Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, И. В. Тихонов, Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 9, 71–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:09:22

УДК 517.956

А. Ю. Попов, И. В. Тихонов

**Экспоненциальные классы разрешимости в
задаче теплопроводности с нелокальным
условием среднего по времени**

При $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$ рассматривается нелокальная по времени задача для уравнения теплопроводности. Требуется найти функцию $u(x, t)$ из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt = \varphi(x).$$

Указана явная формула для решения. Изучен вопрос о ее применимости. Дано описание классов корректности. Основное предположение: при $|x| \rightarrow \infty$ решение $u(x, t)$ растет не быстрее $\exp(\sigma|x|)$ с показателем $\sigma < \sqrt{\pi/T}$.

Библиография: 17 названий.

Задачи теплопроводности с решениями, растущими при $|x| \rightarrow \infty$, привлекают внимание исследователей со времен классических работ [1]–[3]. Наиболее изученной является задача Коши, где наряду со стандартной техникой эффективно применяется теория обобщенных функций [4]. Результаты формулируются в терминах решений, растущих при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $\exp(\sigma|x|^2)$ (или в каких-то близких по типу классах).

В настоящей работе нас интересует другая ситуация, когда вместо условия Коши задан интеграл по времени t на некотором отрезке $[0, T]$. “Абстрактная” теория единственности для подобных задач была разработана в [5]. На ее основе в [6], [7] получено полное описание классов единственности для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Результаты сформулированы в терминах решений, растущих при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее $\exp(\sigma|x|)$, причем граница между единственностью и неединственностью определяется значением $\sigma = \sqrt{\pi/T}$. Вопрос о разрешимости в [6], [7] не рассматривался. В настоящей работе мы устраним этот пробел, указав необходимые и достаточные условия разрешимости. Кроме того, получим явную формулу для решений и дадим ее обоснование. В работе используется та же шкала роста $\exp(\sigma|x|)$.

Заметим, что в [6], [7] вводилась еще одна, более тонкая шкала $|x|^a \exp(\sigma|x|)$ с границей $a = -(n-1)/2$, $\sigma = \sqrt{\pi/T}$ между единственностью и неединственностью. Однако исследование разрешимости в такой “тонкой” шкале становится довольно громоздким. Поэтому на данном этапе мы ограничились простой шкалой $\exp(\sigma|x|)$.

Основной результат представлен в теореме 3 из §6. Более простые предварительные версии даны в теоремах 1 и 2 из §§4 и 6 соответственно; дополнительные уточнения сделаны в теоремах 5, 6 из §10. Центральное соотношение – формула (11) для начального состояния $u_0(x)$; ее обобщение – формула (21). Здесь

фигурирует “функция Грина” $g_T(x)$, которая подробно изучается в § 7. В частности, доказывается важная теорема 4 о разложении $g_T(x)$ в сходящийся ряд по функциям Ханкеля, откуда выводятся необходимые оценки $g_T(x)$ на бесконечности. Остальное содержание работы видно из названий параграфов. Рассмотрение ведется классическими средствами, теория обобщенных функций не используется.

§ 1. Постановка задачи

Фиксируем натуральное число $n \geq 1$ и вещественное $T > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Функция $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ предполагается заданной. Множитель $1/T$ в формуле (2) взят для удобства – он позволяет считать $\varphi(x)$ в точности средним значением “температуры” $u(x, t)$ по времени t . Очевидно, что (2) эквивалентно условию

$$\int_0^T u(x, t) dt = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $\psi(x) = T\varphi(x)$. Последующие результаты сразу переносятся с задачи (1), (2) на (1), (3). Поэтому будем рассматривать только задачу (1), (2). Через $\psi(x)$ будем часто обозначать интеграл, вычисленный для $u(x, t)$ по формуле (3).

Решением задачи (1), (2) назовем функцию $u(x, t)$ из класса

$$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T]),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле при $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t \leq T$ и обращающую соотношение (2) в верное тождество всюду в $\mathbb{R}^n$.

Недавно в работе [7] авторами установлено, что решение задачи (1), (2) будет единственным в классе функций $u(x, t)$, растущих при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее $\exp(\sigma|x|)$ с показателем $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. При $\sigma = \sqrt{\pi/T}$ единственность решения уже нарушается (см. теоремы 1, 3 в [7]; см. также [6]).

В настоящей работе будет доказано, что в этих же экспоненциальных классах единственности (с $\sigma < \sqrt{\pi/T}$) задача (1), (2) будет заведомо разрешимой при некоторых естественных ограничениях на функцию $\varphi(x)$ и неразрешимой, если такие ограничения не выполняются (см. теоремы 1–3 ниже).

Все интересующие нас решения представимы интегральной формулой Пуассона

$$u(x, t)|_{0 < t \leq T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Начальное состояние $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ будет всегда выбираться так, чтобы гарантировать принадлежность функции $u(x, t)$, определенной по формуле (4), классу

$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Поэтому задачу (1), (2) можно трактовать как задачу о нахождении неизвестного начального состояния $u_0(x)$, при котором функция $u(x, t)$ из формулы (4) обращает соотношение (2) в верное тождество.

Начнем изучение задачи (1), (2) с вывода явной формулы для $u_0(x)$ при помощи преобразования Фурье. На этом этапе рассуждения носят “формальный” характер.

§ 2. Формальное преобразование Фурье

Пусть

$$U(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \quad \Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \exp(-i\xi x) dx \quad (5)$$

— формальные преобразования Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь, как обычно, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$, $i^2 = -1$.

Соотношения (1), (2) переходят в следующие:

$$\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} = -|\xi|^2 U(\xi, t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T U(\xi, t) dt = \Phi(\xi).$$

Из дифференциального уравнения следует, что $U(\xi, t) = \exp(-|\xi|^2 t) U_0(\xi)$. Подставим эту функцию в интеграл, вычислим его и выразим $U_0(\xi)$. Получим

$$U_0(\xi) = \frac{T|\xi|^2}{1 - \exp(-T|\xi|^2)} \Phi(\xi) \equiv P_T(\xi) \Phi(\xi). \quad (6)$$

Функция

$$P_T(\xi) \equiv \frac{T|\xi|^2}{1 - \exp(-T|\xi|^2)} = \frac{T|\xi|^2 \exp(T|\xi|^2)}{\exp(T|\xi|^2) - 1} \quad (7)$$

при $|\xi| \rightarrow \infty$ ведет себя как $T|\xi|^2$, и, значит, ей не соответствует никакое преобразование Фурье от классического объекта. Выделим в (7) слагаемое $T|\xi|^2$ и запишем

$$U_0(\xi) = \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1} \Phi(\xi) + T|\xi|^2 \Phi(\xi) \equiv G_T(\xi) \Phi(\xi) + T|\xi|^2 \Phi(\xi). \quad (8)$$

Здесь

$$G_T(\xi) \equiv \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Обозначим $Q(s) \equiv s(\exp(s) - 1)^{-1}$, $s \in \mathbb{R}$, с обычным соглашением $Q(0) = 1$. Функция $Q(s)$ бесконечно дифференцируема по $s \in \mathbb{R}$. Она сама и все ее производные стремятся к нулю при $s \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени s . Следовательно, функция $G_T(\xi) = Q(T|\xi|^2)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Обратное преобразование Фурье корректно определено формулой

$$g_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1} \exp(i\xi x) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

и также принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^n)$. Интеграл в (10) быстро сходится, функция $g_T(x)$ является целой¹ по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Асимптотические свойства $g_T(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ подробно исследуются в § 7 (см. также лемму 2 в § 3). Из (10) следует, что $g_T(x) = T^{-n/2} g_1(T^{-1/2}x)$, но мы будем рассматривать $g_T(x)$ независимо, не используя выражение через $g_1(x)$.

Применим в (8) обратное преобразование Фурье. Учитывая теорему о свертке и то, что $|\xi|^2 \Phi(\xi)$ переходит в $(-\Delta \varphi(x))$, получаем выражение для начального состояния $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y) \varphi(y) dy - T \Delta \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

с функцией $g_T(x)$ из формулы (10). Будем считать $g_T(x)$ *функцией Грина* для рассматриваемой задачи (1), (2). Особая связь $g_T(x)$ с данной задачей окончательно раскрывается далее (см. замечание 2 после формулировки леммы 8 в § 8).

В случае, когда $\varphi(x)$ и $\Phi(\xi)$ быстро убывают на бесконечности, можно не разбивать (6) на два слагаемых, а записать непосредственно:

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P_T(\xi) \Phi(\xi) \exp(i\xi x) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

с функцией $P_T(\xi)$ из формулы (7), $P_T(\xi) = G_T(\xi) + T|\xi|^2$. Соотношение (12) определяет *псевдодифференциальный оператор* (ПДО) от функции $\varphi(x)$, причем $P_T(\xi)$ является *символом* данного ПДО. Поскольку $P_T(\xi)$ не зависит от x , имеем ПДО с *постоянными коэффициентами* (см. [8; гл. I, § 1, п. 1.8]).

Естественно ожидать, что функция $u(x, t)$, построенная по формуле Пуассона (4) для указанного начального состояния $u_0(x)$, будет решением задачи (1), (2). Этот факт нетрудно обосновать при помощи классического (“неформального”) преобразования Фурье в пространствах типа $S(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$, где формулы (5) и (12) приобретают содержательный смысл. Но мы пойдем другим путем². Покажем, что правило (11) является более универсальным – оно применимо в пространствах функций экспоненциального роста при условии, что показатель роста меньше, чем $\sqrt{\pi/T}$.

§ 3. Экспоненциальные классы функций

Пусть σ – фиксированное вещественное число $(-\infty < \sigma < +\infty)$. Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ класс функций $u(x, t)$, заданных на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, для которых справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq M \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

¹Это утверждение допускает двойную трактовку. Во-первых, $g_T(x)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}^n$ при замене в (10) переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$ на $z = (z_1, \dots, z_n)$. Полученный интеграл сходится при всех $z \in \mathbb{C}^n$. Во-вторых, из формулы (51) (см. далее в работе) следует, что $g_T(x)$ является целой функцией от $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

²В нашем исследовании теория ПДО никак не используется. Было бы интересно узнать, даст ли ее применение что-то принципиально новое для рассматриваемой задачи (1), (2).

с какой-то константой $M > 0$, зависящей от функции u . Аналогично через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$|f(x)| \leq M \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

с константой $M > 0$, зависящей от функции f .

В дальнейшем без оговорок используется естественная связь между оценками вида (13) и (14). Например, если непрерывная функция $u(x, t)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, то ее интеграл (3) принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$; кроме того, $u(\cdot, t) \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при каждом $t \in [0, T]$. Из формулы Пуассона (4) без труда выводится следующий “обратный” факт.

