Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Чебочко, Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике два. I, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 9, 125–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 10:55:44

УДК 512.554.31

Н. Г. Чебочко

Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике два. I

В работе исследуются пространства локальных деформаций классических алгебр Ли с однородной системой корней над полем K характеристики 2. Под классической алгеброй Ли над полем K мы понимаем алгебру Ли простой алгебраической группы либо ее факторалгебру по центру. Описание деформаций алгебр Ли представляет интерес в связи с классификацией простых алгебр Ли.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Над полем характеристики 2 и 3 классические алгебры Ли не определяются однозначно своей системой корней. В работе [1] построены параметрические семейства неизоморфных простых алгебр Ли характеристики 3, которые являются глобальными деформациями алгебры Ли C_2 . Согласно [2] алгебра Ли C_2 – единственная среди алгебр Ли серий A_n , B_n , C_n , D_n , допускающая нетривиальные деформации при $p = 3$. Полное описание глобальных деформаций алгебры Ли C_2 получено в работе [3]. В работе [4] установлено, что над полем характеристики $p > 3$ все классические алгебры Ли являются жесткими. В работах [5] и [6] предложена новая схема исследования жесткости и доказана жесткость классических алгебр Ли всех типов над полем характеристики $p > 2$, кроме алгебры Ли типа C_2 при $p = 3$. При $p = 2$ некоторые деформации алгебр Ли типа G_2 были построены в [7].

Достаточным условием отсутствия деформаций является тривиальность второй группы когомологий алгебры Ли с коэффициентами в присоединенном модуле (пространства локальных деформаций). В настоящей работе найдены пространства локальных деформаций классических алгебр Ли с однородной системой корней над полем характеристики 2. При этом используются методы, разработанные в [5].

Алгебры Ли типа A_l , $l + 1 \equiv 0(2)$, D_l , E_7 имеют центр. О соответствующих факторалгебрах будем говорить, что они имеют тип $\overline{A}_l$, $\overline{D}_l$, $\overline{E}_7$.

В работе доказана

ТЕОРЕМА. Пусть L – алгебра Ли над полем характеристики 2. Тогда

- (1) если L имеет один из типов A_l , $l > 1$, D_l , $l \equiv 1(2)$, E_6 , E_7 , E_8 , $\overline{A}_l$, $l \neq 3, 5$, $\overline{D}_l$, $l \equiv 0(2)$, $l \neq 6$, то $H^2(L, L) = 0$;
- (2) если L имеет тип $\overline{A}_l$, $l = 3, 5$, то $\dim H^2(L, L) = 20$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00725).

- (3) если L имеет тип D_4 , то $\dim H^2(L, L) = 24$;
- (4) если L имеет тип $D_l, l \equiv 0(2), l > 4, \overline{D}_l, l \equiv 1(2)$, то $\dim H^2(L, L) = 2l$;
- (5) если L имеет тип $\overline{D}_6$, то $\dim H^2(L, L) = 64$;
- (6) если L имеет тип $\overline{E}_7$, то $\dim H^2(L, L) = 56$.

В ходе доказательства теоремы найдены базисы второй группы когомологий. Также найдено естественное описание $H^2(L, L)$ как модуля над $\text{Aut } L$ для алгебр Ли типа $\overline{D}_l, l \equiv 1(2)$, и $\overline{A}_3$ (теоремы 1 и 2).

Обозначим через L алгебру Ли одного из типов $A_l, l > 1, D_l, E_6, E_7, E_8$ или ее факторалгебру по центру над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2, через R обозначим систему корней соответствующей комплексной классической алгебры Ли.

Группа $\text{Aut } L$ содержит присоединенную группу Шевалле $G(L)$ (см. [8]). Основной комплекс разлагаем в прямую сумму весовых подкомплексов, используя естественное действие максимального тора группы $G(L)$. Соответствующие группы когомологий являются весовыми подпространствами в группе когомологий основного комплекса.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части (§3) доказывается тривиальность группы $H_0^2(L, L)$. Здесь используются методы и результаты работы [5]. В пп. 3.1 и 3.2 рассматриваются случаи, когда L не имеет центра и когда L имеет центр соответственно.

