Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Матвеев, Об индексе мультипликативных групп алгебраических чисел,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 9, 59–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:12:18

УДК 511.36+511.61

Е. М. Матвеев

Об индексе мультипликативных групп алгебраических чисел

Пусть в алгебраическом поле фиксированы ненулевые числа с некоторыми линейно независимыми значениями логарифмов. Рассматривается множество чисел этого поля, логарифмы которых рационально выражаются через логарифмы данных чисел. Соответствующие векторы коэффициентов образуют решетку, содержащую стандартную целочисленную решетку в качестве подрешетки конечного индекса. В работе дается усиление верхней оценки этого индекса в терминах расширенных логарифмических высот участвующих чисел. Попутно это дает оценку коэффициентов в целочисленных линейных соотношениях между логарифмами алгебраических чисел.

Библиография: 13 названий.

§1. Введение

В 1933 г. Д. Лемер [1] выдвинул гипотезу, что так называемая мера Малера целых алгебраических чисел, отличных от нуля и корней из единицы, ограничена снизу абсолютной константой $c > 1$. Напомним, что для числа α , являющегося корнем неприводимого (в том числе примитивного) многочлена

$$a_0(X - \alpha^{(1)}) \cdots (X - \alpha^{(d)}) = a_0 X^d + \cdots + a_{d-1} X + a_d \in \mathbb{Z}[X], \quad a_0 \neq 0,$$

мерой Малера называется выражение $M(\alpha) := |a_0| \prod_{\sigma=1}^d \max\{1, |\alpha^{(\sigma)}|\}$. До сих пор гипотеза Лемера не доказана, хотя найденное им минимальное значение

$$M(\theta_{10}) = \theta_{10} = 1.176\ldots,$$

где θ_{10} – корень многочлена

$$x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1,$$

не улучшено, несмотря на продолжительный компьютерный поиск.

Из теоретических результатов следует упомянуть следующее.

Прежде всего, очевидно, что минимум следует искать среди целых алгебраических чисел ($a_0 = 1$) и даже среди алгебраических единиц ($a_d = \pm 1$), поскольку для других чисел мы имеем $M(\alpha) \geq 2$. Далее, в 1971 г. К. Смит [2] доказал гипотезу Лемера для обширного класса чисел. Результат Смита гласит, что если α – не взаимное число, то $M(\alpha) \geq \theta_3 = 1.324\ldots$, где θ_3 – корень многочлена $x^3 - x - 1$. (*Взаимным* называется число α , минимальный многочлен которого симметричен, равносильно, α и $1/\alpha$ алгебраически сопряжены.)

В 1971 г. Бланксби и Монтгомери [3] доказали общую оценку

$$M(\alpha) \geq 1 + \frac{1}{52d \ln(6d)}.$$

В 1979 г. Е. Добровольский [4] получил лучшую на сегодня асимптотическую оценку

$$\ln M(\alpha) \geq (2 - \varepsilon) \left(\frac{\ln \ln d}{\ln d} \right)^3, \quad d > d_0(\varepsilon).$$

В 1996 г. П. Вутье [5] заменил в оценке Добровольского величину $2 - \varepsilon$ на $1/4$ для всех $d \geq 6$.

Другой задачей, имеющей важные приложения особенно в теории линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, являются оценки с учетом величины $|\ln \alpha|$, где объединяющий параметр имеет вид

$$A \geq \max\{\ln M(\alpha), |\ln \alpha|\}.$$

Отметим, что здесь корни из единицы вида $\zeta_q = e^{2\pi i/q}$ участвуют на равных с остальными числами, поскольку для них имеем $d = \deg \zeta_q = \varphi(q)$ — функция Эйлера, и

$$|\ln \zeta_q| = \frac{2\pi}{q} \geq \frac{\pi}{2d \ln \ln(6d)}.$$

По этой причине утверждение, аналогичное гипотезе Лемера, неверно. Также заметим, что оценка $|\ln \zeta_q|$ имеет примерно такой же порядок малости, что и оценка Бланксби–Монтгомери для $\ln M(\alpha)$.

В работах по линейным формам от логарифмов давно было замечено, что в случае малости $|\ln \alpha|$ по сравнению с A можно получать значительно более сильные результаты. Такая ситуация описывается параметром $E \geq A/|\ln \alpha|$. Это равносильно тому, что можно вставить этот параметр в определение числа A и считать $A \geq \max\{\ln M(\alpha), E|\ln \alpha|\}$.

В 1999 г. автор [6] сделал важное наблюдение, а именно — в алгебраическом поле не может быть нескольких мультипликативно независимых малых чисел. Для количественного описания этой ситуации следует ввести более детальные обозначения.