ЛЕММА 1. Пусть функция $u(x, t)$ выражается на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ по формуле (4) с непрерывной функцией $u_0(x)$ из класса $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Тогда $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ с тем же значением $\sigma \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\sigma = 0$ утверждение леммы общеизвестно. Пусть $\sigma \neq 0$ и $|u_0(x)| \leq M \exp(\sigma|x|)$ с константой $M > 0$. Оценивая $u(x, t)$ при $t > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} M e^{\sigma|y|} dy \\ &= \frac{M e^{\sigma|x|}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(4t)} e^{\sigma(|x-y|-|x|)} dy. \end{aligned}$$

Из неравенства треугольника следует, что $\sigma(|x-y|-|x|) \leq \sigma|y|$ при $\sigma > 0$ и $\sigma(|x-y|-|x|) \leq -\sigma|y|$ при $\sigma < 0$. Таким образом,

$$|u(x, t)| \leq \frac{M e^{\sigma|x|}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/(4t)} e^{|\sigma||y|} dy.$$

Учитывая, что $|y| \leq |y_1| + \dots + |y_n|$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq M e^{\sigma|x|} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)} e^{|\sigma||s|} ds \right)^n \\ &\leq M e^{\sigma|x|} \left(\frac{2}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)} e^{|\sigma|s} ds \right)^n. \end{aligned}$$

Последнее выражение в скобках $(\dots)^n$ равно $2 \exp(\sigma^2 t)$. Заменяя его максимальным значением на промежутке $(0, T]$, заключаем, что

$$|u(x, t)| \leq M M^* \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma^2 T)$. Лемма доказана.

Для наших целей важно знать асимптотическое поведение при $|x| \rightarrow \infty$ функции $g_T(x)$ из формулы (10). Элементарные рассуждения показывают, что $|g_T(x)|$ не может стремиться к нулю слишком быстро.

ЛЕММА 2. Функция $g_T(x)$, определенная формулой (10), не принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ ни при каком $\sigma < -\sqrt{\pi/T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $|g_T(x)| \leq M \exp(\sigma|x|)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ с некоторым $\sigma < 0$. Покажем, что тогда $\sigma \geq -\sqrt{\pi/T}$. Функция $G_T(\xi)$ из формулы (9) является преобразованием Фурье для $g_T(x)$. Выберем аргумент $\xi \in \mathbb{R}^n$ “одномерным” вида $(s, 0, \dots, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, и запишем

$$\frac{Ts^2}{\exp(Ts^2) - 1} = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x) \exp(-isx_1) dx.$$

Аналитически продолжим последнее равенство в комплексную плоскость, заменив s на $z = s + i\tau$ с $|\tau| \equiv |\operatorname{Im} z| < -\sigma$. Эта процедура законна – в силу оценки для $|g_T(x)|$ интеграл сходится равномерно на любом компакте в указанной полосе и там

$$\left| \frac{Tz^2}{\exp(Tz^2) - 1} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} M e^{\sigma|x|} e^{\tau x_1} dx \leq M \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma+|\tau|)|x|} dx < \infty,$$

ибо $\sigma + |\tau| < 0$. Но $z_1 \equiv (1+i)\sqrt{\pi/T}$ – полюс функции $Tz^2(\exp(Tz^2) - 1)^{-1}$ и $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{\pi/T}$. Поэтому $\sqrt{\pi/T} \geq -\sigma$ и $\sigma \geq -\sqrt{\pi/T}$. Лемма доказана.

Далее, в § 7, мы покажем, что численная граница $(-\sqrt{\pi/T})$, найденная в лемме 2, является точной и $g_T \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma = -\sqrt{\pi/T}$. Здесь доказательство намного сложнее, но в конечном счете оно также сводится к тому, что $\sqrt{\pi/T}$ есть мнимая часть “первого” полюса $z_1 = (1+i)\sqrt{\pi/T}$ функции $Tz^2(\exp(Tz^2) - 1)^{-1}$.

§ 4. Предварительный результат о разрешимости и необходимость в его обобщении

Классы $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ тесно связаны с изучаемой задачей (1), (2). Из результатов [7] следует, что задача (1), (2) не может иметь двух различных решений в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ при $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. И наоборот, при $\sigma \geq \sqrt{\pi/T}$ если решение существует, то оно заведомо неединственно. Таким образом, в классах $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ с $\sigma \geq \sqrt{\pi/T}$ интегральное условие (2) не определяет однозначно решение уравнения теплопроводности – задача (1), (2) оказывается некорректной. Поэтому будем изучать (1), (2) только в классах $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ с $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. Кроме того, пусть пока $\sigma > -\sqrt{\pi/T}$. Это ограничение подсказывается уже леммой 2. Там утверждается, что функция $g_T(x)$ стремится к нулю “не слишком быстро”. Поэтому при свертке $g_T(x)$ по формуле (11) с функцией $\varphi(x)$, стремящейся к нулю быстрее, чем $g_T(x)$, трудно гарантировать, что полученное начальное состояние $u_0(x)$ будет так же быстро (как $\varphi(x)$) стремиться к нулю. Короче говоря, классы экспоненциально убывающих функций с $\sigma \leq -\sqrt{\pi/T}$ имеют свою специфику (подробности см. в теореме 3 и в § 9).

Случай $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$ является “регулярным”. Удобная и простая форма теоремы о разрешимости выглядит так.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при некотором фиксированном σ , $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$. Тогда задача (1), (2) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Это решение выражается по формулам (4), (11), причем функция $g_T(x)$ в формуле (11) определяется формулой (10). Других решений у задачи (1), (2) в указанном классе $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ нет.

Теорема 1 непосредственно следует из более общих теорем 2, 3 (см. § 6). Необходимость в обобщении объясняется тем, что даже в простом классе $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ теорема 1 не охватывает все возможные ситуации. При $n \geq 2$ для произвольного ограниченного решения $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ уравнения теплопроводности (1) интеграл в условии (2) может не принадлежать $C^2(\mathbb{R}^n)$ и оператор Лапласа от функции $\varphi(x)$ будет не определен. Такие решения нельзя восстановить при помощи теоремы 1. Указанный момент важен для дальнейшего, поэтому поясним его подробнее.

ЛЕММА 3. При любом $n \geq 2$ существует функция $u(x, t)$, определенная на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ по формуле Пуассона (4) с непрерывной ограниченной функцией $u_0(x)$, такая, что интеграл $\psi(x)$ из формулы (3) не принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что оператор Δ является замыкаемым (но не замкнутым!) в $C(\mathbb{R}^n)$. Это свойство (замыкаемость) можно выразить так. Пусть $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $w_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta w_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ в $\mathbb{R}^n$. Если $w_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ и $f_\varepsilon(x) \rightarrow f_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$, то $f_0(x) \equiv 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [7; лемма 1]; отметим, что замыкание для Δ – расширенный оператор Лапласа Δ^* – рассматривается в следующем § 5 настоящей статьи).

Выберем теперь функцию $u_0(x)$, непрерывную и ограниченную в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, так, чтобы уравнение $\Delta v(x) = u_0(x)$ не имело решений $v(x)$ класса C^2 в шаре $|x| < r$ с некоторым $r > 0$ (см. [9; гл. IV, § 3, пример с задачей (20), (22)]). Рассмотрим решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности (1), полученное для $u_0(x)$ по формуле Пуассона (4), и обозначим как $\psi(x)$ интеграл (3) от $u(x, t)$. Покажем, что $\psi(x)$ не может принадлежать $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Допустим, что это не так и $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Из формулы Пуассона следует, что $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T])$. Поэтому на любом отрезке $[\varepsilon, \tau] \subset (0, T]$ (в том числе на $[\varepsilon, T]$) интеграл по t от $u(x, t)$ принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\Delta \int_\varepsilon^\tau u(x, t) dt = \int_\varepsilon^\tau \Delta u(x, t) dt = \int_\varepsilon^\tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt = u(x, \tau) - u(x, \varepsilon). \quad (15)$$

Но тогда интеграл

$$\int_0^\varepsilon u(x, t) dt = \int_0^T u(x, t) dt - \int_\varepsilon^T u(x, t) dt = \psi(x) - \int_\varepsilon^T u(x, t) dt$$

также принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\Delta \int_0^\varepsilon u(x, t) dt = \Delta \psi(x) - u(x, T) + u(x, \varepsilon). \quad (16)$$

Ясно, что

$$\int_0^\varepsilon u(x, t) dt \rightarrow 0, \quad \Delta\psi(x) - u(x, T) + u(x, \varepsilon) \rightarrow \Delta\psi(x) - u(x, T) + u_0(x)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$. Используя в (16) замыкаемость Δ , получаем, что $\Delta\psi(x) - u(x, T) + u_0(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, уравнение $\Delta v(x) = u(x, T) - u_0(x)$ имеет классическое решение $v = \psi(x)$, определенное всюду в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, в шаре $|x| < r$. Так как $u(x, T)$ — гладкая функция от $x \in \mathbb{R}^n$, то уравнение $\Delta v(x) = u_0(x)$ тоже должно иметь классические решения в шаре $|x| < r$. Но это противоречит выбору $u_0(x)$. Условие $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ не может выполняться. Лемма доказана.

Для $u(x, t)$ из леммы 3 функция $\varphi(x) = T^{-1}\psi(x)$, вычисленная по формуле (2), также не принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$. Теорема 1 оказывается неприменимой. Из предыдущих рассуждений ясно, что: 1) поведение $u(x, t)$ на бесконечности не играет никакой роли; 2) возникший эффект связан исключительно с “несовершенством” оператора Лапласа Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ — у уравнения Пуассона $\Delta v(x) = f(x)$ при специальном выборе непрерывной правой части $f(x)$ отсутствуют классические решения [9; гл. IV, § 3]. Фактически, это проявление незамкнутости Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ на области определения $C^2(\mathbb{R}^n)$. Следующий параграф точнее разъяснит ситуацию.

§ 5. Расширенный оператор Лапласа

Построим замкнутое расширение оператора Лапласа Δ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$. Воспользуемся конструкцией И. И. Привалова [10] и введем *расширенный оператор Лапласа* Δ^* (обобщенный лапласиан, оператор Лапласа–Привалова) следующим образом.

При $n = 1$ в $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ положим $\Delta^* \equiv \Delta = d^2/dx^2$, понимая производную в классическом смысле. (Здесь достаточно стандартного определения.)

Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим функцию $w \in C(\mathbb{R}^n)$. Для $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta_r w(x) = \frac{1}{b_n r^n} \int_{|y-x| \leq r} w(y) dy - w(x) = \frac{1}{b_n r^n} \int_{|y-x| \leq r} (w(y) - w(x)) dy,$$

где $b_n = 2\pi^{n/2}[\Gamma(n/2)]^{-1}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\Delta^* w(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2(n+2)}{r^2} \Delta_r w(x) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2(n+2)}{b_n r^{n+2}} \int_{|y-x| \leq r} (w(y) - w(x)) dy, \quad (17)$$

если этот предел существует. Вид предела (17) объясняется некоторыми простыми подсчетами, связанными с формулой Тейлора [10; ч. I, гл. I, § 1]. Перечислим основные свойства оператора Δ^* .

1. Если $w \in C^2(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\Delta^* w(x) = \Delta w(x)$ всюду в Ω . Таким образом, оператор Δ^* на функциях класса C^2 определен и совпадает с обычным оператором Лапласа [10; ч. I, гл. I, § 1].

2. Если $\Delta^* w(x) = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $w \in C^2(\Omega)$ и $\Delta w(x) = 0$ всюду в Ω . То есть непрерывное решение уравнения $\Delta^* w = 0$ является обычной гармонической функцией [10; ч. I, гл. I, § 2].