Во второй части (§4) вычисляются группы $H_\mu^2(L, L)$, $\mu \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{H}$ подалгебру Картана в L . Так как L действует тривиально на $H^2(L, L)$, то веса $H^2(L, L)$ содержатся в множестве $\Lambda_2(R) = \{\mu = \alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \cup \{0\}, \mu(h) = 0 \forall h \in \mathcal{H}\}$. В п. 4.1 доказываем, что $\Lambda_2(R) \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, где

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2\delta, \delta \in R \cup \{0\}\}, \\ M_2 &= \{\alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}, \\ M_3 &= \{\alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}, \\ M_4 &= \{\alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

При этом веса могут содержаться в M_2 или в M_3 , только если система R имеет тип D_l или A_3 , в M_4 , только если R имеет тип A_5, D_6 или E_7 . Несложные рассуждения показывают, что $H_\mu^2(L, L) = 0$ для любого $\mu \in M_1$. Далее доказываем, что ненулевые когомологии веса из M_2 имеет только алгебра Ли типа $\overline{A}_3$, ненулевые когомологии веса из M_3 имеют только алгебры Ли типа $D_l, l \equiv 0(2), \overline{D}_l, l \equiv 1(2)$, или $\overline{A}_3$, а ненулевые когомологии веса из M_4 имеют только алгебры Ли типа $\overline{A}_5, \overline{D}_6$ или $\overline{E}_7$.

В §2 собраны вспомогательные утверждения о классических алгебрах Ли с однородными системами корней.

Автор выражает благодарность М. И. Кузнецову за постоянное внимание к работе и полезные замечания. Ему принадлежит доказательство предложения 2 о тривиальности $H^*(L, L)$ для алгебры Ли типа A_2 , основанное на использовании аналога элемента Казимира при $p = 2$. Отметим, что подобный элемент существует и для некоторых других типов алгебр Ли с однородной системой корней.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Мы рассматриваем только однородные системы корней (все корни имеют одинаковую длину), т.е. системы типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 .

Пусть R – система корней. Через $\langle \alpha, \beta \rangle$ для $\alpha, \beta \in R$ будем обозначать числа Картана. В однородных системах корней $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ для любых $\alpha, \beta \in R$.

Из [9; гл. VI, § 1, предложение 8 и теорема 1] следует

ЛЕММА 1. Пусть R – однородная система корней, $\alpha, \beta \in R$. Тогда

- (1) $\alpha + \beta \in R \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = -1$; $\alpha - \beta \in R \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 1$;
- (2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 2$; $\alpha = -\beta \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = -2$;
- (3) если $\alpha \neq \pm\beta$, то $\alpha + \beta \notin R$ и $\alpha - \beta \notin R \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

В однородных системах корней длины серий корней не превышают 1 и все корни сопряжены относительно действия группы Вейля $W(R)$.

Пусть $L_{\mathbb{C}}$ – комплексная простая алгебра Ли, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – картановская подалгебра, R – система корней $L_{\mathbb{C}}$, $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис R . В $L_{\mathbb{C}}$ выберем базис Шевалле $\{h_1, \dots, h_l, e_{\gamma}, \gamma \in R\}$.

Пусть $L_{\mathbb{Z}}$ – форма Шевалле. Классическая алгебра Ли над полем K характеристики 2 определяется как $L_K = L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Также определим алгебру Ли над простым подполем $\mathbb{F}_2$: $L_{\mathbb{F}_2} = L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$. Базис Шевалле в $L_{\mathbb{C}}$ определяет базис в L_K . Его элементы будем обозначать по-прежнему $\{h_1, \dots, h_l, e_{\gamma}, \gamma \in R\}$. Используя лемму 1, получаем, что структурные уравнения в алгебрах Ли с однородной системой корней в этом базисе имеют следующий вид (см., например, [10]):

- 1) $[h_i, h_j] = 0, i, j = \overline{1, l}$;
- 2) $[h_i, e_{\alpha}] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle e_{\alpha}, i = \overline{1, l}, \alpha \in R$;
- 3) $[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha}$ – целочисленная линейная комбинация элементов $h_i, i = \overline{1, l}$;
- 4) если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, то $[e_{\alpha}, e_{\beta}] = e_{\alpha+\beta}$;
- 5) если $\alpha, \beta \in R, \alpha + \beta \notin R, \alpha + \beta \neq 0$, то $[e_{\alpha}, e_{\beta}] = 0$.