Во-первых, до конца работы у нас будет зафиксировано алгебраическое поле $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ степени $D = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, при этом положим $\kappa = 1$, если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, и $\kappa = 2$ в противном случае. Имеется D гомоморфизмов $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$: $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^{(\sigma)} \subseteq \mathbb{C}$, $\sigma = 1, \dots, D$. Мы будем отождествлять $\mathbb{K} = \mathbb{K}^{(1)}$, кроме того, при $\kappa = 2$ считаем $\mathbb{K}^{(2)}$ комплексно сопряженным с $\mathbb{K}$.

Во-вторых, для $\alpha \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ положим

$$h(\alpha) := \frac{1}{2D} \sum_{\sigma=1}^{\infty} |\ln |\alpha|_{\sigma}|, \quad H(\alpha) := \frac{D}{\kappa} h(\alpha), \quad H^*(\alpha) := \frac{1}{2\kappa} \sum_{\sigma > \kappa} |\ln |\alpha|_{\sigma}|,$$

где $|\alpha|_{\sigma}$ означает нормализованное нормирование и будет уточнено в следующем параграфе. Величина $h(\alpha)$ называется *абсолютной логарифмической высотой* числа, она равна $\ln M(\alpha)/d$ и не зависит от поля, в которое помещено число. Выражения $H(\alpha)$, $H^*(\alpha)$ назовем соответственно *логарифмической высотой в поле*

и *неполной логарифмической высотой* (они зависят также от вложения $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$). Если дополнительно выбрано значение $\ln \alpha \in \mathbb{C}$ и зафиксирован параметр $E > 0$, то *расширенной логарифмической высотой* числа α назовем выражение

$$H_E^*(\alpha) := \max\{H^*(\alpha), E|\ln \alpha|\}.$$

Отметим, что в работе [6] вместо параметра E был использован параметр $\theta = 1/E$, стоявший перед компонентой $H^*(\alpha)$. С учетом этого мы и будем приводить результаты работы [6].

В-третьих, нам потребуется еще один параметр. Далее у нас будет зафиксирован набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ с выбранными значениями логарифмов, линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Теперь рассмотрим числа $\beta \in \mathbb{C}$ и их логарифмы, определяемые соотношением

$$\ln \beta = m_1 \ln \alpha_1 + \dots + m_n \ln \alpha_n.$$

Очевидно, при $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ мы имеем $\beta \in \mathbb{K}^*$. Однако могут быть и другие наборы $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Q}^n$, для которых также $\beta \in \mathbb{K}^*$. Обозначим множество таких векторов $\mathbf{m}$ через M . Известно, что при линейной независимости логарифмов множество M будет решеткой, содержащей $\mathbb{Z}^n$ как подрешетку конечного индекса. Положим

$$N = [M : \mathbb{Z}^n].$$

Одним из результатов работы [6] (см. также [7; предложение 5.1]) было

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (см. [6; теорема 6.2]). *Имеет место неравенство*

$$H_E^*(\alpha_1) \cdots H_E^*(\alpha_n) C_{1.1}^n n^\kappa \left(\frac{D}{\kappa}\right) \ln \left(\frac{e^{n+4} D}{\kappa}\right) > N, \quad (1.1)$$

$$C_{1.1} = \frac{e^{\kappa/(1+4/E)} (1 + 4/E)}{2}.$$

Неравенство (1.1) играет двоякую роль. Во-первых, оно дает нетривиальную совместную нижнюю оценку расширенных логарифмических высот мультипликативно независимых чисел, так как всегда $N \geq 1$. Во-вторых, оно дает верхнюю оценку индекса указанной выше числовой группы. Оба эти обстоятельства были существенно использованы автором при усилении оценок линейных форм от логарифмов алгебраических чисел [7].

Вскоре в 2000 г. появилась статья Аморозо и Давида [8], в которой было получено важное асимптотическое усиление оценки (1.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 (см. [8; теорема 1.6]). *Пусть $k(n) := (n+1)(n+1)!^n - n$. Тогда для любых ненулевых мультипликативно независимых алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ выполняется неравенство*

$$h(\alpha_1) \cdots h(\alpha_n) D \ln^{nk(n)}(3D) \geq c(n), \quad (1.2)$$

где $c(n) > 0$ – некоторая константа.

По сравнению с оценкой (1.1) в (1.2) произошли следующие усиления. Во-первых, не требуется выбор $\ln \alpha_j$, и, во-вторых, в абсолютной логарифмической высоте происходит деление на D , что усиливает оценку в D^n раз. Так что при фиксированном n и растущем D совместная оценка высот в неравенстве (1.2) получается лучше, чем в (1.1).

К достоинствам оценки (1.1) относятся: явный вид со сравнительно небольшими коэффициентами (так, преимущество оценки (1.2) начинает проявляться только при $\ln D > n(n+1)!^n$) и наличие верхней оценки индекса, что после статьи Аморозо и Давида выдвигается на первый план.