3. Пусть $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$E(x) = (2\pi)^{-1} \ln |x|, \quad n = 2; \quad E(x) = -((n-2)\omega_{n-1})^{-1} |x|^{-(n-2)}, \quad n \geq 3;$$

$\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2} [\Gamma(n/2)]^{-1}$ – площадь поверхности единичной $(n-1)$ -мерной сферы в $\mathbb{R}^n$. Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функции $f \in C(\overline{\Omega})$ рассмотрим объемный потенциал

$$v(x) = \int_{\Omega} E(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (18)$$

Тогда $\Delta^* v(x) = f(x)$ всюду в Ω [10; ч. II, гл. I, § 1].

Данное свойство отличает оператор Δ^* от обычного оператора Лапласа. Хорошо известно, что потенциал (18) с произвольной непрерывной плотностью f может не удовлетворять (в классическом смысле) уравнению Пуассона $\Delta v(x) = f(x)$ во внутренних точках области Ω [11; гл. II, § 14].

Свойство 3 позволяет доказать следующие свойства 4, 5.

4. Пусть $\Delta^* w(x) = f(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $f \in C^k(\Omega)$ с некоторым $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда $w \in C^{k+1}(\Omega)$. Например, если $f \in C(\Omega)$, то $w \in C^1(\Omega)$; если $f \in C^1(\Omega)$, то $w \in C^2(\Omega)$ и $\Delta^* w(x) = \Delta w(x)$ в Ω , и т.д.

Докажем свойство 4. Достаточно установить принадлежность $w \in C^{k+1}$ в произвольной гладкой ограниченной области, компактно вложенной в Ω . Рассмотрим такую область и снова обозначим ее Ω . Но теперь можно считать, что $f \in C^k(\overline{\Omega})$. Определим объемный потенциал $v(x)$ формулой (18). По свойству 3 получаем, что $\Delta^*(w(x) - v(x)) = f(x) - f(x) = 0$ в Ω . Следовательно, $(w(x) - v(x))$ является гармонической функцией в Ω и гладкость $w(x)$ совпадает с гладкостью $v(x)$. Но гладкость потенциала $v(x)$ внутри Ω всегда хотя на единицу выше, чем гладкость плотности $f(x)$ (для $f \in C(\overline{\Omega})$ или $f \in C^1(\overline{\Omega})$ это классический факт; дальнейший переход легко осуществить по индукции при помощи формулы дифференцирования объемного потенциала, см. [9; гл. IV, § 3, доказательство леммы 2]). Таким образом, $w \in C^{k+1}(\Omega)$. Свойство 4 доказано.

Как обычно, в гёльдеровых классах происходит повышение гладкости сразу на две единицы: если $f \in C^{k+\alpha}(\Omega)$ для некоторых $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\alpha \in (0, 1)$, то $w \in C^{k+2+\alpha}(\Omega)$. Но такое уточнение нам не понадобится.

В качестве прямого следствия свойства 4 отметим, что всякая непрерывная собственная функция оператора Δ^* является обычной собственной функцией оператора Лапласа. Действительно, пусть $\Delta^* w(x) = \lambda w(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ с непрерывной функцией $w(x)$. Последовательно применяя свойство 4, получаем, что $w \in C^1(\Omega)$, затем, что $w \in C^2(\Omega)$, и тогда по свойству 1 $\Delta w(x) = \Delta^* w(x) = \lambda w(x)$, что и утверждалось.

Заключительное свойство 5 играет для нас ключевую роль. Оно и означает замкнутость оператора Δ^* .

5. Пусть $\Delta^* w_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ в $\mathbb{R}^n$ для функций $w_\varepsilon, f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$, отвечающих малому параметру $\varepsilon > 0$. Если $w_\varepsilon(x) \rightarrow w_0(x)$ и $f_\varepsilon(x) \rightarrow f_0(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$, то $\Delta^* w_0(x)$ существует всюду в $\mathbb{R}^n$ и $\Delta^* w_0(x) = f_0(x)$.

Докажем свойство 5. Пусть B – произвольный открытый шар в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$v_\varepsilon(x) = \int_B E(x-y) f_\varepsilon(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (\text{включая } \varepsilon = 0).$$

В силу свойства 3 для $\varepsilon > 0$ все функции $w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)$ удовлетворяют в шаре B уравнению $\Delta^*(w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)) = 0$ и, значит, по свойству 2 являются гармоническими в B . При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $(w_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)) \rightarrow (w_0(x) - v_0(x))$ равномерно в $\overline{B}$. Поэтому функция $w_0(x) - v_0(x)$ также является гармонической в B . Тем самым, $\Delta^*(w_0(x) - v_0(x)) = \Delta(w_0(x) - v_0(x)) = 0$ всюду в B . Так как $v_0(x)$ есть объемный потенциал с непрерывной плотностью $f_0(x)$, то $\Delta^* v_0(x) = f_0(x)$ в шаре B . Но тогда существует $\Delta^* w_0(x) = \Delta^* v_0(x) = f_0(x)$ в шаре B . Выбор B был произвольным. Свойство 5 доказано.

При $n = 1$ в силу нашего определения $\Delta^* = \Delta = d^2/dx^2$ свойства 1, 2 очевидны. Свойство 3 с фундаментальным решением $E(x) = |x|/2$ проверяется непосредственно. Свойство 4 даже усиливается, а свойство 5 выводится из 3 так же, как при $n \geq 2$. Итак, свойства 1–5 присущи оператору Δ^* при любом $n \geq 1$. Именно на эти свойства и только на них опираются все последующие рассуждения, связанные с Δ^* .

Областью определения оператора Δ^* в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ считаем множество

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \equiv \{w \in C(\mathbb{R}^n) : \Delta^* w(x) \text{ существует всюду в } \mathbb{R}^n \text{ и } \Delta^* w \in C(\mathbb{R}^n)\}. \quad (19)$$

Из свойства 5 ясно, что Δ^* с указанной областью определения является замкнутым оператором в $C(\mathbb{R}^n)$. С учетом свойства 1 можно утверждать, что Δ^* есть замкнутое расширение для Δ . Отметим включения $C^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset C^1(\mathbb{R}^n)$, следующие из свойств 1, 4. При $n = 1$ справедливо равенство $\mathcal{O}(\mathbb{R}^1) = C^2(\mathbb{R}^1)$.

Дадим еще одно альтернативное описание для $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, имеющее “локальный” характер. Функция $w(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n$, принадлежит $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ данная функция разлагается в сумму гармонической функции и некоторого объемного потенциала вида (18) с плотностью $f \in C(\overline{\Omega})$. При этом $f(x) = \Delta^* w(x)$ в Ω .

Ввиду определения (19) и свойств Δ^* такая характеристика $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ очевидна.

§6. Формулировка основного результата

Введенное в (19) пространство $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ позволяет получить точное описание возможных правых частей $\varphi(x)$ в условии (2). Начнем со следующего утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть $u(x, t)$ – любое решение уравнения теплопроводности (1) из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. При фиксированном $\tau \in (0, T]$ рассмотрим функцию

$$\psi_\tau(x) \equiv \int_0^\tau u(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Тогда $\psi_\tau \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \psi_\tau(x) = u(x, \tau) - u(x, 0)$ в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon \in (0, \tau)$ запишем равенства (15), заменив в крайней левой части Δ на Δ^* по свойству 1 оператора Δ^* . Получим

$$\Delta^* \int_{\varepsilon}^{\tau} u(x, t) dt = u(x, \tau) - u(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Устремим ε к нулю, учитывая, что

$$\int_{\varepsilon}^{\tau} u(x, t) dt \rightarrow \psi_{\tau}(x), \quad u(x, \tau) - u(x, \varepsilon) \rightarrow u(x, \tau) - u(x, 0)$$

равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^n$. На основании свойства 5 оператора Δ^* заключаем, что $\psi_{\tau} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \psi_{\tau}(x) = u(x, \tau) - u(x, 0)$ в $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1), (2). Если $u(x, t)$ — ее решение, то функция $\varphi(x)$ в условии (2) совпадает с $T^{-1}\psi_T(x)$, где функция $\psi_T(x) \equiv \psi(x)$ построена при $\tau = T$ по формуле (20) (или просто по формуле (3)). Из леммы 4 следует, что $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi(x) = T^{-1}(u(x, T) - u(x, 0))$ в $\mathbb{R}^n$.

Итак, для получения разрешимой задачи (1), (2) функцию $\varphi(x)$ в условии (2) необходимо выбирать в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, т.е. для нее должен быть корректно определен расширенный оператор Лапласа $\Delta^* \varphi(x)$ такой, что $\Delta^* \varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Как известно из леммы 3, обычный оператор Δ для $\varphi(x) = T^{-1}\psi(x)$ может быть не определен.

Формула (11) для начального состояния $u_0(x)$ приобретает вид

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y) \varphi(y) dy - T \Delta^* \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (21)$$

Сформулируем уточненный результат о разрешимости задачи (1), (2). Он включает в себя предыдущую теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы задача (1), (2) с функцией $\varphi(x)$ была разрешимой в классе $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ при некотором фиксированном σ , $|\sigma| < \sqrt{\pi/T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi \in \mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Для любой такой $\varphi(x)$ решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), принадлежащее $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, будет единственным. Оно находится по формулам (4), (21), причем функция $g_T(x)$ в (21) определяется формулой (10).*

Теоремы 1, 2 легко обозримы и потому удобны для приложений. Мы получим их как следствия более полного основного утверждения, учитывающего практически все возможности. Для краткости используем обозначение $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть σ — фиксированное число, $-\infty < \sigma < \sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *при любой функции $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ задача (1), (2) в классе $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ может иметь не более одного решения;*
- 2) *для того чтобы задача (1), (2) была разрешимой в $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, необходимо, чтобы $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi \in \mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$;*

- 3) *обратно, пусть $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, т.е.*

$$|\varphi(x)| \leq M \exp(\sigma|x|), \quad |\Delta^* \varphi(x)| \leq M \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

с некоторой константой $M > 0$. Тогда задача (1), (2) имеет решение $u(x, t)$, которое находится по формулам (4), (21), причем функция $g_T(x)$ в (21) определяется формулой (10). Дальнейшее описание данного решения $u(x, t)$ зависит от того, в какой промежуток попадает исходное значение σ ;

- 4) *при $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$ решение $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости*

$$|u(x, t)| \leq MN \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

где M такая же, как в (22), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ , но не зависит от M и $\varphi(x)$;

- 5) *при $\sigma < -\sigma_0$ решение $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости*

$$|u(x, t)| \leq MN \exp(-\sigma_0|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

где M такая же, как в (22), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ ;

- 6) *наконец, при $\sigma = -\sigma_0$ можно утверждать, что*

$$u \in \bigcap_{\sigma_1 > -\sigma_0} \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0, T]), \quad (25)$$

причем для любого $\sigma_1 > -\sigma_0$ справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq MN \exp(\sigma_1|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (26)$$

где M такая же, как в (22), а константа $N > 0$ зависит только от n, T, σ_1 .

Теоремы 1, 2 непосредственно следуют из общей теоремы 3, поэтому будем доказывать только ее. Прежде чем приступить к доказательству³, изучим асимптотическое поведение функции $g_T(x)$, входящей в (21).

§ 7. Исследование $g_T(x)$

Получим вначале разложение $g_T(x)$ в сходящийся ряд по функциям Ханкеля, а затем выведем нужные оценки на бесконечности. Напомним, что всюду в статье символ n означает размерность основного пространства $\mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, в данном параграфе используется обозначение $\nu \equiv (n-2)/2$. Сведения по специальным функциям, приводимые без ссылок, см. в [12], [13].