Так как h_{α} – единственный элемент из $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ такой, что $(h_{\alpha}, h) = 2\alpha(h)/(\alpha, \alpha)$ для любого $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, то верна

ЛЕММА 2. Если R – однородная система корней, $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_l\alpha_l$ – разложение $\alpha \in R$ по простым корням, то $h_{\alpha} = x_1h_1 + \dots + x_lh_l$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, то $h_{\alpha+\beta} = h_{\alpha} + h_{\beta}$.

Всюду в дальнейшем через L будем обозначать алгебру Ли одного из типов $A_l, l > 1, D_l, E_6, E_7, E_8$ или ее факторалгебру по центру над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Система корней R будет в равной степени относиться как к самим алгебрам Ли, так и к их факторалгебрам по центру. Ранг системы R будет называться рангом алгебры Ли L . Обозначим через $\mathcal{H}$ подалгебру, порожденную $\{h_1, \dots, h_l\}$.

Система корней R является системой векторов в вещественном евклидовом пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Элементы из R можно рассматривать как линейные функции на подалгебре $\mathcal{H}$ в L (со значениями в K). Отметим, что $\alpha(h_{\beta}) = \langle \alpha, \beta \rangle$. Однако числа Картана мы рассматриваем в кольце целых чисел, а значения функций на подалгебре Картана – в поле K . Поэтому будем писать, что $\langle \alpha, \beta \rangle \equiv 0(2)$, а $\alpha(h_{\beta}) = 0$.

ЛЕММА 3. Если R – однородная система ранга $l > 1$, то любой корень из R является ненулевой функцией на подалгебре $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in R$. Если $\alpha|_{\mathcal{H}} = 0$, то $\langle \alpha, \beta \rangle \equiv 0(2)$ для любого $\beta \in R$. Из леммы 1 следует, что $\langle \alpha, \beta \rangle = 0, \pm 1$ при $\beta \neq \pm \alpha$. Таким образом, если $\alpha \in R$ является нулевой функцией на $\mathcal{H}$, то для любого $\beta \in R$, $\beta \neq \pm \alpha$, выполняется $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Это противоречит неприводимости системы R . Следовательно, α – ненулевая функция на R .

СЛЕДСТВИЕ 1. Подалгебра $\mathcal{H}$ является подалгеброй Картана в L .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $\alpha \in R$ $h_\alpha \neq 0$ и не содержится в центре алгебры Ли L .

Пусть $Q(R)$ – подгруппа в $V_{\mathbb{R}}$, порожденная корнями. Если $\mu = \sum \gamma_i \in Q(R)$, то через $\langle \mu, \alpha \rangle$ для $\alpha \in R$ будем обозначать целое число, равное $\sum \langle \gamma_i, \alpha \rangle$.

ЛЕММА 4. Пусть L – алгебра Ли одного из типов A_l , D_l , E_6 , E_7 , E_8 , $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Тогда

- (1) если $\alpha \neq \pm \beta$, то $h_\alpha + h_\beta \neq 0$;
- (2) если $\alpha + \beta + \gamma \notin 2Q(R)$, то $h_\alpha + h_\beta + h_\gamma \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $\alpha + \beta \in R$ или $\alpha - \beta \in R$, то $h_\alpha + h_\beta = h_{\alpha \pm \beta}$ и утверждение леммы следует из следствия 2 леммы 3. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ (см. лемму 1).

Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Тогда система корней $S = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}} \cap R$ имеет тип $A_1 \times A_1$.

Согласно [9; гл. VI, § 1, п. 7, предложение 24] существует базис системы R , содержащий базис системы S . Пусть $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ – такой базис, $\{\delta_1, \delta_2\}$ – базис системы S . Не ограничивая общности, можем считать, что $\alpha = \pm \delta_1$, $\beta = \pm \delta_2$. Так как $W(R)$ действует просто транзитивно на множестве базисов R [9; гл. VI, § 1, п. 5, теорема 2], то существует $w \in W(R)$ такое, что $w(\alpha) = \alpha_i$, $w(\beta) = \alpha_j$ для некоторых $i \neq j$. Тогда предположение $h_\alpha + h_\beta = 0$ приводит к $h_i + h_j = 0$. Получаем противоречие тому, что $\{h_1, \dots, h_l, e_\gamma, \gamma \in R\}$ – базис в L . Следовательно, $h_\alpha + h_\beta \neq 0$ ни для каких $\alpha \neq \pm \beta$.

(2) Если $\alpha = \pm \beta$, то $h_\alpha + h_\beta + h_\gamma = h_\gamma$ и утверждение следует из следствия 2 леммы 3. Аналогично, лемма верна, если $\alpha = \pm \gamma$ и $\beta = \pm \gamma$.

