Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон, Подгруппы отражений евклидовых групп отражений, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 9, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:37:40

УДК 512.817.72

П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон

Подгруппы отражений евклидовых групп отражений

В работе классифицируются подгруппы, порожденные отражениями, в дискретных евклидовых группах, порожденных отражениями.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Пусть X – n -мерное евклидово, сферическое или гиперболическое пространство. Выпуклый многогранник в X называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π . Группа, порожденная отражениями относительно гиперграней произвольного многогранника Кокстера, дискретна, причем фундаментальной областью такой группы является сам многогранник. С другой стороны, фундаментальная область любой дискретной группы, порожденной отражениями, является многогранником Кокстера.

В дальнейшем подмногогранником мы будем понимать многогранник конечного объема в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. Группу, порожденную отражениями относительно гиперграней многогранника Кокстера, будем называть *евклидовой группой отражений*. Конечные группы, порожденные отражениями, мы будем также называть *сферическими*.

Классификация подгрупп отражений сферических групп отражений вытекает из результатов работы [1]. Подгруппы групп отражений, действующих в евклидовом и гиперболическом пространствах, до конца не изучены. В работах [2]–[5] описаны подгруппы, порожденные отражениями относительно гиперграней симплексов, в гиперболических группах отражений.

В настоящей работе мы классифицируем подгруппы, порожденные отражениями, в дискретных евклидовых группах, порожденных отражениями.

В § 3, используя результаты работы [1], мы приводим классификацию подгрупп отражений в неразложимых сферических группах отражений. На самом деле, любая подгруппа отражений в произвольной разложимой группе отражений G является прямым произведением подгрупп отражений неразложимых компонент группы G (лемма 1). Отсюда следует, что как в сферическом, так и в евклидовом случае достаточно изучить подгруппы неразложимых групп отражений. Неразложимые евклидовы ограниченные многогранники Кокстера являются симплексами (см. [6]). Таким образом, для классификации подгрупп отражений в евклидовых группах отражений достаточно перечислить подгруппы отражений в группах, порожденных отражениями относительно гиперграней евклидова симплекса.

В § 4 мы описываем все неразложимые подгруппы отражений конечного индекса в неразложимых евклидовых группах отражений. Мы также доказываем, что неразложимая подгруппа отражений с точностью до автоморфизма всей группы

определяется своим индексом. Далее, в §5 мы используем аффинные системы корней для описания общего вида подгрупп, порожденных отражениями. В §6 мы классифицируем разложимые максимальные подгруппы отражений. В §7 мы рассматриваем подгруппы бесконечного индекса, порожденные отражениями.

Авторы благодарят Э. Б. Винберга за полезные обсуждения, а также рецензента за замеченные многочисленные неточности в первоначальном варианте статьи.

§ 2. Определения и обозначения

Гиперплоскость μ называется *зеркалом* группы отражений, если группа содержит отражение относительно μ . Зеркала группы отражений делят пространство на связные компоненты (*фундаментальные камеры*), каждая из которых является фундаментальной областью для действия группы. Группа отражений порождается отражениями относительно гиперграней любой из своих фундаментальных камер.

Пусть H – подгруппа конечного индекса группы отражений G , порожденная отражениями. Тогда фундаментальная камера группы H состоит из нескольких копий фундаментальной камеры группы G , причем если две копии имеют общую гипергрань, то они симметричны относительно нее.

Многогранники Кокстера удобно описывать *схемами Кокстера*: вершины $v_1, \dots, v_k$ схемы соответствуют граням $f_1, \dots, f_k$ многогранника; вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $m_{ij} - 2$, если двугранный угол между гранями f_i и f_j равен π/m_{ij} (если грани f_i и f_j взаимно ортогональны, то вершины v_i и v_j не соединены); если две грани параллельны, то соответствующие вершины соединены толстым ребром.

Пусть Σ – схема Кокстера с k вершинами $v_1, \dots, v_k$. Сопоставим схеме Σ симметрическую $(k \times k)$ -матрицу G_Σ , в которой диагональные элементы равны единице, а элемент g_{ij} при $i \neq j$ равен $-\cos(\pi/m_{ij})$, если вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $m_{ij} - 2$, и минус единице, если вершины v_i и v_j соединены толстым ребром.

Связная схема Кокстера Σ называется *эллиптической*, если матрица G_Σ положительно определена, и *параболической*, если матрица G_Σ вырождена, а любая подсхема схемы Σ эллиптическая. Многогранник Кокстера называется *неразложимым*, если его матрица Грама неразложима (или, что то же самое, если его схема Кокстера связна). Связные эллиптические схемы – это в точности схемы Кокстера неразложимых сферических симплексов Кокстера, а связные параболические схемы – схемы Кокстера евклидовых симплексов Кокстера. Схема Кокстера произвольного ограниченного евклидова многогранника является объединением нескольких связных параболических схем. Все схемы Кокстера неразложимых сферических и евклидовых симплексов Кокстера вместе с их общепринятыми обозначениями приведены в таблице 1. Мы также будем пользоваться обозначением $B_1 = C_1 = A_1$, $D_2 = 2A_1$ и $D_3 = A_3$ (см. [1]).

Через $\Sigma(P)$ мы будем обозначать схему Кокстера многогранника Кокстера P , а через G_P – группу, порожденную отражениями в гипергранях многогранника P . Заметим, что матрица $G_{\Sigma(P)}$ совпадает с матрицей Грама многогранника P .

Подробный обзор о группах отражений и их фундаментальных многогранниках содержится в [7].

Пусть P – произвольный евклидов многогранник Кокстера. Как известно, су-

Таблица 1. Схемы Кокстера. В левом столбце таблицы приведены связанные эллиптические схемы Кокстера. В правом столбце приведены связанные параболические схемы Кокстера. Белым цветом выделены специальные вершины схем

$A_n \ (n \geq 1)$	$\tilde{A}_1$
	$\tilde{A}_n \ (n \geq 2)$
$B_n = C_n \ (n \geq 2)$	$\tilde{B}_n \ (n \geq 3)$
	$\tilde{C}_n \ (n \geq 2)$
$D_n \ (n \geq 4)$	$\tilde{D}_n \ (n \geq 4)$
$G_2^{(m)}$	$\tilde{G}_2$
F_4	$\tilde{F}_4$
E_6	$\tilde{E}_6$
E_7	$\tilde{E}_7$
E_8	$\tilde{E}_8$
H_3	
H_4	

существует по крайней мере одна вершина V многогранника P , стабилизатор которой содержит все линейные части элементов группы G_P (см. [8; гл. 6]). Такие вершины мы будем называть *специальными вершинами многогранника P* .

Пусть теперь P – неразложимый евклидов многогранник Кокстера, т.е. симплекс Кокстера, V – любая его специальная вершина, а μ – гипергрань, противолежащая вершине V . Пусть v – вершина схемы Кокстера $\Sigma(P)$, соответствующая гиперграну μ . Вершину v будем называть *специальной вершиной схемы Кокстера $\Sigma(P)$* . Схема $\Sigma(P)$ может иметь одну или несколько специальных вершин. В то же время, схема $\Sigma(P) \setminus v$ не зависит от выбора специальной вершины v (точнее, любые две такие схемы переводятся друг в друга автоморфизмом схемы $\Sigma(P)$). Обозначим через $\Sigma'(P)$ схему $\Sigma(P) \setminus v$. Обозначим через $G'_P(V)$ группу, порожденную отражениями относительно всех гиперграней симплекса P , кроме μ . Такая

группа не зависит от выбора специальной вершины V в том смысле, что для любых двух специальных вершин V_1 и V_2 многогранника P существует автоморфизм группы G_P , переводящий V_1 в V_2 , а $G'_P(V_1)$ в $G'_P(V_2)$. В том случае, когда выбор специальной вершины V не имеет принципиального значения, мы будем обозначать группу $G'_P(V)$ через G'_P . Заметим, что схема Кокстера фундаментальной камеры группы G'_P совпадает с $\Sigma'(P)$.

Подгруппу $G_P \subset G_F$ назовем *максимальной*, если не существует симплекса T такого, что $G_P \subset G_T \subset G_F$.

Группа отражений называется *неразложимой*, если ее фундаментальный многогранник Кокстера неразложим. Любая группа отражений является прямым произведением неразложимых групп отражений, которые мы будем называть ее *компонентами*.

ЛЕММА 1. *Любая подгруппа отражений H в произвольной разложимой группе отражений G является прямым произведением подгрупп неразложимых компонент группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$, а $\{r_1^i, \dots, r_{l_i}^i\}$ — отражения, порождающие группу G_i . Обозначим через $[G, G]$ коммутант группы G . Далее, заметим, что

$$G/[G, G] \cong \mathbb{Z}_2^m,$$

где m — число классов сопряженности отражений в группе G . Другими словами, любой набор отражений, порождающий группу G , содержит представителей всех классов сопряженности отражений, входящих в группу G . Следовательно, любое отражение r из группы H сопряжено некоторому $r_j^i \in G_i$. Поскольку G_i нормальна в G , мы получаем, что $r \in G_i$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

§ 3. Сферические подгруппы отражений

В работе [1] Дынкин классифицировал регулярные полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, для чего перечислил подсистемы корней в конечных системах корней. Эта задача очень близка к задаче классификации подгрупп отражений в конечных группах отражений. В то же время, эти две задачи не эквивалентны.