³ Доказательство основной теоремы 3 см. в § 8; дополнительный комментарий к пп. 4)–6) дан в § 9; некоторые специальные уточнения сделаны в § 10.

ТЕОРЕМА 4. Для функции $g_T(x)$, определенной на $\mathbb{R}^n$ формулой (10), справедливо разложение в ряд

$$g_T(x) = -2(\pi|x|)^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{z_k}{2} \right)^{\nu+2} H_{\nu}^{(1)}(z_k|x|) \right), \quad (27)$$

сходящийся при $|x| \neq 0$. Здесь $\nu \equiv (n-2)/2$, $z_k \equiv (1+i)\sqrt{k\pi/T}$, $H_{\nu}^{(1)}$ – первая функция Ханкеля индекса ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Прокомментируем формулу (27). Мы записали ее в виде, наиболее удобном для рассмотрений. Возможны “косметические” изменения, связанные с другими группировками сомножителей. В случае нечетного n , когда степень $\nu+2 = (n+2)/2$ является полуцелой, значение $(z_k/2)^{\nu+2} H_{\nu}^{(1)}(z_k|x|)$ для комплексных $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T}$ вычисляется так. Учитывая, что индекс $\nu = (n-2)/2$ тоже полуцелый, выразим $H_{\nu}^{(1)}$ через функции Бесселя J_{ν} , $J_{-\nu}$ по формуле

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \equiv (i \sin \nu\pi)^{-1} [J_{-\nu}(z) - \exp(-\nu\pi i) J_{\nu}(z)] = J_{\nu}(z) - i^{2\nu} J_{-\nu}(z).$$

Умножим на $(z/2)^{\nu+d}$ с натуральным d и перейдем к степенным рядам:

$$\left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+d} H_{\nu}^{(1)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+2\nu+d}}{m! \Gamma(m+\nu+1)} - i^{2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+d}}{m! \Gamma(m-\nu+1)}. \quad (28)$$

Здесь $2\nu = n-2$ – целое число, $2\nu+d = n+d-2$ – неотрицательное целое число. Поэтому (28) определяет целую функцию $(z/2)^{\nu+d} H_{\nu}^{(1)}(z)$. Можно показать, что это элементарная функция, точнее, квазиполином вида $z^{d-1} p_{\nu}(z) \exp(iz)$, где полином $p_{\nu}(z)$ зависит только от ν (см. [12; формулы 7.11. (3) и 7.11. (17)]). В частности, при $d=2$ и $z = z_k|x|$ значение

$$\left(\frac{z_k}{2} \right)^{\nu+2} H_{\nu}^{(1)}(z_k|x|) = |x|^{-(\nu+2)} \left(\frac{z_k|x|}{2} \right)^{\nu+2} H_{\nu}^{(1)}(z_k|x|)$$

однозначно вычисляется согласно (28). Вообще условимся, что потенциально многозначные функции типа z^{α} , $J_{\alpha}(z)$, $H_{\alpha}^{(1)}(z)$ и т.д. всегда рассматриваются только в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$ для главного значения аргумента z , $-\pi < \arg z < \pi$. Тогда эти функции определяются своими стандартными формулами однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В последующих выкладках используется функция

$$F_T(s) \equiv \frac{T s^2}{\exp(T s^2) - 1}$$

для вещественных или комплексных s . Заметим, что $G_T(\xi) = F_T(|\xi|)$ для функции $G_T(\xi)$ из формулы (9). Обозначим $|\xi| = r$ и преобразуем (10), интегрируя сначала по сферам радиуса r , а затем по $r \in (0, \infty)$. Получим

$$\begin{aligned} g_T(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} F_T(r) dr \int_{|\xi|=r} \exp(i\xi x) dS_{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} F_T(r) r^{n-1} dr \int_{|\xi|=1} \exp(ir\xi x) dS_{\xi}. \end{aligned}$$

Для точности формулировок считаем $|x| \neq 0$ (хотя многие последующие соотношения справедливы при $|x| = 0$ в “предельном” смысле). Согласно [14; п. 4.3.2.5] при интегрировании по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ имеет место формула

$$\int_{|\xi|=1} \exp(ir\xi x) dS_\xi = (2\pi)^{n/2} (r|x|)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r|x|).$$

Формула верна и при $n = 1$: надо понимать интеграл как $\exp(irx) + \exp(-irx)$ и заметить, что $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \cos z$. Таким образом, при любом n выполняется равенство

$$g_T(x) = (2\pi)^{-n/2} |x|^{-(n-2)/2} \int_0^\infty F_T(r) r^{n/2} J_{(n-2)/2}(r|x|) dr. \quad (29)$$

Переменная интегрирования r утратила свой “физический” смысл, удобно обозначить ее через s . Полагая $\nu = (n-2)/2$ и учитывая, что $J_\nu(s|x|) = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(s|x|)$ при $s > 0$, перепишем (29) в виде

$$g_T(x) = \pi^{-(\nu+1)} |x|^{-\nu} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x|) F_T(s) ds. \quad (30)$$

(Как ясно из следующего абзаца, подынтегральное выражение в (30) не имеет особенности в нуле, интеграл сходится и потому знак Re можно вынести из-под интеграла⁴.) Разложение (27) получим, интегрируя функцию $(s/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x|) F_T(s)$ не по лучу $[0, \infty)$, а по специальным контурам в комплексной плоскости.

Контур принадлежит первому координатному углу

$$\mathbb{C}_{++} \equiv \{z : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Функция $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ голоморфна внутри $\mathbb{C}_{++}$ и непрерывна вплоть до границы. При полуцелом ν (когда n нечетно) это следует из представления (28), взятого с $d = 1$. Здесь функция $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ является целой. При целом ν (когда n четно) надо учесть, что функции Ханкеля голоморфны в $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$, причем при $z \rightarrow 0$ справедливы оценки $H_\nu^{(1)}(z) = O(|z|^{-\nu})$, $\nu \neq 0$, и $H_0^{(1)}(z) = O(\ln |z|)$, которые гарантируют непрерывность в нуле функции $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ (см. [13; формулы 9.1.8 и 9.1.9]). Аналогично, функция

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|) = |x|^{-(\nu+1)} \left(\frac{z|x|}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)$$

при фиксированном $|x| \neq 0$ голоморфна внутри $\mathbb{C}_{++}$ и непрерывна вплоть до границы.

⁴Сходимость интеграла “на бесконечности” очевидно следует из быстрого стремления к нулю функции $F_T(s)$ при $s \rightarrow +\infty$.

Функция $F_T(z) = Tz^2(\exp(Tz^2) - 1)^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}$. В угол $\mathbb{C}_{++}$ попадают ее простые полюсы $z_k = (1 + i)\sqrt{k\pi/T}$, $k \in \mathbb{N}$.

Фиксируем числа $a_m \equiv \sqrt{(m + 0.5)\pi/T}$, $m \in \mathbb{N}$, и для каждого m рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_m \equiv \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2a_m, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq a_m\},$$

содержащий точки z_k с $k = 1, \dots, m$. По теореме о вычетах

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x) F_T(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x) T z^2}{\exp(Tz^2) - 1} \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x). \end{aligned} \quad (31)$$

Построим контур L_m , состоящий из трех отрезков $L_m^{(1)} = \{i\tau : 0 \leq \tau \leq a_m\}$, $L_m^{(2)} = \{s + ia_m : 0 \leq s \leq 2a_m\}$, $L_m^{(3)} = \{2a_m + i\tau : a_m \geq \tau \geq 0\}$ и луча $L_m^{(4)} = [2a_m, \infty)$ положительной полуоси. Определим последовательность интегралов

$$\Upsilon_{T,m}(x) \equiv \int_{L_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x) F_T(z) dz, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как $\partial \Pi_m$ является объединением отрезков $[0, 2a_m]$ и $L_m^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, то

$$\int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(s|x) F_T(s) ds = \Upsilon_{T,m}(x) + \int_{\partial \Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x) F_T(z) dz.$$

Учитывая (30), а затем (31), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \pi^{\nu+1} |x|^\nu g_T(x) &= \operatorname{Re} \Upsilon_{T,m}(x) + \operatorname{Re} \int_{\partial \Pi_m} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x) F_T(z) dz \\ &= \operatorname{Re} \Upsilon_{T,m}(x) - 2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m \left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x). \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь при фиксированном x , $|x| \neq 0$, перейдем к пределу в (32) по $m \rightarrow \infty$. Сами интегралы $\Upsilon_{T,m}(x)$ могут не стремиться к нулю, но мы докажем, что этим свойством обладают их действительные части.

Напомним (см. [15; столбец 870]), что функция $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z)$ принимает на верхней мнимой полуоси лишь вещественные значения⁵. Очевидно, что тем же

⁵ Это следует, например, из формулы $(is/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(is) = 2\pi^{-1} (s/2)^{\nu+1} K_\nu(s)$, $s > 0$, связывающей функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}$ с функцией Макдональда K_ν . Как известно, при $s > 0$ значения $K_\nu(s)$ являются вещественными (см. [13; п. 9.6]).

свойством обладают функции $(z/2)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|)$ и $F_T(z)$. Поэтому интеграл, входящий в $\Upsilon_{T,m}(x)$, по отрезку $L_m^{(1)}$ мнимой оси — чисто мнимая величина. Но тогда $\operatorname{Re} \Upsilon_{T,m}(x) = \operatorname{Re} \sum_{j=2}^4 \Upsilon_{T,m}^{(j)}(x)$, где

$$\Upsilon_{T,m}^{(j)}(x) \equiv \int_{L_m^{(j)}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(z|x|) F_T(z) dz.$$

Оценим сверху модуль каждого из интегралов $\Upsilon_{T,m}^{(j)}(x)$, $j = 2, 3, 4$.

При $j = 2$ имеем

$$\begin{aligned} |\Upsilon_{T,m}^{(2)}(x)| &\leq 2a_m \max_{z \in L_m^{(2)}} \left(\left| \frac{z}{2} \right|^{\nu+1} |H_\nu^{(1)}(z|x|)| \frac{T|z|^2}{|\exp(Tz^2) - 1|} \right) \\ &\leq 2^{-\nu} a_m (a_m \sqrt{5})^{\nu+3} T \max_{0 \leq s \leq 2a_m} |H_\nu^{(1)}((s + ia_m)|x|)| \cdot (C_m^{(2)})^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$C_m^{(2)} \equiv \min_{z \in L_m^{(2)}} |\exp(Tz^2) - 1| \geq \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (33)$$

Элементарные неравенства (33) докажем чуть позже, а пока отметим, что согласно оценкам Вебера [16; п. 7.33] для функции $H_\nu^{(1)}(z)$ выполняется соотношение

$$|H_\nu^{(1)}(z)| \leq \kappa_\nu |z|^{-1/2} \exp(-\operatorname{Im} z), \quad z \in \mathbb{C}_{++}, \quad |z| \geq 1, \quad (34)$$

с некоторой константой $\kappa_\nu > 0$, зависящей только от ν . В частности,

$$\max_{0 \leq s \leq 2a_m} |H_\nu^{(1)}((s + ia_m)|x|)| \leq \kappa_\nu (a_m |x|)^{-1/2} \exp(-a_m |x|), \quad a_m |x| \geq 1. \quad (35)$$

Воспользовавшись (33) и (35), получим

$$|\Upsilon_{T,m}^{(2)}(x)| \leq M_\nu^{(2)} T |x|^{-1/2} a_m^{\nu+3.5} \exp(-a_m |x|), \quad a_m |x| \geq 1, \quad (36)$$

с константой $M_\nu^{(2)} > 0$, зависящей только от ν .

