Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, Об изотопической и дискретной реализациях отображений n -мерной сферы в евклидовом пространстве, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:52:25

УДК 515.164

П. М. Ахметьев

Об изотопической и дискретной реализациях отображений n -мерной сферы в евклидовом пространстве

В статье рассматриваются вопросы, связанные с вложимостью компактов в евклидовы пространства. Положительно решена проблема вложимости " S^n -подобного" компакта в пространство $\mathbb{R}^{2n}$ при некоторых ограничениях на размерность n . Выявлены связи задачи реализации с разделами гомотопической и дифференциальной топологии.

Библиография: 24 названия.

Пусть A, B, X – гладкие многообразия, $f: A \rightarrow B$ – произвольное, вообще говоря, негладкое отображение и $h: B \subset X$ – гладкое вложение. Скажем, что отображение f *изотопически реализуется в $X(\text{rel } h)$* , если существует C^∞ -гладкая гомотопия (изотопия) $F_t: A \rightarrow X$, $t \in]0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) для каждого $t \in]0, 1]$ отображение $F_t: A \rightarrow X$ является гладким вложением;
- 2) гомотопия F_t продолжается по непрерывности при $t \rightarrow +0$ до отображения $h \circ f = F_0: A \rightarrow X$.

В случае $\dim(B) < \dim(X)$ эквивалентное определение состоит в следующем. Скажем, что непрерывное отображение f изотопически реализуется в $X(\text{rel } h)$, если задано гладкое вложение $g: A \rightarrow X$ и C^∞ -изотопия $F_t: X \rightarrow X$, $t \in]0, 1]$, такая, что F_t продолжается по непрерывности при $t \rightarrow +0$ до C^0 -отображения $F_0: X \rightarrow X$, для которого $F_0 \circ g = f$. Фактически, это понятие было введено в работе [1].

Близкое понятие, которое мы будем называть дискретной реализацией, было рассмотрено в [2], оно состоит в следующем. Скажем, что отображение f *дискретно реализуется в $X(\text{rel } h)$* , если существует последовательность вложений $\{h_n\}$, $h_n: A \rightarrow X$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|h \circ f \circ h_n^{-1}(x) - x\| = 0.$$

Эквивалентно, отображение f *дискретно реализуется в $X(\text{rel } h)$* , если существует вложение $\bar{h}: A \rightarrow X$, сколь угодно близко аппроксимирующее композицию

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1402).

$h \circ f$ в C^0 -топологии пространства отображений. Допуская вольность речи, будем говорить, что f дискретно реализуется в X (или, коротко, реализуется в X), предполагая при этом, что h задано.

Рассмотрим неформальную аналогию между понятием реализации отображения и понятием динамической системы. При такой аналогии понятию изотопической реализации будет соответствовать динамическая система с непрерывно текущим временем. Момент времени $t = 0$ будет для такой системы катастрофическим. Понятию дискретной реализации будет соответствовать система с дискретным временем.

Изотопическая реализация отображения влечет дискретную реализацию. Обратное, вообще говоря, не верно. Легко привести пример последовательности вложений $h_n: A \rightarrow X$, задающих дискретную реализацию предельного отображения f , такую, что никакие два вложения в этой последовательности не связаны между собой изотопией. Такой пример доставляет последовательность узлов в пространстве, сходящихся “диким” образом к гладкой кривой. В случае, если X открыто и $X \setminus h(B)$ имеет сложную локальную структуру вблизи $h(B)$, понятия изотопической и дискретной реализации весьма далеки друг от друга. Напротив, может оказаться, что в случае, если B компактно и h вложено в X как гладкое подмногообразие, оба понятия эквивалентны для широкого класса пространств.

Очевидно, что любое отображение $A \rightarrow B$, $\dim(A) = \dim(B) = n$, дискретно реализуется в многообразии X при условии $\dim(X) \geq 2n + 1$. Более тонкие рассуждения, приведенные в [2], показывают, что любое отображение $f: D^n \rightarrow D^n$, $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$, дискретно (и даже изотопически) реализуется относительно вложения $D^n \subset D^{2n}$. Кроме того, существует отображение $g: D^2 \rightarrow D^2$, которое не реализуется относительно вложения $D^2 \subset D^3$. (В качестве g можно выбрать отображение, заданное в комплексных координатах на D^2 по формуле $z \rightarrow z^2$.) Наиболее ясная картина имеется для случая реализуемости в плоскости одномерных полиэдров (см. [1]). В более общей ситуации ответ на задачу реализации оставался открытым.

В настоящей работе доказано (теорема 1), что при $n \neq 2, 2^l - 1$ всякое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$. Случай $n = 2^l - 1$, $n \neq 1, 3, 7$, рассмотрен в работе [24]. При $n = 4k + 1$, $k > 1$, всякое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ изотопически реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ (теорема 2). С другой стороны, в теореме 3 построены отображения $F: S^3 \rightarrow S^3$ и $G: S^7 \rightarrow S^7$, которые не реализуются в $\mathbb{R}^6$ и $\mathbb{R}^{14}$, соответственно. Более того, при $n = 4, 8$ некоторое отображение $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ реализуется дискретно в пространстве $\mathbb{R}^{16}$, но не реализуется дискретно в пространстве $\mathbb{R}^{15}$. В теореме 3 построено отображение $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, которое дискретно не реализуется в $\mathbb{R}^4$.

Задача реализации отображений тесно связана с задачей вложимости компактов, заданных обратными пределами спектров, в евклидовом пространстве (см. [1], [2]). В следствии 8 доказано, что любое пространство $\mathcal{X}$, полученное как обратный предел спектра $\{\alpha_i: S^n \rightarrow S^n\}$ вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$, если $n \neq 2, 2^l - 1$. Этот результат дает положительный ответ на проблему E16 (при ограничениях на размерность $n \neq 2, 2^l - 1$) в списке проблем [3] по геометрической топологии. “Can every S^n -like continuum be embedded in $\mathbb{R}^{2n}$?” Заметим, что в

формулировке проблемы сферу S^n можно заменить на любое стабильно параллелизуемое многообразие N^n при тех же ограничениях на размерность.

Доказательство теоремы 1 происходит по следующей схеме. Пользуясь принципом Смейла–Громова C^0 -плотности погружений в гомотопическом классе отображения, содержащего хотя бы одно погружение (см. [4]), мы C^0 -аппроксимируем композицию

$$S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1}$$

C^∞ -оснащенным погружением. Далее, на основании результатов работ [5], [7] мы доказываем, что при $n \neq 2, 2^l - 1$ композиция

$$S^n \xrightarrow{i \circ f} \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

C^∞ -аппроксимируется гладким (оснащенным) вложением. Этим рассуждением доказывается дискретная реализация $f(\text{rel } S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n})$ при указанных значениях n .

Поясним рассуждения, которые используются при доказательстве реализации $f \circ i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}(\text{rel } I: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n})$. Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ произвольное погружение общего положения ориентированного многообразия N^n в евклидово пространство размерности $n + 1$. Погружение φ представляет элемент стабильной гомотопической группы сфер $(\varphi)_\# \in \Pi_n$ (см., например, [5]–[7], [14]). Инвариант Хопфа $h[(\varphi)_\#]$ равен 0 (mod 2) тогда и только тогда, когда композиция $I \circ \varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, приведенная в общее положение, самопересекается по четному числу точек (см., например, [5], [7], [14]). Это условие равносильно тому, что отображение $I \circ \varphi$ регулярно гомотопно вложению. По теореме Адамса $h[(\varphi)_\#] = 0 \pmod{2}$ для всех n , исключая случаи $n = 1, 3, 7$. Следовательно, для неисклчительных n погружение $I \circ \varphi$ регулярно гомотопно вложению. Мы доказываем, что при $n \neq 2, 2^l - 1$ регулярную гомотопию, связывающую $I \circ \varphi$ с вложением, можно выбрать сколь угодно C^∞ -близкой к тождественной. Это рассуждение является ключевым и доказывается с использованием результатов [5]. Случай размерностей $n = 2^l - 1$ в теореме Адамса является наиболее трудным. Этот случай рассмотрен в [24].

Для доказательства изотопической реализации отображения $f: S^n \rightarrow S^n(\text{rel } I \circ i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n})$ для случая размерностей $n = 4k + 1, k > 1$, требуются дополнительные рассуждения. Мы строим регулярную гладкую гомотопию $\Phi_t: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, t \in]0, 1]$, которая продолжается до непрерывного отображения Φ_0 при $t \rightarrow +0$ такого, что $\Phi_0 = \varphi$. Таким образом, определена регулярная гомотопия $G_t = I \circ \Phi_t: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Не изменяя отображение G_0 , мы деформируем регулярную гомотопию G_t до изотропии при помощи C^∞ -деформации $G_t \rightarrow F_t$, неподвижной при $t \rightarrow 0$. В этой части работы применяются соображения, связанные с контролем погружений открытых многообразий вблизи концов. Вероятно, эти построения могут быть связаны с теорией контролируемых перестроек открытых многообразий (см. [8]).

Доказательство теоремы 3 происходит по аналогии с теоремой Хефлегера о вложении многообразий [9] и теорией препятствий для T -эквивариантных отображений срезанного квадрата полиэдра [10]. Предположение о реализации отобра-

жения $G: S^7 \rightarrow S^7$ в $\mathbb{R}^{14}$ влечет существование T -эквивариантного отображения $P: (\widehat{M}, T) \rightarrow (S^7, T)$ некоторого многообразия $\widehat{M}$, снабженного свободной инволюцией, на сферу S^7 со стандартной инволюцией. При помощи дополнительных соображений удастся оценить кохомологическую длину факторного многообразия $\widehat{M}/T$, и предположение о реализации отображения $P: S^7 \rightarrow S^7$ в пространстве $\mathbb{R}^{14}$ относительно стандартного вложения в конечном итоге противоречит теореме Борсука–Улама. Рассуждения для отображения $F: S^3 \rightarrow S^3$ совершенно аналогичны.

В теореме 4 мы сталкиваемся с трудностями, специфическими для топологии четырехмерных многообразий. Легко доказать, что никакое погружение $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ не реализуется в $\mathbb{R}^4$. Исходные соображения изложены, например, в книге [11]. Это утверждение можно обобщить на старшие размерности, используя результаты [12]. Если многообразие M таково, что $\langle w_1 \bar{w}_{n-1}; [M] \rangle \neq 0$ (здесь w_1 – первый класс Штифеля–Уитни касательного расслоения; $\bar{w}_{n-1}$ – старший класс Штифеля–Уитни нормального расслоения, см. [13] по поводу определений), то никакое погружение $\varphi: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n-1}$ не реализуется в $\mathbb{R}^{4n}$.

В случае ориентированного M ситуация иная. Легко доказать, что всякое отображение $\varphi: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n-1}$, $n \neq 1$, реализуется в $\mathbb{R}^{4n}$. С другой стороны, в случае $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ это не так. Причина связана с невозможностью применить прием Уитни в размерности 4. При нашем подходе эта трудность может быть переформулирована на языке дополнительной структуры троекратных точек самопересечения погруженной поверхности (A -, B -классификация). Доказательство основывается на конструкциях из работ [15], [16]. Оно элементарно, за исключением “почти очевидного” утверждения леммы 34, которое доказывается при помощи произведений Масси классов кохомологий.

Сформулируем нерешенные проблемы, непосредственно связанные с нашими построениями.

1. Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ – оснащенное (т.е. снабженное тривиализацией нормального расслоения) погружение гладкого ориентированного многообразия N размерности n в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$ размерности $n+k$. При каком наибольшем k , $k = k(n)$, любое такое погружение общего положения реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ (rel $I: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$)? Вероятно, что при $n \neq 2^l - 1$ имеем $k = p2^{l+1} - 1$, где n представлено в виде $p2^{l+1} + 2^l - 1$, $p \geq 1$.

2. Пусть A, B, X – гладкие компактные многообразия, $i: B \rightarrow X$ – вложение гладкого подмногообразия. Требуется установить связь между различными вариантами понятия реализуемости. В частности, верно ли, что если $f: A \rightarrow B$ дискретно реализуется в X (rel i), то и изотопически?

3. Можно ли построить бесконечную последовательность натуральных чисел такую, что для каждого k из этой последовательности существует отображение $f: S^k \rightarrow S^k$, которое не реализуется в $\mathbb{R}^{2k-1}$?

4. Верно ли, что всякое отображение $f: S^2 \rightarrow S^2$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^4$?

Я благодарю Е. В. Шепина за постановку задачи и внимание к работе, А. Ф. Харпиладзе и А. Б. Скопенкова за обсуждения, в процессе которых удалось исправить ряд неточностей в доказательствах.

§ 1. Реализация отображений n -мерной сферы $S^n \rightarrow S^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

Пусть $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$; $I: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$; $J: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ — стандартные вложения. Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *При $n \neq 2, 2^l - 1$ произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется ($\text{rel } I \circ i$) в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.*

Для доказательства нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f: A \rightarrow B$ — C^0 -отображение двух гладких многообразий, $h: B \rightarrow X$ — C^∞ -вложение, $\dim(A) < \dim(X)$; $\dim(B) < \dim(X)$. Скажем, что f локально дискретно реализуется ($\text{rel } h$) или, иначе, C^0 -аппроксимируется погружением, если для любого $\varepsilon > 0$ существует погружение $g = g(\varepsilon): A \rightarrow X$ такое, что

$$\sup_{a \in A} \|h \circ f(a) - g(a)\| < \varepsilon.$$

Скажем, что отображение f локально изотопически реализуется ($\text{rel } h$) или, иначе, C^0 -аппроксимируется в X семейством погружений, если существует регулярная гомотопия

$$\Phi_t: A \rightarrow X, \quad t \in]0, 1],$$

такая, что Φ_t продолжается по непрерывности при $t \rightarrow +0$ до отображения $\Phi_0: A \rightarrow X$, причем $\Phi_0 = h \circ f$.

ЛЕММА 2. *Произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ локально изотопически реализуется ($\text{rel } i$) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вложению i соответствует дифференциал Di , задающий послойный мономорфизм касательных расслоений TS^n и $T\mathbb{R}^{n+1}$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} Di: TS^n & \longrightarrow & T\mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ i: S^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму послойных мономорфизмов, накрывающих отображение баз $i \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{array}{ccc} Di \times (i \circ f): TS^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \cong T\mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow 0 \times \text{id} \\ i \circ f: S^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

Согласно [4; 1.2.2] для каждого k существует погружение $g_k: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что дифференциал $Dg_k: TS^n \rightarrow T\mathbb{R}^{n+1}$ гомотопен морфизму $Di \times (i \circ f)$ в классе послойных мономорфизмов, и, кроме того, $\|g_k(x) - i \circ f(x)\| < 2^{-k}$, $x \in S^n$.

Последовательность погружений g_k задает локальную дискретную реализацию отображения $f \text{ (rel } i)$.