В настоящей работе мы снова возвращаемся к оценке типа (1.1). Дело в том, что ее зависимость от параметра E получилась несильной. Хотя константа $C_{1.1}$ в оценке не велика, но ее улучшение с ростом E ограничено, поскольку всегда остается $1 + 4/E > 1$. Оказывается, при больших значениях E неравенство (1.1) можно заметно усилить.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть дан набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ с выбранными значениями логарифмов, линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. В действительном случае ($\kappa = 1$) считаем числа α_j положительными, а значения их логарифмов — главными. Параметры $A_1, \dots, A_n$, E , E_1 , C , $\eta > 0$, $J_1 \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям*

$$\frac{H^*(\alpha_1)}{A_1} + \dots + \frac{H^*(\alpha_n)}{A_n} \leq n, \quad (1.3)$$

$$\max \left| \pm \frac{\ln \alpha_1}{A_1} \pm \dots \pm \frac{\ln \alpha_n}{A_n} \right| \leq \frac{n}{E}, \quad (1.4)$$

$$J_1 \geq \kappa + D \ln(J_1 + 1), \quad (1.5)$$

$$E_1 e^{E_1 + 1 + 1/\kappa} \geq 2E \left(1 + \frac{1}{J_1 - 1} \right), \quad (1.6)$$

$$C = \frac{n(1 + 1/(J_1 - 1))}{2E_1}, \quad \eta = \frac{e^{E_1 + 1 + 1/\kappa}}{4C}, \quad (1.7)$$

$$C_{1.3} = C^n \left(\frac{n\eta}{E} \right)^\kappa.$$

Тогда выполняется неравенство

$$N \leq A_1 \cdots A_n C_{1.3} J_1. \quad (1.8)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Если в условиях теоремы 1.3 выполняется $H_E^*(\alpha_j) \leq A_j$, $j = 1, \dots, n$, то имеет место оценка (1.8).*

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Пусть*

$$\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*, \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}}\{\ln \alpha_0, \dots, \ln \alpha_n\} = n, \quad H_E^*(\alpha_j) \leq A_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Тогда существует такой ненулевой набор $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, что

$$m_0 \ln \alpha_0 + \dots + m_n \ln \alpha_n = 0 \quad (1.9)$$

и в обозначениях теоремы 1.3 выполняются неравенства

$$|m_j| A_j \leq A_0 \cdots A_n C_{1.3} J_1, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1.10)$$

В §4 приводится обсуждение этих результатов и их упрощение.

§ 2. Предварительные сведения

В настоящем параграфе уточняются основные обозначения и приводятся вспомогательные результаты, которые будут использованы при доказательстве основной теоремы 1.3. В целом доказательство теоремы 1.3 практически воспроизводит аналогичное доказательство из работы [6].

Сначала уточним определение нормирований поля $\mathbb{K}$. Для этого пронумеруем простые идеалы $\mathfrak{p}$ из кольца целых чисел поля индексами $\sigma > D$ в порядке возрастания их норм $-\text{Norm } \mathfrak{p}$. Тогда для числа $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $m = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\sigma$, положим

$$|\alpha|_\sigma := \begin{cases} |\alpha^{(\sigma)}|, & 1 \leq \sigma \leq D, \\ (\text{Norm } \mathfrak{p})^{-m}, & \sigma > D. \end{cases}$$

Нормирования, соответствующие комплексно сопряженным σ , равны, но мы учитываем их оба. Это позволяет не проводить их специальную нормализацию и работать с ними как с обычным модулем. Кроме того, удобство такого учета, а также вышеуказанной нормализации неархимедовских нормирований состоит в формуле произведения без весовых коэффициентов, принимающей после логарифмирования вид

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \ln |\alpha|_\sigma = 0, \quad \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad (2.1)$$

при этом $|\alpha|_\sigma \neq 1$ может быть только для конечного числа индексов σ .

Далее, приведем необходимые сведения из геометрии чисел. Соответствующие сведения можно найти в [9]. *Решеткой* мы будем называть дискретную подгруппу конечномерного векторного пространства над $\mathbb{R}$. Каждая решетка M имеет целочисленный базис, т.е. $M = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, причем базисные векторы линейно независимы над $\mathbb{R}$. В настоящей работе нам понадобятся только полные решетки, базис которых является базисом всего пространства. Так что в таком базисе пространства векторы решетки будут иметь координаты из $\mathbb{Z}^n$. Объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах решетки, не зависит от выбора базиса и называется *объемом решетки* $\text{Vol}(M)$.

