frac{2p-1+Q-j-h}{p-1}\right] \\ &= x-Q-1 + m\left[\frac{x+p-j-h}{p-m}\right] - \left[\frac{p+Q-j-h}{p-1}\right]. \end{aligned}$$

Так как $m \geq 1$, $p-m \leq p-1$ и $(x+p-j-h) - (p+Q-j-h) = x-Q > 0$, то

$$m\left[\frac{x+p-j-h}{p-m}\right] \geq \left[\frac{p+Q-j-h}{p-1}\right]$$

и $v_j \geq u_j$.

Случай 1: $m = 0$ либо $m > 0$, $v_{p-m+1} \geq u_{p-m+1}$. В силу леммы 6.7, б) получаем, что $v_j \geq u_j$ для $p-m < j \leq p$. Таким образом, доказано, что $v_j \geq u_j$ при $1 \leq j \leq p$. Имеем $v_j \leq u_j$ для $p < j \leq 2p$, так как v_j — несобственная бусинка абака $M^{(h,i,x)}$ для такого j . Отсюда $\sigma_j(v) - \sigma_j(u) \geq \sigma_{2p}(v) - \sigma_{2p}(u) = 0$ для любого $p \leq j \leq 2p$. Следовательно, $u \leq v$.

Случай 2: $m > 0$ и $v_{p-m+1} < u_{p-m+1}$. В силу леммы 6.7, в) получаем, что $v_j \leq u_j$ для $p-m < j \leq p$. Имеем $v_j \leq u_j$ для $p < j \leq 2p$, так как v_j — несобственная бусинка абака $M^{(h,i,x)}$ для такого j . Отсюда $\sigma_j(v) - \sigma_j(u) \geq \sigma_{2p}(v) - \sigma_{2p}(u) = 0$ для любого $p-m \leq j \leq 2p$. Следовательно, $u \leq v$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нам понадобится только то, что из 1) следует 2). Обратное следствие доказано для того, чтобы показать невозможность улучшения оценок замеченной более простого условия 2) на более сложное условие 1).

§ 7. Вспомогательная оценка сверху

7.1. Системы. Введем следующие *ступенчатые* абак и разбиения. Пусть $k \geq 0$ и $0 < r_2 < \dots < r_k < p$, $i_1 > \dots > i_{k-1} \geq 0$ – некоторые целые числа. Положим

$$\begin{aligned} \text{St}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1}) \\ = \overline{(-\infty, 0) \cup [pi_1, pi_1 + r_2) \cup [pi_2 + r_2, pi_2 + r_3) \cup \dots \cup [pi_{k-1} + r_{k-1}, pi_{k-1} + r_k)}, \\ \text{st}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1}) = P(\text{St}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})). \end{aligned}$$

В случае $k = 1$ мы будем считать, что $\text{St}(\emptyset; \emptyset) = \overline{(-\infty, 0)}$ и $\text{st}(\emptyset; \emptyset) = \emptyset$.

Частные случаи ступенчатых абак уже встречались в § 6. Действительно, пусть h, i, x – целые числа такие, что $0 < i \leq h < p$ и $x \geq 0$. Положим $q = \text{quo}(x, i)$ и $r = \text{rem}(x, i)$. Тогда

$$\Lambda^{(h, i, x)} = \begin{cases} \text{St}(i, h; q, 0), & \text{если } r = 0; \\ \text{St}(r, i, h; q + 1, q, 0), & \text{если } r > 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

ЛЕММА 7.1. Все решения системы

$$\begin{cases} h(\lambda) < p; \\ \text{core}(\lambda) = \emptyset; \\ \text{res } A = \text{res } B \quad \text{для любых } \lambda\text{-нормальных клеток } A \text{ и } B \end{cases} \quad (7.2)$$

составляют разбиения $\text{st}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что указанные разбиения удовлетворяют системе. Докажем обратный факт индукцией по числу n клеток в $[\lambda]$. Для $n = 0$ это, очевидно, выполнено. Пусть теперь $n > 0$ и λ – решение системы (7.2). Так как $\lambda \neq \emptyset = \text{core}(\lambda)$, то существует хотя бы один косой p -крюк разбиения λ . Обозначим через $\bar{\lambda}$ разбиение, полученное из λ удалением наивысшего из этих крюков. По лемме 5.2 получаем, что разбиение $\bar{\lambda}$ тоже удовлетворяет системе (7.2). В силу индуктивного предположения $\bar{\lambda} = \text{st}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})$.

Возьмем абак Λ такой, что

$$\lambda = P(\Lambda), \quad \text{shift}(\Lambda) = \text{shift}(\text{St}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})).$$

Мы получаем, что существует некоторая опускаемая бусинка a абак $\text{St}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})$ такая, что Λ получен из $\text{St}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})$ опусканием бусинки a на одну позицию.

Случай $k = 1$. Так как $h(\lambda) < p$, то $-p < a < 0$ и $\lambda = \text{st}(1, -a; 1, 0)$, если $a < -1$, и $\lambda = \text{st}(1; 1)$, если $a = -1$.

Случай $k > 1$. Мы можем считать, что $i_1 > 0$, так как иначе $\bar{\lambda} = \emptyset$ и мы находимся в условиях предыдущего случая. Так как $h(\lambda) < p$, то $r_k - p < a$. В случае, когда $a < -1$ или $a \leq -1$ и $i_k > 1$, абак Λ будет содержать следующие

две нормальные бусинки в различных столбцах: pi_1 и $a + p$. Следовательно, для λ третье уравнение системы (7.2) нарушено и этот случай невозможен. Если $a = -1$ и $i_k = 1$, то $\lambda = \text{st}(r_2 + 1, \dots, r_k + 1; i_1, \dots, i_{k-1})$, $k = 2, 3$.

Предположим теперь, что $a \geq 0$. В силу выполнения для λ третьего уравнения системы (7.2) мы получаем, что a может принимать только следующие значения: $pi_t + r_t$, где $t = 1, \dots, k - 1$, и мы считаем $r_1 = 0$. В противном случае pi_1 и $a + p$ будут нормальными бусинками абакса Λ , лежащими в различных столбцах. Теперь непосредственно из конструкции ступенчатых абаксов видно, что λ имеет требуемый вид.

Вычислим, чему равно $e(\text{st}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1}))$. Если $k = 1$, то это нуль. Поэтому рассмотрим случай $k > 1$. Определим последовательность $1 = a_1 < \dots < a_l \leq k - 1$ по следующему правилу: $a_{j+1} = a_j + 1$, если $a_j + 1 \leq k - 1$ и $i_{a_j+1} < i_{a_j} - 1$; $a_{j+1} = a_j + 2$, если $a_j + 2 \leq k - 1$ и $i_{a_j+1} = i_{a_j} - 1$. Из последней формулы п. 2.4 получаем

$$e(\text{st}(r_2, \dots, r_k; i_1, \dots, i_{k-1})) = \begin{cases} pl, & \text{если } i_{a_l} > 0; \\ p(l-1) + r_k - 1, & \text{если } i_{a_l} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $e(\lambda) < 2p$ и λ — ступенчатое разбиение, то λ имеет один из следующих видов: $\emptyset$, $\text{st}(r_2, r_3; i_1, 0)$, $\text{st}(r_2, r_3, r_4; i_1, i_1 - 1, 0)$. Отсюда и из формулы (7.1) получаем

ЛЕММА 7.2. *Все решения системы*

$$\begin{cases} h(\lambda) < p; \\ \text{core}(\lambda) = \emptyset; \\ \text{res } A = \text{res } B \\ h(\lambda) + h(m(\lambda)) < 2p \end{cases} \quad \text{для любых } \lambda\text{-нормальных клеток } A \text{ и } B; \quad (7.3)$$

составляют разбиения $\lambda^{(h, i, x)}$, где $0 < i \leq h < p$ и $x \geq 0$.

К последним неравенствам можно добавить $i \leq x$.

7.2. Оценка. Сформулируем следующей известный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. *Пусть $n > 2$ и V — $K\Sigma_{n-1}$ -модуль. Тогда*

- а) $V \uparrow^{\Sigma_n} \otimes \text{sgn}_n \cong (V \otimes \text{sgn}_{n-1}) \uparrow^{\Sigma_n}$;
- б) $(\text{Ind}^\alpha V) \otimes \text{sgn}_n \cong \text{Ind}^{-\alpha}(V \otimes \text{sgn}_{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Изоморфизм задается формулой $(\sigma_i \otimes v) \otimes u \mapsto \sigma_i \otimes (v \otimes u)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — представители левых смежных классов группы Σ_n по Σ_{n-1} одинакового знака, $v \in V$ и u — базис знакопеременного представления группы Σ_n .

