Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 9, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 07:26:14

УДК 518.9+517.97

Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов

Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом

В работе рассмотрены следующие две классические задачи: существование и оценка решения уравнения, заданного отображением F в окрестности точки x^* ; необходимые условия экстремума некоторой гладкой функции в точке x^* при ограничениях типа равенства, заданных нелинейным отображением F . Если образ первой производной отображения F в точке x^* не замкнут, то классические методы исследования, основанные на теоремах об обратной функции и принципе Лагранжа, не применимы. Полученные в работе результаты для указанных задач являются содержательными для случая, когда образ первой производной отображения F в точке x^* не замкнут, и представляют собой дальнейшее развитие и обобщение классических результатов на аномальные задачи с незамкнутым образом.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В статье обобщаются классическая теорема об обратной функции и принцип Лагранжа на случай, когда образ первой производной априори не предполагается замкнутым и, значит, отображение, вообще говоря, не регулярно. Для того чтобы яснее осознать смысл проведенного исследования, сформулируем доказанную в работе теорему об обратной функции параллельно с формулировкой классической теоремы.

Пусть X, Y — банаховы пространства, заданы гладкое отображение $F: X \rightarrow Y$, точки $x_* \in X$ и $y_* = F(x_*)$. Для $y \in Y$, лежащих в окрестности y_* , рассмотрим уравнение

$$F(x) = y \quad (1.1)$$

относительно неизвестного x , лежащего в окрестности x_* . Нас будет интересовать: для всех ли указанных y существует решение $x(y)$ уравнения (1.1), которое удовлетворяет оценке через правую часть этого уравнения.

Если точка x_* нормальна, т.е. $\text{Im } F'(x_*) = Y$, то по теореме об обратной функции (см. [1]) в окрестности y_* существует решение $x(y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее оценке $\|x(y) - x_*\| \leq \text{const} \cdot \|y - y_*\|$, для которого справедливо представление

$$x(y) = x_* + \|y - y_*\|\chi + O(\|y - y_*\|^2). \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00193).

Здесь χ – произвольное решение линейного уравнения $F'(x_*)\chi = (y - y_*)/\|y - y_*\|$ при $y \neq y_*$, лежащее в заданном шаре с центром в точке x_* .

В настоящей работе уравнение (1.1) рассматривается для случая, когда образ $\text{Im } F'(x_*)$ может не быть замкнут, но при этом выполнены ослабленные условия регулярности (они называются *условиями 2-регулярности*). Условие 2-регулярности F по направлению $h \in X$ состоит в том, что $F'(x_*)h = 0$, $F''(x_*)[h, h] \in \overline{\text{Im } F'(x_*)}$ и при этом отображение $(x_1, x_2) \rightarrow F'(x_*)x_2 + F''(x_*)[h, x_1]$ переводит $\text{Ker } F'(x_*) \times X$ на все Y . Здесь и ниже $F''(x_*)[\cdot, \cdot]$ – билинейное отображение, определяемое второй производной $F''(x_*)$. Совокупность всех описанных h обозначается через $H_0(x_*)$.

В настоящей статье в предположении 2-регулярности отображения F по некоторому направлению h доказано существование решения $x(y)$ уравнения (1.1) для всех y , близких к y_* . Это решение удовлетворяет приводимой ниже линейно-корневой оценке. Более того, для него получено асимптотическое представление, которое, в частности, дает

$$x(y) = x_* + c\|y - y_*\|^{1/2}(h + \chi) + O(\|y - y_*\|). \quad (1.3)$$

Здесь c – некоторая константа, которая может быть эффективно вычислена, а χ – решение приведенного в теореме 2 линейно-квадратичного уравнения.

В случае, когда точка x_* аномальна, т.е. $\text{Im } F'(x_*) \neq Y$, но образ $\text{Im } F'(x_*)$ замкнут, теорема об обратной функции получена в [2]. В настоящей работе результаты [2] обобщены на случай незамкнутого образа $\text{Im } F'(x_*)$. С их помощью получены необходимые условия для аномальных экстремальных задач с “незамкнутым образом”.

§ 2. Теорема об обратной функции. Формулировка

Будем предполагать, что в окрестности x_* отображение F дважды непрерывно дифференцируемо и его вторая производная липшицева. Положим $K = \text{Ker } F'(x_*)$. Для произвольного фиксированного $h \in X$ определим линейное отображение

$$G(x_*, h): K \times X \rightarrow Y$$

по формуле

$$G(x_*, h)(x_1, x_2) = F'(x_*)x_2 + F''(x_*)[h, x_1].$$

Положим

$$H(x_*) = \{h : F'(x_*)h = 0, F''(x_*)[h, h] \in \overline{\text{Im } F'(x_*)}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение F называется *2-регулярным в точке x_* по направлению $h \in H(x_*)$* , если $G(x_*, h)(K \times X) = Y$. Иными словами, если

$$\forall y \in Y \quad \exists x_1, x_2: \quad F'(x_*)x_1 = 0, \quad F'(x_*)x_2 + F''(x_*)[h, x_1] = y.$$

Множество $h \in H(x_*)$, по которым F 2-регулярно, обозначим через $H_0(x_*)$, т.е. положим

$$H_0(x_*) = \{h \in H(x_*) : \text{Im } G(x_*, h) = Y\}.$$

Очевидно, что если точка x_* нормальна, т.е. $\text{Im } F'(x_*) = Y$, то $H_0(x_*) = H(x_*) = \text{Ker } F'(x_*)$. Укажем следующее важное свойство конуса $H_0(x_*)$. Положим

$$\tilde{H}_0(x_*) = \{h : F'(x_*)h = 0, F''(x_*)[h, h] \in \text{Im } F'(x_*), \text{Im } G(x_*, h) = Y\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Конус $\tilde{H}_0(x_*)$ всюду плотен в $H_0(x_*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in H_0(x_*)$. Докажем существование сходящейся к h последовательности $\{h_i\}$, для которой $h_i \in \tilde{H}_0(x_*) \ \forall i$. Действительно, существуют такие последовательности $\{\eta_i\} \in X$, $\{y_i\} \in Y$, что $y_i \rightarrow 0$, $F'(x_*)\eta_i + \frac{1}{2}F''(x_*)[h, h] = y_i$. Искомые h_i будем искать в виде $h_i = h + x_{1,i}$, $x_{1,i} \in \text{Ker } F'(x_*)$.

Итак, рассмотрим уравнение

$$F'(x_*)(\eta_i + x_2) + \frac{1}{2}F''(x_*)[h + x_1]^2 = 0$$

относительно неизвестных $x_1 \in \text{Ker } F'(x_*)$, $x_2 \in X$. Проводя очевидные преобразования, приводим это уравнение к виду

$$G(x_*, h)(x_1, x_2) = -y_i - \frac{1}{2}F''(x_*)[x_1]^2.$$

Применяя к этому уравнению в точке нуль классическую теорему об обратной функции (см. [1]) (или доказанную ниже лемму 1 при $m = 0$), получаем существование стремящихся к нулю решений $x_{1,i}$, $x_{2,i}$. Для $h_i = h + x_{1,i}$ по построению имеем $F''(x_*)[h_i]^2 \in \text{Im } F'(x_*)$. Кроме того, при больших i операторы $G(x_*, h_i)$ являются сюръективными, так как любой линейный непрерывный оператор, достаточно близкий к сюръективному, сам является сюръективным. Таким образом, $h_i \in \tilde{H}_0(x_*)$ при больших i . Предложение доказано.

Введем обозначение: $\theta(y) = y/\|y\|$ при $y \neq 0$ и $\theta(0) = 0$. Для $y \in \text{Im } F'(x_*)$ положим $b(y) = \{\inf \|x\| : F'(x_*)x = \theta(y)\}$. Через $B_r(x)$ обозначим шар радиуса r с центром в точке x и положим $B_r = B_r(0)$.