В настоящем параграфе, используя результаты работы [1], мы получим классификацию подгрупп отражений в конечных группах отражений.

3.1. Подсистемы корней. Пусть G — конечная группа отражений, отличная от H_3 , H_4 и $G_2^{(m)}$ (при $m \neq 2, 3, 4, 6$). Тогда G является группой Вейля конечной системы корней Δ (см. [9]). Зеркала отражений группы G — гиперплоскости, на которых обращаются в нуль корни системы Δ . Тип группы G совпадает с типом системы корней Δ .

Любая подгруппа $H \subset G$, порожденная отражениями, является группой Вейля некоторой системы корней $\Delta_1 \subset \Delta$. Система Δ_1 состоит из корней системы Δ , обращающихся в нуль на зеркалах группы H . И обратно: группа Вейля любой системы корней $\Delta_1 \subset \Delta$ является подгруппой отражений в G .

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между подгруппами отражений $H \subset G$ и системами корней $\Delta_1 \subset \Delta$.

Система корней $\Delta_1 \subset \Delta$ называется *подсистемой корней*, если выполнено следующее условие:

$$\text{если } \alpha, \beta \in \Delta_1 \text{ и } \alpha + \beta \in \Delta, \text{ то } \alpha + \beta \in \Delta_1. \quad (*)$$

Подсистемы корней в конечных системах корней перечислены в работе [1]. Таким образом, нам необходимо для каждой группы G перечислить системы корней $\Delta_1 \subset \Delta$, не являющиеся подсистемами корней.

Условие $(*)$ может быть переформулировано следующим образом. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ — системы корней и $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — простые корни системы Δ_1 . Система Δ_1 является подсистемой корней в Δ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (**)$$

Посмотрим на геометрический смысл условия $(**)$. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ — системы корней, $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta_1$ — простые корни системы Δ_1 и $\alpha_i - \alpha_j \in \Delta$. Рассмотрим систему корней, порожденную α_i и α_j . Она совпадает с одной из следующих систем: $2A_1, A_2, C_2, G_2$. Для каждой из них несложно проверить, что прямая, ортогональная корню $\alpha_i - \alpha_j$, разрезает угол, определяемый корнями α_i и α_j (простые корни являются внешними нормальными к сторонам угла). Далее, поскольку угол между простыми корнями не может быть острым, имеем

$$(\alpha_i - \alpha_j)^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 - 2(\alpha_i, \alpha_j) \geq \alpha_i^2 + \alpha_j^2.$$

Поскольку в конечной системе корней содержатся корни не более чем двух различных длин, равенство достигается только тогда, когда α_i и α_j — короткие корни системы Δ , причем $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, если $\Delta \neq G_2$, и $(\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{1}{2}$, если $\Delta = G_2$.

В частности, из вышесказанного мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ — системы корней, Π_1 и Π — системы простых корней Δ_1 и Δ соответственно и выполнено одно из следующих условий:

- 1) все вещественные корни в Δ имеют одинаковую длину;
- 2) $\Pi_1 \setminus \Pi$ не содержит коротких корней.

Тогда Δ_1 — подсистема корней в Δ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Все подгруппы отражений в группах A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8 перечислены в [1].

Таким образом, нам осталось перечислить системы корней $\Delta_1 \subset \Delta$, не являющиеся подсистемами, для $\Delta = B_n$ (или C_n), F_4 и G_2 , а также подгруппы отражений в группах H_3, H_4 и $G_2^{(m)}$ (при $m \geq 5, m \neq 6$).

3.2. Подгруппы группы B_n . Рассмотрим группу $G = B_n$ как группу Вейля системы корней $\Delta = B_n$. Согласно [1; таблица 9] (см. также [10]) в B_n содержатся подсистемы вида

$$A_{k_1} + \dots + A_{k_s} + D_{m_1} + \dots + D_{m_r} + B_m,$$

$$\sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^r m_i + m \leq n, \quad k_1 \geq \dots \geq k_s \geq 0, \quad m_1 \geq \dots \geq m_r > 1, \quad m \geq 0.$$

С другой стороны, группу B_n можно рассматривать как группу Вейля системы корней C_n , отличающейся от системы корней B_n лишь длинами корней. Изменяя длины корней в подсистемах системы корней C_n (см. [1; таблица 9]), мы получаем, что в B_n содержатся системы корней вида

$$A_{k_1} + \dots + A_{k_s} + B_{l_1} + \dots + B_{l_p},$$

где

$$\sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^p l_i \leq n, \quad k_1 \geq \dots \geq k_s \geq 0, \quad l_1 \geq \dots \geq l_p > 0.$$

Элементарная проверка показывает, что все системы корней $\Delta_1 \subset \Delta$ состоят из компонент указанных выше систем. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $\Delta = B_n$ и $\Delta_1 \subset \Delta$. Тогда Δ_1 имеет вид

$$A_{k_1} + \dots + A_{k_s} + B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + D_{m_1} + \dots + D_{m_r},$$

где

$$\sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^p l_i + \sum_{i=1}^r m_i \leq n, \\ k_1 \geq \dots \geq k_s \geq 0, \quad l_1 \geq \dots \geq l_p > 0, \quad m_1 \geq \dots \geq m_r > 1.$$

Любые две системы одинакового типа переводятся друг в друга автоморфизмом системы Δ .

Заметим, что компоненты вида A_1 и D_2 состоят из длинных корней, а компоненты вида B_1 — из коротких. Заметим также, что различным системам корней $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ могут соответствовать подгруппы H' и H'' одинакового типа. Например, системам $\Delta_1 = A_3 + D_2$ и $\Delta_2 = D_3 + 2A_1$ в $\Delta = B_7$ соответствуют подгруппы со схемой Кокстера

В то же время, эти две подгруппы не переводятся друг в друга автоморфизмом группы G .

Несложно проверить, что верна следующая лемма (ср. [10]).

ЛЕММА 4. Подгруппы H' и H'' одинакового типа переводятся друг в друга автоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда число компонент каждого вида в соответствующих системах корней $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ одинаково (т.е. мы различаем компоненты вида A_3 и D_3 , A_1 и B_1 , а также D_2 , $2A_1$ и $2B_1$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Подгруппы полного ранга H' и H'' одинакового типа не переводятся друг в друга автоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда соответствующие системы корней $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ имеют вид

$$\Delta_1 = B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + lB_1 + D_{m_1} + \dots + D_{m_r} + mD_2, \\ \Delta_2 = B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + (l + 2k)B_1 + D_{m_1} + \dots + D_{m_r} + (m - k)D_2,$$

где

$$\sum_{i=1}^p l_i + \sum_{i=1}^r m_i + l + 2m = n, \quad l_1 \geq \dots \geq l_p > 1, \quad m_1 \geq \dots \geq m_r > 2, \quad k \neq 0.$$

Перечислим теперь максимальные подгруппы отражений группы B_n .

ЛЕММА 5. *Максимальные подгруппы отражений группы B_n имеют вид D_n или $B_k + B_{n-k}$, где $k = 1, \dots, [n/2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Максимальность указанных подгрупп немедленно следует из лемм 1 и 3.

Рассмотрим произвольную подгруппу $H \subset G = B_n$. Соответствующая система корней $\Delta_1 \subset \Delta$ имеет вид, указанный в лемме 3, т.е.

$$\Delta_1 = A_{k_1} + \dots + A_{k_s} + B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + D_{m_1} + \dots + D_{m_r},$$

$$\sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^p l_i + \sum_{i=1}^r m_i \leq n.$$

Из явного описания системы корней B_n (см. [8] или [9]) следует, что для каждой компоненты вида A_{k_i} найдется система корней вида D_{k_i+1} , содержащая систему A_{k_i} и ортогональная всем остальным компонентам системы Δ_1 . Поэтому

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 = B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + D_{k_1+1} + \dots + D_{k_s+1} + D_{m_1} + \dots + D_{m_r},$$

$$\sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^p l_i + \sum_{i=1}^r m_i \leq n.$$

Далее, найдется система корней вида D_m , $m = \sum_{i=1}^s (k_i + 1) + \sum_{i=1}^r m_i$, содержащая систему $D_{k_1+1} + \dots + D_{k_s+1} + D_{m_1} + \dots + D_{m_r}$ и ортогональная всем компонентам системы Δ_2 вида B_{l_i} . Следовательно,

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3 = B_{l_1} + \dots + B_{l_p} + D_m, \quad \sum_{i=1}^p l_i + m \leq n.$$

Заметим также, что компонента D_m содержится в системе B_m , ортогональной всем компонентам системы Δ_3 вида B_{l_i} . Собирая аналогичным образом компоненты вида B_{l_i} в систему B_l , где $l = \sum_{i=1}^p l_i$, мы получаем утверждение леммы.