Если $\alpha + \beta \in R$ или $\alpha - \beta \in R$, то $h_\alpha + h_\beta + h_\gamma = h_{\alpha \pm \beta} + h_\gamma$ и утверждение леммы следует из п. (1). Аналогично, если $\alpha \pm \gamma$ или $\beta \pm \gamma$ являются корнями. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$ (см. лемму 1).

Рассмотрим систему $S = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}} \cap R$. Из условия $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$ следует, что S имеет тип $A_1 \times A_1 \times A_1$. Так же, как при доказательстве п. (1), показываем, что существует $w \in W(R)$ такое, что $w(\alpha) = \alpha_i$, $w(\beta) = \alpha_j$, $w(\gamma) = \alpha_k$ для некоторых $i \neq j, i \neq k, j \neq k$. Так как $h_i + h_j + h_k \neq 0$, то $h_\alpha + h_\beta + h_\gamma \neq 0$.

Приведем в этом параграфе некоторые сведения о когомологиях алгебры Ли L .

Пусть $C^\bullet(L, L)$ – стандартный комплекс алгебры Ли L . Группа $\text{Aut}(L)$ действует естественным образом на $C^\bullet(L, L)$. Основной комплекс можно разложить в прямую сумму весовых подкомплексов, используя действие максимального тора группы Шевалле $G(L)$. Соответствующие группы когомологий являются весовыми

подпространствами в группе когомологий основного комплекса. Через $C_\mu^k(L, L)$, $Z_\mu^k(L, L)$, $B_\mu^k(L, L)$, $H_\mu^k(L, L)$ будем обозначать пространство копечей, коциклов, кограниц и когомологий веса μ соответственно. Пространство $C^k(L, L)$ отождествляется с пространством $L^* \wedge \cdots \wedge L^* \otimes L$. Выбирая базис Шевалле в L , мы естественным образом получаем базис в $C^k(L, L)$. Если $e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^* \otimes e_{\alpha_{k+1}} \in C_\mu^k(L, L)$, то $\mu(h) = (-\alpha_1 - \cdots - \alpha_k + \alpha_{k+1})(h)$, $h \in \mathcal{H}$.

Любой элемент $\psi \in Z_\mu^2(L, L)$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $x_1^* \wedge x_2^* \otimes x_3$, где x_i – вектор базиса Шевалле, $i = 1, 2, 3$, с коэффициентами $\hat{\psi}(x_1, x_2; x_3)$. Если x_3 определяется по ψ , x_1, x_2 , то вместо $\hat{\psi}(x_1, x_2; x_3)$ будем писать просто $\hat{\psi}(x_1, x_2)$.

Так как $H^2(L_K, L_K) = H^2(L_{\mathbb{F}_2}, L_{\mathbb{F}_2}) \otimes_{\mathbb{F}_2} K$ (классическая алгебра Ли определена над $\mathbb{Z}$), то всюду в дальнейшем будем считать, что $\hat{\psi}(x_1, x_2; x_3) = 0, 1$.

ЛЕММА 5. Пусть $\psi \in C_\mu^2(L, L)$, $\mu(h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Тогда для любых $\gamma, \delta \in R$, $h \in \mathcal{H}$ имеем $d\psi(e_\gamma, e_\delta, h) = [\psi(e_\gamma, h), e_\delta] + [\psi(e_\delta, h), e_\gamma] + \psi([e_\gamma, e_\delta], h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $[\psi(e_\gamma, e_\delta), h] = (\gamma + \delta + \mu)(h)\psi(e_\gamma, e_\delta)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & [\psi(e_\gamma, e_\delta), h] + \psi([e_\gamma, h], e_\delta) + \psi([e_\delta, h], e_\gamma) \\ &= ((\gamma + \delta + \mu)(h) + \gamma(h) + \delta(h))\psi(e_\gamma, e_\delta) \\ &= (\mu(h) + 2\gamma(h) + 2\delta(h))\psi(e_\gamma, e_\delta) = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Если $\psi \in Z_0^2(L, L)$, то $\psi(h, h') = 0$ и $\hat{\psi}(e_\alpha, h) = \hat{\psi}(e_{-\alpha}, h)$ для любых $h, h' \in \mathcal{H}$, $\alpha \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $h, h' \in \mathcal{H}$, $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(h, h', e_\alpha) \\ &= [\psi(h, h'), e_\alpha] + [\psi(h, e_\alpha), h'] + [\psi(h', e_\alpha), h] + \psi([h, e_\alpha], h') + \psi([h', e_\alpha], h) \\ &= [\psi(h, h'), e_\alpha] + \alpha(h')\psi(h, e_\alpha) + \alpha(h)\psi(h', e_\alpha) + \alpha(h)\psi(h', e_\alpha) + \alpha(h')\psi(h, e_\alpha) \\ &= [\psi(h, h'), e_\alpha]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(h, h') \in Z(L)$.