ТЕОРЕМА 1 (об обратной функции). *Предположим, что отображение F 2-регулярно в точке x_* по некоторому направлению $h \in H(x_*)$ ($H_0(x_*) \neq \emptyset$).*

Тогда найдутся такие константы $r, c, c_1 > 0$, что для любого $l \in \text{Im } F'(x_)$ и любого $y \in B_{r(l)}(y_*)$, где $r(l) = \min\{c/b(l), cr^2\}$, существует $x(y) \in B_r(x_*)$, для которого имеют место следующие равенство и оценка:*

$$F(x(y)) = y, \tag{2.1}$$

$$\|x(y) - x_*\| \leq c_1(b(l)\|y - y_*\| + \|y - y_*\|^{1/2}\|\theta(y - y_*) - \theta(l)\|^{1/2}). \tag{2.2}$$

Из теоремы 1 при $l = 0$ вытекает следующее важное

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что $H_0(x_*) \neq \emptyset$. Тогда существуют такие константы $r, c > 0$, что*

$$\forall y \in B_r(y_*) \quad \exists x(y): \quad F(x(y)) = y; \quad \|x(y) - x_*\| \leq c\|y - y_*\|^{1/2}. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2 (асимптотическое представление решения). *Пусть $h \in \tilde{H}_0(x_*)$.*

Тогда существуют такие константы $r, c, c_1, c_2 > 0$, что для любого $l \in \text{Im } F'(x_)$ и любого $y \in B_{r(l)}(y_*)$, где $r(l) = \min\{cr/b(l), cr^2\}$, существует $x(y) \in B_r(x_*)$, для которого*

$$\begin{aligned} F(x(y)) &= y, \\ x(y) &= x_* + t(y)(h + \xi + \chi_1) + O(t^2(y)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$t(y) = \max \left\{ \frac{c_1 \|y - y_*\| b(l)}{r}, \frac{c_2 \|y - y_*\|^{1/2} \|\theta(y - y_*) - \theta(l)\|^{1/2}}{\sqrt{r}} \right\},$$

а ξ, χ_1, χ_2 – произвольные решения системы уравнений

$$\begin{aligned} F'(x_*)\xi &= \frac{\|y - y_*\|}{t(y)}\theta(l), \\ F'(x_*)\chi_1 &= 0, \\ F'(x_*)\chi_2 + F''(x_*)[h, \chi_1] &= (\theta(y - y_*) - \theta(l)) \frac{\|y - y_*\|}{t^2(y)} \\ &\quad - F''(x_*)[h, \xi] - \frac{1}{2}F''(x_*)[\xi + \chi_1]^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

удовлетворяющие оценкам

$$\|\xi\| \leq 2b(l) \frac{\|y - y_*\|}{t(y)}, \quad \|\xi\| \leq \frac{r}{32}, \quad \|\chi_1\| \leq \frac{r}{4}, \quad \|\chi_2\| \leq \frac{r}{4}. \quad (2.6)$$

Здесь и ниже для билинейной формы B используется обозначение $B[x, x] = B[x]^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 2 включает в себя, в частности, утверждение о существовании решений системы уравнений (2.5), удовлетворяющих оценкам (2.6). Отметим, что ξ, χ_1, χ_2 зависят от y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства теоремы 2 непосредственно следует, что в ее формулировке число $b(l)$ можно заменить на произвольное b_0 : $b_0 \geq b(l)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если точка x_* нормальна, то $\text{Im } F'(x_*) = Y$, $0 \in H_0(x_*)$ и, кроме того, $\exists b_0$: $b(y) \leq b_0 \quad \forall y \in Y$. Поэтому если x_* нормальна, то, взяв в теореме 2 $h = 0, l = y - y_*, \chi_1 = 0$, получим известную теорему об обратной функции (см. [1]), а также с учетом замечания 2 – асимптотическое представление (1.2) (при $\chi = \xi c_1 b_0 / r$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Асимптотическое представление (1.3) вытекает из теоремы 2 при $l = 0, \xi = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из приводимого ниже доказательства теоремы 2 вытекает, что участвующие в ее формулировке константы c, c_1, c_2 в явном виде определяются первыми двумя производными отображения F в точке x_* , а также числами ν и r_0 , где ν – константа Липшица отображения $F''(\cdot)$ на шаре $B_{r_0}(x_*)$. Что касается r , то r – это произвольное число из полуинтервала $(0, \bar{r}]$, где $\bar{r}$ определяется по формуле (3.9). Сказанное относится и к теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если вектор h не принадлежит конусу $\tilde{H}_0(x_*)$, но $h \in H_0(x_*)$, то для него также справедливо асимптотическое представление решения (1.1), аналогичное приведенному в теореме 2. Соответствующий результат анонсирован в [3], правда, там вследствие опечатки в формуле (7) в последних квадратных скобках перед вектором ξ пропущен множитель $\|y - y_*\|/t(y)$.

Теорема 1 является следствием теоремы 2, однако мы сформулировали теорему 1 отдельно, так как для приложений часто достаточно бывает лишь оценки (2.2) без асимптотической формулы для решения. Доказательства теорем приводятся ниже, а здесь проиллюстрируем их на примерах. В них уравнение (1.1) исследуется в окрестности аномальной точки, и поэтому к ним классическая теорема об обратной функции (см. [1; с. 161]) не применима. В то же время предположения теорем 1 и 2 в них выполняются.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{R} \times C[0, 1] \times C[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in C[0, 1]$. Определим оператор $F: X \rightarrow Y$ по формуле

$$F(x)(t) = (t - t_1)(x_0 - x_1(t)) + (t - t_2) \left(\int_0^1 x_1(\tau) d\tau x_2(t) + \int_0^1 x_2(\tau) d\tau x_1(t) \right) + \psi(x_0, x_1(t), x_2(t)),$$

где $t_1 \neq t_2$ – заданные точки отрезка $[0, 1]$, а ψ – произвольный многочлен от трех переменных степени выше чем 2.

Рассмотрим уравнение (1.1). Для отображения F точка $x_* = 0$ аномальна, так как образ $\text{Im } F'(x_*)$ не замкнут (из-за наличия множителя $(t - t_1)$).

В то же время возьмем $h = (h_0, h_1, h_2)$, где $h_0 = 1$, $h_1 \equiv 1$, $h_2 \equiv 0$. Непосредственно проверяется, что $h \in H(0)$ и F 2-регулярно в нуле по направлению h^1 . Поэтому к рассматриваемому уравнению применимы теоремы 1 и 2. Отметим, что в этом примере образ $F''(x_*)[h, \text{Ker } F'(x_*)]$ также не замкнут.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = X_1 \times X_2 \times X_2$, $Y = C[0, 1]$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 \in X_1 = C[0, 1] \cap C^1[2/3, 1]$, $x_2, x_3 \in X_2 = C[0, 1] \cap C^1[0, 1/3]$. Норму в X определим как

$$\|x\| = \|x\|_{C[0,1]} + \|\dot{x}_1\|_{C[2/3,1]} + \|\dot{x}_2\|_{C[0,1/3]} + \|\dot{x}_3\|_{C[0,1/3]}.$$

¹При этом используется, что для любого $v \in C[0, 1]$ уравнение Фредгольма второго рода $u + \int_0^1 u(\tau) d\tau = v$ имеет решение $u \in C[0, 1]$.

Определим оператор $F: X \rightarrow Y$ по формуле $F(x) = x_1 + x_2 x_3$.