Докажем локальную изотопическую реализуемость. Для каждого k рассмотрим отображения g_k, g_{k+1} и гомотопию $G_k(t): S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in [2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$, для которой $G_k(2^{-(k+1)}) = g_{k+1}$; $G_k(2^{-k}) = g_k$. Проследим за тем, чтобы гомотопия $G(t)$, $t \in]0, 1]$, была бы непрерывной при $t \rightarrow +0$. Для каждой гомотопии $G_k(t)$ рассмотрим однопараметрическое семейство мономорфизмов $DG_k(t): TS^n \rightarrow T\mathbb{R}^{k+1}$ касательных расслоений, послойно накрывающее гомотопию G_k . Объединение $DG_k(t)$ при всех k обозначим через $DG(t)$. Конструкция такого семейства очевидна, так как для произвольного k морфизм Dg_k связан гомотопией, которая неподвижна на базе, с морфизмом $Di \times g_k$ в классе послойных мономорфизмов. Заметим, что семейство $DG(t)$ не обладает, вообще говоря, свойством непрерывности при $t \rightarrow +0$, непрерывна лишь гомотопия баз.

Аппроксимируем каждую гомотопию $G_k(t)$ регулярной гомотопией $\Phi_k(t)$ такой, что $\Phi_k(2^{-k}) = g_k$, $\Phi_k(2^{-(k+1)}) = g_{k+1}$, и, кроме того, $\|G_k(t, x) - \Phi_k(t, x)\| < 2^{-k}$, $x \in S^n$, $t \in [2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$. Семейство погружений $\Phi(t)$, $t \in]0, 1]$, являющееся объединением семейств $\Phi_k(t)$ при всех k , задает искомую локальную изотопическую реализацию отображения $f \text{ (rel } i)$. Лемма доказана.

Основную роль в доказательстве утверждения 1 теоремы 1 выполняет следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – погружение ориентированного многообразия N размерности $\dim(N) = n$, $n \neq 2, 2^l - 1$, в евклидово пространство размерности $n + 1$. Тогда погружение φ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ относительно стандартного вложения $I: \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Более того, вложение $g: N^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, реализующее $\varphi \text{ (rel } I)$, можно выбрать сколь угодно близким в C^∞ -топологии к отображению $I \circ \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что φ – погружение общего положения, в частности, $\varphi(N^n)$ трансверсально самопересекается вдоль погруженного подмногообразия $\Delta_2(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ точек кратности 2. Обозначим через $\Delta(j)$ его компоненты связности, $\Delta_2(\varphi) = \bigcup_j \Delta(j)$. Пусть $g': N^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – отображение общего положения, C^∞ -аппроксимирующее композицию $I \circ \varphi: N \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Погружение $g'(N)$ трансверсально самопересекается в конечном множестве $\Delta_2(g') \subset \mathbb{R}^{2n}$ двукратных точек. Пусть $\Delta'(j) \subset \Delta_2(g')$ – подмножество, состоящее из точек, образовавшихся на компоненте $\Delta(j)$ после деформации $I \circ \varphi \rightarrow g'$. Согласно [5] при $n = 2k + 1$, $n \neq 2^l - 1$, число точек в каждом множестве $\Delta'(j)$ четно. (Случай $n = 2^l - 1$, $l \geq 4$, наиболее трудный. Этот случай планируется разобрать в отдельной публикации.)

В случае $n = 2k$ каждой точке $x \in \Delta'(j)$ соответствует целое число $\text{sign}(x)$, и сумма таких чисел по всем точкам множества $\Delta'(j)$ нулевая. Разобьем точки этого множества на пары

$$\Delta'(j) = \{\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{q,0}, \lambda_{q,1}\}$$

и соединим каждую пару $(\lambda_{i,0}; \lambda_{i,1})$ вложенным путем $\rho_i: I \rightarrow \Delta(j)$. В случае $n = 2k$ проследим за тем, чтобы в каждую пару попадали точки $\{\lambda_{i,0}, \lambda_{i,1}\}$ разных знаков: $\text{sign}(\lambda_{i,0}) = -\text{sign}(\lambda_{i,1})$.

При $n = 2k + 1$ интерес представляет случай, когда каноническое накрытие $\overline{\Delta}(j) \rightarrow \Delta(j)$ связно. Если это накрытие несвязно, то множество $\Delta'(j)$ пусто. Выберем порядок листов поверхности $g'(N^n)$ в окрестности точки $\lambda_{i,0}$ и продолжим этот порядок вплоть до точки $\lambda_{i,1}$ вдоль такого пути ρ_i , соединяющего эти точки, что $\text{sign}(\lambda_{i,0}) = -\text{sign}(\lambda_{i,1})$. При $n > 2$ пути ρ_i можно выбрать попарно непересекающимися.

Рассмотрим регулярную гомотопию $g \rightarrow g'$, продеформировав отображение g' вдоль путей $\rho_i(I)$, при которой точки $\lambda_{i,0}$ и $\lambda_{i,1}$ сокращаются. Отображение g является вложением, которое можно выбрать сколь угодно близко C^∞ -аппроксимирующим $I \circ \varphi$. Это вложение задает искомую реализацию. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно лемме 2 существует погружение $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, сколь угодно близкое к композиции $i \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в C^0 -топологии. Согласно лемме 3 погружение g дискретно реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$ при $n \neq 2, 2^l - 1$. Указанные реализации определяют реализацию отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ (rel $I \circ i$). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следующие утверждения обобщают теорему 1. Доказательство утверждения А совершенно аналогично доказательству теоремы. Доказательство утверждения Б легко вытекает из результатов работы [12].

А. Пусть M^n, N^n – стабильно параллелизуемые многообразия размерности n , $n \neq 2, 2^l - 1$; $i: N \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – вложение. Тогда любое отображение $f: M^n \rightarrow N^n$ дискретно реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$.

Б. Пусть N^n – замкнутое ориентируемое многообразие четной размерности $n = 2k$, $k \geq 2$; $f: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{4k-1}$ – отображение общего положения. Тогда f изотопически реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$ (rel $\mathbb{R}^{4k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{4k}$).

Следующее следствие вытекает из доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть компакт $\mathcal{X}$ определен обратным пределом спектра

$$\mathcal{X} = \varprojlim_i \{S^n \xrightarrow{\alpha_i} S^n\}$$

отображений α_i сферы S^n размерности n . При $n \neq 2, 2^l - 1$ компакт $\mathcal{X}$ вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Условия, необходимые и достаточные для вложения компакта $\mathcal{X}$ в пространство $\mathbb{R}^{2n}$, найдены в работе [1]. В нашей работе понятие дискретной реализации, принятое как в [2], слабее аналогичного понятия, принятого в работе [1]. При $n = 4k + 1$, $n \geq 5$, согласно теореме 2, доказанной в следующем параграфе, спектр $\{\alpha_i\}$ реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ в смысле [1] и доказательство вложимости $\mathcal{X}$ вытекает из этой работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5. Проведем прямое доказательство, аналогичное построениям работы [20]. Пусть задано семейство оснащенных вложений $\overline{\varphi}_j: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $1 \leq j \leq l - 1$. Построим оснащенное вложение $\overline{\varphi}_l: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим композицию $S^n \xrightarrow{\alpha_l} S^n \xrightarrow{\varphi_{l-1}} \mathbb{R}^{2n}$ и реализацию $\overline{\varphi}_l: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ этого

отображения. Константу ε_l реализации выберем настолько малой, что выполняются следующие условия. Пусть j , $1 \leq j \leq l-1$, и δ , $\delta > 0$, фиксированы и произвольны. Обозначим через $\alpha_{j,k}: S^n \rightarrow S^n$ проекцию с j -го этажа спектра на k -й этаж, $j \geq k$. Обозначим через $\mu_j(\delta)$ положительное число, для которого выполнено условие $|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| > \mu_j(\delta)$, если существует k такое, что $|\alpha_{j,k}(x_1) - \alpha_{j,k}(x_2)| \geq \delta$. Выберем $\varepsilon_l = \min_j \mu_j(2^{-l})2^{-l-1}$. Семейство отображений $\overline{\varphi}_l$, $1 \leq l < \infty$, определяет отображение $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Докажем, что ρ – вложение. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ – две различные точки. Тогда найдется положительное j такое, что проекции $x_1(j)$, $x_2(j)$ точек на j -й этаж спектра для некоторого l , $l > 3$, удовлетворяют неравенству $|x_1(j) - x_2(j)| > 2^{-l}$.

Рассмотрим вложение $\varphi_j: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. По определению числа $\mu_j(2^{-l})$ имеем $|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| > \mu_j(2^{-l})$. Пусть $x_1(k)$, $x_2(k)$ – проекции точек x_1 , x_2 на k -й этаж спектра, причем $k > j$. Докажем, что $|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)| > \mu_j(2^{-l})/2$. Действительно,

$$|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)| > |\varphi_j(x_1) - \varphi_k(x_1)| + |\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| + |\varphi_k(x_1) - \varphi_j(x_2)|.$$

С другой стороны,

$$|\varphi_j(x_i) - \varphi_k(x_i)| < \mu_j(2^{-l})(1 - 2^{-l+2}) \geq \mu_j(2^{-l})/2.$$

Итак, при любом k , $k > j$, расстояние между точками $\varphi_k(x_1)$ и $\varphi_k(x_2)$ положительно и оценивается некоторым числом, независимым от k . Следовательно, $\rho(x_1) \neq \rho(x_2)$, если только $x_1 \neq x_2$. Следствие 5 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть спектр $\{\alpha_i\}$ составлен из отображений ориентированных многообразий четной размерности $n = 2k \geq 4$. Тогда обратный предел $\mathcal{X}$ этого спектра вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство повторяет предыдущее и использует утверждение Б замечания 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Обратный предел $\mathcal{X}$ спектра $\{\alpha_i\}$, состоящего из отображений стабильно параллелизуемых многообразий размерности n , $n \neq 2, 2^l - 1$, вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство использует утверждение А замечания 4.

В книге [3] в списке проблем по геометрической топологии сформулирована следующая проблема.

ПРОБЛЕМА E16. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ метрический континуум X допускает отображение $f: X \rightarrow S^n$ такое, что $\text{diam}(f^{-1}(x)) < \varepsilon$ для каждой точки $x \in S^n$. Верно ли, что X вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$?

Докажем, что эта проблема решается положительно при всех n , за исключением, быть может, особых случаев $n = 2, 2^l - 1$. Построим спектр $\{\alpha_i: S^n \rightarrow S^n\}$ такой, что X вкладывается в обратный предел этого спектра. Тогда согласно следствию 5 X вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

При каждом i построим следующую диаграмму.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi_i^{(i)}} & S^n \\
 \downarrow & \searrow \varphi_{i-1}^{(i)} & \downarrow \alpha_i^{(i)} \\
 & & S^n \\
 & & \downarrow \alpha_{i-1}^{(i)} \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \alpha_1^{(i)} \\
 & \searrow \varphi_0^{(i)} & \\
 & & S^n
 \end{array} \tag{1}$$

Отображения $\varphi_j^{(i)}$ в диаграмме (1) являются 2^{-j} -отображениями. Это означает, что диаметр любого прообраза не превышает 2^{-j} . Опишем конструкцию, позволяющую от диаграммы с номером i перейти к диаграмме такого же вида с номером $i+1$, содержащей этаж спектра с номером $i+1$.

Пусть $\varphi_{i+1}^{(i+1)}: X \rightarrow S^n$ – произвольное ε_0 -отображение, где необходимая малость числа $\varepsilon_0 > 0$ будет установлена в результате дальнейших рассуждений. Для каждого $j, j < i+1$, определена диаграмма (2), вообще говоря, некоммутативная

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi_{i+1}^{(i+1)}} & S^n \\
 \downarrow & \searrow \varphi_j^{(i)} & \downarrow \Phi_j \\
 & & S^n
 \end{array} \tag{2}$$

В этой диаграмме отображение Φ_j зависит от j, ε_0 и некоторой положительной константы ε_1 , описанной далее. Это отображение строится согласно следующему правилу. Для каждой точки $x \in S^n, x \in \text{Im } \varphi_{i+1}^{(i+1)}$, рассмотрим множество $U(x) = [\varphi_{i+1}^{(i+1)}]^{-1}(x) \subset X$ и, далее, множество $\varphi_j^{(i)}[U(x)] \subset S^n$. Обозначим через W открытую ε_1 -окрестность множества $\varphi_j^{(i)}[U(x)] \subset S^n$ и через $\Phi(x)$ – центр масс множества W в стандартной метрике на S^n . Заметим, что центр масс определен, поскольку W имеет малый диаметр при $\varepsilon_0 \rightarrow 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ диаграмма (2) может быть построена ε -коммутативной. (При этом предельное отображение при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, вообще говоря, не определено.) Теперь опишем константы ε_0 и ε_1 .

Обозначим $\Phi_i \circ \varphi_{i+1}^{(i+1)}$ через $\varphi_i^{(i+1)}$ и, далее, $\alpha_i^j \circ \varphi_i^{(i+1)}$ – через $\varphi_j^{(i+1)}$. Выберем ε_0 и ε_1 настолько маленькими, что выполняются следующие условия.

1. $\varphi_j^{(i+1)}$ является 2^{-j} -отображением.
2. $|\varphi_j^{(i+1)} - \varphi_j^{(i)}| < 2^{-i}$.

3. Если $|x_1 - x_2| > 2^{-j+2}$ (из условия (1) будет следовать, что $\varphi_j^{(i)}(x_1) \neq \varphi_j^{(i)}(x_2)$), то выполнено неравенство

$$|\varphi_j^{(i+1)}(x_1) - \varphi_j^{(i+1)}(x_2)| > |\varphi_j^{(i)}(x_1) - \varphi_j^{(i)}(x_2)|(1 - 2^{-i}).$$

Обозначим через $\alpha_{i+1}^{(i+1)}$ частичное отображение Φ , определенное на замкнутом подмножестве $\text{Im}(\varphi_{i+1}^{(i+1)})$. И, далее, определим $\alpha_j^{(i+1)}$ – проекции с $i+1$ этажа спектра на j -й этаж по формуле $\alpha_j^{(i+1)} = \alpha_j^{i+1(i)} \circ \Phi$. Заметим, что определенные нами отображения являются частичными, поскольку каждое из них определено на подпространстве $\text{Im}[\varphi_{i+1}^{(i+1)}]$. Проекции $\alpha_j^{(i+1)}$ с $j+1$ этажа на j -й этаж определяются как ограничения $\alpha_j^{(i)}$ на подпространство $\text{Im} \alpha_{j+1}^{i+1(i+1)}$. Продолжим отображения $\alpha_j^{(i+1)}$ до отображения на всей сфере S^n , пользуясь теоремой Урысона–Титце, с выполнением условия

$$4. |\alpha_j^{(i+1)} - \alpha_j^{(i)}| < 2^{-i}.$$

Заметим, что условия 1, 2, 4 обеспечивают существование предельной диаграммы при $i \rightarrow \infty$, которая определяет отображение $\varphi^\infty: X \rightarrow \mathcal{X}$ пространства X в обратный предел спектра $\{\alpha^\infty: S^n \rightarrow S^n\}$. Заметим, что отображение φ^∞ является вложением. В самом деле, для любых x_1, x_2 из X найдется такое j , что $|x_1 - x_2| > 2^{-j+2}$. Из условия (1) вытекает, что $\varphi_j^{(j)}(x_1) \neq \varphi_j^{(j)}(x_2)$. Из условия (3) вытекает, что пределы сходящихся последовательностей $\varphi_j^{(j+k)}(x_1)$ и $\varphi_j^{(j+k)}(x_2)$ при $k \rightarrow \infty$ не совпадают. Отображение φ^∞ является вложением. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Следующие предложения доказываются с использованием замечания 4.

А. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ метрический компакт допускает ε -отображение $f: X \rightarrow M^n(\varepsilon)$, где M^n – гладкое замкнутое ориентируемое многообразие четной размерности $n \geq 4$, зависящее, вообще говоря, от ε . Тогда X вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

Б. Пусть X допускает ε -отображение $f: X \rightarrow N^n(\varepsilon)$, где N^n – стабильно параллелизуемое многообразие, вообще говоря, зависящее от ε . Тогда при $n \neq 2, 2^l - 1$ компакт X вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

§ 2. Об изотопической реализации отображения

$f: S^n \rightarrow S^n, n = 4k + 1 \geq 5$, в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

Пусть $i: S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, I: \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ – стандартные включения, $\Pi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – стандартная проекция, обратная к вложению I . Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Любое C^0 -отображение $f: S^n \rightarrow S^n, n = 4k + 1 \geq 5$, изотопически реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$ ($\text{rel } I \circ i$).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Эквивалентная формулировка теоремы 2 заключается в следующем. Существует изотопия $\Phi(x, t): \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in]0, 1]$, непрерывная при $t \rightarrow +0$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} (\Phi(t) \circ I \circ i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}) = I \circ i \circ f.$$

План построения изотопии Φ пространства $\mathbb{R}^{2n}$ по изотопической реализации F отображения f состоит в следующем. Изотопическую реализацию $F(x, t)$ можно всегда выбрать так, что $\text{Im}(F(t)(I \circ i(S^n))) \cap \text{Im}(I \circ i(S^n)) = \emptyset$ при $t \in]0, 1/2]$. Далее строится изотопия $\Phi: \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$, неподвижная на $I \circ i(S^n)$ при $t \in]0, 1/2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Доказательство теоремы 2 в случае, когда f — гладкое отображение общего положения (и, тем самым, почти любое), легко вытекает из замечания 4Б. Наибольший интерес представляет случай, когда f не является гладким.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пример, разъясняющий причину наших затруднений в случае $n = 2$, разбирается в § 4.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть N^n — гладкое ориентируемое многообразие размерности $n \geq 3$. Скажем, что погружение общего положения $f: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, самопересекающееся вдоль кривой $\Delta_2(f)$, является *двойным ε -самопересеченным погружением* (более коротко *$w(\varepsilon)$ -погружением*), если выполнены следующие условия.

1. Каноническое накрытие $\hat{\Delta}_2(f) \rightarrow \Delta_2(f)$ над каждой компонентой кривой двукратных точек является несвязным (при $n = 2k$ это выполнено для любого погружения).

2. Для некоторого $\varepsilon > 0$ (константа ε фигурирует в определении w -погружения) и для любой компоненты $l_+ \subset \Delta_2(f)$ найдется ровно одна компонента $l_- \subset \Delta_2(f)$ такая, что трубчатая ε -окрестность U кривой l_+ содержит также компоненту l_- , и при некотором выборе параметризации эти кривые становятся ε -близкими в гладкой топологии.

3. Прообразы $\hat{l}_+$ и $\hat{l}_-$ кривых l_+ и l_- разбиты на пары $\hat{l}_+ = \hat{l}_{+,1} \cup \hat{l}_{+,2}$; $\hat{l}_- = \hat{l}_{-,1} \cup \hat{l}_{-,2}$ так, что пары $(\hat{l}_{+,1}, \hat{l}_{-,1})$ и $(\hat{l}_{+,2}, \hat{l}_{-,2})$ ε -близки на S^n в C^1 -топологии.

Аналогичное определение дается для погружений многообразий с краем $f: (N^n, \partial N) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-2} \times I, \partial)$ в предположении, что $f|_{\partial N}: \partial N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \times (\{0\} \cup \{1\})$ является вложением.

Поясним, как устроено $w(\varepsilon)$ -погружение f в окрестности U , содержащей пару компонент l_+ , l_- . Рассмотрим границу $\partial U = S^1 \times S^{2n-3}$ и подмногообразие $M_1 \cup M_2 = \partial U \cap f(N)$, причем $M_1 = M_2 = S^{n-2} \times S^1$ и структура прямых произведений на ∂U и M_i , $i = 1, 2$, согласованы между собой. Для каждого $s \in S^1$ сферы $f(S_1^{n-2})$ и $f(S_2^{n-2})$, лежащие на M , зацеплены в сфере S^{2n-3} , лежащей на ∂U .

Выберем ориентацию на S^1 . Эта ориентация индуцирует ориентации на S^{2n-3} , S_1^{n-2} , S_2^{n-2} , и целочисленный коэффициент зацепления $\text{lk}(S_1^{n-2}, S_2^{n-2})$ принимает

значения $\{+2, 0, -2\}$. Заметим, что при $n = 2k \geq 4$ коэффициент зацепления не зависит от способа упорядочения M_1 и M_2 и при произвольном n зависит от выбора ориентации на S^1 . В случае $\text{lk}(S_1^{n-2}, S_2^{n-2}) = 0$ кривые l_+ и l_- можно “сократить” посредством малой C^0 -деформации с носителем в U . Если $\text{lk}(S_1^{n-2}, S_2^{n-2}) \neq 0$, такую деформацию построить не удастся. Смысл определения 13 разъясняется в следующей лемме 14 и следствии 19.

ЛЕММА 14. Пусть $\varphi: (N, \partial N) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n \times (\{0\} \cup \{1\}))$ – произвольное погружение общего положения, $\dim(N) = n = 4k + 2 \geq 6$, $f: (N, \partial N) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-2} \times I, \mathbb{R}^{2n-2} \times (\{0\} \cup \{1\}))$ – погружение общего положения такое, что $\varphi = \Pi \circ f$. Пусть $l \subset \Delta_2(f)$ – связная замкнутая компонента кривой двукратных точек погружения f такая, что проекция $\Pi(l)$ гомологична нулю (в смысле неориентируемой гомологии). При этом имеем $\Pi(l) = \partial(r(M^2))$, M^2 – двумерная поверхность с краем $\partial M^2 = S^1$, $r: (M^2, \partial M) \rightarrow (\Delta_2(\varphi), \Pi(l))$, $\Delta_2(\varphi)$ – погруженное многообразие двукратных точек. Тогда существует ε -малая деформация $f \rightarrow f_1$ с носителем в ε -окрестности V образа M^2 , при которой кривая l деформируется в пару кривых l_+ и l_- , $\{l_+ \cup l_-\} \subset \Delta_2(f_1)$, и погружение f_1 удовлетворяет условию $w(\varepsilon)$ внутри ε -окрестности U , содержащей кривые l_+ и l_- .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем два замечания, первое из которых вытекает из [6], а второе очевидно.

1. Для любой компоненты $l \subset \Delta_2(f)$ накрытие $\hat{l} \rightarrow l$ является несвязным. (Заметим, что это верно, вообще говоря, лишь при $n = 2k$.)

2. Отображение $r: (M^2, \partial) \rightarrow (\Delta_2(\varphi), \Pi(l))$ можно считать вложением.

Обозначим $H = H_1(M^2, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ и определим гомоморфизмы $q_1: H \rightarrow \mathbb{Z}/2$; $q_2: H \rightarrow \mathbb{Z}/2$.

Определим q_1 как композицию $q_1 = w \circ f_*$, где $f_*: H \rightarrow H_1(\Delta_2(\varphi); \mathbb{Z}/2)$ – гомоморфизм гомологических групп, индуцированный включением $l \subset \Delta_2(\varphi)$, $w: H_1(\Delta_2(\varphi); \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ – класс когомологий (mod 2) канонического двулистного накрытия $\hat{\Delta}_2(\varphi) \rightarrow \Delta_2(\varphi)$. Заметим, что f_* корректно определен, поскольку $f(S^1) = l$ гомотопна 0 в $\Delta_2(\varphi)$.

Определим q_2 как первый класс Штифеля–Уитни поверхности M^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Определим гомоморфизм $q: H \rightarrow \mathbb{Z}/2$ по формуле $q = q_1 + q_2$.

Пусть $\rho: (I, \partial) \rightarrow (M, \partial)$ – вложение отрезка в M ($\text{rel } \partial M$), $(V, \partial V) \subset (M, \partial M)$ – трубчатая окрестность $\text{Im}(\rho)$ в M . Определим относительный цикл $(\rho)_* \subset H$. Предположим, что $q_*(\rho) = 0$. Тогда определена ε -малая деформация $f \rightarrow f_1$, $\Pi \circ f_1 = \varphi$, при которой цикл l перестраивается посредством 1-ручки вдоль пути $\rho(I) \subset M$. В результате деформации кривые $\Delta_2(f)$, $\Delta_2(f_1)$ двукратных точек совпадают, за исключением компонент $l \subset \Delta_2(f)$, $l_1 \subset \Delta_2(f_1)$, при этом $l_1 = (l \setminus (\partial V \cap \partial M)) \cup (\partial V \setminus (\partial V \cap \partial M))$. Описание такой деформации проводится в конструкции 17, ниже следуют предварительные построения.

Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащую путь $\rho(I) \subset r(M) \subset \Delta_2(\varphi)$. Гиперповерхность $\mathcal{P}$ будем рассматривать в малой окрестности пути $\rho(I)$. Выберем $\mathcal{P}$ такой, что нормальные векторы вдоль $\rho(I)$ на поверхности

$r(M)$ будут нормальными векторами к гиперповерхности $\mathcal{P}$. Переходя к погружению $f: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} = \Pi^{-1}(\mathcal{P})$. Многообразие $\mathcal{R}_N = \mathcal{R} \cap f(N)$ состоит из двух компонент связности, обозначенных далее через $\mathcal{R}_{N,1}$, $\mathcal{R}_{N,2}$ и упорядоченных произвольным образом. Многообразие $\mathcal{R}_N$ не является вложенным в $\mathcal{R}$ и самопересекается по двум точкам $\rho(0)$ и $\rho(1)$. Ориентируем $\mathcal{R}$ произвольным образом посредством $\theta(\mathcal{R})$. Индуцированную ориентацию на $\mathcal{R}_N$ обозначим через $\theta(\mathcal{R}_N)$. Определены целочисленные индексы ind_0 и ind_1 самопересечения поверхностей $\mathcal{R}_{N,1}$ и $\mathcal{R}_{N,2}$ в многообразии $\mathcal{R}$ в точках $\rho(0)$ и $\rho(1)$, соответственно. Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 16. *Справедливо следующее тождество*

$$\text{ind}_0 = (-1)^{q(\rho)+1} \text{ind}_1. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутую кривую $\rho(I) \cup S$, где S — одна из двух дуг кривой l , лежащая на $r(\partial M)$, ограниченная точками $\rho(0)$ и $\rho(1)$. Зафиксируем порядок листов $\mathcal{R}_N$ и ориентацию на $\mathcal{R}$. Продолжим порядок листов вдоль кривой S в точку $\rho(1)$. В окрестности $\rho(1)$ определена упорядоченная пара $\mathcal{R}'_{N,1}$ и $\mathcal{R}'_{N,2}$ ростков поверхности $\mathcal{R}'_N$. Заметим, что в случае $q_1(\rho) = 0$ порядок листов $\mathcal{R}'_{N,1}$ и $\mathcal{R}'_{N,2}$ совпадает с порядком $\mathcal{R}_{N,1}$ и $\mathcal{R}_{N,2}$. Напротив, при $q_1(\rho) = 1$ эти порядки различаются. Пусть E_s — слой нормального расслоения к поверхности $I \circ r(M^2)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n-1}$ вдоль дуги S . Заметим, что при $s = \rho(0)$ и $s = \rho(1)$ окрестность нуля в слое E_s совпадает с окрестностями точек $\rho(0)$ и $\rho(1)$ в $\mathcal{R}$. Выберем ориентацию $\theta'(\mathcal{R})$ в окрестности $\rho(1)$, полученную из $\theta(\mathcal{R})$ продолжением вдоль пути S из точки 0. Имеем $\theta'(\mathcal{R}) = -\theta(\mathcal{R})$, если $q_2(\rho) = 0$, и $\theta'(\mathcal{R}) = \theta(\mathcal{R})$, если $q_2(\rho) = 1$. Индекс самопересечения листов $\mathcal{R}'_{N,1}$ и $\mathcal{R}'_{N,2}$ в окрестности $\rho(1)$, рассмотренный при выборе ориентации $\theta'(\mathcal{R})$ на поверхности $\mathcal{R}$, очевидно, совпадает с ind_0 . Отсюда вытекает тождество (3). Лемма 16 доказана.

КОНСТРУКЦИЯ 17. Опишем деформацию $f \rightarrow f_1$, $\Pi \circ f_1 = \varphi$, при которой кривая l перестраивается вдоль пути $\rho(I)$ на поверхности $I \circ r(M)$ по ручке индекса 1, при условии $q(\rho) = 0$. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{R}$, подмногообразие $\mathcal{R}_N \subset \mathcal{R}$, ориентации $\theta(\mathcal{R})$, $\theta(\mathcal{R}_N)$ и фиксируем порядок компонент $\mathcal{R}_{N,1}$ и $\mathcal{R}_{N,2}$. Согласно лемме 16 $\text{ind}_0 = -\text{ind}_1$ и определена перестройка вдоль пути $\rho(I)$, при которой точки самопересечения $\rho(0)$ и $\rho(1)$ сокращаются. Продолжим эту деформацию до деформации $f \rightarrow f_1$ с носителем в малой окрестности гиперповерхности $\mathcal{R}$. Проследим за тем, чтобы $\Pi \circ f_1$ совпадало с φ . Описание деформации закончено.

ЛЕММА 18. *Для любой поверхности $r: (M, \partial) \rightarrow (\Delta_2(\varphi), l)$ найдется система вложенных несамопересекающихся путей $\rho_i: (I, \partial) \rightarrow (M, \partial)$, $i=1, \dots, h-1$, где $h = \dim(H)$. При этом система путей ρ_i выбрана такой, что $q(\rho_i) = 0$ и, кроме того, поверхность $M \setminus \bigcup_{i=1}^{h-1} \text{Im}(\rho_i)$ гомеоморфна либо листу Мёбиуса, либо цилиндру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что q – ненулевой гомоморфизм. Рассмотрим подмодуль $\text{Ker}(q) \subset H$, $\dim(H) = h - 1$, и выберем систему образующих $(\rho_i)_* \subset \text{Ker}(q)$, $1 \leq i \leq h - 1$. Реализуем образующие $(\rho_i)_*$ системой непересекающихся вложений $\rho_i: (I, \partial) \rightarrow (M, \partial)$. Рассмотрим поверхность $M' = M \setminus \bigcup_{i=1}^{h-1} \text{Im}(\rho_i)$. Поверхность M' такова, что $H_1(M'; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$. Следовательно, M' гомеоморфна либо листу Мёбиуса, либо цилиндру. Лемма 18 доказана.

Завершим доказательство леммы 14, пользуясь леммой 18 и конструкцией 17.