б) Следует из а) и рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 4.7 работы [22] относительно оператора индукции вместо оператора ограничения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. *Условие $\pi(H, x, i)$ выполнено тогда и только тогда, когда*

- 1) $H, x, i \in \mathbb{Z}$, $2 < H < p$, $H \nmid x$, $0 < i \leq x$, h и $x > 2$;
- 2) $m \left[\frac{p-h+x-1}{p-m} \right] \geq H - Q - 1 + h \left[\frac{x-Q-1}{p-H+1} \right] + (R-1) \left[\frac{x-Q-2}{p-H+1} \right]$,

где $Q = \text{quo}(x, H)$, $R = \text{rem}(x, H)$, $h = H - R$ и $m = \max\{i, i + h - x\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Пусть H, x, i – числа, для которых условие $\pi(H, x, i)$ выполнено. Тогда обозначим через $\varepsilon(H, x, i)$ набор такой, что

$$-R + \Lambda^{(h, i, x)} = \mathcal{H}_{\varepsilon(H, x, i)}(\Lambda^{(H, x)}),$$

где $R = \text{gem}(x, H)$ и $h = H - R$.

Легко понять, что требуемый набор $\varepsilon(H, x, i)$ существует и задается следующим равенством:

$$\varepsilon(H, x, i) = ((-Q - 1)^R, (-Q)^{h-i}, (q - Q)^{i-r}, (q + 1 - Q)^r),$$

где $Q = \text{quo}(x, H)$, $R = \text{gem}(x, H)$, $h = H - R$, $q = \text{quo}(x, i)$, $r = \text{gem}(x, i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. Пара (ν, μ) называется *минимальной*, если

- 1) ν – почти вполне расщепляемое разбиение;
- 2) μ – p -регулярное разбиение;
- 3) $\nu \not\prec \mu$ и $\nu \sim \mu$;
- 4) для любой μ -хорошей клетки A существует ν -хорошая клетка B такая, что $\text{res } B = \text{res } A$ и ν_B – не почти вполне расщепляемое разбиение.

Непосредственно из определения видно, что если B – ν -нормальная клетка и ν – почти вполне расщепляемое разбиение, а ν_B – нет, то $\chi(\lambda) = p$ и $B = (1, \nu_1)$, где λ – прообраз ν . Следовательно, если (ν, μ) – минимальная пара, то все μ -нормальные клетки имеют вычет, равный $\overline{\nu_1 - 1} = \overline{\lambda_1}$.

ЛЕММА 7.7. Пусть (ν, μ) – минимальная пара разбиений числа n . Положим $x = n/p$ и $H = h(\lambda)$, где λ – прообраз ν . Предположим, что (ν, μ) отличается от $((p^2, p^2 - p), (2p^2 - p))$ и от $(\widetilde{\lambda^{(H, 2)}}, \lambda^{(H-2, 2)})$ и что $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \neq 0$. Тогда $\nu = \widetilde{\lambda^{(H, x)}}$ и $\mu = \lambda^{(H - \text{gem}(x, H), i, x)}$, где условие $\pi(H, x, i)$ выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – вычет всех μ -нормальных клеток и A – ν -хорошая клетка вычета α . По условию $n \geq p > 2$. Так как $h(\nu) < p$, то в силу утверждения 2.2 имеем

$$\text{Hom}_{\Sigma_n}(\text{rad } S^\nu, D^\mu) \cong \text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \neq 0.$$

Отсюда $\nu \triangleleft \mu$ и, в частности, $h(\mu) \leq h(\nu)$. Пусть $\nu = \widetilde{\lambda}$, где λ – некоторое большое разбиение. Из того, что ν_A не является почти вполне расщепляемым разбиением, мы получаем, что $\chi(\lambda) = p$ и A лежит в первой строке.

Имеем $h(\nu) \leq h(\lambda)$. Предположим, что $h(\nu) < h(\lambda)$. Тогда ν – вполне расщепляемое разбиение. Из условия текущей теоремы и теоремы 4.6 получаем, что ν – большое разбиение и $\mu = \widetilde{\nu}$. Самая правая клетка A' первой строки диаграммы $[\mu]$ удаляется и, следовательно, нормальна. Однако $\text{res } A'$ равен вычету самой правой клетки последней строки диаграммы $[\nu]$, который отличен от $\text{res } A$ в силу того, что ν вполне расщепляемо и $h(\nu) > 1$. Приходим к противоречию, откуда $h(\nu) = h(\lambda)$.

По следствию 5.3 вычет любой $\text{core}(\mu)$ -нормальной клетки, а в силу $\lambda \sim \mu$ и любой $\text{core}(\lambda)$ -нормальной клетки равен $\text{res } A$, который, в свою очередь, равен вычету самой нижней λ -удаляемой клетки. По лемме 4.10 получаем, что $\lambda = \lambda^{(H, x)}$, $1 < H < p$, $x > 0$ и $H \nmid x$. Если бы $x = 1$, то мы получили бы противоречие

$h(\nu) < h(\lambda)$. Поэтому $x > 1$. По лемме 4.13 получаем $h(\mu) < h(\lambda) = H$. Положим $Q = \text{quo}(x, H)$, $R = \text{rem}(x, H)$ и $h = H - R$.

В случае $R > 1$ положим $b = (Q + 1)p$, а в случае $R = 1$ положим $b = Qp$. С учетом неравенства $x > 1$ получаем, что b – единственная нормальная, а следовательно, и хорошая бусинка абака $\Lambda^{(H,x)}$, принадлежащая нулевому столбцу. Обозначим через B клетку разбиения ν , соответствующую бусинке b . По второй из формул (2.1) имеем $\text{res } B = -\text{shift}(\Lambda^{(H,x)}) = -\overline{H}$. В силу леммы 3.4 имеем

$$\begin{aligned} 0 &< \dim \text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \\ &\leq \dim \text{Ext}_{\Sigma_{n-1}}^1(D^{\nu_B}, \text{Res}_{-\overline{H}} D^\mu) + \dim \text{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\text{rad Ind}^{-\overline{H}} D^{\nu_B}, D^\mu). \end{aligned}$$

Так как $\alpha = \overline{R} - \overline{H} \neq -\overline{H}$, то по условию теоремы $\text{Res}_{-\overline{H}} D^\mu = 0$. Отсюда $\text{Hom}_{\Sigma_{n-1}}(\text{rad Ind}^{-\overline{H}} D^{\nu_B}, D^\mu) \neq 0$ и, в частности, $[\text{Ind}^{-\overline{H}} D^{\nu_B} : D^\mu] > 0$. Умножая модули из последнего неравенства на sgn_n , в силу утверждения 7.3, б) получаем

$$[\text{Ind}^{\overline{H}} D^{m(\nu_B)} : D^{m(\mu)}] > 0. \quad (7.4)$$

Из доказательства теоремы 4.7 работы [22] следует, что $m(\nu_B) = m(\nu)_{B^{(m)}}$, где $B^{(m)} - m(\nu)$ -хорошая клетка вычета $\overline{H}$. По лемме 6.3 получаем $m(\nu) = P(N^{(H,x)})$. Для краткости до конца доказательства этой теоремы положим $N = N^{(H,x)}$, $a_i = a_i^{(H,x)}$, $b_i = b_i^{(H,x)}$ (см. определение 6.2 и формулы (6.1)). Докажем, что $m(\nu) \leq m(\mu)$.

Случай 1: $R > 1$. Имеем $a_{Q+p-1} < b_{x-Q}$. Действительно, в случае $Q > 0$ с учетом неравенства (6.5) подстановка $y = Q + 1$ в неравенство (6.4) дает $b_{x-Q} - a_{Q+p-1} \geq x - 2Q - 1 \geq R - 1 > 0$. С другой стороны, в случае $Q = 0$ имеем $a_{Q+p-1} = H + p < b_x = b_{x-Q}$, так как $x > 1$.