Подгруппы решетки сохраняют дискретность и поэтому тоже являются решетками (подрешетками). Если $\Lambda \subseteq M$ — две полные решетки, то индекс $[M : \Lambda]$ конечен, а из теории групп известно, что выполняется

$$[M : \Lambda] \mathbf{a} \in \Lambda, \quad \mathbf{a} \in M. \quad (2.2)$$

Имеет место формула

$$\text{Vol}(\Lambda) = [M : \Lambda] \text{Vol}(M). \quad (2.3)$$

Кроме того, нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1 (теорема Бlichфельда). *Пусть в пространстве заданы полная решетка M и компактное тело $\mathcal{W}$. Тогда найдутся различные точки $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_J \in \mathcal{W}$, для которых $\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_0 \in M$, $j = 1, \dots, J$ (т.е. сравнимые по модулю решетки), и при этом $J \geq \text{Vol}(\mathcal{W}) / \text{Vol}(M)$.*

Из геометрии выпуклых тел нам потребуется лемма, доказанная в [10] (также приводится в [6] и доказывается с большей степенью подробности в [7]):

ЛЕММА 2.2 (см. [10; лемма 5.1]). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дано выпуклое $\mathbf{0}$ -симметричное тело $\mathcal{K}$ и линейная форма $\mathbf{f}$ с действительными ($\kappa = 1$) или комплексными ($\kappa = 2$) коэффициентами. Положим

$$\eta_0 = \frac{1}{\sup\{\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathcal{K}\}}, \quad \mathcal{E}(\eta) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}| \leq \frac{1}{\eta} \right\}, \quad \eta > 0$$

($\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ обозначает значение линейной формы $\mathbf{f}$ на векторе $\mathbf{v}$). Тогда

$$\text{Vol}(\mathcal{K} \cap \mathcal{E}(\eta)) \geq \left(\min \left\{ 1, \frac{\eta_0}{\eta} \right\} \right)^\kappa \text{Vol}(\mathcal{K}).$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_J \in \mathbb{K}^*$ – различные числа с фиксированными значениями логарифмов, $J \geq 2$; $z_1 \in \mathbb{C}$; $x_\sigma \in \mathbb{R}$ ($\sigma > \kappa$) – некоторые числа. Пусть с некоторыми $X, Y > 0$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\kappa} \sum_{\sigma > \kappa} \max_{1 \leq j \leq J} |x_\sigma + \ln |\beta_j|_\sigma| \leq X, \quad \max_{1 \leq j \leq J} |z_1 + \ln \beta_j| \leq Y. \quad (2.4)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\frac{D}{\kappa} \cdot \frac{\ln J}{J-1} + 1 + \frac{XJ}{J-1} - \ln \left(\frac{2(J-1)}{JY} \right) \geq 0. \quad (2.5)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Неравенства (2.4) означают, что числа β_j близки друг к другу, а при достаточно малых значениях X, Y неравенство (2.5) приближенно имеет вид $(D/\kappa)(\ln J)/(J-1) \geq \text{const} > 0$ и фактически ограничивает сверху J – количество таких чисел β_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хотя лемма доказана в [6; лемма 7.2], но ввиду краткости доказательства и сильно изменившихся обозначений мы воспроизведем его.

Положим $T = (J-1)/2$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} F(z) &= z^{-2JT} (\beta_1 \dots \beta_J)^{-2Tz} \det^2 (\beta_j^{z(t-1)})_{j,t=1,\dots,J} \\ &= z^{-2JT} \det^2 (\beta_j^{z(t-1-T)})_{j,t=1,\dots,J} \\ &= z^{-2JT} \det^2 (e^{z(t-1-T)(z_1 + \ln \beta_j)})_{j,t=1,\dots,J} \end{aligned}$$

(добавить z_1 можно, так как сумма по t чисел $(t-1-T)$ равна нулю).

Поскольку здесь стоит определитель Вандермонда, по условию мы имеем $\Delta = F(1) \neq 0$. Кроме того, определитель Вандермонда дает множители вида $(\beta_j^z - \beta_k^z)$, $j \neq k$, имеющие нуль при $z = 0$. Всего таких множителей $J(J-1) = 2JT$ штук, поэтому $F(z)$ имеет при $z = 0$ устранимую особенность.

Для оценки $|F(z)|$ применим неравенство Адамара и условие (2.4):

$$|F(z)| \leq |z|^{-2TJ} J^J \exp \left(2Y|z| \sum_{t=1}^J |t-1-T| \right) \leq |z|^{-2TJ} J^J e^{|z|YJ^2/2}. \quad (2.6)$$

Теперь рассмотрим окружность $|z| = R = 4T/(JY)$. Если $R \leq 1$, то неравенство (2.5) очевидно выполнено. Если $R > 1$, то применение принципа максимума дает

$$\begin{aligned} \ln |\Delta| = \ln |F(1)| &\leq \max_{|z|=R} |F(z)| \leq J \ln J - 2TJ \ln |z| + \frac{|z|YJ^2}{2} \\ &= J \ln J + J(J-1) - J(J-1) \ln \left(\frac{2(J-1)}{JY} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, мы имеем $\Delta = F(1) \in \mathbb{K}^*$. Неравенство (2.7), а также (2.6) при $z = 1$ дают оценку $|\Delta|_\sigma$, $\sigma \leq \kappa$. Неравенства, аналогичные (2.6), получаются и для остальных σ , только для неархимедовских нормирований ($\sigma > D$) множителя J^J не будет:

$$\ln |\Delta|_\sigma \leq J \ln J + \left(\frac{J^2}{2} \right) \max_{1 \leq j \leq J} |x_\sigma + \ln |\beta_j|_\sigma|, \quad \kappa < \sigma \leq D; \quad (2.8)$$

$$\ln |\Delta|_\sigma \leq \left(\frac{J^2}{2} \right) \max_{1 \leq j \leq J} |x_\sigma + \ln |\beta_j|_\sigma|, \quad \sigma > D. \quad (2.9)$$