3.3. Подгруппы группы F_4 . Рассмотрим группу $G = F_4$ как группу Вейля системы корней $\Delta = F_4$. В [1; таблица 10] перечислены все подсистемы корней системы F_4 . “Забывая” про длины корней, мы можем рассматривать эти подсистемы как схемы Кокстера подгрупп отражений группы F_4 .

ЛЕММА 6. *Единственной подгруппой отражений полного ранга группы F_4 , не приведенной в [1; таблица 10], является подгруппа вида $2B_2$.*

Любые две подгруппы полного ранга одинакового типа переводятся друг в друга автоморфизмом группы F_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset G$ – подгруппа отражений, схема Кокстера которой не приведена в [1; таблица 10], и пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ – соответствующая система корней. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ простые корни системы Δ_1 .

Поскольку Δ_1 не является подсистемой корней в Δ , найдутся короткие корни α_i и α_j , $1 \leq i, j \leq 4$, такие, что $\alpha_i - \alpha_j \in \Delta$. Мы можем считать, что $i = 1, j = 2$. В частности, угол между α_1 и α_2 прямой.

Заметим, что у группы G есть внешний автоморфизм, соответствующий изменению длин всех корней системы Δ . Применив его к подгруппе H , получим подгруппу H' , соответствующую системе корней $\Delta'_1 \subset \Delta$, отличающейся от Δ_1 лишь

длинами всех корней. Образы α'_i корней α_i являются простыми корнями системы Δ'_1 .

Схема Кокстера группы H' , очевидно, совпадает со схемой Кокстера группы H , а следовательно, Δ'_1 также не является подсистемой корней в Δ . Поскольку корни α'_1 и α'_2 длинные, мы получаем, что $\alpha'_3 - \alpha'_4 \in \Delta$. В частности, α'_3 и α'_4 — короткие корни, образующие прямой угол.

Таким образом, среди простых корней системы Δ'_1 есть два длинных и два коротких корня, причем корни одинаковой длины ортогональны друг другу. Учитывая, что угол между корнями разной длины не может быть равен $\pi/3$, получаем, что H' — группа типа $4A_1$, $2A_1 + B_2$ или $2B_2$, откуда и следует первое утверждение леммы.

Далее, как показано в [1], любые две подсистемы корней одинакового типа в $\Delta = F_4$, имеющие максимальный ранг, переводятся друг в друга некоторым элементом ее группы Вейля, т.е. группы G . Следовательно, любые две подгруппы полного ранга, соответствующие подсистемам корней одинакового типа, сопряжены в G . Добавляя к сопряжениям внешний автоморфизм группы G , описанный выше, мы получаем, что любые две подгруппы полного ранга одинакового типа, отличного от $2B_2$, переводятся друг в друга автоморфизмом группы G .

Что касается подгрупп вида $2B_2$, то каждая такая подгруппа содержится в подгруппе вида B_4 , а все подгруппы вида B_4 переводятся друг в друга автоморфизмом группы G . В свою очередь, любые две подгруппы вида $2B_2$ сопряжены в B_4 , а каждый автоморфизм группы вида B_4 продолжается до автоморфизма группы G . Отсюда вытекает второе утверждение леммы.

ЛЕММА 7. *Максимальные подгруппы отражений группы F_4 имеют вид B_4 или $2A_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано выше, подгруппы вида $2B_2$ не являются максимальными. Следовательно, максимальными могут быть лишь подгруппы, соответствующие максимальным подсистемам корней, а также подгруппы меньшего ранга. Повторяя дословно начало доказательства леммы 6 применительно к подгруппе меньшего ранга, получаем, что любая подгруппа не максимального ранга переводится автоморфизмом группы G в подгруппу, соответствующую подсистеме корней. Таким образом, нам достаточно рассмотреть подгруппы, соответствующие максимальным подсистемам корней.

Максимальные подсистемы корней в $\Delta = F_4$ перечислены в [1; таблица 12] (подсистема вида $A_3 + A_1$ максимальной не является, см. [10]). Подгруппы вида $B_3 + B_1$ также содержатся в подгруппах вида B_4 и, следовательно, не максимальны. Максимальность подгрупп вида B_4 очевидна ($[F_4 : B_4] = 3$), максимальность подгрупп вида $2A_2$ следует из лемм 1 и 6, а также из описания подгрупп групп B_4 (лемма 3) и D_4 (следствие 1 и [1; таблица 9]).

3.4. Подгруппы группы G_2 . Подгруппы группы G_2 ранга два имеют вид A_2 или $2A_1$. Все подгруппы вида A_2 сопряжены друг другу; любые две подгруппы вида $2A_1$ переводятся друг в друга автоморфизмом группы G_2 .

Приведем еще одно элементарное следствие результатов пп. 3.2–3.4 и работы [1].

ЛЕММА 8. *Пусть G — конечная группа отражений, отличная от H_3 , H_4 и $G_2^{(m)}$ (при $m \neq 2, 3, 4, 6$). Тогда любые две неразложимые подгруппы полного*

ранга группы G одинакового типа переводятся друг в друга автоморфизмом группы G .

3.5. Подгруппы групп $G_2^{(m)}$, H_3 и H_4 . Подгруппы группы $G_2^{(m)}$ ранга два имеют вид $G_2^{(d)}$, где $d \mid m$. Подгруппы полного ранга групп H_3 и H_4 перечислены в статье [11]. В частности, из [11; теорема 1] следует, что подгруппы ранга два группы H_3 имеют вид $G_2^{(5)}$ и $2A_1$, а все подгруппы неполного ранга группы H_4 не являются максимальными, что означает, что их классификация немедленно следует из классификации подгрупп остальных конечных групп отражений.

§ 4. Неразложимые подгруппы

В этом параграфе мы изучим неразложимые подгруппы евклидовых групп отражений.

Пусть P и F — евклидовы симплексы Кокстера, причем G_P — подгруппа в G_F . Заметим, что в евклидовой группе, порожденной отражениями, существуют параллельные друг другу зеркала отражений. Поэтому симплекс P может быть подобен симплексу F .

4.1. Подобные симплексы. В настоящем пункте будем предполагать, что $\Sigma(F) = \Sigma(P)$.

Пусть V — специальная вершина симплекса P . Без ограничения общности мы можем считать, что F — фундаментальный симплекс группы G_F , лежащий внутри P и имеющий вершину V . По определению специальной вершины V является также специальной вершиной симплекса F .

ЛЕММА 9. 1) Пусть F — симплекс Кокстера в $\mathbb{E}^n$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует симплекс Кокстера T такой, что $\Sigma(T) = \Sigma(F)$ и $G_T \subset G_F$ — подгруппа индекса k^n .

2) Если симплексы F и P гомотетичны и $G_P \subset G_F$, то коэффициент гомотетии является натуральным числом и $[G_F : G_P] = k^n$ для некоторого натурального k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть V — специальная вершина симплекса F , а μ — гипергрань симплекса F , противоположная вершине V . Поскольку V — специальная вершина, через V проходит зеркало ν , параллельное зеркалу μ .

Обозначим через K конус с вершиной V , натянутый на симплекс F , и рассмотрим группу, порожденную отражениями в параллельных друг другу зеркалах μ и ν . Зеркала отражений, лежащих в этой группе, отсекают от конуса K симплексы T_k , подобные симплексу F , такие, что $G_{T_k} \subset G_F$ — подгруппа индекса k^n .

2) Поскольку F — фундаментальная область группы G_F , между зеркалами μ и ν нет зеркал группы G_F , параллельных μ . Следовательно, T_k исчерпывают все симплексы, ограниченные зеркалами группы G_P , гомотетичные F и лежащие в K . Другими словами, $P = T_k$ для некоторого k и $[G_F : G_P] = k^n$.

ЛЕММА 10. Пусть $F \neq P$ — симплексы Кокстера в $\mathbb{E}^n$, причем $\Sigma(F) = \Sigma(P)$ и $G_P \subset G_F$. Пусть V — общая специальная вершина симплексов F и P , а μ — гипергрань симплекса P , противоположная вершине V . Тогда следующие три условия эквивалентны:

- 1) $1 < [G_F : G_P] < 2^n$;

- 2) не существует зеркала из группы G_F , параллельного μ и пересекающего внутренность симплекса P ;
- 3) имеет место один из следующих трех случаев:
- $\Sigma(F) = \Sigma(P) = \tilde{C}_2$, $[G_F : G_P] = 2$;
 - $\Sigma(F) = \Sigma(P) = \tilde{G}_2$, $[G_F : G_P] = 3$;
 - $\Sigma(F) = \Sigma(P) = \tilde{F}_4$, $[G_F : G_P] = 4$.