Обозначим через $b^{(m)}$ элемент множества $\langle p + H - R, S_2, x - Q \rangle$, лежащий в столбце H . Понятно, что $b^{(m)}$ – нормальная бусинка абака N . Единственной начальной бусинкой абака N , отличной от $b^{(m)}$ и лежащей в столбце H , является a_Q в случае, когда $Q > 0$ и $p - 1 \mid Q$. Однако эта бусинка не нормальна, так как в данном случае $a_Q + p - 1 = a_{Q+p-2}$ и $a_Q + p = a_{Q+p-1} < b_{x-Q}$, откуда $N(a_Q + p - 1) = 1$ и $N(a_Q + p) = 0$. Следовательно, $b^{(m)}$ – хорошая бусинка абака N , ей соответствует клетка $B^{(m)}$ и $P(N_{b^{(m)}}) = m(\nu)_{B^{(m)}} = m(\nu_B)$.

Всеми начальными пробелами абака $N_{b^{(m)}}$, лежащими в столбце H , являются следующие: $b^{(m)}$; H в случае $Q > 0$; a_{Q+p-1} в случае $p - 1 \mid Q$. Если в последнем случае $Q > 0$, то пробел a_{Q+p-1} не конормален. Положим $c = H$ в случае $Q > 0$ и $c = H + p$ в случае $Q = 0$. Имеем $c \leq a_{Q+p-1} < b_{x-Q} \leq b^{(m)}$. Таким образом, всеми конормальными пробелами абака $N_{b^{(m)}}$, лежащими в столбце H , являются $b^{(m)}$ и c .

Случай 1.1: $m(\mu) \neq P(N_{b^{(m)}}^c)$. Обозначим через C добавляемую клетку разбиения $m(\nu_B)$, соответствующую пробелу c абака $N_{b^{(m)}}$. Если бы $[S^{m(\nu)} : D^{m(\mu)}] = 0$, то в силу формулы (7.4) по лемме 3.10, примененной в случае

$$r := n - 1, \quad \lambda := m(\nu_B), \quad \alpha := \overline{H}, \quad k := 2, \quad B_1 := C, \quad B_2 := B^{(m)}, \quad \gamma := m(\mu),$$

мы получили бы противоречие $m(\mu) = m(\nu_B)^C = P(N_{b^{(m)}}^c)$. Поэтому $[S^{m(\nu)} : D^{m(\mu)}] > 0$, $m(\nu) \leq m(\mu)$ и $m(\nu) \leq m(\mu)$.

Случай 1.2: $m(\mu) = P(N_{b(m)}^c)$. В случае нарушения одного из условий $R = 2$ или $Q = 0$ абак $N_{b(m)}^c$ содержит следующие нормальные бусинки, не лежащие в столбце $H - R$: $b^{(m)} - 1$ в случае $R > 2$; бусинку множества $\langle H, S_1, Q \rangle$, лежащую в столбце $H - 1$, в случае $R = 2$ и $Q > 0$. Следовательно, разбиение $m(\mu) = P(N_{b(m)}^c)$ содержит нормальные клетки вычета, отличного от $\overline{H} - \overline{R} = -\alpha$, что есть противоречие.

Имеем $x = 2$, $h(\nu) = H > 2$, $\nu = \widetilde{\lambda^{(H,2)}}$ и

$$\begin{aligned} N &= \overline{(-\infty, H - 2 + p) \cup \{H - 1 + p\} \cup (H + p, 2p) \cup \{H - 2 + 2p, H + 2p\}}, \\ N_{b(m)}^c &= \overline{(-\infty, H - 2 + p) \cup [H + p, 2p) \cup \{H - 2 + 2p, H - 1 + 2p\}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Отсюда видно, что $m(\mu) = (H^2, 2p - H) = \lambda^{(p-H+2,2,2)}$. По лемме 6.6 получаем $\mu = \lambda^{(H-2,2)}$, что противоречит условию теоремы.

Случай 2: $R = 1$. Так как $x > 1$, то $Q > 0$. При доказательстве леммы 6.3 было показано, что $a_{Q+p-2} \leq b_{x-Q-1} < b_{x-Q}$. Обозначим через $b^{(m)}$ элемент множества $\langle H, S_1, Q \rangle$, лежащий в столбце H . Так как $Q > 0$, то эта бусинка нормальна в N . Легко видеть, что других нормальных бусинок абак N в столбце H нет. Следовательно, $b^{(m)}$ — хорошая бусинка абак N , ей соответствует клетка $B^{(m)}$ и $P(N_{b(m)}^c) = m(\nu)_{B^{(m)}} = m(\nu_B)$.

Всеми начальными пробелами абак $N_{b(m)}$, лежащими в столбце H , являются следующие: $b^{(m)}$; H ; $b_{x-Q+p-H+1}$ в случае $p - H + 1 \mid x - Q - 1$. В последнем случае пробел $b_{x-Q+p-H+1}$ не кономален в $N_{b(m)}$, так как $b^{(m)} \leq a_{Q+p-2} < b_{x-Q}$. Положим $c = H$. Так как $Q > 0$, то $c < b^{(m)}$. Таким образом, всеми кономальными пробелами абак $N_{b(m)}$, лежащими в столбце H , являются $b^{(m)}$ и c . Обозначим через C добавляемую клетку разбиения $m(\nu_B)$, соответствующую пробелу c абак $N_{b(m)}$.

Случай 2.1: $m(\mu) \neq P(N_{b(m)}^c)$ рассматривается аналогично случаю 1.1.

Случай 2.2: $m(\mu) = P(N_{b(m)}^c)$. Имеем $h(m(\mu)) = 2p - H + 1$ и $h(\mu) \leq H - 1$. Отсюда $e(N_{b(m)}^c) \leq h(\mu) + h(m(\mu)) \leq 2p$. Понятно, что такое может произойти только, если $b^{(m)} = a_{Q+p-2} = H + p$ (рассуждения, аналогичные доказательству леммы 6.3). В этом случае

$$N_{b(m)}^c = \overline{(-\infty, H - 1) \cup [H, H + p) \cup \langle p + H - 1, S_2, x - Q \rangle} \quad (7.6)$$

и $m(\mu) = P(N_{b(m)}^c)$ — p -сингулярное разбиение, что есть противоречие.

Таким образом, после рассмотрения всех возможных случаев мы доказали, что $m(\nu) \leq m(\mu)$. Имеем $h(\mu) < h(\nu) < p$ и $h(m(\mu)) \leq h(m(\nu))$. В силу формул (6.2) и (6.3) получаем

$$h(\mu) + h(m(\mu)) < h(\nu) + h(m(\nu)) = e(\nu) + [p \nmid e(\nu)] \leq 2p.$$

Следовательно, μ удовлетворяет системе (7.3) и по лемме 7.2 имеем $\mu = \lambda^{(h', i, x)}$, где $0 < i \leq h'$, x и $h' < p$. Так как единственная нормальная клетка разбиения $\lambda^{(h', i, x)}$ имеет вычет $-\overline{h'}$, то по условию текущей теоремы получаем $-\overline{h'} = \alpha = \overline{R} - \overline{H}$. Так как $0 < H - R < p$, то $-p < H - R - h' < p$. Из того, что $H - R - h'$ делится на p , получаем $h' = H - R = h$.

Выполнение части 2) условия $\pi(H, x, i)$ следует из $m(\nu) \leq m(\mu)$ и теоремы 6.8. Докажем выполнение части 1) условия $\pi(H, x, i)$. Для этого достаточно показать, что $H, x > 2$.

Действительно в случае $H = 2$ мы получаем $h = 1$, x – нечетное число большее 2 и $\nu = ((x+1)p/2, (x-1)p/2)$, $\mu = (px)$. В силу леммы 3.5 (iv) из [17] получаем $x = 2p - 1$ и $(\nu, \mu) = ((p^2, p^2 - p), (2p^2 - p))$, что есть противоречие.

В случае $x = 2$ легко видеть, что часть 2) условия $\pi(H, x, i)$ не выполнена вопреки доказанному.

ЛЕММА 7.8. *Справедливо следующее:*

- а) $\text{Ext}_{\Sigma_{2p^2-p}}^1(D^{(p^2, p^2-p)}, D^{(2p^2-p)}) \cong K$;
- б) $\text{Ext}_{\Sigma_{2p}}^1(D^{\lambda^{(H,2)}}, D^{\lambda^{(H-2,2)}}) \cong K$, где $2 < H < p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Следует из леммы 3.5 (iv) работы [17].

