Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Стабилизация решений волнового уравнения в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:25:37

УДК 517.956.3

А. В. Филиновский

Стабилизация решений волнового уравнения в неограниченных областях

Исследуется поведение при больших значениях времени решения первой смешанной задачи для волнового уравнения в неограниченной области с гладкой границей. Получены оценки в замкнутой верхней полуплоскости решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца, доказана единственность решения на вещественной прямой.

Библиография: 23 названия.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с гладкой границей Γ . Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in Q = (t > 0) \times \Omega, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (0.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0. \quad (0.3)$$

Начальные функции будем предполагать вещественнозначными, гладкими в $\bar{\Omega}$ и согласованными с граничным условием (0.3).

В работе исследуется асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (0.1)–(0.3).

Сформулируем известные результаты для ограниченной Γ . В [1] показано, что при произвольной Γ решения основных краевых задач для волнового уравнения с финитными начальными функциями стремятся к нулю равномерно на каждом компакте $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}$. При $n = 3$ для звездной Γ в работе [2] установлена оценка решения первой краевой задачи $|u(t, x)| \leq C/t$, а в [3] доказано, что $|u(t, x)| \leq Ce^{-at}$, $x \in \bar{\Omega}$, $a > 0$. В [4] ($n = 3$) установлено экспоненциальное убывание решений второй и третьей краевых задач в предположении, что Γ имеет положительную гауссову кривизну. В работах [5] и [6] рассмотрены области, граница которых удовлетворяет условиям, обобщающим условие звездности, и для нечетных $n \geq 3$ получено экспоненциальное убывание решения первой краевой задачи. В работе [7] сформулировано условие на Γ в терминах геометрической оптики. Показано, что при невыполнении этого условия решения первой краевой задачи с финитными начальными функциями убывают по t сколь угодно медленно. Если приведенное в [7] условие выполнено, то решение первой краевой задачи для четных n убывает степенным образом, а для нечетных n — экспоненциально [8]. Случай $n = 2$ рассмотрен в работе [9]. Для кривой Γ с положительной кривизной получены представления

решений основных краевых задач в виде асимптотических (по t) рядов. Показано, что решение первой краевой задачи удовлетворяет неравенству

$$|u(t, x)| \leq \frac{C}{t \ln^2 t}.$$

Если Γ неограничена, то оценки решений при $t \rightarrow \infty$ получены в предположении звездности Γ . Для решения первой краевой задачи ($n \geq 3$) в работе [10] установлена оценка $|u(t, x)| \leq C/t$. В случае неограниченной Γ решение может не убывать экспоненциально при нечетных n . В [11] построены решения первой и второй краевых задач в двугранных углах ($n = 3$) с финитными начальными функциями, убывающие не быстрее некоторой степени t . Случай $n = 2$ (первая краевая задача) исследован в работе [12], где доказана сходимость интеграла

$$\int_0^\infty (1+t)^{1-\delta} u^2(t, x) dt < \infty, \quad \delta > 0, \quad x \in \Omega.$$

Для кривой Γ , звездной вне некоторого круга ($n = 2$), в [13] установлено стремление решения первой краевой задачи к нулю, если Γ степенным образом приближается к сторонам угла.

В настоящей работе для классов областей, границы которых удовлетворяют условию, обобщающему условие звездности, получены интегральные оценки решения задачи (0.1)–(0.3), обоснован принцип предельной амплитуды. Установлены оценки при больших значениях спектрального параметра решения стационарной задачи, доказан принцип предельного поглощения.

Пусть

$$\varphi(x) = \alpha(x_1^2 + \dots + x_m^2) + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

где $m = 1, 2, \dots, n-1$ и $\alpha \in [0, 1]$ – фиксированные числа.

Ω называется *областью класса* D_φ , если

$$(\nu_x, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (0.4)$$

где ν_x – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ .

Ω называется *областью класса* $\tilde{D}_\varphi$, если (0.4) выполнено при всех $x \in \Gamma \cap \{|x| > R_0\}$ для некоторого $R_0 > 0$.

Ω называется *областью класса* G_φ , если $\Omega \in D_\varphi$ и существует такая постоянная $C_1 > 0$, что

$$x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq C_1 |x|^{2\alpha}, \quad x \in \Omega. \quad (0.5)$$

Ω называется *областью класса* $\tilde{G}_\varphi$, если $\Omega \in \tilde{D}_\varphi$ и выполнено (0.5).

При $\alpha = 1$ неравенство (0.5) выполняется с $C_1 = 1$ для произвольной $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и класс G_φ содержит все области, граница которых звездна относительно начала координат. Из (0.5) следует, что граница области класса G_φ , $\alpha < 1$, бесконечна. Например,

$$\Omega_1 = \{x : (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} > 1 + C|x_1|^{1/\alpha}\} \subset \mathbb{R}^3, \quad 0 < \alpha < 1, \quad C > 0,$$

принадлежит классу G_φ с $\varphi = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$\Omega_2 = \{x : x_3 > 1 + C(x_1^2 + x_2^2)^{1/(2\alpha)}\} \subset \mathbb{R}^3$$

принадлежит классу G_φ с $\varphi = \alpha(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$.

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1$. Предположим, что $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx &< \infty, \\ \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j g}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx &< \infty, \end{aligned} \quad (0.6)$$

где $r = |x|$, $q = 1$ при $n = 2$ и $q = 0$ при $n \geq 3$ (без ограничения общности можно считать $r \geq 2$ в Ω).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x)\|_{C^s(\Omega')} = 0, \quad (0.7)$$

где число s зависит от l и может быть сделано сколь угодно большим, если l достаточно велико, а $\Omega' \subset \Omega$ — произвольная ограниченная область.

Доказательство теоремы 1 основано на свойствах в замкнутой верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} k \geq 0\}$ комплексной k -плоскости решения $v(x, k)$ краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = h(x), \quad x \in \Omega, \quad k = \omega + i\mu, \quad (0.8)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (0.9)$$

где $h(x)$ — гладкая в $\overline{\Omega}$, согласованная с (0.3), функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j h}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx < \infty, \quad l \geq 0. \quad (0.10)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$. Тогда функция $v(x, k)$ равномерно непрерывна на $K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| < N\}$ в норме $C^s(\Omega')$, где N — любое положительное число, s зависит от l , а $\Omega' \subset \Omega$ — произвольная ограниченная область. Функция $v(x, k)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(|v_r - i\omega v|^2 + |\nabla v|^2 - |v_r|^2 + \frac{|v|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx \\ \leq C_2 \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r |h|^2 dx, \quad k \in K_N, \quad v_r = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \frac{x}{r}, \end{aligned} \quad (0.11)$$

постоянная C_2 зависит от N . Для каждого $\omega \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{k \rightarrow \omega} \|v(x, k) - v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} = 0, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (0.12)$$

где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи

$$\Delta v + \omega^2 v = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.13)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (0.14)$$

и удовлетворяет (0.11).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in G_\varphi$. Тогда C_2 не зависит от N и n .

Из (0.11) следует, что для всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ существует решение задачи (0.13), (0.14) с конечным интегралом

$$\int_{\Omega} \left(|v_r - i\omega v|^2 + \frac{|v|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx < \infty. \quad (0.15)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$. Тогда решение задачи (0.13)–(0.15), $-\infty < \omega < +\infty$, единственно.

При $\omega \neq 0$ из (0.15) следует условие излучения

$$\int_{\Omega} |v_r - i\omega v|^2 dx < \infty. \quad (0.16)$$

Единственность решения задачи (0.13), (0.14), (0.16) ($\omega \neq 0$) в области $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$, $\alpha = 1$ доказана в [13], [14]. В работе [15] изучалась сходимость при $\mu \rightarrow 0$ решений задачи Дирихле в области $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$, $\alpha = 1$ для уравнения $\Delta v + (\omega^2 + i\mu)v = h(x)$, $\omega^2 > 0$.

Решение задачи (0.13), (0.14) можно получить как предел (называемый *предельной амплитудой*)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t, x, \omega) e^{i\omega t} = v(x, \omega), \quad x \in \Omega, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad (0.17)$$

где $U(t, x, \omega)$ – решение уравнения

$$U_{tt} - \Delta U = -h(x) e^{-i\omega t}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.18)$$

удовлетворяющее условиям (0.2), (0.3) (с учетом (0.7) полагаем $f = g = 0$).

Для $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in G_\varphi$ в работе [12] доказано существование слабого предела (0.17) в гильбертовом пространстве функций на $(-\infty < \omega < +\infty)$ со значениями в весовом пространстве Соболева.