Рассмотрим уравнение (1.1). Для отображения F точка $x_* = 0$ аномальна, так как образ $\text{Im } F'(0)$ не замкнут. Отметим, что в то же время этот образ $\text{Im } F'(0)$ всюду плотен в Y . Непосредственно проверяется, что отображение F 2-регулярно в нуле по направлению $h \in H(0)$, где $h_1 = h_2 = 0$, $h_3 \equiv 1$. Поэтому к рассматриваемому уравнению применимы теоремы 1 и 2. Отметим, что в этом примере образ $F''(0)[h, \text{Ker } F'(0)]$ также не замкнут.

Теорема 1 обобщает на случай незамкнутого образа $\text{Im } F'(x_*)$ теорему об обратной функции, доказанную в [2]. Для отображений F с незамкнутым образом $\text{Im } F'(x_*)$ в [4], по-видимому впервые, была получена следующая теорема о накрывании: если отображение F 2-регулярно в точке x_* по некоторому направлению $h \in \tilde{H}_0(x_*)$, то $\forall r > 0 \exists \rho(r) > 0: F(B_r(x_*)) \supseteq B_{\rho(r)}(y_*)$. В отличие от этой теоремы о накрывании из [4] теорема 2 не только утверждает существование решений уравнения (1.1) с указанными свойствами, но и дает асимптотическое представление этого решения. Из него, в частности, вытекают (см. теорему 1) важные линейно-квадратичная оценка на решение (2.2) и корневая оценка (2.3). (В терминах накрывания корневая оценка (2.3) означает, что $\rho(r) \geq \text{const} \cdot r^2$ при малых $r > 0$.) В предположении, что Y конечномерно, другой подход к теореме об обратной функции без априорных предположений нормальности предложен в [5].

§3. Доказательство теорем 1 и 2

Начнем со следующей леммы. Пусть даны линейный непрерывный оператор $A: X \rightarrow Y$ и $m+1$ функций $f_i(x): X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, m+1}$. Положим $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) + f_{m+1}(x)$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = f(x). \quad (3.1)$$

ЛЕММА 1. Пусть существуют такие $a, r > 0$, что

$$\forall y \in Y \quad \exists x: \quad Ax = y, \quad \|x\| \leq a\|y\|,$$

$$\|f_i(x'') - f_i(x')\| \leq (2a(m+1))^{-1} \|x'' - x'\| \quad \forall x', x'' \in B_r, \quad (3.2)$$

$$\|f_i(0)\| \leq r(a2^{m+1}(m+1))^{-1} \quad (3.3)$$

при всех $i = \overline{1, m+1}$. Тогда

а) система уравнений

$$\begin{aligned} Ax_1 &= f_1(x), \\ Ax_i &= \sum_{j=1}^i f_j \left(\sum_{s=1}^i x_s \right) - \sum_{j=1}^{i-1} f_j \left(\sum_{s=1}^{i-1} x_s \right), \quad i \geq 2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

имеет решение $(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющее оценкам

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq 2a\|f_1(0)\| \leq \frac{r}{2^m(m+1)}, \\ \|x_i\| &\leq 2a \left\| f_i \left(\sum_{s=1}^{i-1} x_s \right) \right\| \leq \frac{r}{2^m(m+1)}, \quad i = \overline{2, m}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

- б) для произвольных $(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющих системе уравнений (3.4) и оценке $\|x_i\| \leq r/(2(m+1))$, $i = \overline{1, m}$, существует такое $x_{m+1} = x_{m+1}(x_1, \dots, x_m) \in X$, что $x = \sum_{i=1}^{m+1} x_i$ является решением уравнения (3.1) и справедлива оценка

$$\|x_{m+1}\| \leq 2a \left\| f_{m+1} \left(\sum_{s=1}^m x_s \right) \right\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим решение $(x_1, \dots, x_m)$ системы уравнений (3.4) индукцией по i . Пусть вначале $i = 1$. Рассмотрим отображение $F(x) = Ax - f_1(x)$. По условию оператор A накрывает с коэффициентом a^{-1} (см. [6]). Следовательно, в силу (3.2) по теореме Милютина о возмущении (см. [6; теорема 1.3]) отображение F накрывает на B_r с коэффициентом $1/(2a)$. Поэтому $F(B_\rho) \supseteq F(0) + 1/(2a)B_\rho$ $\forall \rho \leq r$. Имеем

$$\begin{aligned} F(0) = -f_1(0) &\in \frac{1}{2a}B_\rho \quad \text{при} \quad \rho = \|f_1(0)\|2a \stackrel{(3.3)}{\leq} r \\ \implies \exists x_1: F(x_1) &= 0, \quad \|x_1\| \leq \rho = \|f_1(0)\|2a. \end{aligned}$$

Предположим, что уже построены произвольные первые $i, i < m$, решений $x_1, \dots, x_i$ системы уравнений (3.4), удовлетворяющие оценкам (3.5). Опишем построение x_{i+1} . Покажем, что

$$\|x_j\| \leq a\gamma 2^j \quad \forall j \leq i, \quad \text{где} \quad \gamma = r(a2^{m+1}(m+1))^{-1}. \quad (3.6)$$

Для этого докажем, что

$$\|x_j\| \leq 2a \left(\|f_j(0)\| + \sum_{s=1}^{j-1} \|f_{j-s}(0)\| 2^{s-1} \right), \quad j = \overline{2, i}. \quad (3.7)$$

Действительно, в силу (3.2) и (3.5)

$$\begin{aligned} \|x_j\| &\leq 2a \left(\|f_j(0)\| + \frac{1}{2a} \sum_{s=1}^{j-1} \|x_s\| \right) = 2a\|f_j(0)\| + \|x_{j-1}\| + \sum_{s=1}^{j-2} \|x_s\| \\ &\leq 2a(\|f_j(0)\| + \|f_{j-1}(0)\|) + 2\|x_{j-2}\| + 2 \sum_{s=1}^{j-3} \|x_s\| \leq \dots \end{aligned}$$

Продолжая эту цепочку неравенств, получаем (3.7), откуда в силу (3.3) вытекает (3.6).

Определим отображение $F_i: B_{r/m+1} \rightarrow Y$ по формуле $F_i(x) = Ax - \tilde{f}(x)$, где

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{i+1} f_j(x_1 + \dots + x_i + x) - \sum_{j=1}^i f_j(x_1 + \dots + x_i)$$

$(x_1, \dots, x_i)$ уже фиксированы). В силу (3.2) и оценки $\|x_j\| \stackrel{(3.6)}{\leq} r/(m+1)$ функция $\tilde{f}$ удовлетворяет на $B_{r/(m+1)}$ условию Липшица с константой Липшица $1/(2a)$. Оператор A накрывает с коэффициентом $1/a$. Следовательно, по теореме Милютина о возмущении отображение $F = F_i$ накрывает на $B_{r/(m+1)}$ с коэффициентом $1/(2a)$. Поэтому $F(B_\rho) \supseteq F(0) + 1/(2a)B_\rho \ \forall \rho \leq r/(m+1)$. Но, учитывая (3.2), (3.3), (3.6), имеем

$$\begin{aligned} F(0) &= -f_{i+1}(x_1 + \dots + x_i) \implies \\ \|F(0)\| &\stackrel{(3.2)}{\leq} \|f_{i+1}(0)\| + \frac{1}{2a} \sum_{s=1}^i \|x_s\| \stackrel{(3.3), (3.6)}{\leq} \gamma \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^i 2^s\right) \leq \frac{r}{2a(m+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\exists x_{i+1}: \quad F(x_{i+1}) = 0, \quad \|x_{i+1}\| \leq \rho = 2a\|F(0)\| = 2a\|f_{i+1}(x_1 + \dots + x_i)\|.$$

Построенное x_{i+1} является искомым. Индукция завершена. Неравенство

$$2a \left\| f_i \left(\sum_{s=1}^{i-1} x_s \right) \right\| \leq \frac{r}{2(m+1)}$$

вытекает из (3.2), (3.3) и (3.6); а) доказано.