В каждом из трех указанных случаев подгруппа определена однозначно с точностью до автоморфизма группы G_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – гиперграни симплекса P , проходящие через вершину V .

Рассмотрим схему $\Sigma'(F) = \Sigma(F) \setminus v$, где v – специальная вершина схемы Кокстера $\Sigma(F)$, соответствующая гиперграни μ . Допустим, что $\Sigma(F) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$. Тогда любая симметрия схемы $\Sigma'(F)$ продолжается до симметрии схемы $\Sigma(F)$, а значит, углы гиперплоскости μ с гиперплоскостями $\mu_1, \dots, \mu_n$ однозначно определены и симплекс P гомотетичен симплексу F . Поэтому из условия 2) следует, что $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. В каждом из этих случаев существует единственная симметрия схемы $\Sigma'(F)$, не продолжающаяся до симметрии схемы $\Sigma(F)$. Соответствующие подгруппы приведены в таблице 2.

Таким образом, из условия 2) следует условие 3). Пусть теперь выполнено условие 1). Из второго утверждения леммы 9 следует, что в этом случае симплекс P не гомотетичен симплексу F , а значит, $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Следовательно, из условия 1) вытекает условие 3).

Условия 1) и 2) вытекают из условия 3) очевидным образом.

Таблица 2. Исключительные случаи. В таблице приведены подгруппы, для которых $\Sigma(F) = \Sigma(P)$, а $[G_F : G_P] < 2^n$. Векторы $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ – внешние нормали к гиперграням f_i симплекса F . Нумерация гиперграней приведена на схеме Кокстера $\Sigma(F)$. Через r_i обозначено отражение относительно гиперграни f_i . Нормали к гиперграням симплекса P выражены через векторы $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$

Тип	$\Sigma(F)$	$\Sigma(P)$	Недостающий вектор	Индекс
$\tilde{C}_2$			$\xi_4 = r_1(\xi_2)$	2
$\tilde{G}_2$			$\xi_4 = r_1 r_2(\xi_3)$	3
$\tilde{F}_4$			$\xi_6 = r_5 r_4 r_3(\xi_2)$	4

ЛЕММА 11. Пусть P и F – подобные евклидовы симплексы Кокстера, причем $G_P \subset G_F$. Тогда

- 1) подгруппа $G_P \subset G_F$ определяется индексом $[G_F : G_P]$ однозначно с точностью до автоморфизма группы G_F ;
- 2) если подгруппа $G_P \subset G_F$ максимальна, то либо P и F гомотетичны, либо подгруппа $G_P \subset G_F$ описана в таблице 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и прежде, V – общая специальная вершина симплексов P и F , а симплекс F лежит внутри симплекса P .

Предположим, что $\Sigma(F) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$. В этом случае мы можем считать, что симплекс P получается из F в результате гомотетии с центром в точке V (лемма 10) и оба утверждения леммы очевидны.

Пусть теперь $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Пусть μ_P – гипергрань симплекса P , противоположащая вершине V , а μ – ближайшее к точке V зеркало группы G_F , параллельное μ_P и пересекающее симплекс P , но не проходящее через точку V (μ может совпадать с μ_P). Гиперплоскость μ отсекает от P некоторый симплекс T , получающийся из P в результате гомотетии с центром в точке V и коэффициентом $1/k$ для некоторого натурального k (возможно, $k = 1$). Рассмотрим подгруппу $G_T \subset G_F$. Заметим, что $G_P \subset G_T$, поскольку V – специальная вершина, а μ – ближайшее к ней зеркало, параллельное зеркалу μ_P и не проходящее через V . Из леммы 10 следует, что либо $T = F$, либо индекс $[G_F : G_T] = 2, 3$ или 4 соответственно в случаях $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Таким образом, $[G_F : G_P] = mk^n$, где $k \in \mathbb{N}$, а m либо равно единице, либо $m = 2, 3$ или 4 соответственно для случаев $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Ясно, что такая подгруппа полностью описывается параметрами m и k и что для разных таких подгрупп числа mk^n различны. Этим доказано первое утверждение леммы. Если подгруппа $G_P \subset G_F$ максимальна, то одно из чисел m и k равно единице. Отсюда следует второе утверждение.

Приведем еще один факт про подобные симплексы в $\mathbb{E}^n$, который понадобится нам в дальнейшем.

ЛЕММА 12. Пусть F и P – симплексы в $\mathbb{E}^n$, $\Sigma(F) = \Sigma(P)$ и $G_P \subset G_F$. Тогда каждый автоморфизм группы G_P продолжается до автоморфизма группы G_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – автоморфизм группы G_P . Известно (см., например, [12]), что φ переводит отражения в отражения. Следовательно, мы можем рассматривать φ как движение $\mathbb{E}^n$, сохраняющее множество зеркал группы G_P .

Пусть V – специальная вершина симплекса P , а F_1 – фундаментальный симплекс группы G_F , лежащий внутри P и имеющий вершину V . Поскольку $\Sigma(F) = \Sigma(P)$, такой симплекс F_1 ровно один. Тогда $\varphi(V)$ является специальной вершиной фундаментального симплекса $\varphi(P)$ группы G_P , а $\varphi(F_1)$ – симплекс с вершиной $\varphi(V)$, лежащий внутри $\varphi(P)$ и конгруэнтный F . Обозначим через F_2 фундаментальный симплекс группы G_F , лежащий внутри $\varphi(P)$ и имеющий вершину $\varphi(V)$.

Если $\Sigma(F) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$, то симплекс данного объема со схемой $\Sigma(F)$ можно отрезать от конуса с вершиной $\varphi(V)$, натянутого на симплекс $\varphi(P)$, единственным образом. Следовательно, F_2 совпадает с $\varphi(F_1)$ и φ является автоморфизмом группы G_F .

Пусть теперь $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Если $\varphi(F_1) = F_2$, то все доказано. Пусть $\varphi(F_1) \neq F_2$. Тогда одна из пар симплексов (F_1, P) и $(F_2, \varphi(P))$ является парой гомотетичных друг другу симплексов, а другая пара – не является. Отсюда следует, что один из индексов $[G_{F_1} : G_P]$ и $[G_{F_2} : G_{\varphi(P)}]$ имеет вид k^n , а другой – $2k^n, 3k^n$ и $4k^n$ соответственно для случаев $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$. Это противоречит тому, что $G_{F_1} = G_{F_2}$ и $G_P = G_{\varphi(P)}$.

4.2. Симплексы с различными схемами Кокстера. Перейдем теперь к случаю, когда симплексы F и P не являются подобными.

Пусть $\mu(v)$ – гипергрань симплекса Кокстера T , соответствующая вершине v схемы $\Sigma(T)$, а V – вершина симплекса T , противоположная гипергрань $\mu(v)$. Обозначим через $G_{T \setminus \mu(v)}$ подгруппу группы G_T , порожденную отражениями в гипергранях симплекса T , отличных от $\mu(v)$. Другими словами, $G_{T \setminus \mu(v)}$ – подгруппа группы G_T , сохраняющая вершину V .

ЛЕММА 13. Пусть F и P – симплексы в $\mathbb{E}^n$ такие, что $G_P \subset G_F$. Тогда для любой вершины v схемы $\Sigma(P)$ существует вершина w схемы $\Sigma(F)$ такая, что для некоторого образа F_w симплекса F под действием группы G_F выполнено $G_{P \setminus \mu(v)} \subset G_{F_w \setminus \mu(w)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – вершина симплекса P , противоположная гипергрань $\mu(v)$. Пусть F_w – фундаментальный симплекс группы G_F , лежащий внутри P и имеющий вершину V . Пусть w – вершина схемы $\Sigma(F)$, соответствующая грани симплекса F_w , противоположной вершине V . Стабилизатор точки V в группе G_P является подгруппой стабилизатора той же точки в G_F . Стабилизатор V в группах G_P и G_F совпадает с $G_{P \setminus \mu(v)}$ и $G_{F_w \setminus \mu(w)}$ соответственно, что и доказывает лемму.

Лемма 13 дает необходимое условие на схемы Кокстера $\Sigma(P)$ и $\Sigma(F)$ для того, чтобы $G_P \subset G_F$. Это условие несложно проверить, поскольку группы $G_{P \setminus \mu(v)}$ и $G_{F_w \setminus \mu(w)}$ действуют в сферическом пространстве S^{n-1} , и мы можем воспользоваться результатами §3. Явная проверка условия, указанного в лемме 13, приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 14. Пусть F и P – симплексы Кокстера в $\mathbb{E}^n$ такие, что $G_P \subset G_F$ и $G_P \neq G_F$. Тогда пара $(\Sigma(F), \Sigma(P))$ является одной из пар, перечисленных в таблице 3.

В частности, из леммы 13 следует, что если $G_P \subset G_F$ и $\Sigma(P) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$, то $\Sigma(F) = \Sigma(P)$.