В настоящей работе исследуется поведение решения задачи (0.18), (0.2), (0.3) при фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in G_\varphi$. Тогда существует множество $M \subset \mathbb{R}$, $\text{mes}(\mathbb{R} \setminus M) = 0$, такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t, x, \omega) e^{i\omega t} - v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} = 0, \quad \omega \in M, \quad (0.19)$$

где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи (0.13), (0.14) и удовлетворяет неравенству (0.11).

Рассмотрим принцип предельной амплитуды в обобщенной форме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\tau, x, \omega) e^{i\omega \tau} d\tau = v(x, \omega), \quad x \in \Omega. \quad (0.20)$$

Равенство (0.20) устанавливалось в работе [16] в случае компактной Γ для нестационарных краевых задач высокого порядка.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in G_\varphi$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t U(\tau, x, \omega) e^{i\omega\tau} d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} = 0, \quad (0.21)$$

где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи (0.13), (0.14) и удовлетворяет неравенству (0.11).

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 1$. Предположим, что $l \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx &< \infty, \\ \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j g}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx &< \infty. \end{aligned} \quad (0.22)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n \geq 9$,

$$1 \leq m \leq 2n + 3 - \sqrt{28n + 42}, \quad (0.23)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{(n-2)(n-6)} \leq \alpha < 1, \quad (0.24)$$

и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда для решения задачи (0.1)–(0.3) справедливы равенство (0.7) и оценка

$$\int_0^\infty \|u(t, x)\|_{C^s(\Omega')}^2 dt \leq C_3, \quad s = s(l), \quad (0.25)$$

где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область, постоянная C_3 зависит от n , α , f , g и Ω' .

Доказательство теорем 6 и 7 основано на свойствах решения краевой задачи (0.8), (0.9) с гладкой, согласованной с (0.3), функцией $h(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\Omega} r^{2\alpha+1} \sum_{j=0}^l \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \left| \frac{\partial^j h}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dx < \infty, \quad l \geq 0. \quad (0.26)$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n \geq 9$, m и α удовлетворяют (0.23), (0.24) и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда функция $v(x, k)$ равномерно непрерывна на K_N , $N > 0$, в норме $C^s(\Omega')$, где число s зависит от l и может быть сделано сколь угодно большим, если l достаточно велико, а $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область. Функция $v(x, k)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r^{2\alpha-1}} \\ \leq C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} |h|^2 dx, \end{aligned} \quad (0.27)$$

с постоянной C_4 , зависящей от n , α и не зависящей от N . Для каждого $\omega \in (-\infty, +\infty)$ справедливо равенство (0.12), где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи (0.13), (0.14) и удовлетворяет (0.27).

Из (0.27) следует, что для всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ существует решение задачи (0.13), (0.14) с конечным интегралом

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r} < \infty. \quad (0.28)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $n \geq 9$, m удовлетворяет (0.23), $1/2 \leq \alpha \leq 1$ и $\Omega \in D_{\varphi}$. Тогда решение задачи (0.13), (0.14), (0.28), $-\infty < \omega < +\infty$, единственно.

При $\omega \neq 0$ из (0.28) следует условие излучения

$$\int_{\Omega} \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \frac{dx}{r} < \infty. \quad (0.29)$$

В случае $\alpha = 1$ из (0.29) вытекает условие

$$\int_{\Omega} |v_r - i\omega v|^2 \frac{dx}{r} < \infty,$$

а при $\alpha = 0$, $m = n - 1$ — условие

$$\int_{\Omega} |v_{|x_n|} - i\omega v|^2 \frac{dx}{r} < \infty,$$

из которого для $\Omega \in G_{\varphi}$, $\Omega \subset \{x_n \geq \delta > 0\}$, следует условие излучения Реллиха [17]

$$\int_{\Omega} |v_{x_n} - i\omega v|^2 \frac{dx}{x_n} < \infty.$$

Оценки решения задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta v + (\omega^2 + i\mu)v = h(x), \quad \omega^2 > 0, \quad \mu \rightarrow 0,$$

в областях с бесконечными границами устанавливались в работах [18], [19].

Существование предельной амплитуды (0.17) при $\alpha < 1$ доказано в работе [19] для областей $\Omega \in \tilde{G}_{\varphi}$, $n \geq 3$, $m = n - 1$ при дополнительном условии $(\nu, x) \geq 0$, $x \in \Gamma \cap \{|x| > R_0 > 0\}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $n \geq 9$, m и α удовлетворяют (0.23), (0.24) и $\Omega \in G_{\varphi}$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ существует предел (0.21), где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи (0.13), (0.14) и удовлетворяет неравенству (0.27).

Метод, используемый в настоящей статье и основанный на исследовании свойств решения стационарной задачи в замкнутой верхней полуплоскости комплексной k -плоскости и применении тауберовой теоремы Карамата [20], предложен в работах автора [21], [22].

§ 1. Оценки решения волнового уравнения в весовых пространствах Соболева

При сделанных в данной работе предположениях о поверхности Γ и начальных функциях существует единственное *обобщенное решение задачи* (0.1)–(0.3), т.е. функция $u(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $T > 0$, $u|_{t=0} = f(x)$, удовлетворяющая краевому условию (0.3) и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} ((\nabla u, \nabla \chi) - u_t \chi_t) dt dx = \int_{\Omega} g(x) \chi(0, x) dx \quad (1.1)$$

при всех $\chi(t, x) \in W_2^1(Q_T)$, $\chi|_{(0,T) \times \Gamma} = 0$, $\chi|_{t=T} = 0$. Функция $u(t, x)$ имеет в $\overline{Q}$ непрерывные производные до некоторого порядка (определяемого числом l и гладкостью Γ) и является классическим решением задачи (0.1)–(0.3).

ЛЕММА 1. Для всех $p = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\int_{\Omega} r^p (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \leq \int_{\Omega} (r + t)^p (g^2 + |\nabla f|^2) dx, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (1.2) по индукции. При $p = 0$ (1.2) следует из равенства

$$\int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx = \int_{\Omega} (g^2 + |\nabla f|^2) dx, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Пусть (1.2) выполнено для некоторого $p \geq 1$. Умножим уравнение (0.1) на функцию $u_t \eta_{R,p+1}$, где

$$\eta x) = \begin{cases} |x|^{p+1}, & 0 < |x| < R, \\ R^{p+1}, & |x| > R, R > 0, \end{cases}$$

и проинтегрируем по Q_t с учетом (0.2) и (0.3). Получим равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{\Omega} (u_{\tau\tau} - \Delta u) u_{\tau} \eta_{R,p+1} d\tau dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_{R,p+1} (u_{\tau}^2 + |\nabla u|^2)|_{\tau=t} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_{R,p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx \\ &\quad + (p+1) \int_0^t \int_{\Omega_R} r^p u_{\tau} u_r d\tau dx, \quad \Omega_R = \Omega \cap \{|x| < R\}, \end{aligned}$$

из которого при $R \rightarrow \infty$ следует

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} r^{p+1} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \\ &\leq \int_{\Omega} r^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx + (p+1) \int_0^t \int_{\Omega} r^p (u_{\tau}^2 + u_r^2) d\tau dx \\ &\leq \int_{\Omega} r^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx + (p+1) \int_{\Omega} (g^2 + |\nabla f|^2) dx \int_0^t (r + \tau)^p d\tau \\ &= \int_{\Omega} r^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx + \int_{\Omega} (r + \tau)^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2)|_{\tau=0}^{\tau=t} dx \\ &= \int_{\Omega} (r + t)^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Из (1.3) вытекает неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq 2(1+T)^3 \int_{\Omega} (g^2 + |\nabla f|^2 + f^2) dx, \quad T > 0. \quad (1.4)$$

Подставим в интегральное тождество (1.1) функцию $\chi(t, x) = e^{ikt}(1 - t/T)^2 \psi(x)$, где $\text{Im } k > 0$, $\psi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\psi|_{\Gamma} = 0$. Получим равенство

$$\int_{\Omega} ((\nabla v_T, \nabla \psi) - k^2 v_T \psi) dx = \int_{\Omega} (g - ikf) \psi dx + F(T), \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} v_T(x, k) &= \int_0^T e^{ikt} u(t, x) dt, \\ F(T) &= \frac{1}{T} \int_{Q_T} e^{ikt} \left(u \psi \left(4ik \left(1 - \frac{t}{T} \right) - 2k^2 t + \frac{k^2 t^2 - 2}{T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(2t - \frac{t^2}{T} \right) (\nabla u, \nabla \psi) \right) dt dx + \frac{2}{T} \int_{\Omega} f \psi dx. \end{aligned}$$

В силу (0.6), (0.22) и (1.4) $|F(T)| \leq C/T$. Переходя в (1.5) к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем функцию

$$v(x, k) = \int_0^{\infty} e^{ikt} u(t, x) dt.$$

Функция $v(x, k)$ аналитична по k в полуплоскости $\text{Im } k > 0$, принадлежит $W_2^1(\Omega)$, равна нулю на Γ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} ((\nabla v, \nabla \psi) - k^2 v \psi) dx = \int_{\Omega} (g - ikf) \psi dx, \quad (1.6)$$

т.е. является обобщенным решением задачи (0.8), (0.9) с $h = ikf - g$. Полагая в (1.6) $\psi = \bar{v}$, получим равенство

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + (\mu^2 - \omega^2 - 2i\omega\mu)|v|^2) dx = \int_{\Omega} (g - ikf) \bar{v} dx,$$

из которого при $f = g = 0$ следует единственность обобщенного решения. Так как Γ и h — гладкие, функция $v(x, k)$ имеет в $\bar{\Omega}$ непрерывные производные до некоторого порядка (определяемого числом l и гладкостью Γ) и является классическим решением задачи (0.8), (0.9).