Докажем б). Возьмем произвольные $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющие предположениям из б). Искомое x_{m+1} будем искать как решение (3.4) при $i = m+1$ относительно неизвестного x_{m+1} . В силу проведенных выше рассуждений $F_m(B_\rho) \supseteq F_m(0) + 1/(2a)B_\rho \ \forall \rho \leq r/(m+1)$. Кроме того,

$$\|F_m(0)\| \stackrel{(3.2)}{\leq} \|f_{m+1}(0)\| + \frac{1}{2am} \sum_{s=1}^m \|x_s\| \stackrel{(3.3), (3.5)}{\leq} \frac{r}{2a(m+1)}.$$

Следовательно,

$$\exists x_{m+1}: \quad F_m(x_{m+1}) = 0, \quad \|x_{m+1}\| \leq \rho = 2a\|F_m(0)\| = 2a\|f_{m+1}(x_1 + \dots + x_m)\|.$$

Построенное x_{m+1} является искомым. Складывая уравнения в (3.4) по всем $i \leq m+1$ и полагая $x = \sum_{i=1}^{m+1} x_i$, получаем искомое решение (3.1). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для удобства будем считать, что $\|h\| \leq 1$, $x_* = 0$, $y_* = 0$. Для отображения F справедливо представление (это лемма Адамара):

$$F(x) = F'(x_*)x + \frac{1}{2}F''(x_*)[x, x] + R(x)[x, x].$$

Здесь при каждом фиксированном x $R(x)$ — это симметричное билинейное отображение, причем $R(0) = 0$ и при некотором $r_0 > 0$ отображение R удовлетворяет

на B_{r_0} условию Липшица с некоторой константой ν . В силу 2-регулярности отображения F по направлению h и теоремы Банаха об открытом отображении, примененной к линейному оператору $G(x_*, h)$, существует такое $a > 1$, что

$$\forall y \in Y \quad \exists x_1 \in K, x_2 \in X: \quad \|x_1\| + \|x_2\| \leq a\|y\|, \quad G(x_*, h)(x_1, x_2) = y. \quad (3.8)$$

Положим

$$c_3 = \max\{1; \sup \|F''(x_*)[x_1, x_2]\|, \|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1\}, \quad \gamma_0 = 4\nu.$$

Возьмем произвольное $r \in (0, \bar{r}]$, где

$$\bar{r} = \min\left\{\frac{1}{16ac_3}, \frac{1}{64a\nu}, r_0, 1\right\}. \quad (3.9)$$

Непосредственным вычислением получаем оценки:

$$\|F''(x_*)[x'_1, x'_2] - F''(x_*)[x_1, x_2]\| \leq \frac{1}{16a}(\|x'_1 - x_1\| + \|x'_2 - x_2\|), \quad (3.10)$$

$$\|R(x_1)[x_1, x_1] - R(x_2)[x_2, x_2]\| \leq \frac{1}{32a}(\|x_1\| + \|x_2\|)(\|x_1 - x_2\|), \quad (3.11)$$

$$\|F''(x_*)[x, x]\| \leq \frac{r}{16a}, \quad \|R(x)[\tilde{x}, \tilde{x}]\| \leq \gamma_0\|x\| \quad (3.12)$$

для любых $x, x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in B_r, \tilde{x} \in B_2$.

По условию $F''(x_*)[h, h] \in \text{Im } F'(x_*)$. Поэтому $\exists \eta \in X$:

$$F'(x_*)\eta + \frac{1}{2}F''(x_*)[h, h] = 0, \quad \|\eta\| \leq b_1, \quad (3.13)$$

где $b_1 = b(F''(x_*)[h, h])$. Положим

$$\gamma_1 = \frac{128ac_3}{r}, \quad \gamma_2 = 8\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2},$$

$$t_1 = r\gamma_3, \quad \text{где } \gamma_3 = \min\left\{\frac{1}{32c_3b_1a}, \frac{1}{32a\gamma_0}, \frac{1}{2}\right\}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{r}(l) = \min\left\{\frac{2t_1}{\gamma_1b(l)}, \frac{2t_1^2}{\gamma_2^2}\right\}. \quad (3.15)$$

Зафиксируем произвольное $y \in B_{\tilde{r}(l)}$ и положим

$$t_0(y) = \max\left\{\frac{\|y\|b(l)\gamma_1}{2}, \frac{\|\theta(y) - \theta(l)\|^{1/2}\|y\|^{1/2}\gamma_2}{2}\right\}. \quad (3.16)$$

Используя, что $\|\theta(l)\| \leq 1, \|y\| \leq \tilde{r}(l)$, в силу (3.14)–(3.16) имеем

$$\begin{aligned} t_0(y) &\stackrel{(3.16)}{\leq} \max\left\{\frac{b(l)\|y\|\gamma_1}{2}, \frac{\|y\|^{1/2}\sqrt{2}\gamma_2}{2}\right\} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} \max\left\{\frac{\gamma_1b(l)}{2} \frac{2t_1}{\gamma_1b(l)}, \frac{\gamma_2\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}t_1}{\gamma_2}\right\} = t_1 \stackrel{(3.14)}{\leq} \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Выберем произвольное число $t \neq 0$, $t \in [t_0(y), t_1]$. По условию $l \in \text{Im } F'(x_*)$. Поэтому существует такое $\xi \in X$, что

$$F'(x_*)\xi = \frac{\|y\|}{t}\theta(l), \quad \|\xi\| \leq 2b(l)\frac{\|y\|}{t}. \quad (3.18)$$

Возьмем произвольное такое ξ . Из (3.16), (3.18) и определения γ_1 получаем

$$\|\xi\| \leq \frac{4}{\gamma_1} = \frac{r}{32ac_3}. \quad (3.19)$$

Решение уравнения $F(x) = y$ будем искать в виде

$$x(y, t) = t(h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2), \quad (3.20)$$

где $x_1 \in K$, $x_2 \in X$, $x_1, x_2 \in B_{r/4}$. В силу выбора t , с учетом оценок (3.13), (3.19) формулы (3.14) и того, что $x_1, x_2 \in B_{r/4}$, $a \geq 1$, $c_3 \geq 1$, $t \leq t_1 \leq 1/2$, $t_1 \leq r/(32ab_1)$, имеем

$$\|\xi + t\eta + x_1 + tx_2\| \stackrel{(3.13), (3.19)}{\leq} \frac{r}{32ac_3} + b_1t + \frac{r}{2} \stackrel{(3.14)}{<} r \leq 1 \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \|t(h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2)\| \leq 2t \stackrel{(3.14)}{\leq} r. \quad (3.22)$$

Далее, подставляя (3.20) в искомое уравнение, получаем

$$\begin{aligned} F(t(h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2)) &= tF'(x_*)h + tF'(x_*)\xi + t^2F'(x_*)\eta + tF'(x_*)x_1 \\ &+ t^2F'(x_*)x_2 + \frac{t^2}{2}F''(x_*)[h, h] + t^2F''(x_*)[h, \xi] + t^3F''(x_*)[h, \eta] \\ &+ t^2F''(x_*)[h, x_1] + t^3F''(x_*)[h, x_2] + \frac{t^2}{2}F''(x_*)[\xi + x_1]^2 \\ &+ t^3F''(x_*)\left[\xi + x_1 + \frac{t}{2}(\eta + x_2), \eta + x_2\right] + t^2\Delta = y. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь $\Delta = R(t(h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2))[h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2]^2$.