Из леммы 5 получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, h) = [\psi(e_\alpha, h), e_{-\alpha}] + [\psi(e_{-\alpha}, h), e_\alpha] + \psi([e_\alpha, e_{-\alpha}], h) \\ &= (\hat{\psi}(e_\alpha, h) + \hat{\psi}(e_{-\alpha}, h))h_\alpha + \psi(h_\alpha, h). \end{aligned}$$

Так как $\psi(h_\alpha, h) \in Z(L)$, то из последнего равенства и следствия 2 леммы 3 получаем, что $\psi(h_\alpha, h) = 0$ и $\hat{\psi}(e_\alpha, h) = \hat{\psi}(e_{-\alpha}, h)$.

В L определено корневое разложение $L = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\gamma \in R} L_\gamma$, где $L_\gamma = \langle e_\gamma \rangle_K$. С помощью корневого разложения в L можно получить градуировку вида

$$L = L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2,$$

где $L_0 = M_0 + I$, M_0 – алгебра Ли классического типа ранга $l - 1$, $\dim I \leq 1$.

Действительно, пусть $\alpha \in B$ и α связан в схеме Дынкина только с одним из корней B . Положим $L_0 = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\gamma \in R_0} L_\gamma$, $L_i = \bigoplus_{\gamma \in R_i} L_\gamma$, $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, R_i – подмножество корней из R , в разложение которых по базису корень α входит с коэффициентом i . Корень α можно выбрать таким образом, что $\dim L_{\pm 2} \leq 1$.

Перенумеруем B так, что $\alpha = \alpha_1$ и α_1 связан в схеме Дынкина только с α_2 . Тогда $\{\alpha_2, \dots, \alpha_l\} = B_0$ – базис R_0 .

Если L – алгебра типа $\overline{A}_l$, $l + 1 \equiv 0(2)$, $\overline{D}_l$ или $\overline{E}_7$, то $L_0 = M_0$. Во всех других случаях $L_0 = M_0 + \langle h_0 \rangle$, $h_0 \in \mathcal{H}$.

Легко проверяется, что $L_{\pm 1}$ – неприводимые L_0 -модули. Это является прямым следствием того, что структурные константы алгебр Ли с однородной системой корней равны $0, \pm 1$.

Всюду далее корни из B будут занумерованы согласно таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

Тип R	Тип R_0	Глубина градуировки	Нумерация корней в схеме Дынкина
A_l	A_{l-1}	1	$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \dots & l \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$
D_l	A_{l-1}	1	$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \dots & l-1 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & & & & & \\ & & l & & & & \end{array}$
E_6	D_5	1	$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & & & & & & & \\ & & & & 6 & & & & \end{array}$
E_7	E_6	1	$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 7 & & & & \end{array}$
E_8	E_7	2	$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 & \text{---} & 7 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 8 & & & & \end{array}$

Опишем центр $Z(L)$ алгебры Ли L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (1) Если L имеет тип A_l , $l \equiv 0(2)$, E_6 или E_8 , то $Z(L) = 0$.

(2) Если L имеет тип A_l , $l \equiv 1(2)$, то $Z(L) = \langle h_1 + h_3 + \dots + h_{l-2} + h_l \rangle_K$.

(3) Если L имеет тип D_l , $l \equiv 1(2)$, то $Z(L) = \langle h_1 + h_l \rangle_K$.

(4) Если L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, то $Z(L) = \langle h_1 + h_l, h_1 + h_3 + \dots + h_{l-3} + h_{l-1} \rangle_K$.

(5) Если L имеет тип E_7 , то $Z(L) = \langle h_1 + h_3 + h_7 \rangle_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1 леммы 3 получаем, что $Z(L) \subset \mathcal{H}$ и, следовательно, является ядром матрицы Картана.