Для каждой пары симплексов (F, P) таких, что $\Sigma(P) \neq \Sigma(F)$, удовлетворяющей лемме 13, легко проверить, что найдутся подобные им симплексы F_1 и P_1 такие, что $G_{P_1} \subset G_{F_1}$. Примеры таких симплексов приведены в правом столбце таблицы 3.

ЛЕММА 15. Пусть F и P – симплексы в $\mathbb{E}^n$, причем $G_P \subset G_F$ – максимальная подгруппа и $\Sigma(P) \neq \Sigma(F)$. Тогда существуют специальная вершина V симплекса P и фундаментальный симплекс F_1 группы G_F такие, что V является специальной вершиной симплекса F_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – множество всех зеркал группы G_F , параллельных зеркалам группы G_P . Обозначим через G_L группу, порожденную отражениями относительно зеркал из множества L . Ясно, что $G_P \subseteq G_L \subseteq G_F$. Поскольку подгруппа $G_P \subset G_F$ максимальна, $G_L = G_P$ или $G_L = G_F$.

Пусть F_1 – фундаментальный симплекс группы G_F , лежащий внутри P , и V – специальная вершина F_1 . Для каждого зеркала из G_P существует параллельное ему зеркало, проходящее через V . Если $G_L = G_P$, то все эти зеркала лежат в группе G_P , а следовательно, V является специальной вершиной симплекса P .

Предположим теперь, что $G_L = G_F$. Тогда множество линейных частей группы G_P совпадает с множеством линейных частей группы G_F . Отсюда немедленно следует, что $\Sigma(F) = \tilde{C}_n$, $\Sigma(P) = \tilde{B}_n$ или $\Sigma(F) = \tilde{B}_n$, $\Sigma(P) = \tilde{C}_n$. В каждом

Таблица 3. Максимальные неразложимые подгруппы. В таблице приведены максимальные неразложимые подгруппы отражений конечного индекса в евклидовых группах отражений. Обозначения те же, что и в таблице 2

$\Sigma(F)$	$\Sigma(P)$	Индекс
$\tilde{B}_n$ $(n \geq 3)$	$\tilde{D}_n$ $\xi_{n+2} = r_{n+1}(\xi_n)$	2
$\tilde{C}_n$ $(n \geq 3)$	$\tilde{B}_n$ $\xi_{n+2} = r_1(\xi_2)$	2
$\tilde{B}_n$ $(n \geq 3)$	$\tilde{C}_n$ $\xi_{n+2} = r_2 r_3 r_4 \dots r_n(\xi_{n+1})$	2^{n-1}
$\tilde{E}_8$	$\tilde{D}_8$ $\xi_{10} = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_9 r_3 \times r_4 r_5 r_2 r_1 r_3 r_9 r_2 r_4(\xi_3)$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$
$\tilde{E}_8$	$\tilde{A}_8$ $\xi_{10} = r_9 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 \times r_9 r_3 r_4 r_5 r_2 r_1 r_3 r_9 r_2 r_4(\xi_3)$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$
$\tilde{E}_7$	$\tilde{A}_7$ $\xi_9 = r_8 r_4 r_3 r_2 r_5 r_6 r_4 r_8 r_3 r_5(\xi_4)$	$2^4 \cdot 3^2$
$\tilde{F}_4$	$\tilde{B}_4$ $\xi_6 = r_1 r_2(\xi_3)$	3
$\tilde{G}_2$	$\tilde{A}_2$ $\xi_4 = r_1(\xi_2)$	2

из этих случаев любая специальная вершина симплекса P является специальной вершиной некоторого фундаментального симплекса группы G_F .

ЛЕММА 16. Пусть F и P – симплексы в $\mathbb{E}^n$, $G_P \subset G_F$ – максимальная подгруппа и $\Sigma(P) \neq \Sigma(F)$. Тогда G_P однозначно (с точностью до автоморфизма группы G_F) определена парой $(\Sigma(P), \Sigma(F))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим максимальную подгруппу отражений $G_P \subset G_F$ и покажем, что любые два симплекса P_1 и P_2 такие, что подгруппы $G_{P_i} \subset G_F$ максимальны и $\Sigma(P_i) = \Sigma(P)$, переводятся друг в друга автоморфизмом группы G_F .

По лемме 15 существует специальная вершина V_1 симплекса P_1 , являющаяся специальной вершиной некоторого фундаментального симплекса F_1 группы G_F . Пусть V_2 – специальная вершина симплекса P_2 , являющаяся также специальной вершиной некоторого фундаментального симплекса F_2 группы G_F .

Рассмотрим автоморфизм φ группы G_F такой, что $\varphi(F_1) = F_2$. Заметим, что любой евклидов симплекс Кокстера T обладает следующим свойством: если V и U – его специальные вершины, то существует автоморфизм группы G_T , сохраняющий симплекс T и меняющий местами вершины V и U . Поэтому существует такой автоморфизм ψ группы G_F , переводящий F_2 в F_2 , что $\psi \circ \varphi(V_1) = V_2$. Положим $P_3 = \psi \circ \varphi(P_1)$.

Обозначим через K_2 и K_3 конусы с вершиной V_2 , натянутые на симплексы P_2 и P_3 соответственно.

Рассмотрим стабилизаторы $G'_F(V_2)$ и $G'_P(V_2)$ точки V_2 в группах G_F и G_P соответственно. Как показано в § 3 (лемма 8), неразложимая сферическая подгруппа полного ранга $G'_P(V_2) \subset G'_F(V_2)$ определяется однозначно (с точностью до автоморфизма группы $G'_F(V_2)$) схемами $\Sigma'(P)$ и $\Sigma'(F)$. Поэтому существует автоморфизм ρ' группы $G'_F(V_2)$, переводящий K_3 в K_2 . Поскольку $\Sigma(P) \neq \Sigma(F)$, мы можем считать, что $\Sigma(P) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$. Следовательно, ρ' продолжается до автоморфизма ρ группы G_F . Положим $P_4 = \rho(P_3)$.

Ввиду того что $\Sigma(P) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$, все зеркала, отсекающие от K_2 симплексы, подобные симплексу P , параллельны друг другу. Поскольку подгруппа $G_{P_1} \subset G_F$ максимальна, симплекс P_4 , как и симплекс P_2 , отсекается ближайшим к точке V из таких зеркал. Таким образом, $P_4 = P_2$ и, следовательно, $\rho \circ \psi \circ \varphi(P_1) = P_2$.

ЛЕММА 17. Пусть $G_P \subset G_{P_1} \subset G_F$ – подгруппы, V – общая вершина симплексов Кокстера F и P , причем F лежит внутри P . Пусть симплекс P получается из симплекса P_1 с помощью гомотетии с центром в вершине V и натуральным коэффициентом k . Тогда найдется такой симплекс F_1 , получающийся из симплекса F гомотетией с коэффициентом k , что $G_P \subset G_{F_1} \subset G_F$.

Доказательство очевидно: в качестве центра гомотетии можно взять вершину V .

Объединяя полученные выше результаты, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F и P – симплексы Кокстера в $\mathbb{E}^n$ такие, что $G_P \subset G_F$. Тогда существует цепочка подгрупп $G_P = G_{F_1} \subset G_{F_{l-1}} \subset \dots \subset G_{F_1} \subset G_{F_0} = G_F$ такая, что каждое ее звено $G_{F_{i+1}} \subset G_{F_i}$ описано в таблицах 2, 3 или лемме 9.

Подгруппа $G_P \subset G_F$ определяется индексом $[G_F : G_P]$ однозначно с точностью до автоморфизма группы G_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[G_F : G_P] < \infty$, найдется цепочка $G_P = G_{F_l} \subset G_{F_{l-1}} \subset \dots \subset G_{F_1} \subset G_{F_0} = G_F$ такая, что каждая из подгрупп $G_{F_{i+1}} \subset G_{F_i}$ максимальна. Рассмотрим звенья этой цепочки, для которых $\Sigma(F_{i+1}) = \Sigma(F_i)$. По лемме 11 подгруппа $G_{F_{i+1}} \subset G_{F_i}$ описана либо в таблице 2, либо в лемме 9. Рассмотрим теперь звенья, для которых $\Sigma(F_{i+1}) \neq \Sigma(F_i)$. По леммам 14 и 16 такие звенья описаны в таблице 3, и первое утверждение теоремы доказано.

Осталось доказать, что подгруппа $G_P \subset G_F$ заданного индекса единственна с точностью до автоморфизма группы G_F .

Цепочку схем $\Sigma_q \subset \Sigma_{q-1} \subset \dots \subset \Sigma_1$ назовем *допустимой цепочкой*, построенной по подгруппе $G_P \subset G_F$, если существуют симплексы $T_q = P, T_{q-1}, \dots, T_1, T_0 = F$, для которых выполнены следующие условия:

- (1) $\Sigma(T_i) = \Sigma_i, 1 \leq i \leq q$;
- (2) $\Sigma_1 = \Sigma(F)$;
- (3) подгруппы $G_{T_{i+1}} \subset G_{T_i}$ максимальны при $\Sigma(T_i) \neq \Sigma(T_{i+1})$;
- (4) $\Sigma(T_i) = \Sigma(T_j), i < j$, тогда и только тогда, когда $i = 0, j = 1$.