По построению $h, x_1 \in \text{Ker } F'(x_*)$, а ξ и η удовлетворяют (3.18), (3.13). Используя это и деля уравнение (3.23) на t^2 , приводим его к следующему виду

$$G(x_*, h)v = \sum_{i=1}^2 f_i(v; y, t). \quad (3.24)$$

Здесь $v = (x_1, x_2)$ – переменная, (y, t) – параметр и

$$\begin{aligned} f_1(v; y, t) &= \frac{(\theta(y) - \theta(l))\|y\|}{t^2} - F''(x_*)[h, \xi] - \frac{1}{2}F''(x_*)[\xi + x_1]^2, \\ f_2(v; y, t) &= -F''(x_*)\left[t\left(h + \xi + x_1 + \frac{t}{2}(\eta + x_2)\right), \eta + x_2\right] - \Delta. \end{aligned}$$

Из (3.10) в силу (3.19) для любых $x_1, x'_1 \in B_{r/4}$ имеем

$$\left\| \frac{1}{2} F''(x_*) [\xi + x'_1]^2 - \frac{1}{2} F''(x_*) [\xi + x_1]^2 \right\| \leq \frac{1}{4a} \|x'_1 - x_1\|. \quad (3.25)$$

В силу (3.13) $\|\eta\| \leq b_1$, а в силу (3.14) $t_1 c_3 b_1 \leq 1/(16a)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \left\| F''(x_*) \left[t \left(h + \xi + x'_1 + \frac{t}{2} (\eta + x'_2) \right), \eta \right] \right. \\ & \quad \left. - F''(x_*) \left[t \left(h + \xi + x_1 + \frac{t}{2} (\eta + x_2) \right), \eta \right] \right\| \\ & \leq t c_3 \left(\|x'_1 - x_1\| + \frac{t}{2} \|x'_2 - x_2\| \right) \|\eta\| \leq \frac{1}{16a} (\|x'_1 - x_1\| + \|x'_2 - x_2\|). \end{aligned} \quad (3.26)$$

По аналогии с выводом оценки (3.22) получаем

$$t \left(h + \xi + x_1 + \frac{t}{2} (\eta + x_2) \right) \in B_r \quad \forall x_1, x_2 \in B_{r/4}.$$

Поэтому в силу (3.10), учитывая, что $t \leq t_1 \leq 1/2$, для любых $x_1, x'_1, x_2, x'_2 \in B_{r/4}$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| F''(x_*) \left[t \left(h + \xi + x'_1 + \frac{t}{2} (\eta + x'_2) \right), x'_2 \right] \right. \\ & \quad \left. - F''(x_*) \left[t \left(h + \xi + x_1 + \frac{t}{2} (\eta + x_2) \right), x_2 \right] \right\| \\ & \leq \frac{1}{16a} (\|x'_1 - x_1\| + \|x'_2 - x_2\|). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, из (3.11), (3.22), (3.21), учитывая, что $\|h\| \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} & \|R(t(h + \xi + t\eta + x'_1 + tx'_2))[h + \xi + t\eta + x'_1 + tx'_2]^2 \\ & \quad - R(t(h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2))[h + \xi + t\eta + x_1 + tx_2]^2\| \\ & \leq \frac{1}{8a} (\|x_1 - x'_1\| + \|x_2 - x'_2\|). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из (3.16), (3.19), учитывая, что $\|\xi\| \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|f_1(0; y, t)\| & \leq \frac{\|\theta(y) - \theta(l)\| \|y\|}{t^2} + \|F''(x_*)[h, \xi]\| + \frac{1}{2} \|F''(x_*)[\xi, \xi]\| \\ & \stackrel{(3.16)}{\leq} \left(\frac{2}{\gamma_2} \right)^2 + c_3 \|\xi\| + \frac{c_3}{2} \|\xi\|^2 \leq \frac{r}{16a} + 2c_3 \|\xi\| \\ & \stackrel{(3.19)}{\leq} \frac{r}{16a} + \frac{r}{16a} = \frac{r}{8a}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Из (3.14), (3.13), (3.19) получаем

$$\begin{aligned} t \left\| F''(x_*) \left[h + \xi + \frac{t}{2} \eta, \eta \right] \right\| &\leq tc_3 \left(\|h\| + \|\xi\| + \frac{t}{2} \|\eta\| \right) \|\eta\| \\ &\stackrel{(3.14), (3.13), (3.19)}{\leq} tc_3 2 \|\eta\| \stackrel{(3.13)}{\leq} 2tc_3 b_1 \stackrel{(3.14)}{\leq} \frac{r}{16a}. \end{aligned}$$

Имеем также

$$\|\Delta\| \stackrel{(3.12), (3.21), (3.22)}{\leq} \gamma_0 2t \leq 2\gamma_0 t_1 \stackrel{(3.14)}{\leq} \frac{r}{16a}.$$

Из полученных двух неравенств заключаем, что

$$\|f_2(0; y, t)\| \leq \frac{r}{8a}. \quad (3.30)$$

Из (3.8), (3.25)–(3.30) в силу (3.21), (3.22) следует, что выполнены все предположения леммы 1 при $m = 1$, $x = v = (x_1, x_2)$, $A = G(x_*, h)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\begin{aligned} &F'(x_*)\chi_2 + F''(x_*)[h, \chi_1] \\ &= (\theta(y - y_*) - \theta(l)) \frac{\|y - y_*\|}{t^2} - F''(x_*)[h, \xi] - \frac{1}{2} F''(x_*)[\xi + \chi_1]^2 \end{aligned}$$

относительно неизвестных $v = (\chi_1, \chi_2)$, $\chi_1 \in \text{Ker } F'(x_*)$, $\chi_2 \in X$ (y, t – параметры). Возьмем произвольное решение этого уравнения $v_1 = (\chi_1(y, t), \chi_2(y, t))$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|\chi_i\| \leq \|v_1\| \leq 2a \|f_1(0; y, t)\| \stackrel{(3.29)}{\leq} \frac{r}{4}, \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

(Такое решение существует в силу леммы 1.) По лемме 1 существует такое $v_2 = v_2(y, t) = (v_{2,1}(y, t), v_{2,2}(y, t))$, что $v = (v_1 + v_2)$ является решением уравнения (3.24) и имеет место оценка

$$\|v_2(y, t)\| \leq 2a \|f_2(v_1; y, t)\| \stackrel{(3.22), (3.12)}{\leq} t \cdot \text{const}. \quad (3.32)$$

Таким образом,

$$x(y, t) = t(h + \xi + t\eta + \chi_1(y, t) + t\chi_2(y, t) + v_{2,1}(y, t) + tv_{2,2}(y, t)) \quad (3.33)$$

является решением уравнения (3.24). При этом в силу (3.32)

$$\|v_{2,i}(y, t)\| \leq \|v_2(y, t)\| \leq t \cdot \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

Далее, если $y \neq 0$, то $t_0(y) > 0$ и мы положим $t(y) = t = t_0(y)$. В силу доказанного выше, с учетом (3.31), (3.33), (3.34) заключаем, что $x(y) = x(y, t(y))$ является искомым решением (1.1), для которого справедливо представление (2.4). При этом константы c, c_1, c_2 определены как $c_1 = 64ac_3$, $c_2 = 4a$, $c = \min\{2\gamma_3/\gamma_1, 2\gamma_3^2/\gamma^2\}$ (см. (3.14)) и использовано, что в силу (3.15) $r(l) \leq \tilde{r}(l)$, а также $\gamma_1/2 = c_1/r$, $\gamma_2/2 = c_2/\sqrt{r}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу предложения 1 конус $\tilde{H}_0(x_*)$ непуст. Применяя к произвольному вектору $h \in \tilde{H}_0(x_*)$ утверждение теоремы 2 и используя очевидную оценку

$$\|x(y) - x_*\| \stackrel{(3.22)}{\leq} 2t_0(y) \stackrel{(3.16)}{\leq} \text{const} \cdot (\|y - y_*\|b(l) + \|(y - y_*) - \|y - y_*\|\theta(l)\|^{1/2}),$$

получаем утверждение теоремы 1.