Сложение неравенств (2.7)–(2.9) (в зависимости от σ) дает, с учетом обозначения (2.4) для X после деления на $\kappa J(J-1)$ и применения формулы произведения (2.1), неравенство (2.5).

§ 3. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть M – решетка из условий теоремы 1.3. Согласно формуле (2.3) с $\Lambda = \mathbb{Z}^n \subseteq M$ мы имеем

$$\text{Vol}(M) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{Z}^n)}{N} = \frac{1}{N}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейную форму $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = v_1 \ln \alpha_1 + \dots + v_n \ln \alpha_n$ и определим тело $\mathcal{K}$ условиями

$$|w_j| \leq \frac{1}{A_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и для параметра η из условий (1.7) определим тело $\mathcal{K}_\eta$ формулой

$$\mathcal{K}_\eta = \mathcal{K} \cap \mathcal{E}(\eta) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathcal{K} : |\mathbf{f} \cdot \mathbf{w}| \leq \frac{1}{\eta} \right\}.$$

Отметим, что для векторов $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ мы согласно (1.4) имеем

$$|\mathbf{f} \cdot \mathbf{w}| = |w_1 \ln \alpha_1 + \dots + w_n \ln \alpha_n| \leq \frac{n}{E},$$

т.е. для η_0 из леммы 2.2 выполняется $\eta_0 \leq E/n$. Из условий (1.6), (1.7) мы имеем

$$\frac{\eta}{\eta_0} \geq \frac{n\eta}{E} \geq \frac{E_1 e^{E_1+1+1/\kappa}}{2E(1+1(J_1-1))} \geq 1.$$

Лемма 2.2 тогда дает, что

$$\text{Vol}(\mathcal{K}_\eta) \geq \left(\min \left\{ 1, \frac{\eta_0}{\eta} \right\} \right)^\kappa \text{Vol}(\mathcal{K}) \geq \left(\frac{n\eta}{E} \right)^{-\kappa} \frac{2^n}{A_1 \cdots A_n}.$$

Из формулы (3.1) и теоремы Бlichфельта следует существование таких различных векторов $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_J \in \mathcal{W} = \mathcal{K}_\eta / (2C)$ (C из (1.7)), что $\mathbf{m}_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_0 \in \mathbf{M}$, $j = 1, \dots, J$, и

$$J \geq \frac{\text{Vol}(\mathcal{W})}{\text{Vol}(\mathbf{M})} \geq \left(\frac{n\eta}{E} \right)^{-\kappa} \frac{NC^{-n}}{A_1 \cdots A_n}. \quad (3.2)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.3, взяв

$$\begin{aligned} z_\sigma &= v_{1,0} \ln \alpha_1^{(\sigma)} + \cdots + v_{n,0} \ln \alpha_n^{(\sigma)}, & \sigma &\leq \kappa, \\ x_\sigma &= v_{1,0} \ln |\alpha_1|_\sigma + \cdots + v_{n,0} \ln |\alpha_n|_\sigma, & \sigma &= 1, 2, \dots, \\ \ln \beta_j &= m_{1,j} \ln \alpha_1 + \cdots + m_{n,j} \ln \alpha_n, & j &= 1, \dots, J. \end{aligned}$$

Покажем, что условия (2.4) выполнены с

$$X = \frac{n}{2C}, \quad Y = \frac{1}{2C\eta}.$$

Из определения тела $\mathcal{K}_\eta$ и векторов $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{m}_j$ мы имеем

$$\begin{aligned} |z_1 + \ln \beta_j| &= |\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{m}_j)| = |\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_j| = |v_{1,j} \ln \alpha_1 + \cdots + v_{1,n} \ln \alpha_n| \\ &\leq \frac{1}{2C\eta} = Y, \\ |x_\sigma + \ln |\beta_j|_\sigma| &= |v_{1,j} \ln |\alpha_1|_\sigma + \cdots + v_{n,j} \ln |\alpha_n|_\sigma| \\ &\leq \frac{1}{2C} \left(\frac{|\ln |\alpha_j|_\sigma|}{A_1} + \cdots + \frac{|\ln |\alpha_n|_\sigma|}{A_n} \right), \end{aligned}$$