ЛЕММА 2. Для всех $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$ справедливы оценки

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{1}{\mu^2} \int_{\Omega} \left(\frac{4r^2 \ln^{2q} r}{(n-2-q)^2} g^2 + f^2 \right) dx, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} r^2 (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx \\ &\leq \frac{2}{\mu^6} \int_{\Omega} ((8 + \mu^2 + 6\mu r + 2(\mu^2 + \mu^4)r^2)(g^2 + |\nabla f|^2) + \mu^4 r^2 f^2) dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим интеграл $\int_{\Omega} u^2(t, x) dx$. Пусть $z_t = u$. Имеем

$$\begin{aligned} z_{tt} &= \Delta z, & t > 0, & x \in \Omega, \\ z_t|_{t=0} &= f, & \Delta z|_{t=0} &= g, \\ z|_{\Gamma} &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Обозначим $z|_{t=0} = y$. Тогда

$$\Delta y = g, \quad x \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$y|_{\Gamma} = 0. \quad (1.10)$$

Для решения задачи

$$\begin{aligned} \Delta y_R &= g(x), & x &\in \Omega_R, \\ y_R|_{\Gamma_R \cup S_R} &= 0, & \Gamma_R &= \Gamma \cap \{r < R\}, \quad S_R = \Omega \cap \{r = R\}, \end{aligned}$$

с учетом интегрального тождества

$$\int_{\Omega_R} |\nabla y_R|^2 dx = - \int_{\Omega_R} g y_R dx$$

и неравенства

$$\int_{\Omega_R} \frac{y_R^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} \leq \frac{4}{(n-2-q)^2} \int_{\Omega_R} \left(\frac{\partial y_R}{\partial r} \right)^2 dx$$

выводим оценку

$$\int_{\Omega_R} |\nabla y_R|^2 dx \leq \frac{4}{(n-2-q)^2} \int_{\Omega_R} r^2 \ln^{2q} r g^2 dx. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что в $L_2(\Omega)$ существует слабый предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \nabla y_R = \nabla y.$$

Функция $y(x)$ является решением задачи (1.9), (1.10) и для нее справедлива оценка

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \leq \frac{4}{(n-2-q)^2} \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r g^2 dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx &= \int_{\Omega} z_t^2(t, x) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + f^2) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{4r^2 \ln^{2q} r}{(n-2-q)^2} g^2 + f^2 \right) dx \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u dt \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |u| dt \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} u^2 dx \\
&\leq \frac{1}{\mu^2} \int_{\Omega} \left(\frac{4r^2 \ln^2 q}{(n-2-q)^2} g^2 + f^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Неравенство (1.8) следует из (1.2) с $p = 2$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} r^2 (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx \\
&= \int_{\Omega} r^2 \left(\left| \nabla \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u dt \right|^2 + \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \mu t} u dt \right|^2 \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} r^2 \left(\left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |\nabla u| dt \right)^2 + \left(\int_0^{\infty} e^{-\mu t} |u| dt \right)^2 \right) dx \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} r^2 (|\nabla u|^2 + u^2) dx \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} r^2 \left(|\nabla u|^2 + \left(f(x) + \int_0^t u_{\tau} d\tau \right)^2 \right) dx \\
&\leq \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \int_{\Omega} \left(2r^2 f^2 + \left(\frac{2}{3} t^4 + 2t^3 r + (2t^2 + 1)r^2 \right) (g^2 + |\nabla f|^2) \right) dx \\
&= \frac{2}{\mu^6} \int_{\Omega} (\mu^4 r^2 f^2 + (8 + 2\mu^2 + 6\mu r + 2(\mu^2 + \mu^4)r^2) (g^2 + |\nabla f|^2)) dx,
\end{aligned}$$

и лемма 2 доказана.

§ 2. Доказательство теорем 3 и 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\omega \in (-\infty, +\infty)$ и $v(x, \omega) = v_1 - v_2$, $v_1(x, \omega) \not\equiv v_2(x, \omega)$ — решения задачи (0.13)–(0.15). Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R} |v_r - i\omega v|^2 dx \\
&= \int_{\Omega_R} (|v_r|^2 + \omega^2 |v|^2) dx + i\omega \int_{\Omega_R} (\operatorname{div} \{ r(\bar{v} \nabla v - v \nabla \bar{v}) \} - r(\bar{v} \nabla v - v \nabla \bar{v})) dx \\
&= \int_{\Omega_R} (|v_r|^2 + \omega^2 |v|^2) dx + i\omega R \int_{S_R} (\bar{v} v_r - v \bar{v}_r) ds - i\omega \int_{\Omega_R} r(\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}) dx \\
&= \int_{\Omega_R} (|v_r|^2 + \omega^2 |v|^2) dx + i\omega \int_{\Omega_R} (R - r)(\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}) dx \\
&= \int_{\Omega_R} (|v_r|^2 + \omega^2 |v|^2) dx,
\end{aligned}$$

и, учитывая (0.15), имеем

$$\int_1^\infty dr \int_{S_r} (|v_r|^2 + \omega^2 |v|^2) ds + \int_\Omega \frac{|v|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} < \infty. \quad (2.1)$$

При $\omega \neq 0$ утверждение теоремы 3 следует из [13], [14]. В случае $\omega = 0$ используются следующие леммы, справедливые для произвольной Ω .

ЛЕММА 3. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma \in C^1$ и $v(x) \in W_2^2(\Omega_R)$ для любого $R > 0$, $v|_\Gamma = 0$. Тогда функция $J(r) = \int_{S_r} v^2 ds$ имеет при $r \in (0, +\infty)$ непрерывную производную

$$\frac{dJ(r)}{dr} = \frac{n-1}{r} J(r) + 2 \int_{S_r} v v_r ds. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию v нулем на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Для любых $r > 0$ и $\xi \in (-r, +\infty)$

$$\begin{aligned} J(r+\xi) - J(r) &= \int_{S_{r+\xi}} v^2(x) ds - \int_{S_r} v^2(x) ds \\ &= \int_{E_{r+\xi}} v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} d\Theta - \int_{E_r} v^2(r, \Theta)r^{n-1} d\Theta \\ &= \int_{E_r} (v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} - v^2(r, \Theta)r^{n-1}) d\Theta \\ &\quad + \int_{E_{r+\xi}} v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} d\Theta - \int_{E_r} v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} d\Theta \\ &= \int_{E_r} (v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} - v^2(r, \Theta)r^{n-1}) d\Theta \\ &\quad + \int_{E_{r+\xi} \setminus E_r} v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} d\Theta, \quad x = (r, \Theta), \end{aligned}$$

где $E_r = \{\Theta : (r, \Theta) = x \in S_r\}$. Так как $v(r, \Theta)|_{E_{r+\xi} \setminus E_r} = 0$, то

$$\int_{E_{r+\xi} \setminus E_r} v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} d\Theta \leq C|\xi| \|v\|_{W_2^1(\Omega_{r+\xi} \Delta \Omega_r)}^2,$$

а потому

$$\begin{aligned} \frac{dJ(r)}{dr} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\xi} \int_{E_r} (v^2(r+\xi, \Theta)(r+\xi)^{n-1} - v^2(r, \Theta)r^{n-1}) d\Theta + o(1) \right) \\ &= \frac{n-1}{r} J(r) + 2 \int_{S_r} v v_r ds. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 2$ и $v \not\equiv 0$ – решение задачи (0.13), (0.14), $\omega = 0$, $h = 0$. Тогда существуют такие положительные постоянные R_1 и β , что

$$\int_{S_R} |v|^2 ds \geq \beta R^{n-1} \ln^q R, \quad R \geq R_1, \quad (2.3)$$