Для окончательного обоснования (36) осталось доказать неравенства (33). Рассмотрим $z = s + ia_m$, $0 \leq s \leq 2a_m$. Заметим, что

$$\exp(Tz^2) = \exp(T(s^2 - a_m^2)) (\cos(2Ta_m s) + i \sin(2Ta_m s)). \quad (37)$$

Здесь $a_m \equiv \sqrt{(m + 0.5)\pi/T}$. Если $s \in (a_m - \pi/(4a_m T), a_m + \pi/(4a_m T))$, то $2Ta_m s \in (2m\pi + \pi/2, 2m\pi + 3\pi/2)$. При этих значениях s вещественная часть в (37) отрицательна и потому $|\exp(Tz^2) - 1| > 1$. Если же $|s - a_m| \geq \pi/(4a_m T)$, то

$$T|s^2 - a_m^2| = T|s - a_m| |s + a_m| \geq T|s - a_m| a_m \geq \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4},$$

откуда $|\exp(Tz^2)| = \exp(T(s^2 - a_m^2)) \in (0, \exp(-3/4)) \cup (\exp(3/4), +\infty)$. Но тогда

$$|\exp(Tz^2) - 1| \geq ||\exp(Tz^2)| - 1| \geq 1 - \exp\left(-\frac{3}{4}\right) > \frac{1}{2}.$$

Итак, неравенства (33) выполнены, соотношение (36) обосновано. Из (36) следует, что $\Upsilon_{T,m}^{(2)}(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x , $|x| > 0$.

Перейдем к $\Upsilon_{T,m}^{(3)}(x)$. Здесь $L_m^{(3)}$ – вертикальный отрезок $[2a_m + ia_m, 2a_m]$. Его длина равна a_m . Функция $|z|$ принимает на $L_m^{(3)}$ максимальное значение $a_m\sqrt{5}$. Сравнивая с предыдущим, получаем

$$|\Upsilon_{T,m}^{(3)}(x)| \leq 2^{-(\nu+1)} a_m (a_m\sqrt{5})^{\nu+3} T \max_{0 \leq \tau \leq a_m} |H_\nu^{(1)}((2a_m + i\tau)|x|)| \cdot (C_m^{(3)})^{-1},$$

где⁶

$$\begin{aligned} C_m^{(3)} &\equiv \min_{z \in L_m^{(3)}} |\exp(Tz^2) - 1| \geq \min_{0 \leq \tau \leq a_m} |\exp(T(2a_m + i\tau)^2)| - 1 \\ &= \min_{0 \leq \tau \leq a_m} \exp(T(4a_m^2 - \tau^2)) - 1 = \exp(3Ta_m^2) - 1. \end{aligned}$$

Поскольку $3Ta_m^2 = 3(m + 0.5)\pi \geq 9\pi/2 > 1 > \ln 2$ при $m \in \mathbb{N}$, то

$$(C_m^{(3)})^{-1} \leq \frac{\exp(-3Ta_m^2)}{1 - \exp(-3Ta_m^2)} \leq \frac{\exp(-3Ta_m^2)}{1 - 2^{-1}} = 2 \exp(-3Ta_m^2). \quad (38)$$

Согласно (34) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq \tau \leq a_m} |H_\nu^{(1)}((2a_m + i\tau)|x|)| \leq \kappa_\nu (2a_m|x|)^{-1/2}, \quad 2a_m|x| \geq 1. \quad (39)$$

Воспользовавшись (38) и (39), заключаем, что

$$|\Upsilon_{T,m}^{(3)}(x)| \leq M_\nu^{(3)} T |x|^{-1/2} a_m^{\nu+3.5} \exp(-3Ta_m^2), \quad a_m|x| \geq \frac{1}{2}, \quad (40)$$

с константой $M_\nu^{(3)} > 0$, зависящей только от ν . Из (40) ясно, что $\Upsilon_{T,m}^{(3)}(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x , $|x| > 0$.

Рассмотрим, наконец, интеграл $\Upsilon_{T,m}^{(4)}(x)$ по лучу $L_m^{(4)} = [2a_m, \infty)$ вещественной оси. Вновь используя (34), получаем оценку

$$|\Upsilon_{T,m}^{(4)}(x)| \leq 2^{-(\nu+1)} \kappa_\nu |x|^{-1/2} T \int_{2a_m}^{\infty} \frac{s^{\nu+2.5}}{\exp(Ts^2) - 1} ds, \quad 2a_m|x| \geq 1.$$

⁶ В следующей выкладке (и только в ней) используется то, что в качестве Π_m удобно было взять прямоугольник со сторонами $2a_m \times a_m$, а не квадрат со сторонами $a_m \times a_m$.

Функция $s^{\nu+2.5}(\exp(Ts^2) - 1)^{-1}$ суммируема на $[0, \infty)$. Последовательность интегралов по лучам $[2a_m, \infty)$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Upsilon_{T,m}^{(4)}(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x , $|x| > 0$.

В итоге, $\operatorname{Re} \Upsilon_{T,m}(x) = \operatorname{Re} \sum_{j=2}^4 \Upsilon_{T,m}^{(j)}(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x , $|x| > 0$. Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$ в (32), получаем разложение (27). Сходимость ряда (27) к $g_T(x)$ при $|x| > 0$ полностью обоснована. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 имеет, на наш взгляд, принципиальный характер. Используя разложение (27) и асимптотику функций Ханкеля в комплексной области, можно получать различные оценки для $g_T(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующие результаты оформлены далее в виде лемм (см. леммы 6, 7 ниже). Предварительно удобно доказать элементарную лемму 5, связанную с одним асимптотическим разложением. Теория асимптотических разложений, как таковая, затрагивается здесь в минимальной степени; необходимые определения см. в [15; столбцы 337–338], [17; гл. I, §2].

ЛЕММА 5. Пусть $\beta \geq 0$ – фиксированное число. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{k}) \quad (41)$$

сходится при всех $\rho > 0$ и при $\rho \rightarrow +\infty$ является асимптотическим разложением для своей суммы $S(\rho)$ по последовательности $\{\exp(-\rho\sqrt{k})\}_{k=1}^{\infty}$. Всякий остаток ряда оценивается через свое первое слагаемое по формуле

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{k}) \leq 2m^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{m}), \quad \rho \geq \rho_{\beta,m}, \quad (42)$$

с константой $\rho_{\beta,m} > 0$, зависящей только от β и m . В частности, для суммы ряда $S(\rho)$ справедлива оценка

$$S(\rho) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{k}) \leq 2 \exp(-\rho), \quad \rho \geq \rho_{\beta}, \quad (43)$$

где $\rho_{\beta} > 0$ зависит только от β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $h_{\rho}(s) \equiv s^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{s})$ с параметром $\rho > 0$ положительна при $s \geq 0$ и монотонно стремится к нулю при $s > (2\beta/\rho)^2$. Интеграл от $h_{\rho}(s)$ по промежутку $0 \leq s < \infty$ конечен – он равен $2\rho^{-(2\beta+2)}\Gamma(2\beta+2)$. Применяя интегральный признак Коши, заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h_{\rho}(k)$, т.е. ряд (41), сходится при любом $\rho > 0$ к некоторой конечной сумме $S(\rho)$. Рассмотрим m -й остаток

$$R_m(\rho) \equiv S(\rho) - \sum_{k=1}^m k^{\beta} \exp(-\rho\sqrt{k}) = \exp(-\rho\sqrt{m}) \sum_{k=m+1}^{\infty} k^{\beta} \exp(-\rho(\sqrt{k} - \sqrt{m})).$$

Пусть $\rho > 2\beta m^{-1/2}$. Тогда функция $s^\beta \exp(-\rho(\sqrt{s} - \sqrt{m})) = \exp(\rho\sqrt{m})h_\rho(s)$ переменной s заведомо убывает при $s \geq m$ и

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} k^\beta e^{-\rho(\sqrt{k}-\sqrt{m})} \leq \int_m^{\infty} s^\beta e^{-\rho(\sqrt{s}-\sqrt{m})} ds = 2 \int_0^{\infty} (\tau + \sqrt{m})^{2\beta+1} e^{-\rho\tau} d\tau.$$

Последний интеграл очевидно стремится к нулю при $\rho \rightarrow +\infty$. Тем самым,

$$R_m(\rho) = o(\exp(-\rho\sqrt{m})), \quad \rho \rightarrow +\infty.$$

По определению [17; гл. I, §2] ряд (41) при $\rho \rightarrow +\infty$ является асимптотическим разложением для $S(\rho)$ (в смысле Пуанкаре) по асимптотической последовательности $\{\exp(-\rho\sqrt{k})\}_{k=1}^{\infty}$. Для получения (42) достаточно заметить, что фигурирующий там остаток ряда имеет вид $m^\beta \exp(-\rho\sqrt{m}) + R_m(\rho)$, где $R_m(\rho) = o(\exp(-\rho\sqrt{m}))$ при $\rho \rightarrow +\infty$. Отсюда (42) сразу и следует. Оценка (43) есть частный случай (42) при $m = 1$. Лемма доказана.

Итак, сумму $S(\rho)$ ряда (41) можно оценить при помощи первого слагаемого по формуле (43). Применим этот принцип к функции $g_T(x)$.

ЛЕММА 6. *Для функции $g_T(x)$, определенной формулой (10), справедлива оценка*

$$|g_T(x)| \leq C_{T,n} |x|^{-(n-1)/2} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}} |x|\right), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (44)$$

с константой $C_{T,n} > 0$, зависящей лишь от T и размерности n пространства $\mathbb{R}^n$. В частности,

$$|g_T(x)| \leq D_{T,n} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}} |x|\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (45)$$

с константой $D_{T,n} > 0$, зависящей лишь от T , n . При этом можно положить $C_{T,n} = T^{-(n+1)/4} C_{1,n}$ и $D_{T,n} = T^{-n/2} D_{1,n}$, где $C_{1,n}$ и $D_{1,n}$ — значения констант при $T = 1$, зависящие, тем самым, только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (27) имеем

$$|g_T(x)| \leq 2(\pi|x|)^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z_k}{2} \right|^{\nu+2} |H_\nu^{(1)}(z_k|x)|, \quad |x| > 0,$$

где $\nu = (n-2)/2$, $z_k = (1+i)\sqrt{k\pi/T}$. Подставим численные значения z_k и воспользуемся оценкой Вебера (34). После элементарных подсчетов получим

$$|g_T(x)| \leq C_\nu T^{-(2\nu+3)/4} |x|^{-(\nu+0.5)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{(2\nu+3)/4} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}} |x|\right) \quad (46)$$

при $|x| \geq \sqrt{T/(2\pi)}$ с константой $C_\nu > 0$, зависящей только от ν . Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$, входящий в (46), есть ряд вида (41), где $\beta = (2\nu + 3)/4 = (n + 1)/4 > 0$ и $\rho = \sqrt{\pi/T}|x|$. Оценивая сумму ряда по принципу (43), заключаем, что

$$|g_T(x)| \leq C|x|^{-(\nu+0.5)} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}}|x|\right), \quad |x| \geq r, \quad (47)$$

с константами $C > 0$ и $r > 0$, зависящими только от ν и T . Функция $g_T(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Неравенство (47) можно распространить на все $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ при необходимом увеличении C . Так как $\nu + 0.5 = (n - 1)/2$, получили оценку (44). Оценка (45) – очевидное следствие (44). Из определения (10) легко выводится, что $g_T(x) = T^{-n/2}g_1(T^{-1/2}x)$. Отсюда находят значения $C_{T,n} = T^{-(n+1)/4}C_{1,n}$ и $D_{T,n} = T^{-n/2}D_{1,n}$. Лемма доказана.