Пусть l – компонента кривой $\Delta_2(f)$. Рассмотрим малую деформацию $f \rightarrow f_1$, при которой l деформируется в l_1 . Будем различать два случая.

Случай А. Компонента l_1 связна и ограничивает в $\Delta_2(f)$ лист Мёбиуса $r(M, \partial)$, $\partial(r(M)) = l_1$.

Случай Б. Компонента l_1 несвязна, $l_1 = l_{1,1} \cup l_{1,2}$ и ограничивает в $\Delta_2(f)$ цилиндр $r(M, \partial)$.

В случае Б продеформируем $f_1 \rightarrow f_2$ так, что компонента $l_{1,2}$ деформируется вдоль $r(M)$ в ε -окрестность компоненты $l_{1,1}$. Погружение f_2 искомое.

Рассмотрим случай А. Продеформируем $f_1 \rightarrow f_2$ так, что кривая l_1 продеформируется в кривую l_2 вдоль $r(M)$, которая представляет собой среднюю линию листа Мёбиуса. Пусть $\rho: (I, \partial) \rightarrow (M, \partial)$ представляет образующую группы H . Если $q(\rho) = 0$, произведем деформацию $f_2 \rightarrow f_3$, при которой l_2 перестроится в кривую l_3 вдоль пути $\rho(I)$ по ручке индекса 1. Далее, l_3 ограничивает двумерный диск $M^2 \setminus \rho(I)$ на $\Delta_2(\varphi)$ и в результате дополнительной деформации $f_3 \rightarrow f_4$ компоненту l_3 можно сократить.

Предположим, что $q(\rho) = 1$. Рассмотрим гиперповерхность $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащую путь $\rho(I)$ и определенную в малой окрестности этого пути, такую, что векторное поле нормалей к поверхности $\mathcal{P}$, восстановленных вдоль пути $\rho(I)$, удовлетворяет условию $\rho(0) = \xi_0$; $\rho(1) = -\xi_1$, $t \in [0, 1]$, где ξ_t – векторное поле нормалей к $\rho(I)$ на поверхности $r(M)$. Рассмотрим прообраз $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ гиперповерхности $\mathcal{P}$ при проектировании Π и выберем ориентации $\theta(\mathcal{R})$, $\theta(\mathcal{R}_{N,1})$, $\theta(\mathcal{R}_{N,2})$ согласованным образом. (По поводу обозначений см. конструкцию 17.) В результате перестройки получим кривую l_2 , которая будет состоять из 2-х связных компонент $l_2 = l_{2,1} \cup l_{2,2}$. Заметим, что прообразы $[(\hat{l}_{2,1})_1, (\hat{l}_{2,2})_1]$ и $[(\hat{l}_{2,1})_2, (\hat{l}_{2,2})_2]$ кривой l_2 при каноническом накрытии разбиты на пары, связанные между собой малой регулярной гомотопией на сфере S^n . Погружение f_4 искомое. Лемма 14 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 19. Пусть $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – погружение общего положения, при этом $n = 4k + 2 \geq 6$. Тогда существует такое погружение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, $\Pi \circ f = \varphi$, что f является $w(\varepsilon)$ -самопересекающимся погружением для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $f_1: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, $\Pi \circ f_1 = \varphi$, произвольным погружением. Пусть $\delta_1 \subset \Delta_2(\varphi)$ – связная компонента, $\delta_1 \subset \Delta_2(f)$ – компонента, проектирующаяся на Δ посредством Π . Заметим, что погружение f_1 можно продеформировать $f_1 \rightarrow f_2$ так, что $\Pi \circ f_2 = \varphi$ и при этом δ_1 продеформируется в связную кривую Δ_2 .

В самом деле, пусть $\delta_{1,1}$ и $\delta_{1,2}$ – различные компоненты связности кривой δ_1 . Соединим эти компоненты путем $\rho: (I, \partial) \rightarrow (\Delta, l_1)$. Выберем гиперповерхность

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащую этот путь, такую, что $\text{ind}_0 = -\text{ind}_1$. (Обозначения см. в конструкции 17, выбор $\mathcal{P}$ происходит дословно так же, как в доказательстве леммы 14.) Рассмотрим деформацию $f_1 \rightarrow f'_2$, при которой δ_1 перестраивается по ручкам индекса 1 вдоль пути $\rho(I)$. Производя описанную перестройку необходимое число раз, получим погружение f_2 , для которого кривая δ_2 была бы связной.

Докажем, что δ_2 гомологична 0 в $\Delta_2(\varphi)$ в смысле неориентируемой гомологии. Рассмотрим погружение $g = \Pi' \circ f_2: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-3}$, где $\Pi': \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-3}$ — стандартная проекция, согласованная с проекцией Π . Нормальное расслоение ν к произвольной компоненте многообразия $\Delta_2(g)$ двукратных точек погружения g имеет вид $\nu = [4(k-1) + 3]\varepsilon \oplus \eta$, где ε — одномерное тривиальное расслоение над $\Delta_2(g)$, η — одномерное ориентирующее расслоение над этим подмногообразием. (Подробные объяснения см. в [5], [7].) Следовательно, полный класс $w(\nu)$ Штифеля–Уитни расслоения ν вычисляется по формуле

$$w(\nu) = 1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3,$$

где w_1 — одномерный ориентирующий класс, совпадающий с классом когомологий канонического накрытия $\widehat{\Delta}' \rightarrow \Delta'$. С другой стороны, нормальное расслоение к трехмерному многообразию стабильно эквивалентно одномерному ориентирующему расслоению (см. приложение). Итак, имеем $w(\nu) = 1 + w_1$ и, далее, $w_1^2 = 0$.

Кривая δ_2 представляет цикл, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу w_1^2 в многообразии $\Delta_2(g)$. Следовательно, δ_2 гомологична нулю. Применим лемму 15 и построим деформацию $f_2 \rightarrow f'_3$, при которой компонента δ_2 перестраивается $\delta_2 \rightarrow \delta_3$ таким образом, что δ_3 удовлетворяет условию, наложенному на $w(\varepsilon)$ -погружение. Производя описанную деформацию необходимое число раз, получим погружение f_3 , которое является $w(\varepsilon)$ -погружением. Следствие 19 доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Для этого нам потребуется перенести понятие $w(\varepsilon)$ -погружения на случай погружений некомпактных многообразий с краем. Сформулируем соответствующее определение в минимальной общности, необходимой для наших рассуждений.

Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольное C^0 -отображение, $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ — локальная изотопическая реализация отображения f (rel I), удовлетворяющая следующему требованию. Погруженное многообразие $\chi(S^n \times]0, 1])$ самопересекается в $\mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ вдоль кривой $\Delta_2(\Phi)$, состоящей лишь из компактных связных компонент. Компоненты кривой $\Delta_2(\Phi)$ разбиты на пары таким образом, что для каждой выделенной пары $l_1, l_2 \subset \Delta_2(\Phi)$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$, содержащая l_1 и l_2 и не содержащая других компонент этой кривой, такая, что Φ удовлетворяет условию, наложенному на $w(\varepsilon)$ -погружение при некотором $\varepsilon > 0$. Величину $\varepsilon(l_1, l_2)$ будем контролировать вблизи открытого конца $\Phi(S^n)$ согласно следующему правилу.

Пусть $\mathcal{M}(t)$ — положительнозначная, монотонно убывающая при $t \rightarrow +0$ функция, стремящаяся к 0 при $t \rightarrow +0$. Для каждой выделенной пары компонент l_1 и l_2 кривой $\Delta_2(\Phi)$ выберем значение $\varepsilon = \min_x \{\pi(x) \mid x \in l_1 \cup l_2\}$, $\Pi: \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ — стандартная проекция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Скажем, что $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ является $w(\mathcal{M})$ -погружением, если $\mathcal{M}:]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ – функция, описанная выше, и для любой выделенной пары $l_1, l_2 \subset \Delta_2(\Phi)$ имеем неравенство $\varepsilon(l_1, l_2) < \mathcal{M}(t(l_1, l_2))$.

Следующая лемма является аналогом следствия 19 для погруженных некомпактных многообразий.

ЛЕММА 21. Пусть $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n = 4k + 1 \geq 5$, – произвольное C^0 -отображение. Существует локальная изотопическая реализация отображения g , $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ ($\text{rel } I$), удовлетворяющая следующим требованиям:

- 1) $\chi(1): S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \{1\}$ является стандартным вложением;
- 2) χ является $w(\exp(-1/t))$ -погружением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим локальную изотопическую реализацию отображения g , $\Phi(x, t): S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times]0, 1]$, $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = g$. Такая реализация построена в лемме 2. Для каждого k рассмотрим погружение $\Phi_k: S^n \times [2^{-(k+1)}, 2^{-k}] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times [2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$, заключенное между гиперплоскостями $\mathbb{R}^{n+1} \times \{2^{-(k+1)}\}$, $\mathbb{R}^{n+1} \times \{2^{-k}\}$. Погружение $I \circ \Phi_k|_{S^n \times \{t\}}: S^n \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \{t\}$ аппроксимируем $2^{-(k+1)}$ -близким вложением $f_{k+1}: S^n \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \{t\}$ при $t = 2^{-(k+1)}$ и 2^{-k} -близким вложением f_k при $t = 2^{-k}$. Такие вложения существуют согласно лемме 3, поскольку при $k \geq 1$ имеем $4k + 1 \neq 2, 2^l - 1$.

Аппроксимируем погружение $I \circ \Phi_k$ погружением общего положения $F_k: S^n \times [2^{-(k+1)}, 2^{-k}] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times [2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$ таким, что $I \circ \Phi = f_{k+1}$ при $t = 2^{-(k+1)}$ и $I \circ \Phi = f_k$ при $t = 2^{-k}$.

Введем следующие обозначения. Объединение погружений F_k при всех значениях k будем обозначать через F . Подмногообразие $\Delta_2(\Phi)$, погруженное в $\mathbb{R}^{n+1} \times]0, 1]$, обозначим через Δ . Многообразие Δ , вообще говоря, некомпактно и допускает бесконечную фильтрацию $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \Delta$. В этой фильтрации многообразия Δ_i определены как $\Delta \cap \mathbb{R}^{n+1} \times [2^{-i}, 1]$. Граница $\partial \Delta_i$ многообразия Δ_i является погруженным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1} \times \{2^{-i}\}$. Многообразие $\Delta_2(F)$ двукратных точек погружения F состоит, вообще говоря, из бесконечного числа связных замкнутых компонент, каждая из которых проектируется посредством $\Pi: \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times]0, 1]$ внутрь некоторого многообразия $\Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$ при некотором i . Обозначим через δ_j объединение компонент кривой $\Delta_2(F)$, которые проектируются внутрь компоненты Δ_j . Таким образом, определена бесконечная фильтрация $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \dots \subset \Delta_2(F)$, $\Delta_2(F) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \delta_j$, в которой все члены представлены конечным числом замкнутых кривых.

ЛЕММА 22. Существует двумерная поверхность M с краем ∂M , вообще говоря, некомпактная и неориентируемая, и вложение $r: M \rightarrow \Delta$ такое, что выполнены следующие условия:

- 1) $r|_{\partial M}$ параметризует компоненты кривой δ ;
- 2) вложение $r(M)$ регулярно вдоль $\partial \Delta_i$, и $r(M) \cap \Delta_i$ есть компактная двумерная поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательное погружение $G: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \times]0, 1]$, определенное по формуле $G = \Pi' \circ F$, где $\Pi': \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \times]0, 1]$ – стандартная проекция, согласованная с Π .

Будем считать, что F было с самого начала выбрано так, что G – погружение общего положения. Рассмотрим многообразие $\Delta' = \Delta_2(F)$ и фильтрацию этого многообразия

$$\Delta'_1 \subset \Delta'_2 \subset \dots \subset \Delta', \quad \Delta' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta'_i, \quad \Delta'_i = \Delta' \cap \mathbb{R}^{2n-2} \times [2^{-i}, 1].$$

Заметим, что $\delta'_i = \Pi'(\delta_i) \subset \Delta'_i$. Рассмотрим кривую δ'_i как цикл в относительной группе гомологий $H_1(\Delta'_i, \partial\Delta'_i; \mathbb{Z}/2)$. Заметим, что этот цикл двойственен в смысле Пуанкаре коциклу $w_1 \in H^1(\Delta'_i; \mathbb{Z}/2)$. (В случае $\partial\Delta'_i = \emptyset$ рассуждения были проведены при доказательстве следствия 19.) Следовательно, существует гомология $r'_i: (M_i, \partial) \rightarrow (\Delta'_i, \partial\Delta'_i \cup \delta'_i)$, связывающая цикл δ'_i с некоторым циклом μ'_i на $\partial\Delta'_i$.

Для каждого i рассмотрим гомологию $r': (M_i, \partial) \rightarrow (\Delta'_i, \partial\Delta'_i \cup \delta'_i)$ и определим цикл $(\mu'_{i,j})_* \in H_1(\partial\Delta'_j; \mathbb{Z}/2)$, $j \geq i$, представленный кривой $r_i(M_i) \cap \partial\Delta'_j = \mu'_{i,j}$. Для каждого j существует бесконечное множество циклов $(\mu'_{i_s,j})_*$, индексированных i_s . Группа $H_1(\partial\Delta'_j; \mathbb{Z}/2)$ для каждого j является конечной. Выберем бесконечную последовательность циклов $(\mu'_{i_s,s})_*$ такую, что $(\mu'_{i_{s+1},s})_*$ гомологичен $(\mu'_{i_s,s})_*$ в $H_1(\partial\Delta'_s; \mathbb{Z}/2)$. Составим некомпактный 2-цикл $r': (M, \partial) \rightarrow \Delta'$ из 2-циклов $r_{i_s}(M_{i_s}^2)$ внутри $\Delta'_{i_s} \setminus \Delta'_{i_{s-1}}$ и из гомологий между кривыми $\mu'_{i_s,s}$ и $\mu_{i_{s+1},s}$ в окрестности подмногообразия $\partial\Delta'_{i_s}$. Заметим, что граница $r'(\partial M)$ цикла $r'(M)$ параметризует кривую $l' = \Pi'(\Delta_2(G))$. Рассмотрим проекцию $r(M) = \Pi(r'(M))$ в многообразии Δ . Поверхность $r(M)$, будучи приведенной в общее положение в многообразии Δ , является искомой. Лемма 22 доказана.