б) Из формул (7.5) и леммы 6.3 видно, что $m(\lambda^{(H,2)}) = \lambda^{(p-H+2,2)}$. Отсюда по теореме 4.6 получаем

$$K \cong \text{Ext}_{\Sigma_{2p}}^1(D^{\lambda^{(p-H+2,2)}}, D^{m(\lambda^{(H,2)})}) \cong \text{Ext}_{\Sigma_{2p}}^1(D^{\lambda^{(H,2)}}, D^{m(\lambda^{(p-H+2,2)})}). \quad (7.7)$$

По лемме 6.6 имеем $m(\lambda^{(p-H+2,2)}) = m(\lambda^{(p-H+2,2,2)}) = \lambda^{(H-2,2)}$ (см. случай 1.2 доказательства предыдущей леммы). Подставляя это значение в формулу (7.7), получаем требуемую эквивалентность.

§ 8. Оценка сверху

8.1. Общая конструкция. Модифицируем метод п. 4.1, чтобы сделать его применимым к почти вполне расщепляемым разбиениям.

Пусть X – множество, удовлетворяющее тем же условиям, что и в п. 4.1, и нам из каких-либо дополнительных соображений известно отображение $\zeta: X \rightarrow \mathbb{Z}'$ такое, что

$$\dim \text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \leq \zeta(\nu, \mu) \quad \text{для любой пары } (\nu, \mu) \in X \text{ разбиений числа } n. \quad (8.1)$$

Построим отображение $U: X \rightarrow \mathbb{Z}'$ по индукции следующим образом. Положим $U(\emptyset, \emptyset) = 0$. Пусть теперь (ν, μ) – пара непустых разбиений из X . Для каждой μ -хорошей клетки A положим $m_A(\nu, \mu)$ равным следующему числу:

- 1) $\varepsilon(\nu, \mu_A)$, если не существует ν -хороших клеток вычета $\text{res } A$;
- 2) $U(\nu_B, \mu_A) + \varepsilon(\nu, \mu_A)$, если существует ν -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$ и $(\nu_B, \mu_A) \in X$;
- 3) $+\infty$, если существует ν -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$ и $(\nu_B, \mu_A) \notin X$.

Положим $U(\nu, \mu) = \min(\{\zeta(\nu, \mu)\} \cup \{m_A(\nu, \mu) : A - \mu\text{-хорошая клетка}\})$.

ЛЕММА 8.1. *Пусть $(\nu, \mu) \in X$. Тогда $\dim \text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \leq U(\nu, \mu)$, где $\nu, \mu \vdash n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается индукцией по n с использованием леммы 3.2.

8.2. Случай почти вполне расщепляемых разбиений. До конца параграфа положим

$$X = \{(\nu, \mu) : \nu \text{ почти вполне расщепляемо, } \mu \text{ } p\text{-регулярно, } \nu \not\prec \mu, \nu \sim \mu\}.$$

Зададим ζ следующим способом. Пусть (ν, μ) – пара разбиений числа n из X . Положим $x = n/p$ и $H = h(\lambda)$, где λ – прообраз ν . Определим $\zeta(\nu, \mu) = +\infty$ за исключением следующих случаев:

- 1) $\mu \not\prec \nu$, положим $\zeta(\nu, \mu) = 0$;
- 2) $\mu \triangleright \nu$ и пара (ν, μ) минимальная,
 - 2.1) $(\nu, \mu) = ((p^2, p^2 - p), (2p^2 - p))$, положим $\zeta(\nu, \mu) = 1$;
 - 2.2) $(\nu, \mu) = (\widetilde{\lambda^{(H,2)}}, \lambda^{(H-2,2)})$, где $H > 2$, положим $\zeta(\nu, \mu) = 1$;
 - 2.3) случаи 2.1) и 2.2) не реализуются и не существует числа i такого, что $\nu = \widetilde{\lambda^{(H,x)}}$, $\mu = \lambda^{(H-\text{rem}(x,H),i,x)}$ и $\pi(H, x, i)$ выполнено, положим $\zeta(\nu, \mu) = 0$.

То, что для таким образом определенного ζ выполнено свойство (8.1), следует из утверждения 2.2 и лемм 7.7 и 7.8.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть ν, μ – p -регулярные разбиения числа n такие, что ν – почти вполне расщепляемо и $\nu \not\prec \mu$. Тогда $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) = 0$, за исключением случая, когда $\mu = \mathcal{H}_\varepsilon(\lambda)$, где λ – прообраз ν , $H = h(\lambda)$ и выполнено одно из условий:

- 1) $H = 2$ и $\varepsilon = (1, -1), (-p, p)$;
- 2) $H = 3$ и $\varepsilon = (0, -1, 1), (-1, 1, 0), (-1, -1, 2)$;
- 3) $H > 3$ и $\varepsilon = (0, -1, 0^{H-3}, 1), (-1, 0^{H-3}, 1, 0), (-1, -1, 0^{H-4}, 1, 1)$;
- 4) $\varepsilon = \varepsilon(H, x, i)$ для x и i таких, что условие $\pi(H, x, i)$ выполнено.

В случаях 1)–3) имеем $\text{Ext}_{\Sigma_n}^1(D^\nu, D^\mu) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 2.3 достаточно считать, что $\nu \sim \mu$. Поэтому достаточно доказать, что $U(\nu, \mu) = 0$ для любой пары $(\nu, \mu) \in X$, за исключением случаев 1)–4), и что $U(\nu, \mu) \leq 1$ в случаях 1)–3). Проведем индукцию по n . В случае $n = 0$ имеем $U(\nu, \mu) = 0$ по определению.

Пусть теперь $n > 0$ и теорема верна для разбиений чисел, меньших чем n . Выберем некоторые абак M и Λ одинаковых смещений такие, что $\mu = P(M)$ и $\lambda = P(\Lambda)$.

Случай 1: $\mu \not\prec \nu$. Тогда $U(\nu, \mu) = \zeta(\nu, \mu) = 0$.

Случай 2: $\mu \triangleright \nu$ и пара (ν, μ) не минимальная. Пусть A – такая μ -хорошая клетка, что либо не существует ν -хорошей клетки вычета $\text{res } A$, либо такая клетка B существует и ν_B – почти вполне расщепляемое разбиение. Обозначим через a бусинку абак M , соответствующую клетке A .

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon(\nu, \mu_A) = 1$. Тогда $\tilde{\Lambda} = (M_a)^c$ для некоторого конормального пробела s абак M_a . Так как $\nu \sim \mu$ и $\nu \triangleleft \mu$, то a и s лежат в одном столбце, причем a ниже, чем s . Имеем $M = (\tilde{\Lambda}_c)^a$.

В случае $H = 2$ получаем $c = b^\Lambda - p$, $a = b^\Lambda + p$ и $b^\Lambda = b_\Lambda + 1$. Отсюда $M = \{b_\Lambda - p, b^\Lambda + p\} = \mathcal{H}_{(1,-1)}(\Lambda)$.

В случае $H > 3$ получаем либо $c = b^\Lambda - p$, $a = b^\Lambda$, $b^\Lambda = b^\Lambda(2) + 1$, либо $c = b_\Lambda(2)$, $a = b^\Lambda(2) + p$, $b_\Lambda(2) = b_\Lambda + 1$. В первом случае $M = \mathcal{H}_{(0,-1,0^{H-3},1)}(\Lambda)$, а во втором случае $M = \mathcal{H}_{(-1,0^{H-3},1,0)}(\Lambda)$. Заметим, что во всех случаях единственной бусинкой абак $\tilde{\Lambda}$, лежащей в том же столбце, что и a , является бусинка s , которая

не нормальна. Поэтому не существует ν -хороших клеток вычета $\text{res } A$ и $U(\nu, \mu) \leq m_A(\nu, \mu) = \varepsilon(\nu, \mu_A) = 1$.

Будем теперь считать, что $\varepsilon(\nu, \mu_A) = 0$. Если не существует ν -хороших клеток вычета $\text{res } A$, то $U(\nu, \mu) = m_A(\nu, \mu) = 0$. Поэтому будем считать, что существует ν -хорошая клетка B вычета $\text{res } A$. В силу выбора клетки A разбиение ν_B почти вполне расщепляемое. Применяя лемму 4.3, b), получаем $\nu_B \not\preceq \mu_A$, откуда $(\nu_B, \mu_A) \in X$. Отсюда $U(\nu, \mu) \leq m_A(\nu, \mu) = U(\nu_B, \mu_A)$. Поэтому далее мы будем рассматривать случай $U(\nu_B, \mu_A) > 0$.