§ 4. Необходимые условия экстремума для задач с незамкнутым образом

Рассмотрим задачу минимизации с ограничением

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad F(x) = 0. \quad (4.1)$$

Классический метод исследования задачи (4.1) основан на принципе Лагранжа, который заключается в следующем [1], [7]. Введем функцию Лагранжа $L(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$, где $\lambda_0 \geq 0$, $y^* \in Y^*$. (Значок “*” означает (в зависимости от контекста) сопряженный оператор или топологически сопряженное пространство.)

Тогда если точка x_* является локальным минимумом рассматриваемой задачи, подпространство $\text{Im } F'(x_*)$ замкнуто и функция f дифференцируема в точке x_* , то справедливо

$$\exists \lambda_0 \geq 0, y^* \in Y^*: \quad \frac{\partial L}{\partial x}(x_*, \lambda_0, y^*) = 0, \quad (\lambda_0, y^*) \neq 0. \quad (4.2)$$

Если при этом точка x_* нормальна, т.е. $\text{Im } F'(x_*) = Y$, то $\lambda_0 > 0$ и можно положить $\lambda_0 = 1$, что дает классический принцип Лагранжа

$$f'(x_*) + F'(x_*)y^* = 0.$$

С другой стороны, если точка x_* , в которой $F(x_*) = 0$, аномальна, т.е. $\text{Im } F'(x_*) \neq Y$, и подпространство $\text{Im } F'(x_*)$ замкнуто, то в силу теоремы отделимости это означает, что

$$\exists y^* \in Y^*: \quad y^* \neq 0, \quad F'(x_*)^* y^* = 0.$$

Таким образом, принцип Лагранжа в любой аномальной точке x_* ограничений задачи (4.1) в предположении замкнутости $\text{Im } F'(x_*)$ выполняется автоматически с $\lambda_0 = 0$ независимо от минимизируемой функции f и, следовательно, никакой дополнительной содержательной информации об аномальной точке не дает.

Если же подпространство $\text{Im } F'(x_*)$ не замкнуто, то, как показывает следующий простой пример, принцип Лагранжа, вообще говоря, неверен даже для линейной задачи.

ПРИМЕР 3. Пусть Y – бесконечномерное гильбертово пространство, $A: Y \rightarrow Y$ – линейный компактный симметричный положительный оператор, $b \in Y$ – произвольный вектор, не принадлежащий $\text{Im } A$. Положим $X = Y$, $F(x) = Ax$, $f(x) = \langle b, x \rangle$. Тогда $x_* = 0$ является решением задачи (4.1), так как $\text{Ker } A = \{0\}$. Однако принцип Лагранжа (4.2) не выполняется (так как $b \notin \text{Im } A^*$, $\text{Ker } A^* = \{0\}$).

В то же время для задач с линейным ограничением $F(x) = 0$, очевидно, справедливо включение

$$f'(x_*) \in (\text{Ker } F'(x_*))^\perp,$$

где значок “ $\perp$ ” означает аннулятор. Следующий пример показывает, что для нелинейных ограничений даже это – более слабое, чем классический принцип Лагранжа, включение может, вообще говоря, не выполняться.

ПРИМЕР 4 (см. [1]). Пусть Y , A и b – такие же, как в примере 3. Положим $X = \mathbb{R} \times Y$, $x = (x_0, x_1)$, $f(x) = x_0$, $F(x) = Ax_1 + x_0^2 b$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in Y$. Тогда в задаче (4.1) $x_* = (0, 0)$ является решением, однако $f'(x_*) \notin (\text{Ker } F'(x_*))^\perp$. Отметим, что в этом примере принцип Лагранжа (4.2) также не выполняется.

Теория необходимых условий экстремума первого и второго порядка, содержательная для аномальных задач в предположении замкнутости $\text{Im } F'(x_*)$, развита в [8], [9]. В предположении что Y конечномерно, другой подход к необходимым условиям экстремума без априорных предположений нормальности предложен в [10]. Ниже результаты [8], [9] распространяются на случай, когда образ $\text{Im } F'(x_*)$ априори не предполагается замкнутым.

Для вывода необходимых условий в задаче (4.1) нам потребуется описание конуса касательных векторов $TM(x_*)$ ко множеству $M = \{x : F(x) = F(x_*)\}$ в точке x_* . Напомним, что вектор $h \in X$ называется *касательным ко множеству M в точке x_** , если существуют $t_1 > 0$ и отображение $r: [0, t_1] \rightarrow X$, для которых $x_* + th + r(t) \in M \ \forall t \in [0, t_1]$, $r(t) = o(t)$. Здесь и ниже o – это отображение, для которого $o(t)/t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3 (о касательном конусе). *Имеет место*

$$H_0(x_*) \subseteq TM(x_*) \subseteq H(x_*). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала левую часть включения (4.3). Оно является следствием приведенного выше доказательства теоремы 2.

Предположим вначале, что $h \in \tilde{H}_0(x_*)$. Возьмем $l = 0$. Тогда $\xi = 0$ и $v = x(y, t)$, определяемое формулой (3.33), удовлетворяет (3.24). Положив в (3.33) $y = 0$, получим, что $x(t) = x(0, t)$ является решением уравнения $F(x) = 0$. При этом

$$x(t) = th + t(t\eta + \chi_1(0, t) + t\chi_2(0, t) + v_{2,1}(0, t) + tv_{2,2}(0, t)).$$

В силу определения функции f_1 имеем, что $f_1(0, 0, t) \equiv 0$, откуда в силу (3.31) $\chi_i(0, t) \equiv 0$, а в силу (3.34) $\|v_{2,i}(0, t)\| = O(t)$, $i = 1, 2$. Следовательно, $x(t) = th + O(t^2)$, $t \in (0, t_1)$, и, значит, если $h \in \tilde{H}_0(x_*)$, то вектор h является касательным ко множеству M в точке x_* .

Пусть теперь $h \in H_0(x_*)$, однако $h \notin \tilde{H}_0(x_*)$. В силу предложения 1 существует сходящаяся к h последовательность $\{h_i\}$, для которой $h_i \in \tilde{H}_0(x_*) \forall i$. В силу доказанного выше $h_i \in TM(x_*)$. Но, как известно, касательный конус замкнут и поэтому $h \in TM(x_*)$, так как $h_i \rightarrow h, i \rightarrow \infty$.

Докажем правую часть включения (4.3). Действительно, пусть $h \in TM(x_*)$. Тогда при малых $t > 0$ имеем

$$0 = F(x_* + th + o(t)) - F(x_*) = F'(x_*)(th + o(t)) + \frac{1}{2}F''(x_*)[th + o(t)]^2 + o(t^2).$$

Деля вначале на $t > 0$, а затем на t^2 , при $t \rightarrow 0$ имеем $F'(x_*)h = 0$, $F''(x_*)[h]^2 \in \overline{\text{Im } F'(x_*)}$. Теорема доказана.

Если точка x_* нормальна, то теорема 3 превращается в “геометрическую часть” теоремы Люстерника [7], а в предположении замкнутости $\text{Im } F'(x_*)$ она получена в [8].