Пользуясь леммой 22, завершим доказательство леммы 21. Для каждого i рассмотрим кривую $\mu_i = r(M) \cap \partial\Delta_i$. Породим на кривой двукратных точек пару циклов μ_i^-, μ_i^+ в результате 2^{-i} -малой деформации $F \rightarrow F'$ с носителем в малой окрестности кривой μ_i . Потребуем, чтобы кривые μ_i^+ и μ_i^- были расположены с разных сторон по отношению к $\partial\Delta_i$ так, что $\mu_i^+ \subset \Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$; $\mu_i^- \subset \Delta_{i-1}$. Погружение F' является $w(2^{-i})$ -погружением в окрестности U . Обозначим через n'_i кривую $l_i \setminus l_{i-1} \cup \mu_i^+ \cup \mu_{i+1}^-$. Кривая n'_i гомологична нулю на поверхности $\Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$ посредством гомологии $r(M) \cap (\Delta_i \setminus \Delta_{i-1})$. Для каждого i рассмотрим 2^{-i} -мерную деформацию $F'_i \rightarrow F''_i$, имеющую носитель внутри $S^n \times [2^{-i}, 2^{-(i+1)}]$ и неподвижную на $\partial\Delta_{i-1}$ и $\partial\Delta_i$. При этой деформации цикл n'_i перестраивается в связную кривую n''_i , гомологичную 0 внутри $\Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$. Применяя лемму 14, построим 2^{-i} -мерную деформацию $F''_i \rightarrow \chi_i$ с носителем внутри $S^n \times [2^{-i}, 2^{-(i+1)}]$, при которой кривая n''_i перестраивается в двукратную кривую и погружение χ_i является $w(2^{-i})$ -погружением внутри $\mathbb{R}^{2n} \times [2^{-i}, 2^{-(i+1)}]$. Совокупность погружений χ_i определяет погружение $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$. Это погружение является $w(\exp(-1/t))$ -погружением при $t \rightarrow +0$. Лемма 21 доказана.

Пусть $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ – локальная изотопическая реализация отображения $f: S^n \rightarrow S^n \text{ rel}(I \circ i)$. Опишем условия, наложенные на погружение χ ,

которые определяют локальные изотопические реализации некоторого специального вида, которые мы будем называть в дальнейшем изотопическими квазиреализациями.

1. Погружение χ самопересекается в общем положении вдоль кривой $\Delta_2(\chi)$, состоящей лишь из компактных компонент. (Заметим, что при $n = 2k + 1$ накрытие $\pi: \widehat{\Delta}_2(\chi) \rightarrow \Delta_2(\chi)$ является несвязным над каждой компонентой, иначе говоря, $\widehat{\Delta}_2(\chi) = \mathbb{Z}/2 \times \Delta_2(\chi)$.)

2. Существует счетное (или конечное) число попарно непересекающихся по-слойно вложенных вдоль t -координаты цилиндров $\varphi_j: S^1 \times]0, l(j)] \subset S^n \times]0, 1]$, $1 \leq j \leq \infty$; $l(j) \in]0, 1]$, причем для любого $\varepsilon > 0$ лишь конечное число значений $l(j)$ превышает ε . Кроме того, выполнены условия а)–г), наложенные на вложения φ_j .

а) При каждом $t \in]0, l(j)]$ отображения $p(t) \circ \chi \circ \varphi_j: S^1 \times \{t\} \rightarrow S^n$ для различных j не пересекаются между собой. Здесь через $p: \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow S^n \times]0, 1]$ обозначена проекция, обратная к вложению $i \circ I: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Далее цилиндры $\text{Im}(p \circ \chi \circ \varphi_j(S^1 \times]0, l(j)])) \subset S^n \times]0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ обозначены через C_j , а цилиндры $\text{Im}(\varphi_j(S^1 \times]0, l(j)])) \subset S^n \times]0, 1]$ через C'_j . По построению проекция $p: \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \rightarrow S^n \times]0, 1]$ изоморфно отображает C'_j на C_j .

б) Для каждого цилиндра $\varphi_j(S^1 \times]0, l(j)] \subset S^n \times]0, 1]$ существует открытая окрестность V_j такая, что $V_j \cap V_i = \emptyset$ при $i \neq j$ и, кроме того, $p \circ \chi \circ \varphi_j(V_j) \subset C_j$. Тем самым, погружение χ не общего положения по отношению к проекции p .

в) Для каждой пары ψ_i, ξ_i компонент кривой $\widehat{\Delta}_2(X)$, проектирующихся в одну компоненту на кривой $\Delta_2(X)$, ровно одна компонента (в дальнейшем обозначаемая через ψ_j) лежит внутри некоторой окрестности V_j . При этом внутри каждой окрестности V_j лежит лишь конечное число компонент ψ_j , $1 \leq i < i_0$.

Заметим, что не ограничивая общности, можно потребовать, чтобы для каждого j , $1 \leq j \leq \infty$, отображение $p \circ \chi(S^n \setminus W_j) \rightarrow S^n \times]0, 1]$ было трансверсально вдоль C_j . Здесь $W_j \supset V_j$ – некоторая большая окрестность C'_j такая, что $C_j \subset \text{Im}(p \circ \chi(W_j))$. Полный прообраз $(p \circ \chi)^{-1}(C_j) \subset (S^n \times]0, 1] \setminus W_j)$ является ориентированной и, вообще говоря, некомпактной поверхностью, обозначаемой через N_j^2 .

г) Потребуем, чтобы компоненты ξ_i , $1 \leq i \leq i_0$, кривой $\widehat{\Delta}_2(\chi)$, которые по построению не лежат внутри V_j и лежат на N_j^2 , разбивали поверхность N_j^2 на две компоненты связности, которые обозначаются через $N_{j,+}^2$ и $N_{j,-}^2$. Обозначения выбраны так, что компонента $N_{j,+}^2$ компактна и имеет границу $\partial C'_j \cup \bigcup_{i=1}^{i_0} \xi_i$. Другая компонента, вообще говоря, некомпактна и ограничена кривой ξ_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Скажем, что локальная изотопическая реализация $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ ($\text{rel } I \circ i: S^n \subset \mathbb{R}^{2n}$) является изотопической квазиреализацией, если погружение X удовлетворяет условиям 1), 2) а)–г).

Смысл определения становится ясным в следующих леммах.

ЛЕММА 24. Пусть существует локальная изотопическая реализация $\chi_1: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ ($\text{rel } i \circ I: S^n \subset \mathbb{R}^{2n}$), ко-

торая является $w(\exp(-1/t))$ -погружением при $t \rightarrow +0$. Тогда существует изотопическая квазиреализация χ_2 отображения f ($\text{rel } I \circ i$).

ЛЕММА 25. Пусть существует изотопическая квазиреализация $\chi: S^n \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ ($\text{rel } I \circ i$). Тогда отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ изотопически реализуется ($\text{rel } I \circ i$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 24. Рассмотрим кривую $\widehat{\Delta}_2(\chi_1)$ и пару компонент ψ_j и ξ_j , проектирующихся в одну компоненту на $\Delta_2(\chi_1)$. Для кривой ψ_j рассмотрим цилиндр $C'_j = \text{Im}(S^1 \times]0, l(j)]) \subset S^n \times]0, 1]$, содержащий эту кривую, $\psi_j \subset C'_j$, где $l(j)$ – максимальная t -координата на кривой ψ_j . Малой деформацией погружения χ_1 и цилиндров C'_j добьемся, чтобы эти цилиндры попарно не пересекались между собой и, кроме того, не пересекали кривые φ_j . Этого можно добиться, поскольку при любом $t \in]0, 1]$ лишь конечное число цилиндров пересекает сферу $S^n \times \{t\}$.

Выберем попарно непересекающиеся малые открытые окрестности V_j цилиндров C'_j , также непересекающиеся кривые ξ_j , и построим C^0 -малую деформацию $\chi_1 \rightarrow \chi'_1$ такую, что $p \circ \chi'_1(V_j) \subset C_j$, $C_j = \text{Im}(p \circ \chi_1(C'_j))$. Для этого в каждом слоекасательного пространства $T(\mathbb{R}^{2n})$ над точками цилиндра $C'_j \subset \mathbb{R}^{2n} \times]0, l(j)]$ выделим подпространства $K^n(x)$, $x \in \partial C'_j$, ядер проекции $p: \mathbb{R}^{2n} \times \{t\} \rightarrow S^n \times \{t\}$ и подпространства $TS^n(x)$ касательных плоскостей к сфере $i(S^n) \times \{t\}$. Пусть $L^{n-1} \times \{t\} \subset \mathbb{R}^{2n} \times \{t\}$ – поле образов нормального расслоения вдоль кривой $\partial C'_j$ в сфере $S^n \times \{l(j)\}$ при отображении $D(\chi): TS^n \times \{l(j)\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \{l(j)\}$. В общем положении каждое подпространство $L^{n-1}(x)$, $x \in \partial C'_j$, мономорфно проектируется на $K^n(x)$ вдоль подпространства $TS^n(x)$. Определена C^0 -малая деформация $\chi_1 \rightarrow \chi'_1$ такая, что каждое подпространство $L^{n-1}(x)$, построенное для $\chi_1^{(1)}$, содержится в $K^n(x)$. Для отображения $\chi_1^{(1)}$ рассмотрим подпространства $K^n(x, t)$, $L^{n-1}(x, t)$, $TS^n(x, t)$ в каждой точке (x, t) на C'_j . Определена C^0 -малая деформация $\chi_1^{(1)} \rightarrow \chi_1^{(2)}$, неподвижная на C'_j , такая, что для $\chi_1^{(2)}$ пространства $L^{n-1}(x, t)$ содержатся в $K^n(x, t)$ для всех точек на C'_j . Неформально говоря, такую деформацию можно построить, “разворачивая” погружение $\chi_1^{(1)}$ вдоль C'_j , начиная из точек кривой $\partial C'_j$ и далее по направлению $t \rightarrow +0$. Описанную деформацию проведем независимо для каждого цилиндра C'_j . В результате получим погружение χ'_1 , удовлетворяющее требуемым свойствам.

Рассмотрим малую деформацию $\chi'_1 \rightarrow \chi''_1$, при которой отображение $p \circ \chi''_1: (S^n \times]0, l(j)] \setminus W_j) \rightarrow S^n \times]0, 1]$ становится трансверсальным вдоль C_j . Здесь $W_j \supset V_j \supset C'_j$ – некоторая большая окрестность j -го цилиндра такая, что $p \circ \chi''_1(W_j)$ содержит C_j . Обозначим через N_j^2 поверхность $(p \circ \chi''_1)^{-1}(C_j)$, полученную как прообраз цилиндра C_j . Обозначим через $\eta_j = \partial N_j^2$ граничную кривую, полученную как прообраз верхней границы цилиндра $\partial(C_j)$. Заметим, что ξ_j – одна из компонент кривой η_j .

Воспользуемся тем, что погружение χ''_1 является w -погружением в малой окрестности кривых ψ_j , ξ_j . Пусть $\bar{\psi}_j$, $\bar{\xi}_j$ – пара компонент кривой $\widehat{\Delta}_2(\chi''_1)$, проектирующихся в одну компоненту кривой $\Delta_2(\chi''_1)$, таких, что $\bar{\psi}_j$ лежит в малой окрестности U_ψ кривой ψ_j , $\bar{\xi}_j$ лежит в малой окрестности U_ξ кривой ξ_j , и в окрест-

ностях U_ψ и U_ξ погружение χ_1'' является w -погружением. Проведем аналогичные построения для пары компонент $\bar{\psi}_j, \bar{\xi}_j$ и получим поверхность $\bar{N}_j$ с границей $\bar{\eta}_j$. Кривая $\bar{\xi}_j$ также будет являться одной из компонент кривой $\bar{\eta}_j$. Обозначим компоненты кривых η_j и $\bar{\eta}_j$, отличные от ξ_j и $\bar{\xi}_j$, через $\eta(1), \dots, \eta(q)$ и $\bar{\eta}(1), \dots, \bar{\eta}(q)$, соответственно. Заметим, что компоненты $\eta(i)$ и $\bar{\eta}(i)$ соответствуют друг другу и располагаются C^1 -близко на сфере $S^n \times \{l(j)\}$. Действительно, пары кривых $\varphi_j, \bar{\varphi}_j$ и $\xi_j, \bar{\xi}_j$ можно считать сколь угодно C^1 -близкими, следовательно, таковыми являются и их образы $\partial C_j, \partial \bar{C}_j$, а также и прообразы $\eta_j, \bar{\eta}_j$.

Для каждого i рассмотрим деформацию $\mathcal{D}: \chi_1'' \rightarrow \chi_1'''$ с носителем внутри малой окрестности, содержащей кривые $\eta(i)$ и $\bar{\eta}(i)$ — прообразы кривой ∂C_j . Деформацию $\mathcal{D}$ можно выбрать такой, что ее проекция на сферу S^n является сколь угодно C^0 -малой, при этом сама деформация является C^0 -малой при $l(j) \rightarrow +0$. В результате деформации $\mathcal{D}$ возникают кривые $m(i), \bar{m}(j)$ трансверсального самопересечения на погруженном многообразии $\chi_1'''(S^n \times]0, 1])$. Кривая $m(i)$ проектируется на C_j в окрестность ∂C_j . Проведем такую деформацию для каждой пары близких циклов на кривой $\Delta_2(\chi_1'')$. В результате получим погружение, обозначаемое через χ_2 . Погружение χ_2 определяет искомую изотопическую квазиреализацию отображения $f(\text{rel } I \circ i)$. Лемма 24 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 25. Для каждого цилиндра $C_j \subset S^n \times]0, l(j)]$ рассмотрим поверхность N_j^2 (см. определение 23 г)). Выберем непересекающиеся окрестности U_j поверхностей $N_{j,-}^2 \subset N_j^2$. Рассмотрим деформацию $\chi \rightarrow \chi'$ с носителем внутри U_j , непрерывную при $t \rightarrow +0$, при которой вблизи каждой компоненты $\eta(i)$ кривой $\Delta_2(\chi)$ возникает компонента $\eta'(i)$ погружения χ' . Для простоты обозначений будем считать, что кривая $\eta'(i)$ связна. При такой деформации погружение χ' становится w -погружением, причем каждая пара компонент $\eta(i)$ и $\eta'(i)$ сокращается при дополнительной деформации $\chi' \rightarrow \chi''$. Опишем построение χ' .

Пусть $\bar{N}_{j,-} \subset N_{j,-}$ — поверхность, полученная из $N_{j,-}$ в результате удаления малой окрестности края $\partial N_{j,-}$. Рассмотрим трехмерное многообразие $\bar{N}_{j,-} \times J$, $J = [0, 1]$, и вложение $\mathcal{J}$ этого многообразия в пространство $\mathbb{R}^{2n} \times]0, 1]$ такое, что выполнены следующие условия:

- а) $\mathcal{J}|_{\bar{N}_{j,-} \times \{0\}}$ вложено в окрестность V_j цилиндра C_j' ;
- б) $\mathcal{J}|_{\bar{N}_{j,-} \times \{1\}}$ — диффеоморфизм на $\bar{N}_{j,-}$;
- в) $\mathcal{J}(\{n\} \times J)$, $n \in \bar{N}_{j,-}$, лежит в слое $K^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ над точкой $\chi'(n)$.
(Обозначение K^n введено при доказательстве леммы 24.)