В последующем доказательстве основной теоремы 3 используется именно лемма 6, точнее ее вариант с оценкой (45). Но в более специальных исследованиях может понадобиться дополнительная информация о поведении функции $g_T(x)$ на бесконечности. На этот случай отметим, что k -е слагаемое ряда (27) при $|x| \rightarrow \infty$ выражается приближенной формулой

$$\begin{aligned} & -2(\pi|x|)^{-\nu} \operatorname{Im}\left(\left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu+2} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\right) \\ & = -(2\pi)^{-(n-3)/4} \left(\frac{k}{T}\right)^{(n+1)/4} |x|^{-(n-1)/2} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}|x|\right) \\ & \quad \times \left[\sin\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}|x| - \frac{\pi}{8}(n-3)\right) + O(|x|^{-1})\right] \end{aligned} \quad (48)$$

с символом $O(|x|^{-1})$, равномерным по k . Формула (48) получается непосредственно при подстановке в левую часть $z_k = (1 + i)\sqrt{k\pi/T} = e^{\pi i/4}\sqrt{2k\pi/T}$, $\nu = (n - 2)/2$ и использовании известной асимптотики функции Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(iz - \frac{\pi i}{4}(2\nu + 1)\right) [1 + O(|z|^{-1})], \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (49)$$

на луче $\arg z = \pi/4$. Соответствующие вычисления элементарны, и мы их не приводим. При $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$ функции Ханкеля выглядят особенно просто – приближенная формула (49) заменяется точным равенством (без $O(|z|^{-1})$). Поэтому в формуле (48) при $n = 1$ и $n = 3$ символ $O(|x|^{-1})$ можно опустить⁷.

При $|x| \rightarrow \infty$ все функции (48) являются осциллирующими с экспоненциально убывающими амплитудами. С помощью асимптотических разложений типа (41) можно показать, что при больших $|x|$ первое слагаемое ряда (27) является “доминирующим” по отношению к остатку. Точнее, при $|x| \rightarrow \infty$ ряд (27) дает асимптотическое разложение в смысле Эрдейи (но не Пуанкаре; см. [16; гл. I, § 2]) для $g_T(x)$ по асимптотической последовательности

$$\left\{ |x|^{-(n-1)/2} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}|x|\right) \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

⁷Случаи $n = 1$ и $n = 3$ наиболее интересны для приложений.

Отсюда, в частности, следует, что сама функция $g_T(x)$ осциллирует (меняет знак) при $|x| \rightarrow \infty$.

Действительно, в разложении (27) отбросим первое слагаемое (с $k = 1$) и оценим оставшееся так же, как в доказательстве леммы 6. Получим выражение типа (46), где $\sum$ начинается с $k = 2$. Рассмотрим эту сумму, как 1-й остаток ряда (41) с $\beta = (2\nu + 3)/4 = (n + 1)/4 > 0$ и $\rho = \sqrt{\pi/T} |x|$. Воспользуемся оценкой (42) для $m = 2$. Аналогично (47) заключаем, что

$$\left| 2(\pi|x|)^{-\nu} \sum_{k=2}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{z_k}{2} \right)^{\nu+2} H_{\nu}^{(1)}(z_k|x|) \right) \right| \leq C|x|^{-(\nu+0.5)} \exp \left(-\sqrt{\frac{2\pi}{T}} |x| \right)$$

при достаточно больших $|x|$ с подходящей константой $C > 0$. После вынесения множителя $|x|^{-(\nu+0.5)} = |x|^{-(n-1)/2}$ имеем величину $O(\exp(-\sqrt{2\pi/T}|x|))$ и, тем самым, $O(|x|^{-1} \exp(-\sqrt{\pi/T}|x|))$. Совмещая это с приближенной формулой (48), взятой для первого слагаемого (с $k = 1$), получаем формулу для суммы:

$$g_T(x) = -(2\pi)^{-(n-3)/4} T^{-(n+1)/4} |x|^{-(n-1)/2} \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}} |x| \right) \times \left[\sin \left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} |x| - \frac{\pi}{8}(n-3) \right) + O(|x|^{-1}) \right], \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (50)$$

При $n = 1$ и $n = 3$ слагаемое $O(|x|^{-1})$ в (50) можно заменить на $O(\exp(-\gamma|x|))$ с $\gamma \equiv (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\pi/T}$. Асимптотическая формула (50) и показывает, что функция $g_T(x)$ осциллирует при $|x| \rightarrow \infty$.

Кроме того, из (50) следует, что оценки сверху для $g_T(x)$, найденные в лемме 6, являются окончательными. Напомним, что уже согласно лемме 2 оценка (45) точна в экспоненциальных классах $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Теперь стало ясно, что “тонкая” оценка (44) будет “абсолютно неупущаемой”.

ЛЕММА 7. *Функцию $|x|^{-(n-1)/2} \exp(-\sqrt{\pi/T}|x|)$ в оценке (44) нельзя заменить никакой функцией $h(|x|)$ вида $o(|x|^{-(n-1)/2} \exp(-\sqrt{\pi/T}|x|))$ при $|x| \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. (50).

Функция $g_T(x)$ вообще весьма интересна. В ее исходном определении, в § 2, использовалась функция $Q(s) \equiv s(\exp(s) - 1)^{-1}$ — производящая функция чисел Бернулли. Поэтому в других представлениях для $g_T(x)$ появляются такие классические объекты анализа, как числа Бернулли, ζ -функция Римана и т.д. Например из (29) выводится разложение $g_T(x)$ в сходящийся степенной ряд:

$$g_T(x) = (4\pi T)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{2} + k \right) \zeta \left(\frac{n}{2} + k + 1 \right) \left(-\frac{|x|^2}{4T} \right)^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (51)$$

напоминающий своими крайними частями фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Для получения (51) надо подставить в (29) стандартное разложение в степенной ряд для функции Бесселя $J_{(n-2)/2}(r|x|)$, провести элементарные преобразования интегралов (с заменой Tr^2 на s) и воспользоваться тождеством

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{e^s - 1} ds = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha), \quad \alpha > 1.$$

Несложные подсчеты дадут (51). Отсюда между прочим следует, что

$$g_T(0) = (4\pi T)^{-n/2} \frac{n}{2} \cdot \zeta\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Например при $n = 2$ имеем $g_T(0) = (4\pi T)^{-1}(\pi^2/6) = \pi/(24T)$.

Формула (51) удобна для описания $g_T(x)$ вблизи нуля так же, как формула (50) — на бесконечности.

§ 8. Доказательство основной теоремы 3

Первое утверждение теоремы 3 о единственности решения задачи (1), (2) следует из результатов работы [7] (см. также [6]).

Второе утверждение о необходимости условий $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ фактически уже доказано. Действительно, пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1), (2), принадлежащее $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Согласно лемме 4 должно выполняться соотношение $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, причем очевидно, что функции $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x) = T^{-1}(u(x, T) - u(x, 0))$ принадлежат $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Докажем остальные утверждения теоремы. Зафиксируем число $\sigma < \sqrt{\pi/T}$ и функцию $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам (22) с константой $M > 0$. Покажем, что формулы (4), (21) действительно определяют решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), подпадающее под описание из пп. 4)–6) теоремы 3 в зависимости от значения σ . Поскольку размерность n , число $T > 0$ и показатель σ считаются заданными, мы не будем указывать на зависимость от n, T, σ различных констант, возникающих в оценках. Однако будем следить за константой M , чтобы получить нужные оценки устойчивости.

Всюду в параграфе для краткости полагаем $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. Таким образом, $\sigma < \sigma_0$. Согласно лемме 6 для функции $g_T(x)$ можно указать число $D_0 > 0$ ($D_0 \equiv D_{T,n}$ в лемме 6) такое, что $|g_T(x)| \leq D_0 \exp(-\sigma_0|x|)$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, функция $g_T(x)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$.

Обратимся к формуле (21) для начального состояния $u_0(x)$. По условию второе слагаемое $T\Delta^*\varphi(x)$ непрерывно в $\mathbb{R}^n$ и принадлежит классу $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим первое слагаемое, т.е. интеграл

$$\chi(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\varphi(y) dy. \quad (52)$$

Для подынтегральной функции справедлива оценка

$$|g_T(x-y)\varphi(y)| \leq D_0 \exp(-\sigma_0|x-y|)M \exp(\sigma|y|).$$

Если $|x| \leq r$, то $|g_T(x-y)\varphi(y)| \leq MD_0 \exp(\sigma_0 r) \exp(-(\sigma_0 - \sigma)|y|)$ при $y \in \mathbb{R}^n$. Поэтому интеграл (52) сходится при всех $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно в любом шаре $|x| \leq r$ и представляет собой непрерывную функцию переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Поведение интеграла при $|x| \rightarrow \infty$ зависит от того, в какой промежуток попадает исходное значение σ .

Пусть $|\sigma| < \sigma_0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leq M D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sigma_0|x-y|} e^{\sigma|y|} dy \\ &\leq M D_0 e^{\sigma|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sigma_0-|\sigma|)|y-x|} dy = M D_1 e^{\sigma|x|}, \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad D_1 &\equiv D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sigma_0-|\sigma|)|y|} dy < \infty, \end{aligned}$$

т.е. интеграл (52) принадлежит классу $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функция $u_0(x)$, заданная формулой (21), непрерывна в $\mathbb{R}^n$, принадлежит классу $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет оценке $|u_0(x)| \leq M(D_1 + T) \exp(\sigma|x|)$ всюду в $\mathbb{R}^n$.

Определим для данного начального состояния $u_0(x)$ функцию $u(x, t)$ по формуле Пуассона (4). Тогда $u(x, t)$ служит решением уравнения теплопроводности (1) и по лемме 1 принадлежит $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq M(D_1 + T)M^* \exp(\sigma|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma^2 T)$ как в доказательстве⁸ леммы 1. Число $N \equiv (D_1 + T)M^*$ зависит лишь от n, T и σ . Получили оценку устойчивости (23).

Пусть теперь $\sigma < -\sigma_0$. Тогда $\sigma + \sigma_0 < 0$ и

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leq M D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sigma_0|x-y|} e^{\sigma|y|} dy \leq M D_0 e^{-\sigma_0|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma_0+\sigma)|y|} dy \\ &= M D_2 e^{-\sigma_0|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad D_2 \equiv D_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\sigma_0+\sigma)|y|} dy < \infty, \end{aligned}$$

т.е. интеграл (52) принадлежит классу $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, функция $u_0(x)$, заданная формулой (21), непрерывна в $\mathbb{R}^n$, принадлежит $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет оценке $|u_0(x)| \leq M(D_2 + T) \exp(-\sigma_0|x|)$ для $x \in \mathbb{R}^n$. Снова определим функцию $u(x, t)$ по формуле Пуассона (4). Тогда $u(x, t)$ служит решением уравнения теплопроводности (1), принадлежит $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и

$$|u(x, t)| \leq M(D_2 + T)M^* \exp(-\sigma_0|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $M^* = 2^n \exp(n\sigma_0^2 T) = 2^n \exp(n\pi)$. Получили оценку устойчивости (24) с константой $N \equiv (D_2 + T)M^*$, зависящей лишь от n, T и σ .