а за счет условия (1.3) на параметры A_j выполняется

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \sum_{\sigma > \kappa}^\infty \max_{1 \leq j \leq J} |x_\sigma + \ln |\beta_j|_\sigma| &\leq \frac{1}{2\kappa} \sum_{\sigma > \kappa}^\infty \frac{1}{2C} \left(\frac{|\ln |\alpha_1|_\sigma|}{A_1} + \cdots + \frac{|\ln |\alpha_n|_\sigma|}{A_n} \right) \\ &\leq \frac{1}{2C} \left(\frac{H_E^*(\alpha_1)}{A_1} + \cdots + \frac{H_E^*(\alpha_n)}{A_n} \right) \leq \frac{n}{2C} = X. \end{aligned}$$

Проверим, что числа β_j различны. Отметим, что вследствие линейной независимости логарифмов $\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n$ равенство чисел β_j возможно только в случае $\ln \beta_j - \ln \beta_\kappa = 2\pi i \mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \neq 0$. Но у нас

$$0 \neq |\ln \beta_j - \ln \beta_\kappa| \leq 2Y = \frac{1}{C\eta} \leq \frac{4}{e^{E_1+1+1/\kappa}} < 2\pi,$$

следовательно, числа β_j различны и применение леммы 2.3 дает выполнение неравенства (2.5).

Теперь с учетом неравенства (3.2) для доказательства теоремы 1.3 достаточно получить оценку $J \leq J_1$.

Если $J \leq J_1$, то требуемая оценка уже есть. Так что можно считать $J \geq J_1 + 1 \geq 2$ и применять лемму 2.3. Неравенство (2.5) после умножения на $(J - 1)$, подстановки выражений для X, Y, η и приведения подобных членов примет вид

$$\frac{D}{\kappa} \ln J - (J - 1)E_1 + \frac{nJ}{2C} + (J - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{J - 1} \right) \geq 0.$$

После подстановки C из формулы (1.7) и обозначения $\varepsilon_1 = 1/(J_1 - 1)$ получаем следующее неравенство

$$\frac{D}{\kappa} \ln J - \frac{1 + (E_1 \kappa + 1)\varepsilon_1}{(1 + \varepsilon_1)\kappa} J + E_1 + \frac{1}{\kappa} + (J - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{J - 1} \right) \geq 0.$$

Теперь можно заменить $(J - 1) \ln(1 + 1/(J - 1))$ на 1 с усилением неравенства, а ε_1 — на меньшее число $\varepsilon = 1/(J - 1)$ также с усилением неравенства. После умножения на κ и приведения подобных членов это дает неравенство

$$J - 1 - \kappa - D \ln J < 0. \quad (3.3)$$

Покажем, что из неравенства (3.3) также следует $J < J_1 + 1$.

Из условия (1.5) с учетом $J_1 \in \mathbb{N}$ мы имеем $J_1 \geq 2$ и, значит, $J_1 \geq 1 + D \ln 3 > D$. При $J = J_1 + 1 > D$ левая часть неравенства (3.3) в силу условия (1.5) неотрицательна, а с ростом J она возрастает, поэтому при $J \geq J_1 + 1$ неравенство (3.3) неверно.

Следствие 1.4 сразу получается из теоремы 1.3, поскольку условия (1.3), (1.4) выполняются в силу определения расширенной логарифмической высоты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.5. Рассмотрим какой-нибудь один индекс, скажем $j = 0$. Если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}\{\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n\} < n$, то $\ln \alpha_0$ в линейном соотношении (1.9) не участвует, т.е. $m_0 = 0$, и для него неравенство тривиально. Если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}\{\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n\} = n$, то согласно формуле (2.2) имеется целочисленное соотношение между логарифмами с $m'_0 = N$, при этом применимо следствие 1.4, в котором оценка (1.8) индекса N дает оценку (1.10) для $j = 0$, так как множитель A_0 сокращается. Аналогичные рассуждения для остальных j также дают оценку m'_j вида (1.10), где пока что для каждого j может быть свой вектор $\mathbf{m}$.

Поскольку по условию $\text{rank}_{\mathbb{Z}}\{\ln \alpha_0, \dots, \ln \alpha_n\} = n$, соотношение между векторами единственно с точностью до множителя из $\mathbb{Z}$, сокращение которого сохраняет оценки коэффициентов. Так что в неравенстве (1.10) оценка при различных j относится к одному и тому же вектору $\mathbf{m}$, если считать его примитивным.

§ 4. Обсуждение результатов

В отличие от вполне явной оценки (1.1) основная теорема 1.3 содержит некоторую неопределенность в приложениях, поскольку в ее условиях присутствуют параметры, значения которых требуют подгонки, причем их выбор неочевиден и может сильно повлиять на качество оценки (1.8). Это оставлено по той причине, что точные формулы для оптимальных значений параметров были бы слишком

громоздки. В важных частных случаях подгонку можно сделать численно. Ниже мы приведем огрубленный выбор параметров.