где $q = 1$ при $n = 2$ и $q = 0$ при $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v_1 = \operatorname{Re} v$, $v_2 = \operatorname{Im} v$ и неравенство (2.3) выполнено для v_j с $\beta = \beta_j$ и $R_1 = R_{1,j}$, $j = 1, 2$, то при $R \geq \max\{R_{1,1}, R_{1,2}\}$ будет

$$\int_{S_R} |v|^2 ds \geq (\beta_1 + \beta_2) R^{n-1} \ln^q R,$$

откуда для v следует (2.3) с $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Поэтому будем считать v вещественно-значной. Положим

$$H(R) = \int_{S_R} v v_r ds.$$

Из (2.2) следует, что функция $J(R)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$J'(R) = \frac{n-1}{R} J(R) + 2H(R), \quad R > R_2 = \inf_{x \in \Gamma} |x| > 0,$$

и начальному условию $J(R_2) = 0$. Поэтому

$$J(R) = 2R^{n-1} \int_{R_2}^R \frac{H(r) dr}{r^{n-1}}, \quad R > R_2. \quad (2.4)$$

Используя (0.13), (0.14) с $\omega = 0$, $h = 0$, получаем равенство

$$H(R) = \int_{\Omega_R} |\nabla v|^2 dx, \quad R > 0,$$

т.е. функция $H(R)$ монотонно возрастает и положительна при $R > R_2$. Поэтому из (2.4) следует оценка

$$J(R) \geq 2H(R_1) R^{n-1} \int_{R_1}^R \frac{dr}{r^{n-1}} \geq \beta R^{n-1} \ln^q R, \quad R \geq R_1 > R_2,$$

которая завершает доказательство леммы 4.

В силу (2.3) гармоническая в Ω функция, равная нулю на Γ и удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^n \ln^{2q} r} < \infty,$$

тождественно равна нулю. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Для решения $v(x, \omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, однородной ($h = 0$) задачи (0.13), (0.14), (0.28) имеем равенства

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R^\varphi} \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&= \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&\quad + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega_R^\varphi} (\bar{v}(\nabla v, \nabla \varphi) - v(\nabla \bar{v}, \nabla \varphi)) \frac{dx}{\varphi} \\
&= \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&\quad + i\omega \int_{\Omega_R^\varphi} (\operatorname{div} \{ (\bar{v} \nabla v - v \nabla \bar{v}) \ln \sqrt{\varphi} \} \\
&\quad - (\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}) \ln \sqrt{\varphi}) dx \\
&= \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&\quad + i\omega \ln R \int_{S_R^\varphi} (\bar{v}(\nabla v, \nabla \varphi) - v(\nabla \bar{v}, \nabla \varphi)) \frac{ds}{|\nabla \varphi|} \\
&\quad - i\omega \int_{\Omega_R^\varphi} (\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}) \ln \sqrt{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
&\quad + i\omega \int_{\Omega_R^\varphi} (\ln R - \ln \sqrt{\varphi}) (\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}) dx \\
&= \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}}, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

$$\Omega_R^\varphi = \Omega \cap \{\varphi(x) < R^2\}, \quad S_R^\varphi = \Omega \cap \{\varphi(x) = R^2\}, \quad R > 0.$$

Из (0.28) и (2.5) следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{r^2} \right) |v|^2 \right) \frac{dx}{r} \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \left(\frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} + \int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^3} \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} + \int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^3} \\
&\leq \frac{1}{\alpha^{3/2}} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r} < \infty. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha}} \cos \theta_1, \\
 x_2 &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha}} \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_m &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha}} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{m-1} \cos \theta_m, \\
 x_{m+1} &= \rho \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_m \cos \theta_{m+1}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{n-1} &= \rho \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\
 x_n &= \rho \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1},
 \end{aligned}$$

где $\rho > 0$, $0 < \theta_j < \pi$, $j = 1, 2, \dots, n-2$, $-\pi < \theta_{n-1} < \pi$ — обобщенные сферические координаты точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$dV = \alpha^{-m/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \quad (2.7)$$

и на S_ρ^φ

$$ds = D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1},$$

где

$$\begin{aligned}
 D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= \sqrt{|\det B|}, \quad B = (b_{jl}), \\
 b_{jl} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_j}, \frac{\partial x}{\partial \theta_l} \right), \quad j, l = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 C_5^{-1} \alpha^{-m/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \\
 \leq D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \leq C_5 \alpha^{-m/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}
 \end{aligned}$$

с постоянной $C_5 > 1$, зависящей от α , $0 < \alpha \leq 1$, то справедливы оценки

$$C_5^{-1} d\rho ds \leq dV \leq C_5 d\rho ds. \quad (2.8)$$

Из (2.6)–(2.8) вытекают неравенства

$$\begin{aligned}
 &\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) ds + \int_\Omega \frac{|v|^2 dx}{r^3} \\
 &= \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{E_\rho^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} + \int_\Omega \frac{|v|^2 dx}{r^3} \\
 &\leq C_5 \int_1^\infty \int_{E_\rho^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) \alpha^{-m/2} \rho^{n-2} \\
 &\quad \times \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} + \int_\Omega \frac{|v|^2 dx}{r^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_5 \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{r^2} \right) |v|^2 \right) \frac{dx}{r} \\
&\leq \frac{C_5}{\alpha^{3/2}} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r} < \infty,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $E_\rho^\varphi = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) : x = (\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in S_\rho^\varphi\}$. Из (2.9) следует, что решение задачи (0.13), (0.14), (0.28) с $h = 0$ удовлетворяет неравенству

$$\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) ds + \int_{\Omega} \frac{|v|^2 dx}{r^3} < \infty. \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 8 при $\omega = 0$ следует из леммы 4, поэтому достаточно показать, что решение однородной задачи (0.13), (0.14), (2.10) с $\omega \neq 0$ тождественно равно нулю в Ω .

ЛЕММА 5. Пусть $n \geq 9$, t удовлетворяет (0.23), $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $\Omega \in D_\varphi$ и $v(x, \omega) \not\equiv 0$ – решение задачи (0.13), (0.14), $\omega \neq 0$, $h = 0$. Тогда существуют такие постоянные $R_1 > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\int_{S_R^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) ds \geq \beta, \quad R \geq R_1. \tag{2.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 4, будем считать функцию $v(x, \omega)$ вещественнозначной. Умножим уравнение (0.13) на $2\varphi^{-1/2}(\nabla v, \nabla \varphi)$. Получим равенство

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \left\{ \varphi^{-1/2} \left(2(\nabla v, \nabla \varphi) \nabla v - |\nabla v|^2 \nabla \varphi + \omega^2 v^2 \nabla \varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\Delta \varphi - \frac{|\nabla \varphi|^2}{2\varphi} \right) v \nabla v + \frac{1}{4\varphi} \left(\Delta \varphi \nabla \varphi + 2\overline{\varphi_{x_j} \varphi_{x_j x_j}} - \frac{3|\nabla \varphi|^2}{2\varphi} \nabla \varphi \right) v^2 \right) \right\} \\
&= 2\varphi^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} v_{x_j}^2 - \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{2\varphi} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \Delta(\varphi^{-3/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{-1/2}) \right) \frac{v^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Проинтегрируем (2.12) по Ω_R^φ , $R > 0$, с учетом (0.14). Имеем:

$$\begin{aligned}
Y(R) &= \int_{S_R^\varphi} \frac{|\nabla \varphi|}{R} \left(2 \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} - |\nabla v|^2 + \omega^2 v^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\Delta \varphi - \frac{|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) \frac{v(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta \varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j}}{|\nabla \varphi|^2} - \frac{3|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) v^2 \right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Gamma_R^\varphi} (\nu, \nabla \varphi) \varphi^{-1/2} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)^2 ds \\
&\quad + 2 \int_{\Omega_R^\varphi} \varphi^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} v_{x_j}^2 - \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{2\varphi} \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{1}{2} \Delta(\varphi^{-3/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{-1/2}) \right) v^2 dx, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где $\Gamma_R^\varphi = \Gamma \cap \{\varphi(x) < R^2\}$. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} v_{x_j}^2 - \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{2\varphi} \\
&= 2 \left(\alpha \sum_{j=1}^m v_{x_j}^2 + \sum_{j=m+1}^n v_{x_j}^2 - \frac{\left(\alpha \sum_{j=1}^m x_j v_{x_j} + \sum_{j=m+1}^n x_j v_{x_j} \right)^2}{\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2} \right) \\
&\geq 2 \left(\alpha \sum_{j=1}^m v_{x_j}^2 + \sum_{j=m+1}^n v_{x_j}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\alpha \sum_{j=1}^m v_{x_j}^2 + \sum_{j=m+1}^n v_{x_j}^2 \right) \left(\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)}{\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2} \right) = 0 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \Delta(\varphi^{-3/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{-1/2}) \\
&= \frac{\varphi^{-3/2}}{2} \left((\Delta \varphi)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j}^2 + \frac{15 |\nabla \varphi|^2}{4\varphi^4} \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(\Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} + \frac{2}{\varphi} \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j} \right) \right) \\
&= 2\varphi^{-3/2} \left((m\alpha + n - m)^2 + 2(m\alpha^2 + n - m) \right. \\
&\quad + 15 \left(\frac{\alpha^2 \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2}{\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2} \right)^2 \\
&\quad - 6(m\alpha + n - m) \frac{\alpha^2 \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2}{\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2} \\
&\quad \left. - 12 \frac{\alpha^3 \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2}{\alpha \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=m+1}^n x_j^2} \right) \\
&\geq 2\varphi^{-3/2} ((m\alpha + n - m)^2 + 2(m\alpha^2 + n - m) - 6(m\alpha + n - m) - 12) \\
&\geq 2\varphi^{-3/2} \left(\left(n - \frac{m}{2} \right)^2 + 2 \left(n - \frac{3m}{4} \right) - 6n - 12 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\varphi^{-3/2} \left(\frac{m^2}{4} - m \left(n + \frac{3}{2} \right) + n^2 - 4n - \frac{33}{4} \right) \\
&= \frac{\varphi^{-3/2}}{2} (m - (2n + 3 + \sqrt{28n + 42})) \\
&\quad \times (m - (2n + 3 - \sqrt{28n + 42})) \geq 0, \quad x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

при m , удовлетворяющем (0.23). Из (0.4), (2.13)–(2.15) следует, что функция $Y(R)$ неотрицательна, монотонно возрастает по R и $Y(R_1) > 0$ при некотором $R_1 > 0$ (в противном случае $v \equiv 0$ в Ω). Поэтому для $R \geq R_1$

$$\begin{aligned}
0 < Y(R_1) \leq Y(R) &= \int_{S_R^\varphi} \frac{|\nabla \varphi|}{R} \left(2 \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} \right. \\
&\quad \left. - |\nabla v|^2 + \omega^2 v^2 + \left(\Delta \varphi - \frac{|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) \frac{v(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta \varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j}}{|\nabla \varphi|^2} - \frac{3|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) v^2 \right) ds \\
&\leq 2 \int_{S_R^\varphi} \left(2 \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta \varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j}}{|\nabla \varphi|^2} \right) \right) v^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2|\nabla \varphi|} \left(\Delta \varphi - \frac{|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) \left(\frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} + v^2 \right) \right) ds \\
&\leq C_6 \int_{S_R^\varphi} \left(\frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 v^2 \right) ds, \quad R \geq R_1.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует (2.11) и лемма 5 доказана.

В силу (2.11) для $v \not\equiv 0$

$$\int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} \left(\frac{|\nabla v, \nabla \varphi|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \omega^2 |v|^2 \right) ds \geq \beta \int_{R_1}^\infty \frac{d\rho}{\rho} = +\infty,$$

что противоречит (2.10). Теорема 8 доказана.

§3. Оценки решения уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости и доказательство теорем 2 и 7

Пусть $w(x, k) = v(x, k)e^{-i\omega\sqrt{\varphi}}$, $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, где $v(x, k)$ – решение задачи (0.8), (0.9). Функция $w(x, k)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
\Delta w + \frac{i\omega}{\sqrt{\varphi}} \left((\nabla w, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) w \right) \\
+ \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right) w = h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}}, \quad x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$w|_\Gamma = 0. \tag{3.2}$$

ЛЕММА 6. Пусть $\gamma \geq -1$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ функция $w(x, k)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi^{-\gamma} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds + \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 \right. \\
& \quad - (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 \\
& \quad + \left(\omega^2 \left((1-2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \frac{\gamma}{\varphi} \left(\left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) + (2\gamma+3) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right. \\
& \quad - 2(\gamma+1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \frac{(\Delta \varphi)^2}{4} \Big) - 2\omega^2 \mu \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \\
& \quad \left. - \mu^2 (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu^3 \sqrt{\varphi} \right) |w|^2 - (2\gamma-1) \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}} \operatorname{Re}(\overline{w} (\nabla w, \nabla \varphi)) \Big) dx \\
& = - \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega \sqrt{\varphi}} \right) dx. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (3.1) на

$$\varphi^{-\gamma} \left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right)$$

и возьмем вещественную часть полученного равенства. Имеем:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \left\{ \varphi^{-\gamma} \left(\operatorname{Re}(\nabla w (\nabla \overline{w}, \nabla \varphi)) - \frac{|\nabla w|^2}{2} \nabla \varphi \right. \right. \\
& \quad + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} \right) \operatorname{Re}(\overline{w} \nabla w) \\
& \quad + \left(\nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) + \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\Delta \varphi - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \nabla \varphi \right) \frac{|w|^2}{2} \Big) \Big\} \\
& + \varphi^{-\gamma} \left(- \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 + (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 + \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} \right. \\
& \quad - 2\mu \sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 + \left(\omega^2 \left(\frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - (1-2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) + (2\gamma+3) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(\gamma+1)\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi}\right)^2 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{4} + 2\omega^2\mu\sqrt{\varphi}\left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi}\right) \\
& + \mu^2(1-2\gamma)\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} - 2\mu^3\sqrt{\varphi}\Big)|w|^2 + (2\gamma-1)\frac{\mu}{\sqrt{\varphi}}\operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla\varphi))\Big) \\
& = \varphi^{-\gamma}\operatorname{Re}\left(\left((\nabla\overline{w}, \nabla\varphi) + \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi}\right)\overline{w}\right)he^{-i\omega\sqrt{\varphi}}\right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Проинтегрируем (3.4) по Ω_R^φ , $R > 0$, с учетом (3.2). Получим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R^\varphi} \varphi^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1-2\gamma)\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right. \\
& - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla\varphi)|^2}{\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 + \left(\omega^2 \left((1-2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\nabla\varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) - \frac{\gamma}{\varphi} \left(\left(\nabla\varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \right. \\
& \left. + (2\gamma+3)\Delta\varphi \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} - 2(\gamma+1) \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \frac{(\Delta\varphi)^2}{4} \right. \\
& \left. - 2\omega^2\mu\sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2(1-2\gamma) \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu^3\sqrt{\varphi} \right) |w|^2 \\
& - (2\gamma-1) \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla\varphi)) \Big) dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R^\varphi} \varphi^{-\gamma} (\nu, \nabla\varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds + I(R) \\
& = - \int_{\Omega_R^\varphi} \varphi^{-\gamma} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla\overline{w}, \nabla\varphi) + \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) he^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
I(R) = & -R^{-2\gamma} \int_{S_R^\varphi} |\nabla\varphi| \left(\frac{|(\nabla w, \nabla\varphi)|^2}{|\nabla\varphi|^2} - \frac{|\nabla w|^2}{2} \right. \\
& + \frac{1}{|\nabla\varphi|^2} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla\varphi)) \\
& + \left(\frac{1}{|\nabla\varphi|} \left(\nabla\varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) + \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\Delta\varphi - \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \frac{|w|^2}{2} \Big) ds.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
|I(R)| & \leq C_7(\gamma, \mu) R^{1-2\gamma} \int_{S_R^\varphi} (|\nabla w|^2 + |w|^2) ds \\
& \leq C_8(\gamma, \omega, \mu) R^{1-2\gamma} \int_{S_R^\varphi} (|\nabla v|^2 + |v|^2) ds,
\end{aligned}$$

то в силу оценки (1.8) существует такая последовательность $R_j \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, что $\lim_{j \rightarrow \infty} I(R_j) = 0$. Переходя к пределу в (3.5), получаем равенство (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

ЛЕММА 7. Пусть $n \geq 2$, $\alpha = 1$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx \\ & \leq 4 \int_{\Omega} r^2 \left(5 + \frac{4(n^2 - 2n + 7)}{(n - 2 - q)^2} \ln^{2q} r \right) |h|^2 dx + 4 \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $q = 1$ при $n = 2$ и $q = 0$ при $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.3) с $\alpha = 1$ и $\gamma = 0$ следует