Рассмотрим деформацию $\chi' \rightarrow \chi''$ с носителем внутри U_j , параметризованную отрезком J , при которой поверхность $\bar{N}_{j,-}$ деформируется вдоль $\mathcal{J}(\bar{N}_{j,-} \times J)$ по направлению к $\bar{N}_{j,-} \times \{0\}$ и далее по линейности в отрицательную окрестность точки 0 на пространстве J параметра деформации. Вблизи границы $\partial \bar{N}_{j,-} \times J$ деформация связывается с тождественной. При такой деформации в окрестности компоненты η_j появляется дополнительная компонента η'_j на кривой $\Delta_2(X')$. В окрестности η_j погружение $\mathcal{J}$ выберем так, что кривые η_j и $\bar{\eta}_j$ сокращаются при дополнительной малой деформации $\chi' \rightarrow \chi''$. Рассмотрим описанную деформацию для каждой компоненты кривой $\Delta_2(\chi)$. В результате получим вложение,

обозначаемое через F . Это вложение задает изотопическую реализацию отображения $f \text{ (rel } i \circ I)$. Лемма 25 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — произвольное C^0 -отображение. Согласно лемме 21 существует локальная изотопическая реализация отображения $f \text{ (rel } I \circ i)$, которая, кроме того, является $w(\exp(-1/t))$ -погружением. По лемме 24 существует локальная изотопическая квазиреализация X_2 отображения $f \text{ (rel } I \circ i)$. Наконец, по лемме 25 отображение f изотопически реализуется $\text{(rel } I \circ i)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Отображения $S^7 \rightarrow S^7, S^3 \rightarrow S^3$, не реализующиеся в пространствах $\mathbb{R}^{14}$ и $\mathbb{R}^6$

Мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Существует отображение $\Xi: S^7 \rightarrow S^7$, которое не реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{14}$ относительно стандартного включения $I \circ i: S^7 \rightarrow \mathbb{R}^{14}$. Аналогичный результат справедлив для сферы S^3 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Наименьшее число k , для которого произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{n+k}$, найдено при $n = 1, 3, 4, 7, 8$. Интересно отметить, что любое отображение $g: T^k \rightarrow T^k$ при $k > 1$ реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$ (см. [21]). Отображения $S^4 \rightarrow S^4$, $S^8 \rightarrow S^8$, которые не реализуются в пространствах $\mathbb{R}^7$ и $\mathbb{R}^{15}$, соответственно, строятся по аналогии с Ξ при помощи двулистного накрытия над погруженными проективными пространствами $\mathbb{RP}^3 \rightarrow S^4$ и $\mathbb{RP}^7 \rightarrow S^8$, соответственно. Эти построения существенно проще. Для произвольных размерностей n вопрос о нахождении наименьшего k такого, что любое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{n+k}$, открыт.

Конструкция отображения Ξ . Пусть $\varphi: \mathbb{RP}^6 \rightarrow S^7$ — погружение общего положения, $\hat{\varphi}: S^6 \rightarrow S^7$ определено по формуле $\hat{\varphi} = p \circ \varphi$, где $p: S^6 \rightarrow \mathbb{RP}^6$ — каноническое 2-накрытие. Рассмотрим гомотопию $\xi_t: S^6 \times I \rightarrow S^7$, $I = [0, 1]$, такую, что при $t \neq 1$ ξ_t является погружением, $\xi_0 = \hat{\varphi}$, ξ_1 — отображение в точку, и ξ_t регулярно в окрестности $t = 1$. Гомотопия ξ_t существует, поскольку $\pi_6(\text{SO}(7)) = 0$ (см. [22]). Для случая S^3 аналогичное равенство $\pi_2(\text{SO}(3)) = 0$ также выполнено. Гомотопия ξ_t определяет отображение $\Lambda: \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^7$. Потребуем, чтобы отображение Λ имело степень 1. Дополнительно потребуем выполнения технических условий, упрощающих доказательства.

У1. Гомотопия ξ_t при $t \in [0, +\varepsilon]$ определяет тривиализацию погруженной трубчатой окрестности погружения $\varphi(\mathbb{RP}^6)$.

У2. Выберем точку $x \in S^6$, рассмотрим образ $\Lambda(J)$ отрезка $J = \{x\} \times I$. Потребуем, чтобы $\Lambda(J)$ было вложением и $\Lambda^{-1}(\Lambda(J)) = J$.

Определим Ξ как композицию $\Xi = p \circ \Lambda$, где $p: S^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$ — каноническое 2-накрытие. Отображение $\Xi: S^7 \rightarrow S^7$ построено. Построение $\Xi': S^3 \rightarrow S^3$ полностью аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим отображение $\Lambda': \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^7$, задающее C^∞ -аппроксимацию отображения Λ , такое, что стратифицированное подмногообразие критических значений погружения Λ находится в общем положении по отношению к регулярной гомотопии ξ'_t , построенной для погружения Λ' . Для каждого $t \in [0, 1]$ определено множество $L_t \subset \mathbb{RP}^7$ по формуле $L_t = \Lambda'^{-1}(\text{Im}[\xi'_t])$. Множество L_t является погруженным в $\mathbb{RP}^7$ многообразием, за исключением, быть может, конечного множества $\mathcal{T}$ значений параметра t , при этом в малой ε -окрестности значения $\tau \in \mathcal{T}$ подмногообразий $L_{\tau-\varepsilon}$ и $L_{\tau+\varepsilon}$ отличаются на морсовскую перестройку. Будем рассматривать L_t как гладкое многообразие (разрешив особенности кратных самопересечений). Определим $M = \bigcup_t L_t, t \in [0, 1]$. По построению M – гладкое многообразие такое, что определена коммутативная диаграмма гладких отображений

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & & \\ \downarrow \widehat{p} & & \\ M & \xrightarrow{r} & \mathbb{RP}^7 \end{array}$$

В этой диаграмме r – тавтологическая проекция, индуцированная отображением Λ , отображение $\widehat{p}$ является 2-накрытием, индуцированным накрытием $S^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$.

В группе $\pi_1(M)$ определим две подгруппы $K_1 = \text{Ker}(r_\#)$, $K_2 = \text{Im}(\widehat{p}_\#)$.

ЛЕММА 27. *Подгруппы K_1 и K_2 совпадают, и определена коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{r}} & S^7 \\ \downarrow \widehat{p} & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{r} & \mathbb{RP}^7 \end{array} \quad (4)$$

в которой $\widehat{r}$ – отображение степени 1.

Завершим доказательство теоремы 3. Предположим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ отображение $\mathcal{J}$, определяющее ε -реализацию отображения $\Xi (\text{rel } I \circ i)$. Пусть $\pi: U \rightarrow S^7$ – проекция малой регулярной окрестности на $I \circ i(S^7)$. Рассмотрим отображение $\mathcal{J} = \pi \circ \overline{\mathcal{J}}: S^7 \rightarrow S^7$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{J}$ трансверсально вдоль ξ'_t . Определим $\widetilde{L}_t = \mathcal{J}^{-1}(\text{Im } \xi'_t)$ и, далее, $\widetilde{M} = \bigcup_t \widetilde{L}_t$. Выберем ε настолько малым, что $\forall t$ отображения $\mathcal{J}: \widetilde{L}_t \rightarrow S^7$, $\Lambda: L_t \rightarrow S^7$ близки в C^0 -топологии.

В частности, пользуясь леммой 27, определим коммутативную диаграмму гладких отображений:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\widetilde{M}} & \xrightarrow{\widetilde{r}} & S^7 \\ \downarrow \widetilde{\mathcal{J}} & \searrow r & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{RP}^7 \end{array} \quad (5)$$

в которой r – тавтологическая проекция, индуцированная $\mathcal{J}$, $\widetilde{r}$ – отображение степени 1, π – стандартная проекция регулярной трубчатой окрестности U , диффеоморфной $\mathbb{RP}^7 \times D^7$; $\widetilde{\mathcal{J}}$ – отображение, индуцированное вложением $\mathcal{J}$. Приходим

к противоречию, поскольку любое отображение, включенное в качестве $\widetilde{\mathcal{J}}$ в рассматриваемую диаграмму, имеет точку самопересечения, $\widetilde{\mathcal{J}}(x) = \widetilde{\mathcal{J}}(y)$, такую, что путь $I: [0, 1] \rightarrow \widehat{M}$, $I(0) = x$, $I(1) = y$, проецируется посредством $\pi \circ \overline{\mathcal{J}}$ в образующую $\pi_1(\mathbb{RP}^7)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 27. Достаточно доказать включение $K_1 \subset K_2$, поскольку обе подгруппы имеют индекс 2. Всякая точка на $\widehat{M}$ может быть определена как пара (y, ϕ) , где y – точка погруженного в $\mathbb{RP}^7$ ориентированного многообразия L_t ; ϕ – вектор нормали к $r(L_t)$, приложенный в точке $r(y)$. Поскольку L_t – двустороннее подмногообразие в $\mathbb{RP}^7$, вектор ϕ попросту определяет сторону подмногообразия и поэтому может быть восстановлен по вектору ϕ' , приложенному в точке x_t , где точка x_t определена из условия У2.

Рассмотрим петлю $\rho: S^1 \rightarrow M$. Если петля $r \circ \rho(S^1)$ пересекает подмногообразие $\varphi(\mathbb{RP}^6)$ четное число раз (тем самым, ρ представляет элемент из K_1), то вектор $\phi'_{2\pi}$, полученный из вектора ϕ'_0 продолжением вдоль пути ρ , сонаправлен с вектором ϕ_0 . Следовательно, $\rho(S^1)$ поднимается до петли $\widehat{\rho}: S^1 \rightarrow \widehat{M}$. Лемма доказана.

§4. Конструкция отображения $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, не реализующегося в пространстве $\mathbb{R}^4$

Пусть $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – стандартная проекция, $i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ – стандартное вложение такие, что $\pi \circ i = \text{id}$. В этом разделе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Существует погружение $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, которое не реализуется (rel i) в пространстве $\mathbb{R}^4$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 28. Любое отображение $f: S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{4k+1}$, $k \geq 2$, реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{4k}$. Более того, реализацию $\overline{f}: S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{4k}$ можно выбрать сколь угодно близкую к $i \circ f$ в C^∞ -топологии пространства отображений. Это легко вытекает, например, из результатов [12].

ПОСТРОЕНИЕ 29. Построим погружение $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Пусть $\varkappa: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение Боя (см., например, [11], [15]). Выберем отображение $\varphi': S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ как двулистное накрытие над поверхностью $\varkappa(\mathbb{RP}^2)$. Отображение общего положения, полученное из φ' малым C^∞ -шевелением, мы будем обозначать через φ . Отображение φ построено.

Для доказательства теоремы 4 напомним ключевые конструкции работ [15], [16]. Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – отображение общего положения, M^2 – ориентированная поверхность. Кривая $\Delta_2(f)$ двукратных точек самопересечения поверхности $f(S^2)$ состоит из конечного числа замкнутых компонент и некоторого числа компонент с краем. Концевые точки незамкнутых компонент соответствуют особым точкам отображения f . Пусть $\theta = \{\theta_i\}$ набор ориентаций, заданных на каждой связной компоненте $\Delta_{2,i}$ кривой $\Delta_2(f) = \{\Delta_{2,i}\}$. Обозначим через L_1, L_2, L_3 листы поверхности $\varphi(S^2)$ в малой окрестности троекратной точки самопересечения $y \in \Delta_3(f)$; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – векторы ориентации к кривой $\Delta_2(f)$, приложенные к точке y . При этом $\theta_k \perp L_k$, $k = 1, 2, 3$. Каждой точке y сопоставим неупорядоченную тройку целых чисел, составленную из $+1$ и -1 . Припишем вектору θ_k

значение $+1$, если ξ_k сонаправлен с вектором положительной нормали к L_k , и значение -1 , если не сонаправлен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Скажем, что точка $y \in \Delta_3(f)$ имеет тип А, если ей приписана (неупорядоченная) тройка чисел вида $\{+1, -1, -1\}$ или $\{+1, +1, -1\}$. Скажем, что точка y имеет тип В, если ей приписана тройка $\{+1, +1, +1\}$ или $\{-1, -1, -1\}$.

ЛЕММА 31. Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – отображение общего положения и поверхность M^2 ориентирована. Гладкое вложение $\bar{f}: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi \circ \bar{f} = f$, существует тогда и только тогда, когда можно выбрать набор ориентаций θ на компонентах кривой $\Delta_2(f)$, для которого каждая точка $y \in \Delta_3(f)$ имеет тип А.

Доказательство изложено в [16]. Нам потребуется конструкция отображения $\bar{f}$.

Пусть θ – набор ориентаций на компонентах кривой $\Delta_2(f)$, для которого каждая точка $y \in \Delta_3(f)$ имеет тип А. Построим погружение $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\pi \circ \bar{f} = f$, упорядочив координаты прообразов $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ каждой точки $x \in \Delta_2(f)$. Порядок прообразов выберем так, что соответствующий репер $(\theta(x), \varkappa_1, \varkappa_2)$ имеет положительную ориентацию в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что по построению отображение $\bar{f}$ является вложением в каждой точке, за исключением, быть может, точек $\Delta_3(f)$. В малой окрестности точки $y \in \Delta_3(f)$ типа А прообразы $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ можно единственным образом упорядочить вдоль оси проекции в соответствии с порядком для каждой пары $(\bar{y}_1, \bar{y}_2), (\bar{y}_2, \bar{y}_3), (\bar{y}_1, \bar{y}_3)$. Тем самым, вложение $\bar{f}: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ можно определить во всех точках, за исключением окрестности прообразов $f^{-1}(y) = \{y_1, y_2, y_3\} \subset M^2$ особых точек $y \in \Delta_3(f)$ типа В.

Пусть $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение из построения 29. Будем считать, что поверхность $\varkappa(\mathbb{RP}^2)$ выбрана таким образом, что множество $\Delta_3(\varkappa)$ состоит из единственной точки y , а кривая $\Delta_2(\varkappa)$ состоит из единственной компоненты связности. На кривой $\Delta_2(\varphi)$ в окрестности точки y возникает 8 точек троекратного самопересечения поверхности $\varphi(S^2)$. Выбирая шевеление $\varphi' \rightarrow \varphi$ подходящим образом, можно считать, что других точек троекратного самопересечения поверхность $\varphi(S^2)$ не имеет. Кривая $\Delta_2(\varphi)$ имеет единственную компоненту связности, при этом ортогональная проекция $\Delta_2(\varphi) \rightarrow \Delta_2(\varkappa)$ является четырехлистным накрытием. Выбор ориентации θ на кривой $\Delta_2(\varphi)$ не влияет на тип точек $\Delta_3(\varphi)$. Две точки имеют тип В, остальные 6 имеют тип А. (Подробные объяснения имеются в [16].)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – открытый шар с границей $\Sigma \simeq S^2$. Рассмотрим тройку отображений $f_i: D_i^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, находящихся между собой и со сферой Σ в общем положении, таких, что $f_i|_{\partial D_i^2} \subset \mathbb{R}^3 \setminus U$. Обозначим $f_1 \cup f_2 \cup f_3$ через f , $D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2$ через $\mathcal{D}$. Пусть θ – произвольный набор ориентаций на компонентах кривой $\Delta_2(f)$. Сформулируем критерий, позволяющий оценить число точек $\Delta_3(f)$ типа В, расположенных внутри Σ , исходя из топологических свойств кривой $f(\mathcal{D}) \cap \Sigma$ и направления векторов ориентации θ в точках $\Delta_2(f) \cap \Sigma$.