Пусть b – бусинка абак $\tilde{\Lambda}$, соответствующая клетке B . В случае $\chi(\lambda) = p$ бусинка b отлична от наибольшей бусинки абак $\tilde{\Lambda}$ (т.е. $r(B) > 1$), так как иначе наибольшая бусинка абак $\tilde{\Lambda}_b$, равная $b-1$, не поднимается, что противоречит тому, что ν_B – почти вполне расщепляемое разбиение. Отсюда имеем $\nu_B = \lambda_D$, где D – λ -хорошая клетка (см. определение $\mathcal{H}_\varepsilon$ или лемму 8 из [5]).

Положим $\overline{H} = h(\lambda_D)$. В силу индуктивного предположения $\mu_A = \mathcal{H}_\varepsilon(\lambda_D)$, где ε – набор, описанный случаями 1)–4) данной теоремы, в которых H заменено на $\overline{H}$. Так как $\sum_{i=1}^{\overline{H}} \varepsilon_i = 0$, то $M_a = \mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda_d)$, где d – бусинка абак Λ , соответствующая клетке D .

Напомним, что a и d – кохорошие пробелы абак M_a и Λ_d соответственно, так как a и d – хорошие бусинки абак M и Λ соответственно. Так как $\varepsilon \neq (0^{\overline{H}})$, то $\varepsilon_j < 0$ для некоторого $1 \leq j \leq \overline{H}$. Отсюда $e \leq b^{\Lambda_d}(j) - p$, где e – наименьший пробел абак Λ_d . Следовательно, $d \neq e$, так как иначе мы получили бы $b^\Lambda = b^{\Lambda_d}$, $b_\Lambda = e$, $b^\Lambda - b_\Lambda \geq b^{\Lambda_d}(j) - e \geq p$, что противоречит вполне расщепляемости абак Λ . Отсюда $H = \overline{H}$.

Имеем $d = b^{\Lambda_d}(k) + 1 < b_{\Lambda_d} + p$, так как пробел $b_{\Lambda_d} + p$ – не кономальный пробел абак Λ_d . Легко видеть, что единственным кохорошим пробелом абак M_a , равного $\mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda_d)$, лежащим в том же столбце, что и d , является пробел $b^{\Lambda_d}(k) + p\varepsilon_k + 1$. Отсюда $a = b^{\Lambda_d}(k) + p\varepsilon_k + 1$, $M = \mathcal{H}_\varepsilon(\Lambda)$ и $U(\nu, \mu) \leq 1$ в случаях 1)–3).

Случай 3: $\mu \triangleright \nu$ и пара (ν, μ) минимальная. Требуемое утверждение следует из определения U и ζ .

Общий вид наборов $\varepsilon(H, x, i)$ выглядит достаточно запутанно. Однако имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 8.3. Пусть H – целое число такое, что $(p+3)/2 \leq H < p$. Тогда $\pi(H, x, i)$ выполнено тогда и только, когда $x = QH + 1$, $Q \in \mathbb{Z}$, $Q \geq 1$ и $i = H - 1$. В этом случае $\varepsilon(H, x, i) = (-Q - 1, \overline{q}^{H-1-r}, (\overline{q} + 1)^r)$, где $\overline{q} = \text{quo}(Q + 1, H - 1)$ и $r = \text{rem}(Q + 1, H - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\pi(H, x, i)$ выполнено. Воспользуемся обозначениями определения 7.4. Положим

$$\delta = H - Q - 1 + h \left[\frac{x - Q - 1}{p - H + 1} \right] + (R - 1) \left[\frac{x - Q - 2}{p - H + 1} \right] - m \left[\frac{p - h + x - 1}{p - m} \right].$$

Предположим, что $R > 2$. Учитывая, что $m \leq h$, имеем

$$\delta \geq h \left(\left[\frac{x - Q - 1}{p - H + 1} \right] - \left[\frac{x - 1}{p - H + 2} \right] \right) + \left(\left[\frac{x - Q - 2}{p - H + 1} + 1 \right] - \left[\frac{x}{H} \right] \right) + R - 2.$$

Для получения противоречия с условием 2) определения 7.4 достаточно доказать, что обе разности в круглых скобках неотрицательны. Это следует из следующих неравенств

$$\begin{aligned} \frac{x-Q-1}{p-H+1} - \frac{x-1}{p-H+2} &= \frac{x-1-Q(p-H+2)}{(p-H+1)(p-H+2)} \\ &= \frac{Q(2H-(p+2))+R-1}{(p-H+1)(p-H+2)} > 0, \\ \frac{x-Q-2}{p-H+1} + 1 - \frac{x}{H} &= \frac{(2H-(p+2))x+H(p-1-H)+R}{H(p-H+1)} > 0. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $R = 2$. Тогда $Q \geq 1$. Имеем

$$\delta \geq h \left(\left[\frac{x-Q-1}{p-H+1} \right] - \left[\frac{x-1}{p-H+2} \right] \right) + \left(\left[\frac{x-Q-2}{p-H+1} \right] - \left[\frac{x}{H} \right] \right) + R - 1.$$

То, что разность в первой паре круглых скобок неотрицательна, показывается так же, как и выше. Имеем

$$\frac{x-Q-2}{p-H+1} - \frac{x}{H} = \frac{(2H-(p+3))x+H(Q-2)+4}{H(p-H+1)}.$$

Последнее выражение и, следовательно, разность во второй паре круглых скобок неотрицательны в случае $Q \geq 2$. Если $Q = 1$, то $x = H + 2$ и мы имеем

$$\left[\frac{x-Q-2}{p-H+1} \right] - \left[\frac{x}{H} \right] = \left[\frac{H-1}{p-H+1} \right] - \left[\frac{H+2}{H} \right] = \left[\frac{H-1}{p-H+1} \right] - 1 \geq 0.$$

Приходим к противоречию с условием 2) определения 7.4.

Таким образом, доказано, что $R = 1$. Отсюда $x = QH + 1$, $Q \geq 1$ и $m = i$. Предположим, что $i \neq H - 1$. Тогда $i \leq H - 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta &\geq H - Q - 1 + h \left[\frac{x-Q-1}{p-H+1} \right] - (H-2) \left[\frac{p-H+x}{p-H+2} \right] \\ &= h \left(\left[\frac{x-Q-1}{p-H+1} \right] - \left[\frac{x-2}{p-H+2} \right] \right) + \left(\left[\frac{x-2}{p-H+2} \right] - \left[\frac{x}{H} \right] \right) + 1. \end{aligned}$$

Разность в первой паре круглых скобок правой части неотрицательна, так как

$$\begin{aligned} \frac{x-Q-1}{p-H+1} - \frac{x-2}{p-H+2} &= \frac{x-2-(Q-1)(p-H+2)}{(p-H+1)(p-H+2)} \\ &= \frac{(Q-1)(2H-(p+2))+H-1}{(p-H+1)(p-H+2)} > 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{x-2}{p-H+2} - \frac{x}{H} = \frac{(2H-(p+2))x-2H}{H(p-H+2)} = \frac{(2H-(p+3))x+H(Q-2)+1}{H(p-H+2)}.$$

Последнее выражение и, следовательно, разность во второй паре круглых скобок неотрицательны в случае $Q \geq 2$. Если $Q = 1$, то $x = H + 1$ и мы имеем

$$\left\lfloor \frac{x-2}{p-H+2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{H} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H-1}{p-H+2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{H+1}{H} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H-1}{p-H+2} \right\rfloor - 1 \geq 0.$$

Приходим к противоречию с условием 2) определения 7.4.

Наконец, для $x = QH + 1$ и $i = H - 1$, где Q – любое целое положительное число, имеем

$$\delta = h \left(\left\lfloor \frac{x-1-Q}{p-H+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x-1}{p-H+1} \right\rfloor \right) - Q < 0,$$

откуда следует, что условие $\pi(H, x, i)$ выполнено. Легко проверить, что $\varepsilon(H, x, i)$ задается именно предложенной формулой.

§ 9. Приложения к правилам ветвления

9.1. Предварительные факты. В следующем утверждении, непосредственно вытекающем из теорем E и E' работы [4], $\text{Res}_\alpha 0$ надо понимать как 0.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. Пусть λ – p -регулярное разбиение и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

- 1) Если не существует λ -нормальных (λ -конормальных) клеток вычета α , то $\text{Res}_\alpha D^\lambda = 0$ ($\text{Ind}^\alpha D^\lambda = 0$).
- 2) Если существует ровно одна λ -нормальная (λ -конормальная) клетка A вычета α , то $\text{Res}_\alpha D^\lambda \cong D^{\lambda_A}$ ($\text{Ind}^\alpha D^\lambda \cong D^{\lambda^A}$).