Смысл параметров $A_1, \dots, A_n, E$, определяющих выполнение условий (1.3), (1.4), был объявлен ранее и виден в следствии 1.4. Отметим только, что поскольку $H^*(\alpha) \leq H(\alpha)$, в формулировках результатов можно заменить $H^*(\alpha)$ на $H(\alpha)$ с некоторым ослаблением утверждений. Так, в случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ и $\alpha = p$ – простое число, мы имеем $H(\alpha) = \ln p$, а $H^*(\alpha) = (\ln p)/2$, т.е. получаем выигрыш в два раза.

Ниже мы приведем упрощенные рабочие формулы для параметров E_1, J_1 , считая значения $A_1, \dots, A_n, E$ фиксированными. При этом отметим, что наилучшая ситуация в условиях (1.5), (1.6) не обязательно будет при выполнении в них равенств. Рассмотрим сначала главное усиление настоящей статьи – случай большого значения E .

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varepsilon_1, E_1^*, E_0, E_0'$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{J_1 - 1}, & E_1^* e^{E_1^* + 1 + 1/\kappa} &= 2E(1 + \varepsilon_1), \\ E_0 &= 2E e^{-1 - 1/\kappa} (1 + \varepsilon_1), & E_0' &= E_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда при $E_0 > 1$ выполняется двусторонняя оценка

$$\ln\left(\frac{E_0}{\ln E_0}\right) < E_1^* \leq \ln\left(\frac{E_0'}{\ln E_0'}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прологарифмируем неравенство (1.6) и подставим в него $E_1 = \ln(E_0' / \ln E_0')$:

$$\begin{aligned} E_1 + \ln E_1 + 1 + \frac{1}{\kappa} &= \ln\left(\frac{E_0'}{\ln E_0'}\right) + \ln\left(\ln\left(\frac{E_0'}{\ln E_0'}\right)\right) + 1 + \frac{1}{\kappa} \\ &= \ln\left(2E e^{-1 - 1/\kappa} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-1} (1 + \varepsilon_1)\right) + \ln\left(1 - \frac{\ln \ln E_0'}{\ln E_0'}\right) + 1 + \frac{1}{\kappa} \\ &\geq \ln(2E(1 + \varepsilon_1)). \end{aligned}$$

Значит, условие (1.6) выполнено, следовательно, $E_1^* \leq \ln(E_0' / \ln E_0')$. Аналогично доказывается другое неравенство.

Таким образом, $E_1^* \sim \ln(E_0 / \ln E_0) \sim \ln E, E \rightarrow \infty$. При выборе $E_1 = E_1^*$ мы имеем $n\eta/E = 1$, так что зависимость оценки (1.8) от E проявляется в параметре C и имеет вид $E_1^{-n} \sim (\ln E)^{-n}$, т.е. неограниченно улучшается с ростом E . Это основное отличие теоремы 1.3 от предложения 1.1.

Случай небольших значений E фактически был рассмотрен в работе [6]. Здесь ситуация оказывается совершенно иной, чем для больших E . Дело в том, что общая зависимость оценки (1.8) от параметра E_1 с учетом его вхождения в η имеет вид $e^{\kappa E_1} / E_1^{n-\kappa}$, поэтому решение небольшой задачи на экстремум показывает, что выгоднее брать $E_1 \geq (n - \kappa)/\kappa$ (для простоты $E_1 \geq n/\kappa$), а не $E_1 = E_1^*$. При доказательстве теоремы 1.3 этому соответствует случай, когда для получения тела $\mathcal{K}_\eta$ от параллелограмма $\mathcal{K}$ приходится отсекал углы.

При $E_1^* \leq n/\kappa$ выбор $E_1 = n/\kappa$ допустим, так как дает выполнение условия (1.6), и мы получаем $e^{\kappa E_1}/E_1^{n-\kappa} = (n/\kappa)^\kappa e^n \kappa^n / n^n$, где главное — это появление в знаменателе факториального множителя n^n по сравнению с выбором $E_1 = E_1^*$. Это усиление было впервые получено автором в работе [10] при исследовании линейных форм от логарифмов алгебраических чисел. В предложении 1.1 этот фактор тоже был учтен. Так что для простоты можно считать

$$E_1 \geq \max\left\{\frac{n}{\kappa}, E_1^*\right\}. \quad (4.2)$$

Некоторое усиление оценки (1.8) можно получить и за счет правильного выбора параметра J_1 , условие (1.5) для которого также требует расшифровки.