Цепочку подгрупп $G_P = G_{T_q} \subset G_{T_{q-1}} \subset \dots \subset G_{T_1} \subset G_{T_0} = G_F$, удовлетворяющую условиям (1)–(4), также назовем *допустимой*.

Покажем, что для любой подгруппы $G_P \subset G_F$ существует допустимая цепочка подгрупп.

Пусть $G_P = G_{F_l} \subset G_{F_{l-1}} \subset \dots \subset G_{F_1} \subset G_{F_0} = G_F$ – цепочка подгрупп, удовлетворяющая условиям теоремы. Предположим, что $\Sigma(F_j) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$ и $j > 0$. Тогда $\Sigma(F) = \Sigma(F_1) = \dots = \Sigma(F_j)$ и подгруппа $G_{F_j} \subset G_{F_0}$ полностью определяется своим индексом (лемма 11). Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что $\Sigma(F_j) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2, \tilde{F}_4$ при $j > 1$.

Далее, пусть $\Sigma(F_i) = \Sigma(F_j), i < j, 1 < j$. Тогда, воспользовавшись леммой 17, мы можем убрать из цепочки звенья $G_{F_{i+1}}, \dots, G_{F_j}$ следующим образом: если $\Sigma(F) = \Sigma(F_1)$, то применим гомотетию с коэффициентом $[G_{F_i} : G_{F_j}]$ к симплексам $F_1, \dots, F_i$; если же $\Sigma(F) \neq \Sigma(F_1)$, то применим гомотетию с коэффициентом $[G_{F_i} : G_{F_j}]$ к симплексам $F_0, \dots, F_i$ и вставим полученные подгруппы между G_F и $G_{F_{j+1}}$. Заметим, что после применения любой из описанных выше операций следующий за F симплекс будет ему подобен.

Таким образом, если в исходной цепочке есть подобные симплексы, то за конечное число шагов (не более $l - 1$) мы построим допустимую цепочку подгрупп. Если же подобных симплексов не было, то просто добавим симплекс $T_1 = F$ между F и F_1 . Теперь, пользуясь таблицей 3 и леммой 16, несложно перечислить все возможные допустимые цепочки схем $\Sigma_q \subset \Sigma_{q-1} \subset \dots \subset \Sigma_1$. Ниже приведен список допустимых цепочек при $q \geq 3$ (при $q = 2$ см. таблицу 3).

$\Sigma_q \subset \dots \subset \Sigma_1$	$[G_{T_1} : G_P]$
$\tilde{D}_4 \subset \tilde{B}_4 \subset \tilde{F}_4$	$2 \cdot 3$
$\tilde{C}_4 \subset \tilde{B}_4 \subset \tilde{F}_4$	$2^3 \cdot 3$
$\tilde{D}_n \subset \tilde{B}_n \subset \tilde{C}_n$	4

Каждой подгруппе мы сопоставили допустимую цепочку схем. Заметим, что для каждой пары (Σ_q, Σ_1) найдется не более одной допустимой цепочки схем $\Sigma_q \subset \Sigma_{q-1} \subset \dots \subset \Sigma_1$. Следовательно, нам достаточно показать, что каждой допустимой цепочке схем соответствует не более одной подгруппы заданного индекса.

Нам осталось разобрать два случая: $q = 2$ и $q = 3$ (случай $q = 1$ разобран в лемме 11).

Пусть $q = 2$. Тогда ввиду леммы 16 подгруппа $G_P \subset G_{T_1}$ определена однозначно с точностью до автоморфизма группы G_{T_1} . В частности, индекс $[G_{T_1} : G_P]$ определен однозначно, а следовательно, определен и индекс $[G_F : G_{T_1}]$. Из леммы 11 следует, что подгруппа G_{T_1} определена с точностью до автоморфизма группы G_F . Поскольку $\Sigma(F) = \Sigma(T_1)$, из леммы 12 следует, что каждый автоморфизм группы G_{T_1} продолжается до автоморфизма группы G_F . А следовательно, группа $G_P \subset G_F$ полностью задается индексом $[G_F : G_P]$.

Пусть теперь $q = 3$. Непосредственная проверка показывает, что каждой из трех допустимых цепочек схем $\Sigma_3 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_1$ соответствует ровно одна (с точностью до автоморфизма группы G_{T_1}) подгруппа $G_{T_3} \subset G_{T_1}$. Повторяя рассуждения для случая $q = 2$, мы получаем утверждение теоремы.

§ 5. Общий вид подгрупп

Опишем теперь, как получить все подгруппы отражений данной евклидовой группы отражений.

Пусть F – симплекс Кокстера, P – ограниченный многогранник Кокстера в $\mathbb{E}^n$ и $G_P \subset G_F$. Многогранник P можно записать в виде $P = P_1 \times \dots \times P_s$, где $P_1, \dots, P_s$ – евклидовы симплексы меньшей размерности. Для каждой из схем $\Sigma(P_i)$, $i = 1, \dots, s$, выберем произвольную вершину u_i . Тогда $G_{P_1 \setminus \mu(u_1)} \times \dots \times G_{P_s \setminus \mu(u_s)}$ совпадает со стабилизатором $\text{Fix}(U, G_P)$ некоторой вершины U многогранника P в группе G_P , а следовательно, содержится в $\text{Fix}(U, G_F)$. Без ограничения общности мы можем считать, что U является также вершиной симплекса F .

Отсюда следует, что любая подгруппа конечного индекса группы G_F , порожденная отражениями, может быть получена в результате следующей процедуры.

- 1) Возьмем вершину U симплекса F и выберем подгруппу отражений H максимального ранга в $\text{Fix}(U, G_F)$ (т.е. подгруппу отражений, не имеющую в $\mathbb{E}^n$ других неподвижных точек, кроме U). Обозначим через K конус с вершиной U , являющийся фундаментальной камерой группы H . При этом $K = K_1 \times \dots \times K_s$, где K_i – неразложимые конусы.
- 2) Для каждого конуса K_i выберем зеркало μ_i из группы G_F , не пересекающее остальные конусы K_j , $j \neq i$, и отсекающее от K_i остроугольный симплекс P_i соответствующей размерности. Пусть $P = P_1 \times \dots \times P_s$. Тогда G_P – подгруппа конечного индекса в G_F .

Для более явного описания выбора зеркал μ_i нам потребуются аффинные системы корней.

Рассмотрим систему корней Δ_F , группа Вейля которой совпадает с G_F . А именно расставим на кратных ребрах схемы Кокстера $\Sigma(F)$ стрелки таким образом, чтобы полученная схема Дынкина $S(F)$ содержалась в таблице “Aff1” [8; гл. 4]. Система Δ_F состоит из двух частей: множества вещественных корней Δ_F^{re} и множества мнимых корней Δ_F^{im} , причем $\Delta_F^{\text{im}} = \{\pm\delta, \pm 2\delta, \dots\}$ (см. [8; предложение 5.10]). Здесь $\delta = \sum a_i \alpha_i$, где α_i – простые корни системы Δ_F , а a_i –

коэффициенты линейной зависимости столбцов обобщенной матрицы Картана. Далее, пусть M – множество зеркал группы G_F , проходящих через специальную вершину V симплекса F . Рассмотрим конечную систему корней $\Delta'_F \subset \Delta_F$, состоящую из всех корней системы Δ_F , обращающихся в нуль на зеркалах из множества M . Согласно [8; предложение 6.3] $\Delta_F^{\text{re}} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta'_F, n \in \mathbb{Z}\}$.

Пусть, как и прежде, P – ограниченный многогранник Кокстера в $\mathbb{E}^n$ и $G_P \subset G_F$. Корни системы Δ_F , обращающиеся в нуль на гранях многогранника P , являются простыми корнями некоторой системы корней $\Delta \subset \Delta_F$, группа Вейля которой совпадает с G_P .

Следуя процедуре, описанной выше, рассмотрим произвольную конечную систему корней полного ранга $\Delta' \subset \Delta_F$. Пусть $\Delta' = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_s$, где Δ'_i , $i = 1, \dots, s$, – неразложимые компоненты, а Π_i – система простых корней системы Δ'_i . К каждой из систем Π_i мы должны добавить корень β_i (обращающийся в нуль на зеркале μ_i), ортогональный всем корням из Δ'_j при $i \neq j$ и такой, что для каждого простого корня $\gamma \in \Pi_i$ угол между β_i и γ неострый.