Введем в рассмотрение семейство функций, зависящих от параметра $h \in H(x_*)$ и переменных $(x, \lambda_0, y^*) \in X \times \mathbb{R} \times Y^*$:

$$\mathcal{L}_h(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F'(x)h \rangle.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть x_* – точка локального минимума в задаче (4.1). Тогда для любого $h \in H(x_*)$, для которого подпространство $\text{Im } G(x_*, h)$ замкнуто, существуют неравные одновременно нулю (зависящие от h) $\lambda_0 = \lambda_0(h) \geq 0$, $y^* = y^*(h) \in Y^*$, для которых выполняется

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x}(x_*, \lambda_0, y^*) \in (\text{Ker } F'(x_*))^\perp, \quad (4.4)$$

$$F'(x_*)^* y^* = 0. \quad (4.5)$$

При этом если $h \in H_0(x_*)$, то $\lambda_0(h) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный вектор $h \in H(x_*)$. Рассмотрим два случая. Пусть вначале $h \in H_0(x_*)$. Тогда по теореме 3 оба вектора h и $(-h)$ являются касательными ко множеству M в точке x_* . Отсюда легко вытекает (см., например, [10]), что

$$\langle f'(x_*), h \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим множество

$$W(h) = \{(\mu, y) : \text{существуют } x_1 \in \text{Ker } F'(x_*), x_2 \in X, \\ \text{для которых } \mu > \langle f'(x_*), x_1 \rangle, y = G(x_*, h)(x_1, x_2)\}.$$

Множество $W(h)$ выпукло, и в силу сюръективности оператора $G(x_*, h)$ (ведь $h \in H_0(x_*)$) оно имеет непустую внутренность. Докажем, что $0 \notin W(h)$. Предположим противное, т.е. $\exists \xi_1, \xi_2 \in X$:

$$F'(x_*)\xi_1 = 0, \quad 0 > \langle f'(x_*), \xi_1 \rangle, \quad (4.7)$$

$$0 = F'(x_*)\xi_2 + 2F''(x_*)[h, \xi_1]. \quad (4.8)$$

Определим отображение

$$\Phi: \text{Ker } F'(x_*) \times X \rightarrow Y, \quad \Phi(x_1, x_2) = F'(x_*)x_2 + F''(x_*)[x_1, x_1].$$

Положим $\bar{y} = F''(x_*)[h, h]$. Тогда $\bar{y} \in \overline{\text{Im } F'(x_*)}$, так как $h \in H(x_*)$. Непосредственно проверяется, что $\Phi(h, 0) = \bar{y}$ и для отображения Φ точка $(h, 0)$ нормальна. Поэтому по теореме Люстерника [7] в силу (4.8) найдутся такие $t_2 > 0$ и функции $r_i(\cdot)$, что $r_i(t) = o(t)$, $i = 1, 2$, и

$$\Phi(h(t), t\xi_2 + r_2(t)) = \bar{y} \in \text{Im } F'(x_*), \quad h(t) \in \text{Ker } F'(x_*) \quad \forall t \in [0, t_2],$$

где $h(t) = h + t\xi_1 + r_1(t)$. Следовательно, $F''[h(t)]^2 = \bar{y} - F'(x_*)(t\xi_2 + r_2(t)) \in \overline{\text{Im } F'(x_*)} \Rightarrow h(t) \in H(x_*)$, откуда, уменьшая $t_2 > 0$, получаем $h(t) \in H_0(x_*) \forall t \in [0, t_2]$. Отсюда в силу (4.6) и теоремы 3 имеем $\langle f'(x_*), \xi_1 \rangle = 0$, что противоречит (4.7) и, значит, доказывает, что $0 \notin W(h)$. Поэтому по теореме отделимости для выпуклых множеств существуют такие неравные одновременно нулю λ_0 , $y^* \in Y^*$, что

$$\lambda_0 \mu + \langle y^*, y \rangle \geq 0 \quad \forall (\mu, y) \in W(h). \quad (4.9)$$

Отсюда, взяв $x_2 = 0$, сразу получим (4.4), а взяв $x_1 = 0$, получим (4.5). Покажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Предположив противное, имеем $y^* \neq 0$. Выберем $\bar{y} \in Y$: $\langle y^*, \bar{y} \rangle < 0$. Из определения множества $W(h)$ и сюръективности оператора $G(x_*, h)$ вытекает, что $\exists \bar{\mu}$: $(\bar{\mu}, \bar{y}) \in W(h)$, откуда в силу (4.9) и так как $\lambda_0 = 0$ заключаем, что $\langle y^*, \bar{y} \rangle \geq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda_0 \neq 0$ и, следовательно, $\lambda_0 > 0$.

Рассмотрим второй случай: $h \in H(x_*) \setminus H_0(x_*)$. В силу замкнутости подпространства $\text{Im } G(x_*, h)$ это означает, что $\exists y^* \neq 0$: $G(x_*, h)^* y^* = 0$, откуда получаем (4.4) при $\lambda_0 = 0$ и (4.5). Теорема доказана.

Наиболее важный и интересный для приложений случай, когда подпространство $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотно в Y . В этом случае из теоремы 4 вытекает, что если $H_0(x_*) \neq \emptyset$, то имеет место

$$f'(x_*) \in (\text{Ker } F'(x_*))^\perp. \quad (4.10)$$

Действительно, возьмем $h \in H_0(x_*)$. Тогда в (4.4) можно положить $\lambda_0(h) = 1$. В силу (4.5) $\langle y^*, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \text{Im } F'(x_*)$, откуда $y^* = 0$, так как $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотно в Y . Таким образом, из (4.4) получаем (4.10).

В то же время оказывается, что в задачах, в которых образ $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотен в Y и выполнено условие 2-регулярности, справедливо более сильное, чем включение (4.10), необходимое условие локального минимума, а именно – классический принцип Лагранжа (который, как показывает пример 3, может не выполняться даже для линейных задач с всюду плотным образом). Чтобы это доказать, нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $N: X \rightarrow Y$ – линейный непрерывный оператор и $l \in X^*$. Определим линейный оператор $A: X \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ формулой $Ax = (\langle l, x \rangle, Nx)$.

Тогда для справедливости включения $l \in \text{Im } N^*$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\overline{\text{Im } A} \neq \mathbb{R} \times \overline{\text{Im } N}. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Предположим противное, т.е. что $\overline{\text{Im } A} = \mathbb{R} \times \overline{\text{Im } N}$. Тогда (так как $(1, 0_Y) \in \mathbb{R} \times \overline{\text{Im } N}$) существует последовательность $\{x_i\}$, для которой $\langle l, x_i \rangle \rightarrow 1$, $Nx_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Но $l = N^*y^* \Rightarrow \langle l, x_i \rangle = \langle y^*, Nx_i \rangle \rightarrow 0$. Получили противоречие.

Достаточность. В силу (4.11) $\overline{\text{Im } A}$ является собственным замкнутым подпространством пространства $\mathbb{R} \times \overline{\text{Im } N}$. Поэтому по теореме об отделимости существуют такие неравные одновременно нулю число α и определенный на $\overline{\text{Im } N} \subseteq Y$ линейный непрерывный функционал y_1^* , что

$$\alpha a + \langle y_1^*, y \rangle = 0 \quad \forall (a, y) \in \text{Im } A. \quad (4.12)$$

При этом можно взять $\alpha = 1$, так как если $\alpha = 0$, то $y_1^* \neq 0$ и $\langle y_1^*, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \text{Im } N$, чего не может быть.

Продолжая по теореме Хана–Банаха линейный непрерывный функционал y_1^* до $y^* \in Y^*$, в силу (4.12) получаем $\langle l, x \rangle + \langle y^*, Nx \rangle = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow l = -N^*y^*$. Предложение доказано.

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет тем же предположениям гладкости, что и отображение F .

ТЕОРЕМА 5. Пусть x_* – точка локального минимума задачи (4.1), образ $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотен в Y и существует вектор $h \in \text{Ker } F'(x_*)$, для которого $\text{Im } G(x_*, h) = Y$.

Тогда существует множитель Лагранжа $y^* \in Y^*$, для которого справедлив классический принцип Лагранжа

$$f'(x_*) + F'(x_*)y^* = 0 \quad (4.13)$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_*, 1, y^*)[h, h] \geq 0. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем (4.13). В силу предложения 2 для этого достаточно показать, что для линейного оператора $A: X \rightarrow \mathbb{R} \times Y$, определяемого формулой $Ax = (\langle f'(x_*), x \rangle, F'(x_*)x)$, имеет место $\overline{\text{Im } A} \neq \mathbb{R} \times \overline{\text{Im } F'(x_*)}$.