Доказательство многих утверждений будет проводиться индукцией по рангу алгебры L . Поэтому сначала докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если L имеет тип A_2 , то $H^2(L, L) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра. Введем обозначения: $e_1 = e_{\alpha_1}$, $e_2 = e_{\alpha_2}$, $e_3 = e_{\alpha_1 + \alpha_2}$, $f_1 = e_{-\alpha_1}$, $f_2 = e_{-\alpha_2}$, $f_3 = e_{-\alpha_1 - \alpha_2}$.

Рассмотрим элемент $u = e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 + h_1 h_2 \in U(L)$. Покажем, что $u \in Z(U(L))$. Так как множество $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ порождает L и $u = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + h_1 h_2$, то достаточно установить, что $[u, e_1] = [u, e_2] = 0$. Это проверяется непосредственно. При присоединенном представлении u действует на L как тождественный оператор.

Как известно (см., например, [11; гл. 2, § 5, предложение 4.2]), из существования элемента с такими свойствами следует, что $H^*(L, L) = 0$.

§ 3. Вычисление $H_0^2(L, L)$

В этом параграфе индукцией по рангу доказывается тривиальность группы $H_0^2(L, L)$. Индукция начинается с алгебры Ли типа A_2 . Если L имеет тип A_2 , то $H_0^2(L, L) = 0$ согласно предложению 2.

Пусть L – алгебра Ли ранга $l > 2$. Предположим, что $H_0^2(L, L) = 0$ для алгебр L ранга меньше l . Выберем коцикл $\psi \in Z_0^2(L, L)$. Обозначим $L \otimes K[\varepsilon]$, где $K[\varepsilon]$ – алгебра двойных чисел, через $L(\varepsilon)$ и отождествим пространство L с $L \otimes 1$. На $L(\varepsilon)$ можно определить структуру алгебры Ли $(L(\varepsilon), [\cdot, \cdot])$, если продолжить лиевское умножение с L . При помощи коцикла ψ определим на $L(\varepsilon)$ новую структуру алгебры Ли, полагая $x \circ y = [x, y] + \varepsilon \psi(x, y)$, $x, y \in L$. Очевидно, коцикл ψ когомологичен нулю тогда и только тогда, когда алгебры Ли $(L(\varepsilon), [\cdot, \cdot])$ и $(L(\varepsilon), \circ)$ изоморфны. В дальнейшем через $L(\varepsilon)$ будем обозначать алгебру Ли $(L(\varepsilon), \circ)$.

Так как коцикл ψ имеет нулевой вес, то в $L(\varepsilon)$ можно построить градуировку по системе корней, как это сделано для L в § 2. Для $\gamma \in R$ положим $L_\gamma(\varepsilon) = L_\gamma \otimes K[\varepsilon]$;

$$L(\varepsilon) = L_{-2}(\varepsilon) + L_{-1}(\varepsilon) + L_0(\varepsilon) + L_1(\varepsilon) + L_2(\varepsilon),$$

где

$$L_0(\varepsilon) = (\mathcal{H} \otimes K[\varepsilon]) \oplus \bigoplus_{\gamma \in R_0} L_\gamma(\varepsilon), \quad L_i(\varepsilon) = \bigoplus_{\gamma \in R_i} L_\gamma(\varepsilon), \quad i \in \{-2, -1, 1, 2\},$$

R_i – подмножества системы R (см. таблицу 1).

Далее покажем, что алгебра Ли $L_0(\varepsilon)$ изоморфна $L_0 \otimes K[\varepsilon]$ с умножением $[\cdot, \cdot]$.

Рассмотрим коцепи $\bar{\varphi}_i = h_1^* \otimes h_i$, $i = 1, \dots, l$, и определим отображения $\varphi_i: L \rightarrow L$, полагая $\varphi_i(x) = d\bar{\varphi}_i(h_1, x)$ при $x \in L$.

ЛЕММА 7. *Если матрица Картана системы R невырождена, то $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ линейно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_l\varphi_l$, $a_i \in K$. Так как $\varphi_i(e_\gamma) = d\bar{\varphi}_i(h_1, e_\gamma) = [\bar{\varphi}_i(h_1), e_\gamma] = [h_i, e_\gamma]$, то $\varphi(e_\gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $[a_1h_1 + \dots + a_lh_l, e_\gamma] = 0$. По условию матрица Картана невырождена, следовательно $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ линейно независимы.