ЛЕММА 9.2. Пусть M – модуль такой, что $\text{head } M \cong \text{soc } M$ и $N_1, \dots, N_k$ – попарно неизоморфные простые модули такие, что $[M : N_i] = 1$, $i = 1, \dots, k$. Тогда либо $M \cong \bigoplus_{i=1}^k N_i$, либо существует простой модуль N , не изоморфный ни одному из $N_1, \dots, N_k$, такой, что $\text{Hom}(M, N) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такого модуля N не существует. Докажем индукцией по $n = 0, \dots, k$, что существует подмножество $S_n \subset \{1, \dots, k\}$ мощности n такое, что $\bigoplus_{i \in S_n} N_i$ изоморфен подмодулю M . Множество $S_0 = \emptyset$ отвечает случаю $n = 0$. Пусть теперь $0 < n < k$ и $\iota: \bigoplus_{i \in S_n} N_i \rightarrow M$ – вложение модулей. Так как $|S_n| < k$, то $\text{Im } \iota \neq M$ и существует максимальный подмодуль M_0 модуля M , содержащий $\text{Im } \iota$. В силу нашего предположения $M/M_0 \cong N_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\} \setminus S_n$. Так как $\text{head } M \cong \text{soc } M$, то можно положить $S_{n+1} = S_n \cup \{j\}$.

Имеем $S_k = \{1, \dots, k\}$. Из нашего предположения, сделанного в начале доказательства, получаем $M \cong \bigoplus_{i=1}^k N_i$.

ЛЕММА 9.3. Пусть λ – разбиение высоты менее p и B – λ -добавляемая клетка такие, что λ^B – p -сингулярное разбиение. Тогда $\lambda = (1^{p-1})$ и $B = (p, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $h(\lambda^B) \leq p$ и λ^B – p -сингулярное разбиение, то $\lambda^B = (k^p)$. Имеем $k = (\lambda^B)_p = 1$ и $B = (p, 1)$.

9.2. Индуцирование вполне расщепляемых модулей. Далее образ R -модуля M в группе Гротендика кольца R будем обозначать через $[M]$.

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть λ – вполне расщепляемое разбиение числа n и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Предположим, что существует более одной λ -конормальной клетки вычета α . Тогда таких клеток две. Обозначим их A и B , где A лежит выше B . Имеем (в группе Гротендика кольца $K\Sigma_{n+1}$)

$$[\text{Ind}^\alpha D^\lambda] = \begin{cases} 2[D^{\lambda^A}] + [D^{\lambda^B}], & \text{если } h_{1,1}(\lambda) \neq p-1 \text{ или } p > 2, \lambda = (p-1); \\ 2[D^{\lambda^A}] + [D^{\lambda^B}] + [D^{\widetilde{\lambda^A}}], & \text{если } h_{1,1}(\lambda) = p-1 \text{ и } \lambda \neq (1^{p-1}), (p-1); \\ 2[D^{(2,1^{p-2})}] + [D^{(3,1^{p-3})}], & \text{если } p > 2 \text{ и } \lambda = (1^{p-1}); \\ 2[D^{(2)}], & \text{если } p = 2 \text{ и } \lambda = (1). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что таких клеток две, следует из того, что все собственные бусинки любого абака разбиения λ лежат в разных столбцах. Положим $\nu = \lambda^A$. Легко видеть, что разбиение ν вполне расщепляемое, A – ν -хорошая клетка и $h(\lambda) = h(\nu)$. Предположим, что утверждение теоремы неверно.

Рассмотрим сначала случай, когда $h_{1,1}(\lambda) \neq p-1$ или $p > 2, \lambda = (p-1)$. Тогда λ^B p -регулярно в силу леммы 9.3 и $[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^{\lambda^B}] = 1$. Применяя лемму 9.2 в случае

$$M := \text{rad Ind}^\alpha D^\lambda / \text{soc Ind}^\alpha D^\lambda, \quad k := 1, \quad N_1 := D^{\lambda^B}$$

и учитывая $[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^{\lambda^A}] = 2$, получаем, что существует модуль D^γ , не изоморфный ни D^{λ^B} , ни D^{λ^A} , такой, что $\text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^\lambda, D^\gamma) \neq 0$.

По лемме 3.10 получаем $0 < [\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^\gamma] \leq 2[S^{\lambda^A} : D^\gamma]$ и, следовательно, $\nu = \lambda^A \triangleleft \gamma$. Отсюда $\lambda \neq (p-1)$ (и, следовательно, $h_{1,1}(\lambda) \neq p-1$, $h(\nu) > 1$ и $p > 2$). Так как $\text{head Ind}^\alpha D^\lambda \cong D^\nu$, то $\text{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(D^\nu, D^\gamma) \neq 0$. По теореме 4.6 получаем $\gamma = \tilde{\nu}$. Имеем $h(\lambda) = h(\nu) > 1$ и $p \leq h_{1,1}(\nu) \leq h_{1,1}(\lambda) + 1$ по лемме 4.5. С учетом $h_{1,1}(\lambda) \neq p-1$ получаем $h_{1,1}(\lambda) \geq p$ и, следовательно, λ – большое разбиение. Отсюда $\tilde{\nu} = \widetilde{\lambda^C}$, где C – $\tilde{\nu}$ -хорошая клетка вычета α . Так как $\text{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(S^\nu, D^{\tilde{\nu}}) = 0$ в силу утверждения 2.1, то по лемме 3.7

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^\lambda, D^\gamma) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^{\nu^A}, D^{\tilde{\nu}}) \\ &\leq \varepsilon(\nu, \tilde{\nu}_C) = \varepsilon(\lambda^A, \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

Отсюда $\lambda^A = \tilde{\lambda}^D$. Такое возможно только, если $r(A) = 1$ и $\chi(\lambda) = p$. Приходим к противоречию с тем, что A – λ -конормальная клетка.

Теперь рассмотрим случай, когда $h_{1,1}(\lambda) = p-1$ и $\lambda \neq (1^{p-1}), (p-1)$. Имеем $p > 2, n \geq 2$ и $A = (1, \lambda_1)$. Положим $A^t = (\lambda_1, 1)$. Имеем $(\lambda^t)^{A^t} = (\lambda^A)^t$. Так как λ – p -ядро, то по лемме 5.2 из [7] получаем $m(\lambda) = \lambda^t$. По лемме 11 из [5] имеем $m((\lambda^A)^t) = \tilde{\lambda}^A$. В силу теоремы E(iv) работы [4] и утверждения 7.3 получаем

$$\begin{aligned} 1 &= [D^{\lambda^t} \uparrow^{\Sigma_{n+1}} : D^{(\lambda^t)^{A^t}}] = [D^{\lambda^t} \uparrow^{\Sigma_{n+1}} \otimes \text{sgn}_{n+1} : D^{(\lambda^A)^t} \otimes \text{sgn}_{n+1}] \\ &= [D^{m(\lambda^t)} \uparrow^{\Sigma_{n+1}} : D^{m((\lambda^A)^t)}] = [D^{\lambda^t} \uparrow^{\Sigma_{n+1}} : D^{\tilde{\lambda}^A}] = [\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^{\tilde{\lambda}^A}]. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае λ^B – p -регулярное разбиение и $[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^{\lambda^B}] = 1$. Применяя лемму 9.2 в случае

$$M := \text{rad Ind}^\alpha D^\lambda / \text{soc Ind}^\alpha D^\lambda, \quad k := 2, \quad N_1 := D^{\lambda^B}, \quad N_2 := D^{\widetilde{\lambda^A}}$$

и учитывая $[\text{Ind}^\alpha D^\lambda : D^{\lambda^A}] = 2$, получаем, что существует модуль D^γ , не изоморфный ни одному из модулей D^{λ^B} , $D^{\widetilde{\lambda^A}}$, D^{λ^A} , такой, что

$$\text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^\lambda, D^\gamma) \neq 0.$$

Так как $\text{head Ind}^\alpha D^\lambda \cong D^{\lambda^A}$, то $\text{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(D^{\lambda^A}, D^\gamma) \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю по лемме 3.10 имеем $\lambda^A \triangleleft \gamma$. Отсюда по теореме 4.6 получаем противоречие $\gamma = \widetilde{\lambda^A}$.