Предположим противное, т.е. пусть имеет место

$$\overline{\text{Im } A} = \mathbb{R} \times \overline{\text{Im } F'(x_*)}. \quad (4.15)$$

Поскольку $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотно в Y , то $H(x_*) = \text{Ker } F'(x_*) \Rightarrow H_0(x_*) \neq \emptyset$. Поэтому, как отмечалось выше, имеет место (4.10).

Введем отображение $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ по формуле $\Phi(x) = (f(x), F(x))$. Тогда $\Phi'(x_*) = A$. Положим

$$\mathcal{H}(x_*) = \{h \in \text{Ker } A : \Phi''(x_*)[h, h] \in \overline{\text{Im } A}\}.$$

Так как $h \in \text{Ker } F'(x_*)$, то в силу (4.10) $h \in \text{Ker } A$. Поэтому так как в силу (4.15) $\overline{\text{Im } A} = \mathbb{R} \times Y$, получаем, что $h \in \mathcal{H}(x_*)$.

Докажем, что отображение Φ 2-регулярно в точке x_* по данному направлению h , т.е. $\forall a \in \mathbb{R}, y \in Y \exists x_1 \in \text{Ker } A, x_2 \in X$:

$$\begin{aligned} f'(x_*)x_2 + f''(x_*)[h, x_1] &= a, \\ F'(x_*)x_2 + F''(x_*)[h, x_1] &= y. \end{aligned}$$

Действительно, предположим противное. Тогда так как по условию

$$\text{Im } G(x_*, h) = Y,$$

то в силу следствия 4.5.11 из работы [11] подпространство $\text{Im } \Phi'(x_*)$ замкнуто и, следовательно, по теореме об отделимости существуют такие не равные одновременно нулю $\mu \geq 0, y^* \in Y^*$, что

$$\begin{aligned} \mu \langle f'(x_*), x_2 \rangle + \langle y^*, F'(x_*)x_2 \rangle + \mu f''(x_*)[h, x_1] + \langle y^*, F''(x_*)[h, x_1] \rangle &= 0 \\ \forall x_1 \in \text{Ker } A, \quad x_2 \in X. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Взяв в (4.16) $x_1 = 0$, имеем $\mu f'(x_*) + F'(x_*)y^* = 0$. Отсюда в силу (4.15) и предложения 2 (необходимость) следует, что $\mu = 0$. Кроме того, из (4.10) и определения A заключаем, что $\text{Ker } A = \text{Ker } F'(x_*)$. Подставляя $\mu = 0$ в (4.16), с учетом вышесказанного получаем, что $\exists y^* \in Y^*, y^* \neq 0$:

$$\langle y^*, F'(x_*)x_2 \rangle + \langle y^*, F''(x_*)[h, x_1] \rangle = 0 \quad \forall x_1 \in \text{Ker } F'(x_*), x_2 \in X.$$

Полученное равенство противоречит тому, что $\text{Im } G(x_*, h) = Y$. Таким образом, мы показали, что отображение Φ 2-регулярно в точке x_* по направлению h . Следовательно, для Φ выполнены все предположения теоремы 1. Но тогда в силу определения отображения Φ для любой окрестности O точки x_* найдутся как угодно малые $\varepsilon > 0$, при которых система уравнений

$$f(x) = f(x_*) - \varepsilon, \quad F(x) = 0$$

имеет решение $x \in O$. Получили противоречие с тем, что x_* — локальный минимум задачи (4.1). Формула (4.13) доказана.

Докажем (4.14). В силу теоремы 3 $h \in TM(x_*)$. Поэтому существуют $t_1 > 0$ и отображение r , для которых $r(t) = o(t)$, $F(x_* + th + r(t)) = 0 \forall t \in [0, t_1]$. Поэтому так как x_* — точка локального минимума, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x_* + th + r(t)) - f(x_*) = L(x_* + th + r(t), 1, y^*) - L(x_*, 1, y^*) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x}(x_*, 1, y^*)(th + r(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_*, 1, y^*)[th + r(t)]^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Деля полученное неравенство на t^2 и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, в силу (4.13) получаем (4.14). Теорема доказана.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть x_* – точка локального минимума задачи (4.1), образ $\text{Im } F'(x_*)$ всюду плотен в Y и $H_0(x_*) = H(x_*) \setminus \{0\}$. Тогда существует $y^* \in Y^*$, для которого выполняется классический принцип Лагранжа (4.13) и, кроме того,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_*, 1, y^*)[x, x] \geq 0 \quad \forall x: F'(x_*)x = 0.$$

Последнее есть классическое необходимое условие второго порядка, ранее доказываемое лишь в предположении нормальности точки x_* [1].

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле доказано утверждение более сильное, чем сформулированное в теореме 5. А именно пусть x_* – точка локального минимума задачи (4.1) и существует $h \in H_0(x_*)$, для которого в утверждении теоремы 4 множитель Лагранжа $y_2^*(h)$ оказался равным нулю. Тогда справедлив классический принцип Лагранжа (4.13) и (4.14) выполняется для любого $h \in H_0(x_*)$.

Приведем пример, иллюстрирующий применение необходимых условий первого порядка из теоремы 5.

ПРИМЕР 5. Пусть Y – бесконечномерное гильбертово пространство, $A: Y \rightarrow Y$ – линейный компактный симметричный положительный оператор, $b \in Y$ – произвольный вектор, не принадлежащий $\text{Im } A$. Обозначим $X = \mathbb{R} \times Y \times Y$. Определим функцию f на X и отображение $F: X \rightarrow Y$ по формулам

$$f(x) = \langle b, x_1 \rangle, \quad F(x) = Ax_1 + x_0 x_2.$$

Здесь $x = (x_0, x_1, x_2) \in X$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in Y$.

Для указанных f, F рассмотрим задачу (4.1). Для нее точка $x_* = 0$ является аномальной. При этом $\text{Im } F'(0)$ всюду плотно в Y , так как $\text{Im } F'(0) = \text{Im } A$. Кроме того, $h = (1, 0_Y, 0_Y) \in \text{Ker } F'(0)$ и, как легко видеть, $\text{Im } G(0, h) = Y$.

Поэтому в точке $x_* = 0$ применима теорема 5. Из нее вытекает, что в задаче (4.1) точка $x_* = 0$ локальным минимумом не является, так как непосредственно проверяется, что в этой точке классический принцип Лагранжа (4.13) не выполняется (это следует из того, что по условию $b \notin \text{Im } A$).

В то же время в точке $x_* = 0$ условие (4.10) выполняется. Следовательно, вообще говоря, условие принадлежности аннулятору (4.10) слабее классического принципа Лагранжа (4.13).

Список литературы

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. Аваков Е. Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №5. С. 3–13.
3. Аваков Е. Р., Арутюнов А. В. Об аномальных задачах с незамкнутым образом // Докл. РАН. 2004. Т. 399. №5. С. 583–586.
4. Sussmann H. J. High-order open mapping theorems // Directions in mathematical systems theory and optimization / ed. A. Rantzer, C.I. Byrnes. Berlin: Springer-Verlag, 2003. P. 293–316.

5. *Арутюнов А. В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 3–26.
6. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 11–46.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
8. *Аваков Е. Р.* Условия экстремума в гладких задачах с ограничениями типа равенств // ЖВМиМФ. 1985. Т. 25. № 5. С. 680–693.
9. *Аваков Е. Р.* Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах. Принцип максимума для анормальных задач оптимального управления // Труды МИАН. 1988. Т. 185. С. 3–29.
10. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
11. *Сухинин М. Ф.* Избранные главы нелинейного анализа. М.: Изд-во РУДН, 1992.

Институт проблем управления РАН, Москва,
Российский университет дружбы народов, Москва

Поступила в редакцию
17.05.2004 и 21.02.2005