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds + \int_{\Omega} ((1 + 2\mu r) |\nabla w|^2 + 2\mu^3 r |w|^2) dx \\ & = \int_{\Omega} (\mu^2 |w|^2 - 2\mu \operatorname{Re}(\bar{w} w_r)) dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \operatorname{Re}((2r \bar{w}_r + (n - 1 + 2\mu r) \bar{w}) h e^{-i\omega r}) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (0.4) и (3.7) следует оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx & \leq 6\mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_r|^2 dx \\ & \quad + 5 \int_{\Omega} r^2 h^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} \\ & \quad + \frac{(n - 1)^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r |h|^2 dx + \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx & \leq 12\mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} \\ & \quad + \int_{\Omega} r^2 \left(10 + \frac{(n - 1)^2}{\varepsilon} \ln^{2q} r \right) |h|^2 dx + 2 \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для оценки первого интеграла в правой части (3.8) используем (1.7) с $f = 0$, $g = h$:

$$12\mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx = 12\mu^2 \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{48}{(n - 2 - q)^2} \int_{\Omega} r^2 \ln^{2q} r |h|^2 dx. \quad (3.9)$$

Чтобы оценить второй интеграл, воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \frac{|w|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} & = \frac{1}{(n - 2 - q) R \ln^q R} \int_{S_R} |w|^2 ds \\ & \quad - \frac{2}{n - 2 - q} \int_{\Omega_R} \frac{\operatorname{Re}(\bar{w} w_r) dx}{r \ln^q r}, \quad R > 0, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \frac{|w|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} &\leq \frac{4}{(n-2-q)^2} \int_{\Omega_R} |w_r|^2 dx \\ &+ \frac{1}{(n-2-q)R \ln^q R} \int_{S_R} |w|^2 ds, \quad R > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из неравенств $n-2-q < 0$ при $n=2$ и (1.7) при $n \geq 3$ следует, что поверхностный интеграл в (3.10) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. В пределе получим неравенство

$$\int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^2 \ln^{2q} r} \leq \frac{4}{(n-2-q)^2} \int_{\Omega} |w_r|^2 dx. \quad (3.11)$$

Объединяя (3.8) с (3.9) и (3.11), при $\varepsilon = (n-2-q)^2/8$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_r|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} r^2 \left(10 + \frac{8(n^2-2n+7)}{(n-2-q)^2} \ln^{2q} r \right) |h|^2 dx + 2 \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.11) следует неравенство (3.6).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\Omega \in G_{\varphi}$, $\alpha = 1$, то для всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx \leq 4 \int_{\Omega} r^2 \left(5 + \frac{4(n^2-2n+7)}{(n-2-q)^2} \ln^{2q} r \right) |h|^2 dx.$$

Отметим, что оценки функции $w = ve^{-i\omega r}$ при больших значениях ω в случае $\Omega \in G_{\varphi}$, $\alpha = 1$ и компактной Γ с использованием интегрального тождества (3.7) устанавливались в работе [6].

Докажем неравенство (0.11). Если $\Omega \in G_{\varphi}$, $\alpha = 1$, то $\Gamma_{R_0} = \emptyset$ и (0.11) следует из (3.6). Для $\Omega \in \tilde{G}_{\varphi}$ предположим, что существует последовательность $k_j = \omega_j + i\mu_j \in K_N$, $N > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = \omega \in [-N, N]$ и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(|v_r(x, k_j) - i\omega_j v(x, k_j)|^2 + |\nabla v(x, k_j)|^2 \right. \\ \left. - |v_r(x, k_j)|^2 + \frac{|v(x, k_j)|^2}{r^2 \ln^{2q} r} \right) dx \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из априорных оценок решений задачи (0.8), (0.9) следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds &= \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 ds \leq C_9(R_0) \|v\|_{W_2^2(\Omega_{R_0+1})}^2 \\ &\leq C_{10}(R_0, N) (\|v\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2 + \|h\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Учитывая (3.6), (3.12) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned} d_j^2 &= \|v(x, k_j)\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2 \\ &\geq \frac{1}{C_{10}} \int_{\Gamma_{R_0}} (\nu, x) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds - \|h\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})}^2 \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Функции $v_j(x) = v(x, k_j)/d_j$ удовлетворяют уравнению (0.8) с $k = k_j$, $h_j = h/d_j$, краевому условию (0.9) и имеют единичную норму $\|v_j\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})} = 1$. Из (3.6) и (3.13) вытекает, что последовательность $v_j(x)$ ограничена в $W_2^1(\Omega_R)$ для любого $R > 0$. Выберем из $v_j(x)$ подпоследовательность (обозначим ее также $v_j(x)$), сходящуюся слабо в $W_2^1(\Omega_R)$ и сильно в $L_2(\Omega_R)$ при всех $R > 0$ к некоторой функции $\tilde{v}(x)$, такой, что

$$\|\tilde{v}(x)\|_{L_2(\Omega_{R_0+2})} = 1 \quad (3.14)$$

и

$$\int_{\Omega} \left(|\tilde{v}_r - i\omega \tilde{v}|^2 + |\nabla \tilde{v}|^2 - |\tilde{v}_r|^2 + \frac{|\tilde{v}|^2}{r^2 \ln^2 q \, r} \right) dx \leq 4C_{10}.$$

Умножим уравнение (0.8) с $k = k_j$ на функцию $\psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega_R)$, $R > 0$, и проинтегрируем по Ω_R . Получим

$$\int_{\Omega_R} ((\nabla v_j, \nabla \psi) - k_j^2 v_j \psi) dx = - \int_{\Omega_R} h_j \psi dx. \quad (3.15)$$

Переходя в (3.15) к пределу при $j \rightarrow \infty$, для функции $\tilde{v}(x)$ имеем равенство

$$\int_{\Omega_R} ((\nabla \tilde{v}, \nabla \psi) - \omega^2 \tilde{v} \psi) dx = 0, \quad \psi \in \mathring{W}_2^1(\Omega_R), \quad R > 0,$$

т.е. $\tilde{v}(x)$ является обобщенным (из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$) решением однородной задачи (0.13)–(0.15). В силу теоремы 3 $\tilde{v} \equiv 0$ в Ω , что противоречит (3.14). Так как $|\nabla w|^2 = |v_r - i\omega v|^2 + |\nabla v|^2 - |v_r|^2$, неравенство (0.11) доказано.

Установим существование предела (0.12). Пусть $N > 0$, $k_{p,j} \in K_N$, $p = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} k_{p,j} = \omega, \quad v_j(x) = v(x, k_{1,j}) - v(x, k_{2,j}).$$

Предположим, что при некотором $R_1 > 0$

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \|v_j(x)\|_{L_2(\Omega_{R_1})} = d > 0. \quad (3.16)$$

Из (0.11) следует, что функции $v_j(x)$ ограничены в $W_2^1(\Omega_{R_1})$ равномерно по j . Выберем подпоследовательность $v_j(x)$, сходящуюся слабо в $W_2^1(\Omega_R)$ и сильно в $L_2(\Omega_R)$ при всех $R > 0$ к функции $\tilde{v}(x)$, которая является обобщенным (из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$) решением однородной задачи (0.13)–(0.15). Так как последовательность $v_j(x)$ компактна в $L_2(\Omega_{R_1})$, из (3.16) вытекает неравенство

$$\|\tilde{v}(x)\|_{L_2(\Omega_{R_1})} \geq d. \quad (3.17)$$

Но по теореме 3 $\tilde{v} \equiv 0$ в Ω , что противоречит (3.17). Следовательно, $v(x, k)$ равномерно непрерывна на K_N , $N > 0$ (слабо в $W_2^1(\Omega_R)$ и сильно в $L_2(\Omega_R)$, $R > 0$). Поэтому функция $v(x, k)$ равномерно непрерывна на K_N в норме $W_2^1(\Omega_R)$ и в норме $C^s(\Omega_R)$, $s \leq l - 1 - n/2$. Из принципа равномерного продолжения следует, что справедливо (0.12) и функция $v(x, \omega)$ удовлетворяет неравенству (0.11). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 7.