Пусть, наконец, $\sigma = -\sigma_0$. Перейдем к чуть большему числу σ_1 , считая, конечно, что $|\sigma_1| < \sigma_0$. Ясно, что $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi \in \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$, причем $|\varphi(x)| \leq M \exp(\sigma_1|x|)$ и $|\Delta^* \varphi(x)| \leq M \exp(\sigma_1|x|)$ с той же константой $M > 0$, что и в (22). На основании доказанного выше, функция $u(x, t)$, определенная формулами (4), (21), служит решением уравнения теплопроводности (1), принадлежит

⁸ Указанное там значение M^* несколько завышено. Более точное выражение получается через интеграл ошибок: $M^* = (1 + \operatorname{erf}(|\sigma|\sqrt{T}))^n \exp(n\sigma^2 T)$. В частности, при $\sigma = 0$ можно считать $M^* = 1$, а не $M^* = 2^n$.

классу $\mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и удовлетворяет оценке устойчивости (26) с константой $N > 0$, зависящей от n, T, σ_1 . Ввиду произвольности выбранного σ_1 получаем включение (25).

Итак, во всех трех случаях формулы (4), (21) корректно определяют решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности (1), подпадающее под описание из пп. 4)–6) теоремы 3 в зависимости от значения σ . Осталось показать, что при подстановке $u(x, t)$ в условие (2) получается исходная функция $\varphi(x)$. Собственно в этом и состоит основная часть доказательства.

Для сокращения записи обозначим через

$$\mu_t(x) \equiv (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (53)$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности. По формуле (4) функция $u(x, t)$ при $t > 0$ есть свертка $\mu_t(x)$ с начальным состоянием $u_0(x)$. Используя (21), разобьем $u(x, t)$ на два слагаемых:

$$u(x, t) = u_1(x, t) - T u_2(x, t). \quad (54)$$

Здесь $u_1(x, t)$ – решение уравнения теплопроводности, полученное по формуле Пуассона для начального состояния $\chi(x)$ из (52), т.е.

$$u_1(x, t)|_{0 < t \leq T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x - \xi) d\xi \int_{\mathbb{R}^n} g_T(\xi - y) \varphi(y) dy, \quad (55)$$

$$u_1(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x - y) \varphi(y) dy. \quad (56)$$

Второе решение $u_2(x, t)$ отвечает начальному условию $\Delta^* \varphi(x)$, т.е.

$$u_2(x, t)|_{0 < t \leq T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x - y) \Delta^* \varphi(y) dy, \quad u_2(x, 0) = \Delta^* \varphi(x). \quad (57)$$

Рассмотрим эти решения отдельно.

Начнем с $u_1(x, t)$. Для функции $\mu_t(x - \xi) g_T(\xi - y) \varphi(y)$ при фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\mu_t(x - \xi) g_T(\xi - y) \varphi(y)| &\leq (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x - \xi|^2/(4t)} D_0 e^{-\sigma_0 |\xi - y|} M e^{\sigma |y|} \\ &\leq C e^{-\alpha |\xi|^2 + \beta |\xi| e^{-(\sigma_0 - \sigma) |y|}}, \quad (\xi, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где положительные константы C, α, β зависят, вообще говоря, от (x, t) . Подынтегральная функция в повторном интеграле (55) оказывается суммируемой на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ по мере $d\xi dy$, и, значит, в этом интеграле можно переменить порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} u_1(x, t)|_{0 < t \leq T} &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x - \xi) g_T(\xi - y) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x - y - \xi) g_T(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (58)$$

Определим новую функцию:

$$v(x, t)|_{0 < t \leq T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_t(x - \xi) g_T(\xi) d\xi, \quad v(x, 0) = g_T(x), \quad (59)$$

т.е. решение уравнения теплопроводности с начальным состоянием $g_T(x)$. Учитывая (56) и (58), запишем функцию $u_1(x, t)$ в виде

$$u_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x - y, t) \varphi(y) dy, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (60)$$

Особая роль специального решения (59) ясна из следующей леммы.

ЛЕММА 8. *Функция $v(x, t)$, определенная формулой (59), есть решение уравнения теплопроводности (1) из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, удовлетворяющее оценке*

$$|v(x, t)| \leq C_0 \exp(-\sigma_0 |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \sigma_0 \equiv \sqrt{\frac{\pi}{T}}, \quad (61)$$

с некоторой константой $C_0 > 0$. Кроме того,

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(x, t) dt = \mu_T(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (62)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Равенство (62) окончательно раскрывает связь функции $g_T(x)$ с нелокальной задачей (1), (2). Оказывается, решение уравнения теплопроводности (1), отвечающее начальному состоянию $g_T(x)$, при подстановке в (2) дает фундаментальное решение $\mu_T(x)$ в момент времени $t = T$. Используя стандартное обозначение для свертки по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, равенство (62) можно записать в следующем наглядном виде:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t * g_T dt = \mu_T. \quad (63)$$

Отметим соотношение $\mu_T * g_T = g_T + T \Delta \mu_T$, которое получается из (63) применением леммы 4 (или легко может быть проверено с помощью преобразования Фурье).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Поскольку $|g_T(x)| \leq D_0 \exp(-\sigma_0 |x|)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, то первая часть леммы, включая оценку (61), немедленно следует из формулы Пуассона (59) и леммы 1. Докажем равенство (62). Рассмотрим преобразование Фурье

$$V(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (64)$$

Напомним, что все функции, входящие в (59), принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ (см. § 2) и, значит, манипуляции с преобразованием Фурье законны. Учитывая, что преобразование от $\mu_t(x)$ есть $\exp(-|\xi|^2 t)$, а преобразование от $g_T(x)$ есть функция $G_T(\xi)$ из (9), получаем по теореме о свертке:

$$V(\xi, t) = \exp(-|\xi|^2 t) G_T(\xi) = \exp(-|\xi|^2 t) \frac{T|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1},$$

причем это равенство справедливо также при $t = 0$ (см. (59)). Но тогда

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(\xi, t) dt = \frac{|\xi|^2}{\exp(T|\xi|^2) - 1} \int_0^T \exp(-|\xi|^2 t) dt = \exp(-T|\xi|^2).$$

С помощью оценки (61) легко обосновать законность внесения интеграла по $t \in [0, T]$ под знак интеграла (64). Таким образом, преобразование Фурье от непрерывной, экспоненциально убывающей функции

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

совпадает с $\exp(-T|\xi|^2)$, т.е. с преобразованием от $\mu_T(x)$. Отсюда следует равенство (62). Лемма доказана.

Вернемся к представлению (60). Из той же оценки (61) вытекает, что

$$|v(x - y, t)\varphi(y)| \leq C_0 \exp(-\sigma_0|x - y|) M \exp(\sigma|y|) \leq C_0 M e^{\sigma_0|x|} \exp(-(\sigma_0 - \sigma)|y|),$$

т.е. при фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ функция $v(x - y, t)\varphi(y)$ является суммируемой на $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ по $dy dt$. Поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_1(x, t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{T} \int_0^T v(x - y, t) dt \right) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x - y) \varphi(y) dy. \quad (65)$$

Интеграл вида (2) от первого слагаемого в (54) вычислен.

Перейдем к $u_2(x, t)$. По определению (57) функция $u_2(x, t)$ есть решение уравнения теплопроводности, отвечающее начальному состоянию $\Delta^* \varphi(x)$. В силу леммы 4 при любом $\tau > 0$ имеем

$$\Delta^* \left(\int_0^\tau u_2(x, t) dt \right) = u_2(x, \tau) - \Delta^* \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда

$$\Delta^* \left(\varphi(x) + \int_0^\tau u_2(x, t) dt \right) = u_2(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (66)$$

Определим функцию

$$w(x, \tau) = \varphi(x) + \int_0^\tau u_2(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (67)$$

Ясно, что функции $w(x, \tau)$ и $\partial w(x, \tau)/\partial \tau = u_2(x, \tau)$ непрерывны в $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. В силу (66) при фиксированном $\tau_0 \in (0, T]$ функция $\Delta^* w(x, \tau_0)$ равна $u_2(x, \tau_0)$ и, следовательно, принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$ (и даже $C^\infty(\mathbb{R}^n)$). По свойствам 4 и 1 оператора Δ^* (см. §5) функция $w(x, \tau_0)$ принадлежит $C^3(\mathbb{R}^n)$ (точнее $C^\infty(\mathbb{R}^n)$) и $\Delta w(x, \tau_0) = \Delta^* w(x, \tau_0)$. В любом случае заведомо можно утверждать, что $w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и

$$\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} = u_2(x, \tau) = \Delta^* w(x, \tau) = \Delta w(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \tau \leq T.$$

Таким образом, функция $w(x, \tau)$ есть классическое решение уравнения теплопроводности, причем $w(x, 0) = \varphi(x)$ (см. (67)). По условию $\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^* \varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. По лемме 1 $u_2 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ как функция, заданная формулой Пуассона (57) с начальным состоянием $\Delta^* \varphi(x)$. Но тогда и $w \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ согласно определению (67). При заданном начальном состоянии решение уравнения теплопроводности в классе $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ единственно; оно вычисляется по формуле Пуассона:

$$w(x, \tau) \Big|_{0 < \tau \leq T} = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_\tau(x - y) \varphi(y) dy, \quad w(x, 0) = \varphi(x).$$

Подставив в (67) значение $\tau = T$, имеем

$$\int_0^T u_2(x, t) dt = w(x, T) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x - y) \varphi(y) dy - \varphi(x). \quad (68)$$

Интеграл от второго слагаемого в (54) вычислен.

Используя найденные выражения (65) и (68), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T u_1(x, t) dt - \int_0^T u_2(x, t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x - y) \varphi(y) dy - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu_T(x - y) \varphi(y) dy - \varphi(x) \right) = \varphi(x), \end{aligned}$$

т.е. функция $u(x, t)$, определенная по формулам (4), (21), обращает соотношение (2) в верное тождество. Итак, $u(x, t)$ является требуемым решением задачи (1), (2). Это завершает доказательство утверждений 3)–6) теоремы 3. Теорема 3 полностью доказана.

Напомним, что частные теоремы 1, 2 немедленно следуют из теоремы 3 и потому не нуждаются в отдельных доказательствах.

§9. Комментарий к теореме 3

Снова обозначим $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T}$. Полученные результаты указывают на наличие у задачи (1), (2) не только верхнего “критического” значения $\sigma = \sigma_0$, после которого теряется единственность, но и нижнего значения $\sigma = -\sigma_0$.

При $|\sigma| < \sigma_0$ картина получается стереотипной: если $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$, то формулы (4), (21) определяют решение $u(x, t)$, принадлежащее $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Здесь показатель роста для $u(x, t)$ не превосходит показателя для $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$. Значения $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$ являются “регулярными” для задачи (1), (2).