В качестве корня β_i всегда можно выбрать корень $\theta_i + k\delta$, где θ_i – младший корень системы Δ'_i , а $k \in \mathbb{N}$. Однако в некоторых случаях существуют и другие корни, удовлетворяющие указанным условиям. Точнее, обозначим через S_i схему Дынкина системы простых корней Π_i . Если $S_i = B_l, C_l$ ($l \geq 3$), F_4, G_2 или C_2 , то найдется еще одно семейство параллельных зеркал, отсекающих от конуса K_i остроугольные многогранники. А именно семейство зеркал, на которых обращаются в нуль корни $\theta' + k\delta$, где $k \in \mathbb{N}$, а θ' – корень, приведенный в таблице 4.

Таблица 4. Дополнительный корень θ'

S_i	θ'
B_l	$\frac{1}{2}(-\xi_1 + \theta)$
C_l	$\xi_1 + \theta$
G_2	$\xi_1 + \xi_2 + \theta$
C_2	$\xi_1 + \theta$
F_4	$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \theta$

Несложно проверить, что этим исчерпываются все возможности выбора корня β_i .

Следующая теорема позволяет по схемам Кокстера многогранников F и P определить, может ли многогранник, подобный многограннику P , быть фундаментальной камерой подгруппы отражений группы G_F .

ТЕОРЕМА 2. Пусть F и P – евклидовы многогранники Кокстера. Многогранник T такой, что $G_T \subset G_F$ и $\Sigma(T) = \Sigma(P)$, существует тогда и только тогда, когда существует вложение группы G'_P в группу G'_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Без ограничения общности можно считать, что $T = P$. Поскольку $G_P \subset G_F$, можно также считать, что F лежит внутри P и специальная вершина V многогранника P является также вершиной многогранника F . Тогда $G'_P(V)$ является подгруппой стабилизатора $\text{Fix}(V, G_F)$. Поскольку группа G'_F содержит все линейные части группы G_F , группу $\text{Fix}(V, G_F)$ можно вложить в G'_F . Следовательно, существует вложение $G'_P \hookrightarrow G'_F$.

Для доказательства достаточности рассмотрим образ G группы G'_P при вложении в группу G'_F . Пусть K – фундаментальная камера группы G , а $\Delta' \subset \Delta_F$ – конечная система корней, простые корни которой обращаются в нуль на гипергранях конуса K . Пусть $\Delta' = \Delta'_1 + \dots + \Delta'_s$, где $\Delta'_i, i = 1, \dots, s$, – неразложимые компоненты, а Π_i – система простых корней системы Δ'_i . К каждой из систем Π_i добавим корень $\theta_i + \delta$, где θ_i – младший корень системы Δ'_i . Пусть T_1 – фундаментальная камера группы Вейля прямой суммы всех полученных систем корней. Очевидно, что $G_{T_1} \subset G_F$.

По построению многогранника T_1 его схема Кокстера может отличаться от схемы Кокстера многогранника P только тем, что некоторые неразложимые компоненты вида $\tilde{B}_l$ заменены на $\tilde{C}_l$ и наоборот. В этом случае, перейдя (в каждой такой компоненте) к подгруппе индекса 2 или 2^{l-1} (см. таблицу 3), получим подгруппу, схема Кокстера фундаментального многогранника которой будет совпадать с $\Sigma(P)$.

Замечание о единственности. Вообще говоря, разложимая подгруппа $G_P \subset G_F$ не определяется схемами $(\Sigma(P), \Sigma(F))$ и индексом $[G_F : G_P]$. На рис. 1 приведены фундаментальные многоугольники трех различных подгрупп $G_P \subset G_F$, для которых $\Sigma(F) = \tilde{C}_2$, $\Sigma(P) = 2\tilde{A}_1$, $[G_F : G_P] = 2 \cdot 4$. Ясно, что никакие две из этих подгрупп не переводятся друг в друга автоморфизмом группы G_F . Однако единственность (с точностью до автоморфизма группы G_F) имеет место при некоторых дополнительных условиях.

Рис. 1. Фундаментальные области трех подгрупп группы G_F , для которых $\Sigma(F) = \tilde{C}_2$, $\Sigma(P) = 2\tilde{A}_1$, $[G_F : G_P] = 2 \cdot 4$

Пусть $G_P \subset G_F$ – подгруппа, а M – множество линейных частей группы G_P . Предположим, что G_P содержит любое отражение из группы G_F , линейная часть которого лежит в M . Такую подгруппу назовем *блочно-максимальной* подгруппой группы G_F .

ЛЕММА 18. *Блочно-максимальная подгруппа $G_P \subset G_F$ с точностью до автоморфизма группы G_F определяется схемами $(\Sigma(P), \Sigma(F))$ и индексом $[G_F : G_P]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, мы можем считать, что F лежит внутри P . Пусть V – специальная вершина симплекса F . Для каждого зеркала из G_P существует параллельное ему зеркало группы G_F , проходящее через V . Поскольку подгруппа $G_P \subset G_F$ является блочно-максимальной, все эти зеркала

лежат в группе G_P , а следовательно, V является специальной вершиной симплекса P .

По определению блочно-максимальной подгруппы группа G_P полностью задается стабилизатором G'_P специальной вершины V . Как показано в §3, сферическую подгруппу G'_P максимального ранга почти всегда можно вложить в G'_F единственным способом (с точностью до автоморфизма группы G'_F). Исключение составляют подгруппы, описанные в следствии 2. Однако несложно заметить, что для таких подгрупп индекс $[G_F : G_P]$ отличается в 2^k раз (где $k \neq 0$ – число, определенное в следствии 2).

Допустим, что $\Sigma(F) \neq \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$. Тогда любой автоморфизм группы G'_F продолжается до автоморфизма группы G_F и, следовательно, подгруппа $G_P \subset G'_F$ определена однозначно с точностью до автоморфизма группы G_F .

Пусть теперь $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ или $\tilde{F}_4$. Для каждого из этих случаев существует единственная симметрия схемы $\Sigma'(F)$, не продолжающаяся до симметрии схемы $\Sigma(F)$. Иными словами, с точностью до автоморфизма группы G_F существуют ровно два различных вложения группы G'_P в G'_F . Легко видеть, что индекс $[G_F : G_P]$ при этих двух вложениях отличается в 2, 3 и 4 раза для случаев $\Sigma(F) = \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ и $\tilde{F}_4$ соответственно.

§6. Разложимые максимальные подгруппы

В этом параграфе мы опишем разложимые максимальные подгруппы отражений.

Пусть G – группа, порожденная отражениями, H – конечная подгруппа отражений группы G , а M – множество всех зеркал группы G , параллельных зеркалам группы H . Назовем группу G_M , порожденную отражениями относительно всех зеркал из множества M , G -расширением группы H . Ясно, что в этом случае G_M – блочно-максимальная подгруппа группы G .

ЛЕММА 19. Пусть F – симплекс Кокстера в $\mathbb{E}^n$, P – разложимый многогранник Кокстера в $\mathbb{E}^n$ и $G_P \subset G_F$ – максимальная подгруппа отражений. Тогда G_P является G_F -расширением некоторой максимальной подгруппы отражений группы G'_F . Обратно, G_F -расширение любой разложимой максимальной подгруппы отражений группы G'_F является максимальной подгруппой отражений группы G_F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L множество всех зеркал группы G_F , параллельных зеркалам группы G_P , а через G_L – группу, порожденную отражениями относительно зеркал из множества L . Ясно, что $G_P \subseteq G_L \subseteq G_F$. Поскольку подгруппа $G_P \subset G_F$ максимальна, $G_L = G_P$ или $G_L = G_F$. Случай $G_L = G_F$ невозможен, так как группа G_P разложима, а группа G_F нет. Следовательно, $G_L = G_P$ и группа G_P является G_F -расширением группы G'_P .

Далее, сферическая подгруппа G'_P является максимальной сферической подгруппой группы G'_F (в самом деле, если существует подгруппа отражений H такая, что $G'_P \subset H \subset G'_F$, то G_F -расширение подгруппы H содержит G_P и является подгруппой G_F). Таким образом, любая разложимая максимальная подгруппа получается G_F -расширением некоторой максимальной сферической (разложимой) подгруппы группы G_F .

С другой стороны, ясно, что любая подгруппа, полученная G_F -расширением максимальной сферической подгруппы группы G_F , также максимальна.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Разложимая максимальная подгруппа отражений G_P неразложимой группы отражений G_F является блочно-максимальной. Такая подгруппа определяется семами Кокстера $\Sigma(F)$, $\Sigma(P)$ и индексом $[G_F : G_P]$ однозначно с точностью до автоморфизма группы G_F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 19 подгруппа $G_P \subset G_F$ является G_F -расширением некоторой максимальной подгруппы. Следовательно, G_P – блочно-максимальная подгруппа. Единственность следует из леммы 18.

Используя таблицу 12 работы [1] (см. также [10]) и результаты §3, несложно перечислить максимальные подгруппы отражений полного ранга неразложимых сферических групп отражений. Их список приведен в таблице 5. В той же таблице приведены соответствующие максимальные разложимые подгруппы неразложимых евклидовых групп и найден их индекс. (Для нахождения индекса мы воспользовались тем, что $[G_F : G_P] = \text{Vol}(P)/\text{Vol}(F)$, где $\text{Vol}(T)$ – объем многогранника T .)