ЛЕММА 4.2. *Условие (1.5) выполняется при*

$$J_1 \geq [J_1^* + 1], \quad J_1^* := \kappa + D \ln(1 + \kappa + 1.2D \ln(eD)). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J_1 удовлетворяет условию (4.3). Тогда для каждого целого $D \leq 100$ и $1 \leq \kappa \leq \min\{2, D\}$ неравенство (1.5) проверяется численно. При $D \geq 100$ ввиду монотонности достаточно проверить условие (1.5) при $J_1 = J_1^*$. С учетом этого мы имеем

$$\begin{aligned} D \ln(1 + \kappa + 1.2D \ln(eD)) &< D \ln(e^{0.2} D \ln(eD)) < D \ln(e^{1.2} D^{1.2}) = 1.2D \ln(eD), \\ J_1^* - \kappa - D \ln(J_1^* + 1) &= D \ln\left(\frac{1 + \kappa + 1.2D \ln(eD)}{1 + \kappa + D \ln(1 + \kappa + 1.2D \ln(eD))}\right) > 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что параметр J_1 присутствует в оценке (1.7) как непосредственно, так и косвенно через константу C , входящую также в η , окончательно в виде $(1 + 1/(J_1 - 1))^{n-\kappa} J_1$. Решение простой оптимизационной задачи показывает, что выгоднее брать $J_1 \geq n - \kappa$. Соединение с неравенством (4.3) приводит к упрощенному выбору

$$J_1 \geq D \ln(e^{n+2} D \ln(eD)). \quad (4.4)$$

Отметим, что сначала следует выбирать значение J_1 согласно (4.4), а затем — E_1 согласно оценке (4.2), причем увеличение значения J_1 улучшает значение E_1^* , поскольку уменьшается ε_1 из формул (4.1).

Перейдем к рассмотрению следствия 1.5. Впервые явную оценку коэффициентов в линейном соотношении между логарифмами алгебраических чисел вида (1.10), правда со значительно худшей константой $C_{1.3}$, получил Вальдшмидт [11]. Это было сделано с использованием только методов геометрии чисел. Позднее автор показал [12], что более широкая задача получения совместной оценки для нескольких независимых соотношений вида (1.9) может быть сведена к теореме Минковского о последовательных минимумах. К сожалению, в формулировке соответствующей теоремы был пропущен множитель, имеющийся в теореме Минковского и равный объему некоторого тела. Эта ошибка была устранена в работе Бертрана [13]. Явный пригодный для применения вид этой оценки был получен автором в работе [7]: если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}\{\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n\} = r < n$ (нумерация индексов в работе [7] была от 1 до n), то найдутся $n - r$ линейно независимых векторов

$\mathbf{m}_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, n - r$, удовлетворяющих условию (1.9) и неравенству (неравенство (21.5) из [7])

$$\prod_{i=1}^{n-r} \max_{1 \leq j \leq n} \{|m_{i,j}| A_j\} \leq 4\sqrt{n} (nD^3 \ln^2(eD))^{r/2} A_1 \cdots A_n, \quad (4.5)$$

где подразумевалось, что $A_j \geq \max\{Dh(\alpha_j), |\ln \alpha_j|, 0.16\}$.

Оценка применима и к случаю единственного с точностью до множителя соотношения между логарифмами ($r = n - 1$). Сравнение показывает, что здесь преимущество оценки (1.10) проявляется в следующем: константа $C_{1.3}$ практически не зависит от степени поля D , имеет показательный (а не факториальный) рост в зависимости от количества логарифмов n , а также улучшается с ростом параметра E .

Отметим, что оценка (1.10) была получена совместными методами теории трансцендентных чисел и геометрии чисел, а собственно оценка коэффициентов опирается на простой факт (2.2) из теории групп.

Правда, случай наличия нескольких зависимостей между логарифмами, учитываемый в оценке (4.5), в настоящей статье не рассматривается.

Список литературы

1. *Lehmer D. H.* Factorization of certain cyclotomic functions // *Ann. of Math.* (2). 1933. V. 34. №2. P. 461–479.
2. *Smyth C. J.* On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer // *Bull. London Math. Soc.* 1971. V. 3. P. 169–175.
3. *Blanksby P. E., Montgomery H. L.* Algebraic integers near the unit circle // *Acta Arith.* 1971. V. 18. P. 355–369.
4. *Dobrowolski E.* On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial // *Acta Arith.* 1979. V. 34. P. 391–401.
5. *Voutier P. M.* An effective lower bound for the height of algebraic numbers // *Acta Arith.* 1996. V. 74. P. 81–95.
6. *Матвеев Е. М.* О последовательных минимумах расширенной логарифмической высоты алгебраических чисел // *Матем. сб.* 1999. Т. 190. №3. С. 89–108.
7. *Матвеев Е. М.* Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел. II // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64. №6. С. 125–180.
8. *Amoroso F., David S.* Le problème de Lehmer en dimension supérieure // *J. Reine Angew. Math.* 1999. V. 513. P. 145–179.
9. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
10. *Матвеев Е. М.* Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62. №4. С. 81–136.
11. *Waldschmidt M.* A lower bound for linear forms in logarithms // *Acta Arith.* 1980. V. 37. P. 257–283.
12. *Матвеев Е. М.* О линейных и мультипликативных соотношениях // *Матем. сб.* 1993. Т. 184. №4. С. 23–40.
13. *Bertrand D.* Duality on tori and multiplicative dependence relations // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* 1997. V. 62. P. 198–216.