ЛЕММА 8. Пусть $n \geq 9$, t и α удовлетворяют (0.23), (0.24) и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\mu > 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r^{2\alpha-1}} \leq C_4(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} |h|^2 dx. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.3) с $\gamma = \alpha - 1/2$ следует

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi^{1/2-\alpha} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds \\ & + \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - 2(1-\alpha) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right. \\ & - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 \\ & + \left(\omega^2 \left(2(1-\alpha) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \frac{\alpha - 1/2}{\varphi} \left(\left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right. \\ & + 2(\alpha + 1) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - (2\alpha + 1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \frac{(\Delta \varphi)^2}{4} \\ & - 2\omega^2 \mu \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - 2\mu(1-\alpha) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu^3 \sqrt{\varphi} \Big) |w|^2 \\ & \left. + 2(1-\alpha) \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}} \operatorname{Re}(\overline{w}(\nabla w, \nabla \varphi)) \right) dx \\ & = - \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} \operatorname{Re} \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - 2(1-\alpha) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} \\ & \geq 2(1-\alpha) \left((2\alpha - 1) \sum_{j=1}^m |w_{x_j}|^2 + \sum_{j=m+1}^n |w_{x_j}|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & 2(1-\alpha) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \\ & = \frac{2\alpha^2(1-\alpha)^2}{\varphi^2} \sum_{j=1}^m x_j^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) + \frac{\alpha - 1/2}{\varphi} \left(\frac{(\Delta \varphi)^2}{4} + (2\alpha + 1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - 2(\alpha + 1) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \\
& = \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{4} (n-2)(n-6) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \alpha(1-\alpha) \left((n-m) \sum_{j=1}^m x_j^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right) - \frac{\alpha(2\alpha+3)(1-\alpha)^2}{\varphi^2} \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right) \right) \\
& \geq \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{4} (n-2)(n-6) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) - \alpha(1-\alpha)n + (2\alpha+3)(1-\alpha)^2 \right) \\
& \geq \frac{1}{4\varphi} \left((n-2)(n-6) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) - n \right) + \frac{(2\alpha+3)(1-\alpha)^2}{4\varphi} \\
& \geq \frac{(2\alpha+3)(1-\alpha)^2}{4\varphi} > 0, \quad n \geq 9, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{(n-2)(n-6)}. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Из (0.4), (0.5) и (3.20)–(3.22) следуют оценки

$$\begin{aligned}
& 2(1-\alpha)(2\alpha-1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{r^{2\alpha-1}} + \frac{(2\alpha+3)(1-\alpha)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2\alpha+1}} \\
& \leq 2\omega^2 \mu \int_{\Omega} \varphi^{1-\alpha} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) |w|^2 dx \\
& \quad + 2\mu^2 (1-\alpha) \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |w|^2 dx \\
& \quad + 2(1-\alpha) \mu \int_{\Omega} |w| |(\nabla w, \nabla \varphi)| \varphi^{-\alpha} dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} \left| (\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu \sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right| |h| dx \\
& \leq 2\alpha(1-\alpha) C_1 \omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 dx + 2(1-\alpha) \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
& \quad + 2(1-\alpha) \mu \int_{\Omega} \varphi^{-\alpha} |w| |\nabla w| |\nabla \varphi| dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} |\nabla w| |\nabla \varphi| |h| dx + n \int_{\Omega} \varphi^{1/2-\alpha} |w| |h| dx \\
& \quad + 2\mu \int_{\Omega} \varphi^{1-\alpha} |w| |h| dx \\
& \leq 2\varepsilon \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{r^{2\alpha-1}} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2\alpha+1}} \\
& \quad + 2\alpha(1-\alpha) C_1 \omega^2 \mu \int_{\Omega} |w|^2 dx + \left(\frac{5}{2} - 2\alpha + \frac{8}{\varepsilon} \right) \mu^2 \int_{\Omega} |w|^2 dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \left(2r^{4-4\alpha} + \frac{4n^2+1}{2\varepsilon} r^{3-2\alpha} \right) |h|^2 dx \quad (3.23)
\end{aligned}$$

с произвольным $\varepsilon > 0$.

Умножим (0.8) на $\bar{v}$, проинтегрируем по Ω с учетом (0.9), (1.8) и возьмем мнимую часть полученного равенства. Имеем

$$2\omega\mu \int_{\Omega} |v|^2 dx = \operatorname{Im} \int_{\Omega} h\bar{v} dx. \quad (3.24)$$

Поскольку $|w| = |v|$, из (3.24) выводим оценку

$$2\omega^2\mu \int_{\Omega} |w|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2\alpha+1}} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} |h|^2 dx, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.25)$$

Из (1.7), (3.23) и (3.24) следуют неравенства

$$\begin{aligned} & 2(1-\alpha)(2\alpha-1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{r^{2\alpha-1}} + \frac{(2\alpha+3)(1-\alpha)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2\alpha+1}} \\ & \leq 2\varepsilon \int_{\Omega} \frac{|\nabla w|^2 dx}{r^{2\alpha-1}} + (1+C_1\alpha(1-\alpha)) \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{r^{2\alpha+1}} \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(\frac{C_1\alpha(1-\alpha)}{2\varepsilon} \omega^2 r^{2\alpha+1} + 2r^{4-4\alpha} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(5-4\alpha+8/\varepsilon)}{(n-2)^2} r^2 + \frac{4n^2+1}{2\varepsilon} r^{3-2\alpha} \right) |h|^2 dx, \end{aligned}$$

откуда при $\varepsilon = \min\{(1-\alpha)(\alpha-1/2), ((2\alpha+3)(1-\alpha)^2)/(4(1+C_1\alpha(1-\alpha)))\}$ с учетом $1/2 < \alpha < 1$ выводим (3.18).

Так как

$$|\nabla w|^2 = \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2},$$

из (3.18) следует оценка (0.27).

Равномерная непрерывность функции $v(x, k)$ в области K_N и существование предела (0.12) выводится из лемм 4, 5 и 8 так же, как и при доказательстве теоремы 2.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 6

Получим сначала равенство (0.7). Из теорем 2 и 7 следует, что функция $v(x, k)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\{\operatorname{Im} k \geq 0\}$ в норме $C^s(\Omega')$, где s зависит от l , а $\Omega' \subset \Omega$ — произвольная ограниченная область. Поэтому функция

$$v_1(x, k) = \int_0^\infty e^{ikt} u_t(t, x) dt = -f(x) - ikv(x, k)$$

непрерывна в $\{\operatorname{Im} k \geq 0\}$ и удовлетворяет в точке $k = 0$ условию Липшица

$$\|v_1(x, k) - v_1(x, 0)\|_{C^s(\Omega')} \leq C_{11}|k|.$$

Из (0.6), (0.22), равенств

$$\int_{\Omega} (|\Delta^j u_t|^2 + |\nabla \Delta^j u|^2) dx = \int_{\Omega} (|\Delta^j g|^2 + |\nabla \Delta^j f|^2) dx, \quad 2j+1 \leq l,$$

и теорем вложения следует, что $\|u(t, x)\|_{C^s(\Omega')}$ ограничена при $t > 0$. Воспользуемся тауберовой теоремой Карамата [20], из которой вытекает

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x)\|_{C^s(\Omega')} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t u_{\tau}(\tau, x) d\tau + f(x) \right\|_{C^s(\Omega')} \\ &= \|v_1(x, 0) + f(x)\|_{C^s(\Omega')} = 0. \end{aligned}$$

Равенство (0.7) теорем 1 и 6 доказано.

Докажем неравенство (0.25). Из (0.22), (0.27), априорных оценок решений эллиптических краевых задач и теорем вложения получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|\Delta^j v(x, k)\|_{L_2(\Omega')}^2 &\leq C_{11}(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} (|k|^2 (\Delta^j f)^2 + (\Delta^j g)^2) dx, \\ 2j &\leq l, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где постоянная C_{11} зависит от Ω' . Воспользуемся уравнением (0.8) с $k \neq 0$. Имеем

$$\Delta^j v(x, k) = \frac{\Delta^j h}{k^2} - \frac{\Delta^{j+1} h}{k^4} + \frac{\Delta^{j+2} v(x, k)}{k^4}, \quad x \in \Omega, \quad j \geq 1. \quad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) следуют оценки

$$\begin{aligned} &\|\Delta^j v(x, k)\|_{L_2(\Omega')} \\ &\leq \frac{1}{|k|} \left(\frac{\|\Delta^j g\|_{L_2(\Omega')}}{|k|} + \frac{\|\Delta^{j+1} g\|_{L_2(\Omega')}}{|k|^3} + \|\Delta^j f\|_{L_2(\Omega')} + \frac{\|\Delta^{j+1} f\|_{L_2(\Omega')}}{|k|^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{|k|^4} \left(C_{11}(\omega^2 + 1) \int_{\Omega} r^{2\alpha+1} ((\Delta^{j+2} g)^2 + |k|^2 (\Delta^{j+2} f)^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C_{12}}{|k|}, \quad |k| \geq \delta > 0, \quad 2j+4 \leq l, \quad C_{12} = C_{12}(\Omega'), \end{aligned} \quad (4.3)$$

и поэтому

$$\|v\|_{C^s(\Omega')} \leq \frac{C_{13}}{|k|}, \quad |k| \geq \delta > 0, \quad s = s(l), \quad C_{13} = C_{13}(\Omega', s). \quad (4.4)$$

Учитывая (4.4), имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{+\infty+ib} e^{-ikt} v(x, k) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-N}^N e^{-i\omega t} v(x, \omega) d\omega \right. \\ &\quad + \left(\int_{-\infty+ib}^{-N+ib} + \int_{N+ib}^{+\infty+ib} \right) e^{-ikt} v(x, k) dk \\ &\quad + \left(\int_{-N+ib}^{-N} + \int_N^{N+ib} \right) e^{-ikt} v(x, k) dk \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} v(x, \omega) d\omega, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В силу (4.4), (4.5) и теоремы Планшереля

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \|u\|_{C^s(\Omega')}^2 dt \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right| \right)^2 dt \\
&\leq C_{14} \sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \int_0^\infty \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dt \\
&= 2\pi C_{14} \sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\partial^j v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 d\omega \\
&\leq 2\pi C_{14} \int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j v}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right| \right)^2 d\omega \\
&= 2\pi C_{14} \int_{-\infty}^\infty \|v\|_{C^s(\Omega')}^2 d\omega \\
&\leq 2\pi C_{14} \left(\int_{-\delta}^\delta \|v\|_{C^s(\Omega')}^2 d\omega + C_{13}^2 \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_\delta^\infty \right) \frac{d\omega}{\omega^2} \right) \leq C_3, \quad \delta > 0.
\end{aligned}$$

Теорема 6 полностью доказана.