Первым шагом доказательства тривиальности $H_0^2(L, L)$ будет

ЛЕММА 8. Пусть $l > 2$, L_0 – нулевая компонента в градуировке алгебры Ли L , $L_0 = M_0 + \langle h_1 \rangle$ (прямая сумма векторных пространств), $\psi \in H_0^2(L, L)$. Тогда ψ когомологичен коциклу $\tilde{\psi}$ со следующими свойствами:

- (1) если матрица Картана R невырождена, то $\tilde{\psi}(h_1, x) = 0$ для всех $x \in L$;
- (2) если матрица Картана R вырождена, то $\tilde{\psi}(h_1, x) = 0$ для всех $x \in M_0$;
- (3) если $H_0^2(M_0, M_0) = 0$, то $\tilde{\psi}(x, y) = 0$ при $x, y \in L_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если L имеет тип $\bar{A}_l$, $\bar{D}_l$ или $\bar{E}_7$, то $L_0 = M_0$ и утверждения (2) и (3) очевидны.

Пусть L имеет тип A_l , D_l , E_6 , E_7 или E_8 , $h = h_1$.

(1) Для каждого $\chi \in Z_0^2(L, L)$ определим коцепь $\chi^h = \sum_{\gamma \in R} \hat{\chi}(h, e_\gamma) h^* \wedge e_\gamma^* \otimes e_\gamma$. Очевидно, χ можно представить в виде $\chi = \chi^h + \chi_1$, где $\chi_1(h, e_\gamma) = 0$ для любого $\gamma \in R$. Найдем коцепь φ такую, что $(d\varphi)^h = \psi^h$.

Через $U^h(R)$ обозначим подпространство в $C_0^2(L, L)$, которое является линейной оболочкой системы $\{\chi^h, \chi \in Z_0^2(L, L)\}$.

Применяя лемму 5 при $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in R$, для любого $\chi \in Z_0^2(L, L)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= d\chi(e_\gamma, e_\delta, h) = [\chi(h, e_\gamma), e_\delta] + [\chi(h, e_\delta), e_\gamma] + \chi(h, e_{\gamma+\delta}) \\ &= (\hat{\chi}(h, e_\gamma) + \hat{\chi}(h, e_\delta) + \hat{\chi}(h, e_{\gamma+\delta}))e_{\gamma+\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $\gamma, \delta \in R$ таких, что $\gamma + \delta \in R$, выполняется равенство

$$\hat{\chi}(h, e_\gamma) + \hat{\chi}(h, e_\delta) + \hat{\chi}(h, e_{\gamma+\delta}) = 0. \quad (1)$$

С учетом леммы 6 из равенства (1) получаем, что $\hat{\chi}(h, e_\gamma)$ для любого $\gamma \in R$ линейно выражается через $\hat{\chi}(h, e_{\alpha_i})$, $i = 1, \dots, l$ (выражение не зависит от χ). Поэтому $\dim U^h(R) \leq l$. С другой стороны, из леммы 7 следует, что $d\bar{\varphi}_1^h, \dots, d\bar{\varphi}_l^h$ (в обозначениях леммы 7) линейно независимы. Получаем, что $U^h(R)$ порождается $d\bar{\varphi}_1^h, \dots, d\bar{\varphi}_l^h$. Следовательно, $\psi^h = b_1d\bar{\varphi}_1^h + \dots + b_ld\bar{\varphi}_l^h = (d(b_1\bar{\varphi}_1 + \dots + b_l\bar{\varphi}_l))^h$ для некоторых $b_i \in K$. Положим $\varphi = b_1\bar{\varphi}_1 + \dots + b_l\bar{\varphi}_l$, $\tilde{\psi} = \psi + d\varphi$. Тогда $\tilde{\psi}(h, e_\gamma) = 0$ для любого $\gamma \in R$. Так как по лемме 6 $\tilde{\psi}(h', h'') = 0$ для любых $h', h'' \in \mathcal{H}$, то $\tilde{\psi}(h, x) = 0$ для любого $x \in L$.

(2) Как в утверждении (1), для R_0 определим коцепи $\chi^h = \sum_{\gamma \in R_0} \hat{\chi}(h, e_\gamma) h^* \wedge e_\gamma^* \otimes e_\gamma$ и $U^h(R_0)$.