Обозначим кривую $f_i(D_i^2) \cap \Sigma$ (возможно несвязную или даже пустую) через $\Pi_i = \{\Pi_{i,j}\}$. Обозначим через $\bar{\Pi}_i = \{\bar{\Pi}_{i,j}\}$ кривую $\bar{f} \circ f^{-1}(\Pi)$, вложенную в $\Sigma \times \mathbb{R}^1$, построенную при помощи $\theta|_{\Delta_2(f)}$. Кривая $\bar{\Pi}_i$ такова, что $\pi(\bar{\Pi}_i) = \Pi_i$.

Открытое многообразие $\Sigma \times \mathbb{R}^1$ компактифицируем посредством пары точек на каждом конце и получим вложение $\Sigma \times \mathbb{R}^1 \subset S^3$. Будем рассматривать $\bar{\Pi}_i$ как зацепление в сфере S^3 . Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 32. *Любая пара компонент $\bar{\Pi}_{i,k}$ и $\bar{\Pi}_{j,l}$ кривых $\bar{\Pi}_i, \bar{\Pi}_j \subset S^3$ зацеплена с нулевым коэффициентом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Pi_{i,k}, \Pi_{j,l}$ лежат на одном диске, скажем на D_1^2 , так что $i = j = 1$. Проведем доказательство для этого случая, для случая $i \neq j$ оно совершенно аналогично. Переобозначим $\Pi_{i,k}$ через R_1 , $\Pi_{j,l}$ через S_1 , $\bar{\Pi}_{i,k} \subset S^3$ через $\bar{R}_1$, $\bar{\Pi}_{j,l} \subset S^3$ через $\bar{S}_1$. Каждая кривая R_1 и S_1 , лежащая на D_1^2 , разбивает этот диск на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна диску, а другая кольцу. Пусть $V_1, W_1 \subset D_1^2$ – те области, которые примыкают к R_1 и S_1 с внутренней стороны сферы Σ . Рассмотрим компоненты R_2 и S_2 кривой Π , возможно несвязные, такие, что кривые $R_1 \cup R_2$ и $S_1 \cup S_2$ ограничивают на D_1^2 области $V'_1 \subset V_1$ и $W'_1 \subset W_1$, не содержащие внутри себя компонент кривой Π . Пленки $f(V'_1)$, $f(W'_1)$ осуществляют гомотопию нулю кривых $R_1 \cup R_2$ и $S_1 \cup S_2$, соответственно, в области U . Рассмотрим пленки $\bar{f}(V'_1)$ и $\bar{f}(W'_1)$ в области $U \times \mathbb{R}^1$. Пленка $\bar{f}(V'_1 \cup W'_2)$ вложена в $U \times \mathbb{R}^1$ во всех точках, за исключением точек из малых окрестностей $Q_\delta \subset U \times \mathbb{R}^1$, проектирующихся в малые шаровые области U_δ с центрами в точках типа В на поверхности $f(V'_1 \cup W'_1)$. Мы докажем, что $\text{lk}(\bar{S}_1, \bar{R}_1) = \text{lk}(\bar{S}_2, \bar{R}_2)$. Если пленка $\bar{f}(V'_1 \cup W'_1)$ вложена, то это очевидно. Пусть $y \in \Delta_3(f)$ – точка типа В, $\Pi_\delta = f(D_1^2) \cap \partial U_\delta$, $\bar{\Pi}_\delta \subset U_\delta \times \mathbb{R}^1$ – зацепление $\bar{f}(\Pi_\delta)$. Зацепление $\bar{\Pi}_\delta$ состоит из трех попарно незацепленных между собой компонент. Следовательно, наличие точек $\Delta_3(f)$ на пленке $f(V'_1 \cup W'_1)$ типа В не повлияет на коэффициент зацепления компонент $\bar{R}_2$ и $\bar{S}_2$. Теперь вместо исходного равенства мы будем доказывать равенство $\text{lk}(\bar{R}_2, \bar{S}_2) = 0$. Области $V_2, W_2 \subset D_1^2$ выберем примыкающими к R_2 и S_2 с внешней стороны Σ . Так же определим R_3 и S_3 . Установим равенство $\text{lk}(\bar{R}_2, \bar{S}_2) = \text{lk}(\bar{R}_3, \bar{S}_3)$. По индукции определим вложенные цепочки областей $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k \supset \dots$, $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_l \supset \dots$ с границами R_i и S_i . Области с четными номерами примыкают к Σ с внешней стороны, а области с нечетными номерами – с внутренней. Заметим, что при $i \neq j$ имеем $R_i \neq R_j$, $S_i \neq S_j$. С другой стороны, $\text{lk}(R_i, S_i) = \text{lk}(R_{i+1}, S_{i+1})$. Цепочки областей имеют конечные длины, следовательно, при большом i имеем $\text{lk}(R_i, S_i) = 0$. Это доказывает лемму 32.

Напомним определение и простейшие свойства операций Масси когомологических классов, порожденных в дополнении к трехкомпонентному полуограничивающему (см. ниже) зацеплению к сфере S^3 . Наше определение эквивалентно исходному, данному в работе [17]. Пусть $\bar{\Pi} \subset S^3$ – зацепление, компоненты которого разбиты на три класса $\bar{\Pi} = \{l_1, l_2, l_3\}$. При этом каждая компонента $l_i = \{l_{i,1}, \dots, l_{i,q}\}$, $i = 1, 2, 3$, может быть, вообще говоря, несвязной или пустой. Будем говорить, что зацепление $\bar{\Pi}$ является *трехкомпонентным* (в обобщенном смысле). Скажем, что зацепление $\bar{\Pi}$ является *полуограничивающим*, если для любых i, j, s, q коэффициент зацепления $\text{lk}(l_{i,s}, l_{j,q})$, $i, j = 1, 2, 3$, нулевой. Определена операция Масси, ставящая в соответствие полуограничивающему трехкомпонентному зацеплению с фиксированным порядком компонент целое число $M(\bar{\Pi})$.

Величина $M(\bar{\Pi}) \pmod{2}$ не зависит от порядка компонент и имеет геометрическое описание. Пусть $R_1 \subset S^3$ – поверхность Зейферта с границей на компоненте l_1 такая, что $R_1 \cap l_2 = \emptyset$. Такую поверхность можно выбрать, пользуясь условием полуограничиваемости зацепления $\bar{\Pi}$. Аналогично выбираются поверхности Зейферта R_2 и R_3 с границами на компонентах l_2 и l_3 . Пусть m – число точек трехкратного самопересечения поверхности $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Тогда $m \pmod{2}$ не зависит от выбора поверхностей R_1, R_2, R_3 . По определению положим $M(\bar{\Pi}) \pmod{2} = m \pmod{2}$. Важное свойство инварианта M состоит в следующем. Если зацепление $\bar{\Pi}$ подвергается бордизму в классе трехкомпонентных полуограничивающих зацеплений, то инвариант M не изменится. Конструкцию числа Масси M используем при формулировке следующего критерия.

Вернемся к изложенным выше построениям и рассмотрим зацепление $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_1 \cup \bar{\Pi}_2 \cup \bar{\Pi}_3 = f(\mathcal{D}) \cap \Sigma$. По лемме 32 это зацепление является полуограничивающим и определено число Масси $M(\bar{\Pi}) \pmod{2}$.

КРИТЕРИЙ 33. Пусть $\mathcal{B}\Pi \subset \Delta_3(f)$ – подмножество тройных точек самопересечения поверхности $f(\mathcal{D}) \cap U$, имеющих тип В и лежащих на пересечении всех трех дисков $D_1^2 \cap D_2^2 \cap D_3^2$. Тогда число $\text{ord}(\mathcal{B}\Pi) \pmod{2}$ точек этого множества совпадает с числом Масси $M(\bar{\Pi}) \pmod{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим 1-параметрическое семейство вложенных сфер $\Sigma_t \subset U$, находящихся в общем положении по отношению к $f(\mathcal{D})$, такое, что при $t = 0$ имеем $\Sigma_0 = \Sigma$, при $t = 1$ Σ_1 есть сфера малого радиуса такая, что $\Sigma_1 \cap f(\mathcal{D}) = \emptyset$. Для всех значений параметра t , исключая, быть может, конечное множества $\mathcal{T}$ особых значений, сфера Σ_t пересекает $f(\mathcal{D})$ в общем положении. Тем самым, для каждого зацепления $\bar{\Pi}_t = \bar{f} \circ f^{-1}(\Pi_t) \subset S^3$, где $\Pi_t = \Sigma_t \cap f(\mathcal{D})$, определено число Масси $M(t) = M(\bar{\Pi}_t)$. Для критических значений t из множества $\mathcal{T}$ сфера Σ_t пересекается с поверхностью $f(\mathcal{D})$ особым образом. Перечислим возникающие особенности.

- 1) Σ_t содержит точку $y \in \Delta_3(f)$. Различаются два подслучая:
  - а) y – точка из множества $\mathcal{B}\Pi$;
  - б) y – точка, не лежащая в этом множестве.
- 2) Σ_t касается кривой $\Delta_2(f)$.
- 3) Σ_t содержит сингулярную точку поверхности $f(\mathcal{D})$.
- 4) Σ_t касается поверхности $f(\mathcal{D})$.

В окрестности особой точки t_0 может выполняться одно из следующих равенств.

$$M(t_0 - \varepsilon) = M(t_0 + \varepsilon), \quad (6)$$

$$M(t_0 - \varepsilon) = M(t_0 + \varepsilon) + 1. \quad (7)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенство (6) выполняется для всех особых точек, за исключением точек $\Delta_3(f)$ из множества $\mathcal{B}\Pi$. Ниже доказываем, что для критического значения особенности из множества $\mathcal{B}\Pi$ выполнено равенство (7).

Пусть Σ_δ – сфера малого радиуса, окружающая точку y множества $\mathcal{B}\Pi$, $\bar{\Pi}_\delta$ – трехкомпонентное зацепление, построенное по кривой $\Sigma_\delta \cap f(\mathcal{D})$. Зацепление $\bar{\Pi}_\delta$

состоит из трех компонент и представляет собой “кольца Борромео”. Для такого зацепления имеем $M(\bar{\Pi}_\delta) = 1 \pmod{2}$. В окрестности точки $\mathcal{B}\text{III}$ семейство Σ_t можно выбрать таким, что при переходе через критический уровень t_0 зацепление $\bar{\Pi}_t$ изменяется посредством прибавления малого зацепления $\bar{\Pi}_\delta$ в окрестности y . Отсюда вытекает равенство (7). Очевидно, имеем $M(0) = M(\bar{\Pi})$, $M(1) = 0$. Следовательно, $\text{ord}(\mathcal{B}\text{III}) = M(\bar{\Pi})$. Критерий 33 доказан.

Используем критерий 33 при доказательстве следующей леммы. Пусть $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ отображение общего положения, $y \in \Delta_3(\varphi)$ – точка типа В такая, что все три ветви кривой $\Delta_2(\varphi)$, проходящие через точку y , лежат на одной компоненте этой кривой. Обозначим через U_y малую шаровую окрестность точки y .

ЛЕММА 34. Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число такое, что $\text{diam}(U_y) \gg \varepsilon$. Тогда для любого отображения общего положения $\varphi': M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, аппроксимирующего отображение φ в ε -окрестности пространства отображений, снабженного C^0 -топологией, и произвольной ориентации θ' на кривой $\Delta_2(\varphi')$ в окрестности U_y будет содержаться хотя бы одна точка, имеющая тип В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Рассмотрим погружение $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ из построения 29. Предположим, что существует вложение $\psi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ такое, что ψ – ε -аппроксимирует композицию $i \circ \varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ в C^0 -топологии. Выберем вложение ψ таким, что отображение $\varphi' = \pi \circ \psi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения. Пусть θ' – произвольная ориентация на кривой $\Delta_2(\varphi')$. Рассмотрим точку $y \in \Delta_3(\varphi)$, имеющую тип В, и пусть U_y – малая шаровая окрестность этой точки. По построению кривая $\Delta_2(\varphi)$ состоит из единственной компоненты связности. Применяя лемму 34, заключаем, что при любом выборе θ' внутри U_y будет находиться точка $\Delta_3(\varphi')$ типа В. Согласно лемме 31 никакое отображение $\psi': S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\pi \circ \psi' = \varphi'$, не является вложением. Полученное противоречие доказывает теорему 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 34. Пусть L_1, L_2, L_3 – три листа поверхности $\varphi(M^2)$ в окрестности точки $y \in \Delta_3(\varphi)$, $D_1^2, D_2^2, D_3^2 \subset M^2$ – вложенные диски, параметризующие L_i , $i = 1, 2, 3$, посредством φ . Обозначим $D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2$ через $\mathcal{D}$. В окрестности U_y кривую $\Delta_2(\varphi')$ можно разбить на две компоненты $\Delta \cup \Delta'$. Первая компонента Δ получена в результате попарных пересечений дисков $\varphi'(D_i^2)$. Эта компонента не имеет концевых точек внутри U и расположена внутри ε -окрестности V_ε кривой $\Delta_2(\varphi) \cap U_y$. Компонента Δ' образована локальными самопересечениями каждого из дисков. Ортогональная проекция $\Delta \rightarrow \Delta_2(\varphi)$ имеет нечетную степень. Заметим, что мы находимся в условиях критерия 33.

Докажем, что внутри U_y находится нечетное число точек множества $\mathcal{B}\text{III}$. (Число всех точек типа В внутри U_y может быть произвольным.) Заметим, что все такие точки лежат на тройных точках самопересечения кривой Δ . Проведем вспомогательную деформацию $\varphi \rightarrow \varphi'$ внутри и на границе области U_y , тождественную в области V_ε , такую, что $\varphi'' = \varphi$ вне малой окрестности V_ε . Далее определим ориентацию θ'' на кривой $\Delta_2(\varphi'')$ так, что $\theta'' = \theta'$ на компоненте Δ и θ'' произвольна на оставшихся компонентах. Множества точек $\mathcal{B}\text{III}$ у отображений φ' и φ'' тождественно совпадают, и для доказательства леммы достаточно установить, что отображение φ'' имеет внутри U_y нечетное число таких точек. Пусть

Π'' – полуограничивающее трехкомпонентное зацепление, построенное по кривой $\varphi''(\mathcal{D}) \cap \partial U_y$. Докажем формулу

$$M(\bar{\Pi}'') = 1 \pmod{2}. \quad (8)$$

Заметим, что зацепление $\bar{\Pi} \subset S^3$, построенное по кривой $\varphi(\mathcal{D}) \cap \partial U_y$, есть “кольца Борромео”. Зацепление $\bar{\Pi}'' \subset S^3$ расположено в ε -окрестности зацепления $\bar{\Pi}$. При этом $\bar{\Pi} \cong \bar{\Pi}''$ всюду, за исключением шести шаров $\bar{W}_{1,0}, \bar{W}_{1,1}, \bar{W}_{2,0}, \bar{W}_{2,1}, \bar{W}_{3,0}, \bar{W}_{3,1}$ малого радиуса, вложенных в S^3 , внутри которых зацепления $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Pi}''$ могут различаться. Каждый шар $\bar{W}_{i,j}$ проектируется посредством π в малый двумерный диск, лежащий в ∂U_y , обозначаемый через $\bar{W}_{i,j}$, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$. Нумерация шаров выбрана такой, что при обходе кривой $\Delta_2(\varphi)$ в направлении θ вдоль компоненты, троекратно проходящей через y , мы пересекаем ∂U_y в циклическом порядке по переменной i . Дополнительно потребуем, чтобы внутри шара $\bar{W}_{i,j}$ пересекались диски $\varphi(D_{i+1}^2)$ и $\varphi(D_{i+2}^2)$. Каждое пересечение кривой $\Delta_2(\varphi)$ с диском $W_{i,j}$ состоит из близкой пары точек, противоположных друг другу на ∂U_y . Нумерация каждой пары, заданная индексом j , согласована с очередностью прохождения точки вдоль выбранного направления обхода.