Таблица 5. Разложимые максимальные подгруппы отражений полного ранга неразложимых евклидовых и сферических групп отражений

$\Sigma'(F)$	$\Sigma'(P)$	$[G'_F : G'_P]$	$\Sigma(F)$	$\Sigma(P)$	$[G_F : G_P]$
$B_n = C_n$	$B_k + B_{n-k}$	$\binom{n}{k}$	$\tilde{B}_n$	$\tilde{B}_k + \tilde{B}_{n-k}$	$2 \binom{n}{k}$
	$(= C_k + C_{n-k})$		$\tilde{C}_n$	$\tilde{C}_k + \tilde{C}_{n-k}$	$\binom{n}{k}$
D_n	$D_k + D_{n-k}$	$2 \binom{n}{k}$	$\tilde{D}_n$	$\tilde{D}_k + \tilde{D}_{n-k}$	$2^2 \binom{n}{k}$
G_2	$2A_1$	3	$\tilde{G}_2$	$2\tilde{A}_1$	$2 \cdot 3$
F_4	$2A_2$	2^5	$\tilde{F}_4$	$2\tilde{A}_2$	$2^5 \cdot 3$
E_6	$A_5 + A_1$	$2^2 \cdot 3^2$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{A}_5 + \tilde{A}_1$	$2^3 \cdot 3^2$
E_6	$3A_2$	$2^4 \cdot 5$	$\tilde{E}_6$	$3\tilde{A}_2$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
E_7	$D_6 + A_1$	$3^2 \cdot 7$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{D}_6 + \tilde{A}_1$	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$
E_7	$A_5 + A_2$	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{A}_5 + \tilde{A}_2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$
E_8	$E_7 + A_1$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$
E_8	$E_6 + A_2$	$2^6 \cdot 5 \cdot 7$	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
E_8	$2A_4$	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$	$\tilde{E}_8$	$2\tilde{A}_4$	$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из таблицы 5, индекс $[G_F : G_P]$ делится на $[G'_F : G'_P]$. Это не случайно. В самом деле, выберем специальную вершину V многогранника F и рассмотрим орбиту O_V точки V под действием группы G_F . Пусть $V_1, \dots, V_k$ – точки из O_V , лежащие внутри или на границе многогранника P . Пусть $G_{P(i)}$ – группа, порожденная отражениями относительно гиперграней многогранника P , проходящих через точку V_i . Найдем индекс $[G_F : G_P]$ как количество

образов многогранника F , лежащих внутри многогранника P :

$$[G_F : G_P] = \sum_{i=1}^k \frac{|G'_F|}{|G_{P(i)}|},$$

где $|G|$ – порядок группы G . Поскольку $G_{P(i)}$ – подгруппа группы G'_P , имеем

$$|G_{P(i)}| = \frac{|G'_P|}{[G'_P : G_{P(i)}]}.$$

Таким образом,

$$\frac{[G_F : G_P]}{[G'_F : G'_P]} = \sum_{i=1}^k [G'_P : G_{P(i)}] \in \mathbb{Z}.$$

§ 7. Подгруппы бесконечного индекса

Ранее мы предполагали, что многогранник P ограничен и, следовательно, подгруппа отражений G_P имеет конечный индекс в G_F . Однако фундаментальная камера дискретной группы, порожденной отражениями, может быть некомпактна. В настоящем параграфе мы рассмотрим случай, когда подгруппа W , порожденная отражениями, в дискретной группе отражений G_F (порожденной отражениями относительно гиперграней евклидова симплекса F) имеет бесконечный индекс.

Пусть W – дискретная группа, порожденная отражениями, в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, а P – фундаментальная камера группы W . Тогда P – обобщенный многогранник Кокстера, т.е. выпуклая область, ограниченная конечным числом гиперплоскостей $f_1, \dots, f_k$, причем гиперплоскости f_i и f_j либо параллельны, либо пересекаются под углом π/m_{ij} , $m_{ij} \in \mathbb{N}$. Как показано в [6], обобщенный евклидов многогранник Кокстера является прямым произведением нескольких симплексов и симплицальных конусов. Схема Кокстера такого многогранника является объединением нескольких связных параболических и эллиптических схем.

Пусть $P = P_1 \times \dots \times P_s \times P_{s+1} \times \dots \times P_{s+t}$ – разложимый евклидов многогранник Кокстера, где $P_1, \dots, P_s$ – неразложимые евклидовы симплексы, а $P_{s+1}, \dots, P_{s+t}$ – неразложимые симплицальные конусы. Тогда $\Sigma(P)$ – объединение s связных параболических и t связных эллиптических схем. Пусть $v_1, \dots, v_s$ – специальные вершины схем $\Sigma(P_1), \dots, \Sigma(P_s)$ соответственно.

Прямое обобщение рассуждений § 5 приводит нас к следующему описанию всех подгрупп заданной неразложимой группы отражений в $\mathbb{E}^n$.

Рассмотрим симплекс F в $\mathbb{E}^n$ и систему корней Δ_F , описанную в § 5. Тогда произвольная подгруппа (возможно, бесконечного индекса) группы G_F , порожденная отражениями, получается следующим образом: выберем конечную подгруппу отражений (быть может, не максимального ранга) $G \subset G_F$, для каждой неразложимой компоненты G_i группы G возьмем соответствующую ей конечную систему корней $\Delta_i \subset \Delta_F$ и выберем натуральное число k_i , после чего расширим некоторые из систем Δ_i с помощью корня $\theta_i + k_i\delta$, где θ_i – младший корень системы Δ_i (для компонент вида, описанного в таблице 4, вместо младшего корня можно взять корень θ'), а остальные системы Δ_i оставим нерасширенными. Группа Вейля W суммы всех полученных неразложимых систем корней является подгруппой (быть может, бесконечного индекса) в G_F .

Предположим теперь, что построенная подгруппа $W \subset G_F$ является максимальной. Максимальные подгруппы конечного индекса классифицированы в §§ 4 и 6. В следующей теореме перечислены максимальные подгруппы бесконечного индекса.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F — евклидов симплекс Кокстера, а $W \subset G_F$ — максимальная подгруппа бесконечного индекса, порожденная отражениями. Пусть Σ — схема Кокстера фундаментальной камеры группы W . Тогда пара $(\Sigma(F), \Sigma)$ совпадает с одной из следующих пар: $(\tilde{A}_n, \tilde{A}_k + \tilde{A}_{n-1-k})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $(\tilde{D}_n, \tilde{D}_{n-1})$, $(\tilde{D}_n, \tilde{A}_{n-1})$, $(\tilde{E}_6, \tilde{D}_5)$ или $(\tilde{E}_7, \tilde{E}_6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W' \subset G'_F$ — максимальная конечная подгруппа отражений группы W , а Σ' — схема Кокстера фундаментального многогранника группы W' . Поскольку $W \subset G_F$ максимальна, $W' \subset G'_F$ также максимальна. Из результатов § 3 следует, что у групп B_n , F_4 и G_2 нет максимальных подгрупп неполного ранга. Согласно следствию 1 все максимальные подгруппы отражений неполного ранга в группах A_n , D_n , E_6 , E_7 и E_8 перечислены в [1; таблица 12а]. А именно пара $(\Sigma'(F), \Sigma')$ в этом случае совпадает с одной из следующих: $(A_n, A_k + A_{n-1-k})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, (D_n, D_{n-1}) , (D_n, A_{n-1}) , (E_6, D_5) и (E_7, E_6) . Отсюда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Дынкин Е. Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Матем. сб. Нов. сер. 1952. Т. 30. № 2. С. 349–462.
2. Феликсон А. Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 134–156.
3. Феликсон А. Кокстеровские разбиения гиперболических тетраэдров // Фундамент. и прикл. матем. 2003. Т. 9. № 1. С. 263–275.
4. Johnson N. W., Klerhals R., Ratcliffe J. G., Tschantz S. T. Commensurability classes of hyperbolic Coxeter groups // Linear Algebra Appl. 2002. V. 345. P. 119–147.
5. Klimenko E., Sakuma M. Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements // Geom. Dedicata. 1998. V. 72. P. 247–282.
6. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 588–621.
7. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259.
8. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
9. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
10. Onishchik A. L. Comments on the paper “Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras” // Selected papers of E. B. Dynkin with commentary. Providence, RI: Amer. Math. Soc.; Cambridge, MA: International Press, 2000.
11. Феликсон А. Кокстеровские разбиения сферических симплексов с неразрезанными двугранными углами // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 201–202.
12. Charney R., Davis M. W. When is a Coxeter system determined by its Coxeter group? // J. London Math. Soc. (2). 2000. V. 61. № 2. P. 441–461.

Независимый московский университет
E-mail: pasha@mccme.ru
felikson@mccme.ru

Поступила в редакцию
05.04.2004 и 26.04.2005