§ 5. Доказательство теорем 4, 5 и 9

Установим равенство (0.21) теорем 5 и 9. В силу теорем 2 (при $\alpha = 1$) и 7 (при $\alpha < 1$)

$$\|v(x, \omega + \varkappa) - v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} \rightarrow 0, \quad \varkappa \rightarrow 0, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \|v(x, \omega + \varkappa) + v(x, \omega - \varkappa) - 2v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} d\varkappa \\
&= \lambda \|v(x, \omega + \tilde{\varkappa}) + v(x, \omega - \tilde{\varkappa}) - 2v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} \\
&\leq \lambda (\|v(x, \omega + \tilde{\varkappa}) - v(x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} + \|v(x, \omega) - v(x, \omega - \tilde{\varkappa})\|_{C^s(\Omega')}) \\
&= o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \tilde{\varkappa} \in [0, \lambda].
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Справедливо представление

$$U(t, x, \omega) = \int_0^t e^{i\omega(\tau-t)} u(\tau, x) d\tau,$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (0.1)–(0.3) с $f = 0, g = h$. Из (5.1) и теоремы Планшереля [23] следует, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t U(\tau, x, \omega) e^{i\omega\tau} d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{i\omega\tau'} u(\tau', x) d\tau' - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) e^{i\omega\tau} u(\tau, x) d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} = 0,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

и равенство (0.21) доказано.

Докажем теорему 4. Из (5.2) следует, что для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t e^{i\omega\tau} u(\tau, x) d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\omega\tau} \tau u(\tau, x) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) e^{i\omega\tau} u(\tau, x) d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\| \int_0^t e^{i\omega\tau} \tau u(\tau, x) d\tau \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) e^{i\omega\tau} u(\tau, x) d\tau - v(x, \omega) \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\| \int_0^t e^{i\omega\tau} \tau u(\tau, x) d\tau \right\|_{C^s(\Omega')}. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

В силу (0.6) и оценки

$$\int_0^\infty \ln^2(t+2) dt \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2 dx}{r^{1+\delta}} < \infty, \quad \delta > 0,$$

(см. [10], [12]) имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\infty \ln^2(t+2) u^2 dt \right\|_{C^s(\Omega')} \\
&= \sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \int_0^\infty \ln^2(t+2) u^2(t, x) dt \right| \\
&= \int_0^\infty \ln^2(t+2) \sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j (u^2)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right| dt \\
&\leq C_{15} \int_0^\infty \ln^2(t+2) \sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right|^2 dt \\
&\leq C_{15} \int_0^\infty \ln^2(t+2) \left(\sum_{j=0}^s \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \sup_{x \in \Omega'} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \right| \right)^2 dt \\
&= C_{15} \int_0^\infty \ln^2(t+2) \|u\|_{C^s(\Omega')}^2 dt < \infty. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Пусть

$$U_1(t, x, \omega) = \int_0^t e^{i\omega\tau} \ln(\tau+2) u(\tau, x) d\tau.$$

Из (5.4) и теоремы Планшереля [23] следует, что существует множество $M \subset \mathbb{R}$, $\text{mes}(\mathbb{R} \setminus M) = 0$, такое, что при всех $\omega \in M$

$$\|U_1(t, x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} = o(\ln t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{i\omega\tau} \tau u(\tau, x) d\tau \right\|_{C^s(\Omega')} \\ &= \left\| \frac{tU_1(t, x, \omega)}{\ln(t+2)} - \int_0^t \left(\frac{1}{\ln(\tau+2)} - \frac{\tau}{(\tau+2)\ln^2(\tau+2)} \right) U_1(\tau, x, \omega) d\tau \right\|_{C^s(\Omega')} \\ &\leq \frac{t}{\ln(t+2)} \|U_1(t, x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{\ln(\tau+2)} + \frac{\tau}{(\tau+2)\ln^2(\tau+2)} \right) \|U_1(\tau, x, \omega)\|_{C^s(\Omega')} d\tau, \end{aligned}$$

то в каждой точке $\omega \in M$

$$\frac{1}{t} \left\| \int_0^t e^{i\omega\tau} \tau u(\tau, x) d\tau \right\|_{C^s(\Omega')} = o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Из (5.3) и (5.5) следует (0.19) и теорема 4 доказана.

Список литературы

1. *Lax P. D., Phillips R. S.* The wave equation in exterior domains // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1962. V. 68. № 1. P. 47–49.
2. *Morawetz C. S.* The limiting amplitude principle // *Comm. Pure Appl. Math.* 1962. V. 15. № 3. P. 349–361.
3. *Lax P. D., Morawetz C. S., Phillips R. S.* Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle // *Comm. Pure Appl. Math.* 1963. V. 16. № 4. P. 477–486.
4. *Михайлов В. П.* О принципе предельной амплитуды // *ДАН СССР.* 1964. Т. 159. № 4. С. 750–752.
5. *Иерий В. Я.* Экспоненциальное убывание решений волнового уравнения во внешности почти звездной области // *ДАН СССР.* 1969. Т. 189. № 5. С. 938–940.
6. *Morawetz C. S.* Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1975. V. 28. № 2. P. 229–264.
7. *Ralston J. V.* Solutions of the wave equation with localized energy // *Comm. Pure Appl. Math.* 1969. V. 22. № 6. P. 807–823.
8. *Morawetz C. S., Ralston J. V., Strauss W. A.* Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles // *Comm. Pure Appl. Math.* 1977. V. 30. № 4. P. 447–508.
9. *Муравей Л. А.* Об асимптотическом поведении при больших значениях времени решений внешних краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными // *Матем. сб.* 1978. Т. 107(149). № 1. С. 84–133.
10. *Zachmanoglou E. C.* The decay of solutions of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1963. V. 14. № 4. P. 312–325.
11. *Zachmanoglou E. C.* An example of slow decay of the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1964. V. 70. № 4. P. 633–636.
12. *Муравей Л. А.* Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца в неограниченной области со звездной границей // *Труды МИАН.* 1988. Т. 185. С. 171–180.
13. *Рамм А. Г.* Спектральные свойства оператора Шрёдингера в областях с бесконечной границей // *Матем. сб.* 1965. Т. 66(108). № 3. С. 321–343.
14. *Odeh F. M.* Uniqueness theorems for Helmholtz equation in domains with infinite boundaries // *J. Math. Mech.* 1963. V. 12. № 6. P. 857–867.

15. Винник А. А. Об условиях излучения для областей с бесконечными границами // Изв. вузов. Сер. матем. 1977. № 7(182). С. 37–45.
16. Михайлов В. П. О стабилизации решения одной нестационарной граничной задачи // Труды МИАН. 1967. Т. 91. С. 100–112.
17. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
18. Tayoshi T. A remark on the limiting absorption principle for elliptic equations // Repts. Univ. Electro-Communs. 1975. V. 25. № 2. P. 197–202.
19. Винник А. А., Эйдус Д. М. Принцип предельной амплитуды для областей типа параболоида // Изв. вузов. Сер. матем. 1979. № 3(202). С. 28–37.
20. Karamata J. Weiterführung der N. Wiener'schen Methode // Math. Z. 1934. V. 38. № 5. P. 701–708.
21. Филиновский А. В. Об асимптотическом поведении решений одной внешней нестационарной задачи // Комплексные методы в математической физике. Донецк, 1984. С. 186.
22. Филиновский А. В. О стабилизации решений внешней краевой задачи Дирихле для уравнения колебаний пластины // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 4. С. 586–596.
23. Plancherel M. Sur la convergence et sur la sommation par les moyennes de Cesaro de $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_a^z f(x) \cos xy dx$ // Math. Ann. 1915. V. 76. P. 315–326.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
07.06.1995 и 11.01.1996