В случае $p > 2$, умножая уже полученную формулу $[\text{Ind}^{\overline{1}} D^{(p-1)}] \cong 2[D^{(p)}] + [D^{(p-1,1)}]$ на sgn_p и применяя утверждение 7.3, получаем

$$[\text{Ind}^{\overline{1}} D^{(1^{p-1})}] \cong 2[D^{(2,1^{p-2})}] + [D^{(3,1^{p-3})}].$$

Наконец, формула $[\text{Ind}^{\overline{1}} D^{(1)}] = 2[D^{(2)}]$ в случае $p = 2$ получается сравнением размерностей.

ТЕОРЕМА 9.5. Пусть λ – вполне расщепляемое разбиение числа n , отличное от (1^{p-1}) , и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Обозначим через B наинизшую λ -добавляемую клетку (т.е. лежащую в первом столбце). Предположим, что существует более одной λ^B -нормальной клетки вычета α . Тогда кроме B существует только одна такая клетка A . Имеем $\text{Res}_\alpha D^{\lambda^B} \cong \text{Ind}^\alpha D^{\lambda_A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_1, \dots, B_k$ – все λ -конормальные клетки, отличные от B . Так как существует более одной λ^B -нормальной клетки вычета α , то вычеты $\text{res } B, \text{res } B_1, \dots, \text{res } B_k$ попарно различны. Отсюда $D^{\lambda \uparrow_{\Sigma_{n+1}}} \cong D^{\lambda^B} \oplus D^{\lambda^{B_1}} \oplus \dots \oplus D^{\lambda^{B_k}}$. Теперь легко проверить, что единственным непрым простым неразложимым слагаемым модуля $D^{\lambda \uparrow_{\Sigma_{n+1}}} \downarrow_{\Sigma_n}$ будет $\text{Res}_\alpha D^{\lambda^B}$.

Пусть $A_1, \dots, A_l$ – все λ -нормальные клетки. Вычеты $\text{res } A_1, \dots, \text{res } A_l$ попарно различны и $D^{\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}}} \cong D^{\lambda_{A_1}} \oplus \dots \oplus D^{\lambda_{A_l}}$. Единственным непрым простым неразложимым слагаемым модуля $D^{\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}}} \uparrow_{\Sigma_n}$ является $\text{Ind}^\alpha D^{\lambda_A}$.

В силу теоремы о подгруппах (44.2) из [1], примененной к $G := \Sigma_{n+1}$, $R = S := \Sigma_n$ и $L := D^\lambda$, имеем $D^{\lambda \uparrow_{\Sigma_{n+1}}} \downarrow_{\Sigma_n} \cong D^{\lambda \downarrow_{\Sigma_{n-1}}} \uparrow_{\Sigma_n} \oplus D^\lambda$. Следовательно, по теореме Крулля–Шмидта $\text{Res}_\alpha D^{\lambda^B} \cong \text{Ind}^\alpha D^{\lambda_A}$.

9.3. Индуцирование некоторых почти вполне расщепляемых модулей.

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть λ – большое разбиение числа n высоты $H \geq (p+3)/2$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ такие, что $h_{2,1}(\lambda) \neq p-1$ и условие $\overline{\lambda_1} = -\overline{h(\lambda)} = \alpha$ нарушено. Предположим, что существует более одной $\widetilde{\lambda}$ -конормальной клетки вычета α . Тогда таких клеток две. Обозначим их A и B , где A лежит выше B . Имеем $[\text{Ind}^\alpha D^{\widetilde{\lambda}}] = 2[D^{\widetilde{\lambda^A}}] + [D^{\widetilde{\lambda^B}}]$ (в группе Гротендика кольца $K\Sigma_{n+1}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 9.4, получаем, что таких клеток две. Пусть Λ – абак разбиения λ и c – его наименьший пробел. Обозначим через a и b пробелы абака $\tilde{\Lambda}$, соответствующие клеткам A и B соответственно. Случай $h(\tilde{\lambda}) < h(\lambda)$ невозможен, так как мы получили бы $c = b^\Lambda - p$, что противоречит существованию у $\tilde{\Lambda}$ более одного начального пробела в одном столбце. Следовательно, $h(\tilde{\lambda}) = h(\lambda)$ и $c = b$. Отсюда получаем, что $\tilde{\lambda}$ не вполне расщепляемо, в частности, $\tilde{\lambda} \neq (1^{p-1})$. В силу леммы 9.3 получаем, что $\tilde{\lambda}^B$ – p -регулярное разбиение.

Так как $\text{res } A = \text{res } B$ и условие $\overline{\lambda_1} = -\overline{h(\lambda)} = \alpha$ нарушено, то существует $i = 2, \dots, H$ такое, что в столбце, где лежит $b^\Lambda(i) + 1$, находится пробел c и ни одной собственной бусинки абака Λ . Следовательно, $\tilde{\lambda}^A = \tilde{\lambda}^D$, где D – λ -кохорошая клетка такая, что $h(\lambda^D) = H$. Поэтому разбиение λ^D большое.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Положим $\nu = \tilde{\lambda}^A$ и обозначим через d пробел абака Λ , соответствующий клетке D . Применяя лемму 9.2 в случае

$$M := \text{rad Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}} / \text{soc Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}}, \quad k := 1, \quad N_1 := D^{\tilde{\lambda}^B}$$

и учитывая $[\text{Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}} : D^{\tilde{\lambda}^A}] = 2$, получаем, что существует модуль D^γ , не изоморфный ни $D^{\tilde{\lambda}^B}$, ни $D^{\tilde{\lambda}^A}$, такой, что $\text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}}, D^\gamma) \neq 0$. По лемме 3.10 получаем $0 < [\text{Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}} : D^\gamma] \leq 2[S^{\tilde{\lambda}^A} : D^\gamma]$ и, следовательно, $\nu = \tilde{\lambda}^A \triangleleft \gamma$. Так как $\text{head Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}} \cong D^\nu$, то $\text{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(D^\nu, D^\gamma) \neq 0$. По теореме 8.2 и лемме 8.3 получаем $\gamma = \mathcal{H}_\varepsilon(\lambda^D)$ для ε , равному одному из следующих значений: $(0, -1, 0^{H-3}, 1)$; $(-1, 0^{H-3}, 1, 0)$; $(-1, -1, 0^{H-4}, 1, 1)$; $(-Q-1, \bar{q}^{H-1-r}, (\bar{q}+1)^r)$, где $Q \geq 1$, $\bar{q} = \text{quo}(Q+1, H-1)$ и $r = \text{rem}(Q+1, H-1)$.

Если предположить, что $h(\gamma) < H$, то, учитывая непосредственный вид выше перечисленных наборов, которым может быть равно ε , мы получили бы $c = b^{\Lambda^d} - p$ или $c = b^{\Lambda^d}(2) - p$. Однако первое условие не выполнено, так как $i > 1$, а второе не выполнено, так как $h_{2,1}(\lambda) \neq p-1$. Отсюда получаем, что $h(\gamma) = H$, существует единственная γ -нормальная клетка E вычета α и $\mathcal{H}_\varepsilon(\lambda) = \gamma_E$.

Так как $\text{Ext}_{\Sigma_{n+1}}^1(S^\nu, D^\gamma) = 0$ в силу утверждения 2.1, то по лемме 3.7

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim \text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}}, D^\gamma) = \dim \text{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\text{rad Ind}^\alpha D^{\nu_A}, D^\gamma) \\ &\leq \varepsilon(\tilde{\lambda}^A, \gamma_E). \end{aligned}$$

Отсюда $\tilde{\lambda}^A = (\gamma_E)^F$, где $\text{res } F = \alpha$. Понятно, что либо $F = E$, либо $h((\gamma_E)^F) > H$. Первый случай невозможен, так как $\tilde{\lambda}^A \triangleleft \gamma$, а второй – потому, что $h(\tilde{\lambda}^A) = H$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Читатель сам может сформулировать и доказать аналог теоремы 9.5 для почти вполне расщепляемых разбиений.

9.4. Гипотезы. Следующие гипотезы сформулированы на основе теоремы 8.2 и вычислений в пределах известных матриц разложения.