Пусть $l(i, j)$ – разность числа входящих и выходящих векторов θ'' вдоль $\Delta_2(\varphi'')$ в точках на компоненте Δ , лежащих в окрестности $W_{i,j}$. Имеем равенства:

$$l(i, 0) = -l(i, 1), \quad (9)$$

$$l(1, 0) = l(2, 0) = l(3, 0), \quad (10)$$

$$l(i, 0) = 1 \pmod{2}. \quad (11)$$

Равенство (9) следует из замкнутости Δ внутри U_y . Равенство (10) вытекает из того, что Δ можно рассмотреть как замкнутую компоненту вне U_y . Равенство (11) следует из того, что проекция $\Delta \rightarrow \Delta_2(\varphi)$ имеет нечетную степень.

Произведем перестройку $\bar{\Pi}'' \rightarrow \bar{\Pi}'''$ внутри окрестностей $\bar{W}_{i,j}$, не выходя из класса полуограничивающих зацеплений и сохраняя нумерацию компонент. Зацепление $\bar{\Pi}'''$ в окрестности $\bar{W}_{i,j}$ показано на рис. 1.

Рис. 1

Зацепление $\overline{\Pi}'''$ в каждом шаре $\overline{W}_{i,j}$ получено $[l(i,j) - 1]/2$ -кратной обмоткой компоненты $\overline{\Pi}_{i+1}'''$ вокруг компоненты $\overline{\Pi}_{i+2}'''$. При этом оставшиеся компоненты зацепления $\overline{\Pi}'''$, обозначенные через $\overline{S}_{i,j}$, также состоят из компонент с номерами $i + 1$ и $i + 2$ и являются полуграничивающими. Каждое зацепление $\overline{S}_{i,j}$ помещено внутри маленького шара, не пересекающегося с $\overline{\Pi}'''$. Итак, $\overline{\Pi}''' = \bigcup_i \overline{\Pi}_i''' \cup (\bigcup_{i,j} \overline{S}_{i,j})$, причем $\bigcup_i \overline{\Pi}_i'''$ — зацепление стандартного вида, для проекции которого на ∂U_y выполнены равенства (9)–(11). Очевидны равенства $M(\overline{S}_{i,j}) = 0$, $M(\overline{\Pi}''') = M(\bigcup_i \overline{\Pi}_i''')$. Непосредственно проверяется, что $M(\bigcup_i \overline{\Pi}_i''') = 1 \pmod{2}$. Это доказывает равенство (8). По критерию 33 множество $\mathcal{B}III$ для отображений φ' и φ'' состоит из нечетного числа точек. Лемма 34 доказана.

Приложение

Мы докажем следующий результат: *нормальное расслоение к произвольному (вообще говоря, неориентируемому) многообразию M^3 стабильно изоморфно одномерному ориентируемому расслоению.*

Эквивалентно, любое многообразие M^3 погружается в евклидово пространство $\mathbb{R}^4$. Мы пользовались этим в §2 при доказательстве следствия 19. Изложим элементарное доказательство, опираясь на конструкцию $\mathbb{Z}/4$ -квадратичной формы, определенной на одномерной группе гомологий $H_1(N^2; \mathbb{Z}/2)$ характеристической поверхности $N^2 \subset M^3$, построенной по диаграмме Хегора многообразия M . По поводу доказательства для случая ориентируемого M (теорема Штифеля), первоначально полученного Рохлиным, см. [18], [19]. Общий результат для многообразий произвольной размерности доказан в [23].

Пусть $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — правильная функция Морса. Условимся, что единственный максимум функции f имеет значение 1, единственный минимум — значение -1 ; критические значения индекса 2 близки к $1/2$; критические значения индекса 1 близки к $-1/2$. Число критических точек индексов 1 и 2 одинаково, это число обозначим через l . Поверхность $N^2 = f^{-1}[0]$ будем называть *характеристической*. Функция f определяет разбиение Хегора многообразия $M^3 \cong V_+^3 \cup_N V_-^3$; $\partial V_+ \cong \partial V_- \cong N^2$; $V_+ = f^{-1}[0, 1]$, $V_- = f^{-1}[-1, 0]$; $V_+ \cap V_- = N^2$. Заметим, что каждое многообразие V_+ , V_- гомотопически эквивалентно букету $\bigvee_{i=1}^l S_i^1$ окружностей.

Рассмотрим погружения $\varphi_+: V_+ \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $\varphi_-: V_- \rightarrow \mathbb{R}^4$. Ограничения $\varphi|_{\partial V_+}$ и $\varphi|_{\partial V_-}$ являются оснащенными погружениями, т.е. снабжены трансверсальными векторными полями ξ_+ и ξ_- , соответственно. Эти оснащения определены как ограничения погружений φ_+ и φ_- на окрестности краев. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА П1. *Для произвольного разложения Хегора многообразия M^3 , $M^3 \cong V_+ \cup V_-$, существуют погружения $\varphi_+: V_+ \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi_-: V_- \rightarrow \mathbb{R}^4$ такие, что оснащенные погружения $\varphi_+|_{\partial V_+}$ и $\varphi_-|_{\partial V_-}$ регулярно гомотопны в классе оснащенных погружений.*

Построим погружение $\varphi: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, опираясь на сформулированную лемму. Рассмотрим погружения φ_+ и φ_- , построенные в лемме, и оснащенную регуляр-

ную гомотопию F , их связывающую. Не ограничивая общности, выберем погружения такими, что

$$\begin{aligned}\varphi_+ &: (V_+, \partial V_+) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [1, +\infty[, \\ \varphi_- &: (V_-, \partial V_-) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times]-\infty, -1].\end{aligned}$$

При этом оба погружения трансверсальны вдоль краев. Регулярную гомотопию F выберем такой, что определено погружение

$$F: N^2 \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [-1, +1],$$

причем $F|_{N \times \{+1\}} = \varphi_+|_{\partial V_+}$, $F|_{N \times \{-1\}} = \varphi_-|_{\partial V_-}$. Искомое погружение $\psi: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задается по формуле

$$\psi = \varphi_+ \cup F \cup \varphi_-: V_- \cup_{\partial V_-} N^2 \times [-1, +1] \cup_{\partial V_+} V_+ \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ П1. Пусть $(\psi, \xi): N^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ – оснащенное погружение характеристической поверхности многообразия M^3 , полученное как ограничение погружения φ_+ на край $\partial V_+ = N^2$. Введем следующие обозначения: $H = H_1(N; \mathbb{Z}/2)$, $W_+ = \text{Ker}(H \rightarrow H_1(V_+; \mathbb{Z}/2))$, $W_- = \text{Ker}(H \rightarrow H_1(V_-; \mathbb{Z}/2))$. На векторном пространстве H размерности l определена невырожденная билинейная форма $\langle x, y \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/2$, $x, y \in H$, заданная операцией пересечения циклов в смысле Пуанкаре. По погружению (ψ, ξ) определяется $\mathbb{Z}/4$ -квадратичная форма, заданная функцией $q: H \rightarrow \mathbb{Z}/4$. Квадратичная $\mathbb{Z}/4$ -форма q связана с билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следующим соотношением:

$$q(x) + q(y) + q(x + y) = 2\langle x, y \rangle \pmod{4}. \quad (*)$$

По поводу определения и свойства формы q см. [17].

Подпространство W_+ является лагранжевым и $q|_{W_+} = 0$. Для доказательства леммы достаточно предъявить φ_+ такое, что $q|_{W_-} = 0$. В самом деле, это условие позволяет рассмотреть перестройку погруженной поверхности $\psi(N^2)$ по циклам, соответствующим базисным векторам W_- . При этом мы получим погружение $\varphi_-: V_- \rightarrow \mathbb{R}^4$ такое, что $\varphi_-|_{\partial V_-}$ регулярно гомотопно $\varphi_+|_{\partial V_+}$ и, следовательно, по лемме П1 погружение многообразия M^3 в $\mathbb{R}^4$.

Обозначим через $\overline{W} \subset H$ произвольное ортогональное относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ прямое дополнение к W_+ . При этом $H = \overline{W} \oplus W_+$. Рассмотрим отображение $q': \overline{W} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2$, где p – приведение mod 2, которое по свойству (*) является линейным. Обозначим через $\overline{W}_0 \subset \overline{W}$ подпространство $\text{Ker}(q')$. Спроектируем W_- на $\overline{W}$ вдоль W_+ посредством $\pi: W_+ \oplus \overline{W} \rightarrow \overline{W}$. Имеем $\pi(W_-) \subset \overline{W}_0$. В частности, для любых $x, y \in \pi(W_-)$ имеем $\langle x, y \rangle = 0$.

Рассмотрим разложение W_- в виде прямой суммы в модуле H ,

$$W_- = [\pi(W_-) \oplus \Gamma\pi(W_-)] \oplus [W_- \cap W_+],$$

где $\Gamma: \pi(W_-) \rightarrow W_+/(W_- \cap W_+)$ – линейный оператор, заданный как композиция $\pi(W_-) \xrightarrow{\pi^{-1}} W_- \longrightarrow W_+/(W_- \cap W_+)$.

ЛЕММА П2. Функция $\Phi: \pi(W_-) \rightarrow \mathbb{Z}/2$, определенная равенством $\Phi(x) = \langle x, \Gamma(x) \rangle$, $x \in \pi(W_-)$, является линейной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся свойствами билинейной формы и получим равенство

$$\langle x + y, \Gamma(x + y) \rangle = \langle x, \Gamma(x) \rangle + \langle y, \Gamma(y) \rangle + \langle y, \Gamma(x) \rangle + \langle x, \Gamma(y) \rangle \pmod{2}.$$

Покажем, что сумма двух последних слагаемых равна 0. В самом деле, пусть $\alpha = x + \Gamma(x)$, $\beta = y + \Gamma(y)$. Имеем

$$0 = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \Gamma(x), \Gamma(y) \rangle + \langle x, \Gamma(y) \rangle + \langle y, \Gamma(x) \rangle.$$

По свойству (*) $\langle x, y \rangle = q'(x) + q'(y) + q'(x + y) \pmod{2}$. Поскольку $x, y \in \pi(W_-)$, имеем $\langle x, y \rangle = 0$. Кроме того, $\langle \Gamma(x), \Gamma(y) \rangle = 0$. Лемма П2 доказана.

Выберем погружение $\varphi_+: V_+ \rightarrow \mathbb{R}^4$ таким, что $q|_{\pi(W_-)} = \Phi$. Заметим, что функция q принимает на π четные значения и является гомоморфизмом, поскольку форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на этом подпространстве вырождается. “Подкручивая” погружение φ_+ вдоль каждой компоненты букета, можно добиться того, что гомоморфизм q совпадает с произвольным, в частности, с Φ . Имеем по формуле (*): $q(x + \Gamma(x)) = q(x) + q(\Gamma(x)) + \langle x, \Gamma(x) \rangle$ для любого $x \in \pi(W_-)$. Но $q(\Gamma(x)) = 0$, так как $\Gamma(x) \in W_+$, $q(x) = \Phi(x) = \langle x, \Gamma(x) \rangle$ по построению. Отсюда $q(x + \Gamma(x)) = 0$. Лемма П1 доказана.

Список литературы

1. Шепин Е. В., Штанько М. А. Спектральный критерий вложимости компактов в евклидовы пространства // Ленинградская Международная Топологическая Конференция. Т. II. М.: Наука, 1983. С. 135–142.
2. Sieklucki K. Realization of mappings // Fund. Math. 1969. V. 65. №3. P. 325–343.
3. Daverman R. J. Problems about finite dimensional manifolds // Open problems in topology / ed. G. van Mill, Y.M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990.
4. Gromov M. Partial Differential Relations. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3 Folge, Band 9. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
5. Akhmetiev P., Szucs A. On the Hopf invariant in the homotopy groups of spheres. Geometric approach // Preprint, 1994.
6. Szucs A. Cobordism of immersions and singular maps, loop spaces and multiple points. Geometric and Algebraic topology. Banach center publications. V. 18: PWN-Polish scientific publishers Warszawa, 1986.
7. Szucs A. Geometrical proof of a theorem on suspension in homotopy groups of spheres // Colloquia Mathematica Soc. Janos Bolyai 55. Topology: Pecs (Hungary), 1989. P. 501–505.
8. Anderson D. A., Munkholm H. J. Foundations of boundedly controlled algebraic and geometric topology // Lecture Notes in Math. V. 1323. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1988.
9. Haefliger A. Plongements différentiables dans le domaine stable // Comment. Math. Helv. 1962–1963. V. 37. P. 155–176.
10. Repovš D., Skopenkov A. B., Scepin E. V. On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space // Ljubljana, September 27, 1993. Preprint. V. 31. P. 421.

11. *Francis G. K.* A Topological Picturebook. Berlin: Springer-Verlag, 1987, 1988.
12. *Szucs A.* Note on double points of immersions // Manuscripta Math. 1992. V. 76. P. 251–256.
13. *Milnor J. W., Stasheff J. P.* Characteristic classes. Princeton: New-Jersey, 1974.
14. *Freedman M.* Quadruple points of 3-manifolds in $\mathbb{R}^4$ // Comment. Math. Helvetici 1978. V. 53. P. 385–394.
15. *Ахметьев П. М.* Гладкие погружения многообразий малых размерностей // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 10. С. 3–27.
16. *Ахметьев П. М.* Прем-отображения, точки троекратного самопересечения ориентированной поверхности и теорема Рохлина о сигнатуре // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 803–810.
17. *Massey W. S.* Higher order linking numbers // Conf. on Algebraic topology. University of Chicago. P. 174–205.
18. *Guillou L., Marin A. (ed.)* A la recherche de la topologie perdue // Progress in Math. V. 62: Birkhauser, 1986.
19. *Kirby R.* The topology of 4-manifolds // Lecture Notes in Math. V. 1374, 1989.
20. *Cord Mc. C. Mc.* Embedding $\mathcal{P}$ -like continua in manifold // Canad. J. Math. 1976. V. 19. P. 321–332.
21. *Keesling J., Wilson D. C.* Embedding T^n -like continua in Euclidean Space // Topology Appl. 1985. V. 21. P. 241–249.
22. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
23. *Cohen R. L.* The immersion conjecture for differentiable manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 763–766.
24. *Ахметьев П. М.* Решение задачи реализации отображений n -сферы в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ // Труды МИАН. 1996. Т. 212. С. 35–43.

Институт земного магнетизма
ионосферы и распространения радиоволн РАН
E-mail: akhmetev@charley.izmiran.rssi.ru

Поступила в редакцию
01.11.1994