Это обстоятельство можно интерпретировать по-другому, по принципу “не от функции $\varphi(x)$ к решению $u(x, t)$ ”, а наоборот, “от решения $u(x, t)$ к функции $\varphi(x)$ ” или, что эквивалентно, “к функции $\psi(x)$ ” из формулы (3). Зафиксируем регулярный показатель $\sigma \in (-\sigma_0, \sigma_0)$. Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения теплопроводности (1), причем известно, что $u \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, но $u \notin \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ для любого $\sigma_1 < \sigma$. Определим функцию $\psi(x)$ по формуле (3). Очевидно, что $\psi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Но, кроме того, из теоремы 3 вытекает, что $\psi \notin \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma_1 < \sigma$. Другими словами, регулярный показатель роста σ не уменьшается при интегрировании по $t \in [0, T]$ решения $u(x, t)$.

При $\sigma < -\sigma_0$ ситуация меняется. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\sigma < -\sigma_0$. Из теоремы 3 следует, что формулы (4), (21) определяют решение $u(x, t)$, принадлежащее $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, но остается ли решение в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ заранее не ясно. То, что переход в более широкий класс действительно возможен, видно на примере функции $v(x, t)$ из леммы 8. Рассмотрим эту функцию как решение $u \equiv v(x, t)$ задачи (1), (2) с начальным состоянием $u_0(x) \equiv g_T(x)$ и функцией $\varphi(x) \equiv \mu_T(x)$. Здесь $\mu_T(x)$ – фундаментальное решение из формулы (53), взятое при $t = T$. Поэтому $\varphi(x)$ и $\Delta\varphi(x)$ принадлежат $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma < -\sigma_0$. В то же время $u_0(x) \equiv g_T(x)$ не попадает в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma < -\sigma_0$, а принадлежит только $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ (см. леммы 2, 6). Соответственно, $u \notin \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ при $\sigma < -\sigma_0$. Итак, существуют функции $u(x, t)$, для которых утверждение 5) в теореме 3 является неутрачиваемым.

Также неутрачиваемым (по крайней мере, в экспоненциальных классах $\mathcal{E}_\sigma$) будет утверждение 6) теоремы 3. Оказывается, решение $u(x, t)$, полученное по формулам (4), (21) для $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$ и $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$, может выходить из $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, сохраняясь лишь в классе (25). Этот эффект связан с появлением дополнительных степенных множителей типа $|x|^\alpha$ в асимптотике $|u(x, t)|$ при $|x| \rightarrow \infty$. Не проводя детальных исследований, ограничимся одним примером.

ПРИМЕР. Пусть $n = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Положим также $T = 1$. Тогда $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi/T} = \sqrt{\pi}$. Функцию Грина из формулы (10) запишем в виде

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{\exp(s^2) - 1} \exp(isx) ds, \quad -\infty < x < \infty, \quad (69)$$

с преобразованием Фурье $G_1(s) = s^2(\exp(s^2) - 1)^{-1}$, $-\infty < s < \infty$. (Мы обозначаем одномерную переменную через s вместо прежней многомерной ξ .) Функция $g_1(x)$ является четной, в ее исследовании можно ограничиться $x > 0$.

Воспользуемся разложением в ряд для $g_1(x)$, указанным в § 7. Слагаемые ряда выражаются формулой (48), которая для $n = 1$ будет точной без символа $O(|x|^{-1})$. При $x > 0$ получаем

$$g_1(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k\pi} \exp(-\sqrt{k\pi} x) \sin\left(\sqrt{k\pi} x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (70)$$

Ряд (70) можно почленно дифференцировать по x любое число раз – возникающие ряды из производных равномерно сходятся на лучах $[a, \infty) \subset (0, \infty)$. В частности, имеем

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k\pi \exp(-\sqrt{k\pi}x) \sin(\sqrt{k\pi}x), & x > 0, \\ g_1''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^{3/2} \exp(-\sqrt{k\pi}x) \cos\left(\sqrt{k\pi}x + \frac{\pi}{4}\right), & x > 0, \end{aligned}$$

и т.д. Используя элементарные оценки и лемму 5, заключаем, что все производные $g_1^{(j)}(x)$, включая саму функцию $g_1(x)$, принадлежат $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. С помощью той же леммы 5 можно оценивать остатки в разложениях для производных. Например можно утверждать, что

$$g_1'(x) = 2\pi \exp(-\sqrt{\pi}x) \sin(\sqrt{\pi}x) + O(\exp(-\sqrt{2\pi}x)) \quad (71)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \int_0^1 u(x, t) dt = g_1(x), \quad (72)$$

т.е. одномерную модель $(-\infty < x < \infty)$ для общей нелокальной задачи (1), (2). Здесь $\varphi(x) \equiv g_1(x)$ и $\Delta\varphi(x) \equiv g_1''(x)$ принадлежат классу $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. Поэтому задача (72) подпадает под утверждение 6) теоремы 3. Определим начальное состояние $u_0(x)$ по формуле (11). Точнее, воспользуемся тем, что функция $\varphi(x) \equiv g_1(x)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$, и перейдем к эквивалентной формуле (12), согласно которой получим

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) G_1(s) e^{isx} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 e^{s^2}}{e^{s^2} - 1} \cdot \frac{s^2}{e^{s^2} - 1} \cdot e^{isx} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^4 e^{s^2} e^{isx}}{(e^{s^2} - 1)^2} ds. \end{aligned}$$

Будем интегрировать по частям:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^3 e^{isx} d\left(\frac{1}{e^{s^2} - 1}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{s^3 e^{isx}}{e^{s^2} - 1} \left(\Big|_{-\infty}^{-0} + \Big|_{+0}^{+\infty} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(3s^2 + s^3 \cdot ix) e^{isx}}{e^{s^2} - 1} ds \\ &= 0 + \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 e^{isx}}{e^{s^2} - 1} ds + \frac{x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2 \cdot i s e^{isx}}{e^{s^2} - 1} ds. \end{aligned}$$

Вспоминая определение (69) функции $g_1(x)$, заключаем, что

$$u_0(x) = \frac{3}{2}g_1(x) + \frac{1}{2}xg_1'(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Воспользуемся соотношением (71) и тем, что $g_1 \in \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$ с $\sigma_0 \equiv \sqrt{\pi}$. В итоге имеем асимптотику

$$u_0(x) = \pi x \exp(-\sqrt{\pi} x) \sin(\sqrt{\pi} x) + O(\exp(-\sqrt{\pi} x)) \quad (73)$$

при $x \rightarrow +\infty$. Отсюда вытекает, что $u_0 \notin \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R})$. Но тогда и решение $u(x, t)$ задачи (72), полученное по формулам (4), (11), не попадает в $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R} \times [0, T])$, хотя очевидно принадлежит соответствующему классу (25). Построение примера завершено.

Пример основан на появлении дополнительного степенного множителя x в разложении (73) перед $\exp(-\sqrt{\pi} x)$. Спрашивается, могут ли появиться x^2 , x^3 и т.д.? В одномерном случае, по-видимому, нет, а в общем многомерном случае стоит ожидать $|x|^\alpha$ с показателем α , зависящим от размерности n . Дальнейшее исследование лучше провести в рамках полного изучения разрешимости нелокальной задачи (1), (2) в экспоненциально-степенных классах функций с мажорантами $|x|^a \exp(\sigma|x|)$. Этот круг вопросов открыт и весьма интересен. Подготовительные соображения имеются в § 7 (см. лемму 6 с оценкой (44), лемму 7 и приближенные формулы (48), (50)).

§ 10. Специальные уточнения теоремы 3

В формулировке теоремы 3 функции $\varphi(x)$ и $\Delta^*\varphi(x)$ были фактически равноправны – они фигурировали в схожих оценках (22) с единым показателем σ . Однако их “вклад” в основную формулу (21) очевидно различен: функция $\varphi(x)$ входит в оператор свертки с фиксированной функцией $g_T(x)$, а $\Delta^*\varphi(x)$ находится в отдельном слагаемом. Учитывая это различие, можно несколько дополнить теорему 3. Приведем следующие два результата.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma_1 < \sqrt{\pi/T}$, а $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma_2 < \infty$. Тогда задача (1), (2) разрешима – формулы (4), (21) определяют решение $u(x, t)$ задачи (1), (2). При $\sigma_2 \geq \sqrt{\pi/T}$ это решение принадлежит $\mathcal{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, но является неединственным в данном классе (имеются другие решения, не связанные с формулами (4), (21)). При $\sigma_2 < \sqrt{\pi/T}$ решение $u(x, t)$ подпадает под описание теоремы 3 со значением $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с некоторым $\sigma < -\sigma_0 \equiv -\sqrt{\pi/T}$, а $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда формулы (4), (21) определяют решение $u(x, t)$ задачи (1), (2), принадлежащее $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Теорема 5 показывает, что для применения формул (4), (21) существенно ограничение на рост ($\sigma < \sqrt{\pi/T}$) только для функции $\varphi(x)$. Например, по теореме 5 задача (1), (2) с функцией

$$\varphi(x) = \sin(\exp(x_1 + \dots + x_n)), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

будет разрешимой по формулам (4), (21) на любом промежутке $[0, T]$. Основная теорема 3 применима здесь лишь при $T < \pi/(4n)$ из-за поведения $|\Delta\varphi(x)|$ при $|x| \rightarrow \infty$: непосредственно проверяется, что $\Delta\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ для $\sigma = 2\sqrt{n}$ и данное значение σ нельзя уменьшить.

Теорема 6 уточняет утверждение 6) теоремы 3 (см. также пример в §9). Оказывается, для перехода решения $u(x, t)$ в класс (25) необходимо, чтобы именно $\varphi(x)$ принадлежала $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$. Если $\Delta^*\varphi \in \mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n)$, но $\varphi \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma < -\sigma_0$, то решение остается в $\mathcal{E}_{-\sigma_0}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ и переход в более широкий класс (25) не происходит.

Доказательство всех этих утверждений повторяет *mutatis mutandis* доказательство теоремы 3. Просматривая шаг за шагом рассуждения в §8, убеждаемся в справедливости теорем 5 и 6. Неединственность решения (теорема 5) в классе $\mathcal{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ с $\sigma_2 \geq \sqrt{\pi/T}$ следует из результатов работы [7]. Например, наряду с $u(x, t)$ решением той же задачи (1), (2) будут функции

$$u(x, t) + \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} x_k\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} x_k + \frac{2\pi}{T} t\right), \quad k = 1, \dots, n,$$

где x_k есть k -я координата точки x .

Авторы благодарны В. А. Ильину и А. И. Прилепко за обсуждения и поддержку этой работы.

Список литературы

1. *Holmgren E.* Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur // Ark. Mat. 1924. V. 18. №9. P. 1–9.
2. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. №2. С. 199–216.
3. *Täcklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique // Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. Ser. IV. 1936. V. 10. №3. P. 1–57.
4. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. №2. С. 133–166.
6. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. РАН. 2003. Т. 389. №4. С. 465–467.
7. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. №3. С. 396–405.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Физматлит, 1994.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
10. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.: ГРТТЛ, 1937.
11. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
13. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.)* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.

14. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
15. Математическая энциклопедия. Т. 1. А–Г. М.: СЭ, 1977.
16. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949.
17. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
14.10.2004