ГИПОТЕЗА 9.7. Пусть λ – большое разбиение числа n высоты H и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ такие, что условие $\overline{\lambda_1} = -\overline{h(\lambda)} = \alpha$ нарушено. Предположим, что сущес-

тует более одной $\tilde{\lambda}$ -конормальной клетки вычета α . Тогда таких клеток две. Обозначим их A и B , где A лежит выше B . Имеет место формула

$$[\text{Ind}^\alpha D^{\tilde{\lambda}}] = \begin{cases} 2[D^{\tilde{\lambda}^A}] + [D^{\tilde{\lambda}^B}], & \text{если } h_{2,1}(\lambda) \neq p-1; \\ 2[D^{\tilde{\lambda}^A}] + [D^{\tilde{\lambda}^B}] + [D^{\mathcal{H}_{(-2,2)}(\tilde{\lambda}^A)}], & \text{если } h_{2,1}(\lambda) = p-1 \text{ и } H=2; \\ 2[D^{\tilde{\lambda}^A}] + [D^{\tilde{\lambda}^B}] + [D^{\mathcal{H}_{(0,-1,1)}(\tilde{\lambda}^A)}] \\ \quad + [D^{\mathcal{H}_{(1,-1,0)}(\tilde{\lambda}^A)}], & \text{если } h_{2,1}(\lambda) = p-1 \text{ и } H=3; \\ 2[D^{\tilde{\lambda}^A}] + [D^{\tilde{\lambda}^B}] + [D^{\mathcal{H}_{(0,-1,0^{H-3},1)}(\tilde{\lambda}^A)}] \\ \quad + [D^{\mathcal{H}_{(0,-1,0^{H-4},1,0)}(\tilde{\lambda}^A)}], & \text{если } h_{2,1}(\lambda) = p-1 \text{ и } H>3. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Пусть $p=7$ и $\lambda=(5,4,2,2)$. Тогда $\tilde{\lambda}=(6,4,2,1)$ и

$$[\text{Ind}^3 D^{(6,4,2,1)}] = 2[D^{(6,5,2,1)}] + [D^{(6,4,2,1,1)}] + [D^{(6,6,2)}] + [D^{(7,7)}].$$

Имеем $\lambda_1 = 5 \neq -4 = -h(\lambda) \pmod{7}$, $h_{2,1}(\lambda) = 6$, $A = (2,5)$, $B = (5,1)$, $\tilde{\lambda}^A = (6,5,2,1)$, $\tilde{\lambda}^B = (6,4,2,1,1)$, $\mathcal{H}_{(0,-1,0,1)}(\tilde{\lambda}^A) = (6,6,2)$, $\mathcal{H}_{(0,-1,1,0)}(\tilde{\lambda}^A) = (7,7)$.

ГИПОТЕЗА 9.8. Пусть λ – вполне расщепляемое разбиение высоты H такое, что $\chi(\lambda) = p$, и $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Обозначим через A наивысшую λ -добавляемую клетку (т.е. лежащую в первой строке). Предположим, что существует более одной λ^A -нормальной клетки вычета α . Тогда кроме A такой клеткой является только наинизшая λ -удаляемая клетка B . Имеем

$$[\text{Res}_\alpha D^{\lambda^A}] = \begin{cases} 2[D^{\tilde{\lambda}}] + [D^{\lambda}] + [D^{\mathcal{H}_{(-1,0^{H-3},1,0)}(\lambda)}] \\ \quad + x[D^{\mathcal{H}_{(0,-1,0^{H-3},1)}(\lambda)}], & \text{если } H>2; \\ 2[D^{\tilde{\lambda}}] + [D^{\lambda}] + x[D^{\mathcal{H}_{(1,-1)}(\lambda)}], & \text{если } H=2, \end{cases}$$

где $x = [h_{2,1}(\lambda) \geq p]$.

ПРИМЕР. Пусть $p=5$ и $\lambda=(5,5,3)$. Тогда $A=(1,6)$, $\lambda^A=(6,5,3)$ и

$$[\text{Res}_0 D^{(6,5,3)}] = 2[D^{(6,5,2)}] + [D^{(5,5,3)}] + [D^{(9,2,2)}] + [D^{(6,6,1)}].$$

Имеем $\tilde{\lambda}=(6,5,2)$, $\mathcal{H}_{(-1,1,0)}(\lambda) = (9,2,2)$, $\mathcal{H}_{(0,-1,1)}(\lambda) = (6,6,1)$ и $h_{2,1}(\lambda) = 6$.

ГИПОТЕЗА 9.9. Если λ – вполне расщепляемое разбиение высоты три такое, что $h_{1,1}(\lambda) = 2p-1$, то $[\text{Ind}^{-\bar{3}} D^{\tilde{\lambda}}] = 2[D^{\tilde{\lambda}^A}] + [D^{\tilde{\lambda}^B}] + [D^{\mathcal{H}_{(0,1,-1)}(\tilde{\lambda}^A)}]$, где $A = (3, \tilde{\lambda}_3 + 1)$ и $B = (4, 1)$.

ПРИМЕР. Пусть $p=5$ и $\lambda=(7,6,6)$. Тогда $\tilde{\lambda}=(9,6,4)$ и

$$[\text{Ind}^2 D^{(9,6,4)}] = 2[D^{(9,6,5)}] + [D^{(9,6,4,1)}] + [D^{(10,10)}].$$

Имеем $h_{1,1}(\lambda) = 9$, $\tilde{\lambda}^A = (9,6,5)$, $\tilde{\lambda}^B = (9,6,4,1)$ и $\mathcal{H}_{(0,1,-1)}(\tilde{\lambda}^A) = (10,10)$. Более того, при помощи известных матриц разложения и теоремы о подгруппах $[1; (44.2)]$ легко проверить гипотезу 9.9 для $p=5$.

Список литературы

1. Кертис Ч., Райнер И. Теория представления конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
2. Kleshchev A. S., Sheth J. On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. 1999. V. 221. №2. P. 705–722.
3. Kleshchev A. S. On decomposition numbers and branching coefficients for symmetric and special linear groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1997. V. 75. №3. P. 497–558.
4. Brundan J., Kleshchev A. S. On translation functors for general linear and symmetric groups // Proc. London Math. Soc. (3). 2000. V. 80. №1. P. 75–106.
5. ШигOLEВ В.В. О некоторых расширениях вполне расщепляемых модулей // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №4. С. 131–150.
6. Kleshchev A. S. Completely splittable representations of symmetric groups // J. Algebra. 1996. V. 181. №2. P. 584–592.
7. Mullineux G. Bijections of p -regular partitions and p -modular irreducibles of the symmetric groups // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 20. №1. P. 60–66.
8. Ford B., Kleshchev A. S. A proof of the Mullineux conjecture // Math. Z. 1997. V. 226. №2. P. 267–308.
9. James G. D., Kerber A. The representation theory of the symmetric group. London: Addison-Wesley, 1981.
10. Джеймс Г. Теория представлений симметрической группы. М.: Мир, 1980.
11. Brundan J., Kleshchev A. Modular Littlewood–Richardson coefficients // Math. Z. 1999. V. 232. P. 287–320.
12. Green J. A. Polynomial representations of $GL_n(K)$. Berlin: Springer-Verlag, 1980. (Lecture Notes in Math. V. 830.)
13. Kleshchev A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. I // J. Algebra. 1995. V. 178. №2. P. 493–511.
14. James G. D., Murphy G. E. The determinant of the Gram matrix for a Specht module // J. Algebra. 1979. V. 59. №1. P. 222–235.
15. Hemmer D. J. The Ext^1 -quiver for completely splittable representations of the symmetric group // J. Group Theory. 2001. №4. P. 401–416.
16. Bessenrodt C., Olsson J. B. On Mullineux symbols // J. Combin. Theory Ser. A. 1994. V. 68. №2. P. 340–360.
17. Kleshchev A. S., Sheth J. Corrigendum: “On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups” // J. Algebra. 2001. V. 238. №2. P. 843–844.
18. Kleshchev A. S., Nakano D. On comparing the cohomology of general linear and symmetric groups // Pacific J. Math. 2001. V. 201. P. 339–355.
19. Jantzen J. C. Representations of algebraic groups. Boston, MA: Academic Press, Inc. 1987. (Pure Appl. Math. V. 131.)
20. Donkin S. On Schur algebras and related algebras. I // J. Algebra. 1986. V. 104. №2. P. 310–328.
21. Shchigolev V. V. On the stabilization problem for submodules of Specht modules // J. Algebra. 2002. V. 251. №2. P. 790–812.
22. Kleshchev A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. III: Some corollaries and a problem of Mullineux // J. London Math. Soc. (2). 1996. V. 54. №2. P. 25–38.