Если R имеет тип A_l , $l \equiv 1(2)$, D_l , $l \equiv 1(2)$, или E_7 , то R_0 имеет тип A_{l-1} или E_6 и матрица Картана для R_0 невырождена. Тогда из доказательства утверждения (1) следует, что $(d\bar{\varphi}_2)^h, \dots, (d\bar{\varphi}_l)^h$ порождают $U^h(R_0)$. В качестве $\tilde{\psi}$ возьмем $\psi + d(b_2\bar{\varphi}_1 + \dots + b_l\bar{\varphi}_l)$ для подходящих $b_1, \dots, b_l \in K$.

Если R имеет тип $D_l, l \equiv 0(2)$, то R_0 имеет тип A_{l-1} . В R_0 содержится подсистема корней типа A_{l-2} , матрица Картана которой невырождена. Тогда из доказательства утверждения (1) следует, что система $\{(d\varphi)^h, \varphi \in C_0^1(L, L)\}$ порождает подпространство в $U^h(R_0)$ размерности не менее $l-2$.

Покажем, что $\dim U^h(R_0) = l-2$. Так как α_1 связан в схеме Дынкина только с α_2 , то $\alpha_1 \pm \alpha_i \notin R$ при $i \neq 1, 2$. Следовательно,

$$0 = d\chi(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_i}) = [\chi(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}), e_{\alpha_i}] + \chi(h, e_{\alpha_i}) = (\alpha_i(H) + \hat{\chi}(h, e_{\alpha_i}))e_{\alpha_i},$$

где $\chi(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) = H \in \mathcal{H}, i \neq 1, 2$. Поэтому $\alpha_i(H) + \hat{\chi}(h, e_{\alpha_i}) = 0$ при $i \neq 1, 2$. Но согласно предложению 1 линейная комбинация $\alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{l-3} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$ является нулевой функцией на $\mathcal{H}$. В частности, $(\alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{l-3} + \alpha_{l-1} + \alpha_l)(H) = 0$. Таким образом, $\hat{\chi}(h, e_{\alpha_3}) + \hat{\chi}(h, e_{\alpha_5}) + \dots + \hat{\chi}(h, e_{\alpha_l}) = 0$ и, учитывая, что $\dim U^h(R_0) \geq l-2$, имеем $\dim U^h(R_0) = l-2$ и $U^h(R_0) = \langle (d\varphi)^h, \varphi \in C_0^1(L, L) \rangle_K$. Следовательно, найдется $\varphi \in C_0^1(L, L)$ такой, что $(d\varphi)^h = \psi^h$. Положим $\tilde{\psi} = \psi + d\varphi$.

(3) Пусть $\gamma, \delta \in R_0$. Если $\gamma + \delta$ является корнем, то $\gamma + \delta \in R_0$ и $\psi(e_\gamma, e_\delta) \in M_0$. Если $\delta = -\gamma$, то $\psi(e_\gamma, e_\delta) \in \mathcal{H}$. Покажем, что ψ можно заменить на когомологичный коцикл ψ_1 , для которого $\psi_1(e_\gamma, e_{-\gamma}) \in M_0$ при $\gamma \in R_0$. Так как $\psi \in Z_0^2(L, L)$, то $\psi(e_\gamma, e_{-\gamma}) = \sum_{i=1}^l \hat{\psi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_i) h_i$, где $\hat{\psi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_i) \in \mathbb{F}_2$. Если $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in R_0$, то $[\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}), e_{\gamma+\delta}] + [\psi(e_{-\gamma}, e_{\gamma+\delta}), e_{-\delta}] + [\psi(e_{\gamma+\delta}, e_{-\delta}), e_{-\gamma}]$ содержится в M_0 . Тогда из условия $d\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}, e_{\gamma+\delta}) = 0$ следует, что $\psi(e_\gamma, e_{-\gamma}) + \psi(e_\delta, e_{-\delta}) + \psi(e_{\gamma+\delta}, e_{-\gamma-\delta})$ также является элементом M_0 . Следовательно,

$$\hat{\psi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_1) + \hat{\psi}(e_\delta, e_{-\delta}; h_1) + \hat{\psi}(e_{\gamma+\delta}, e_{-\gamma-\delta}; h_1) = 0$$

для любых $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in R_0$. Поэтому $\hat{\psi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_1)$ для любого $\gamma \in R_0$ линейно выражается через $\hat{\psi}(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}; h_1), i = 2, \dots, l$. Рассмотрим коциклы $\chi_i = d(h_i^* \otimes h_1), i = 2, \dots, l$. Так как $\chi_i(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}) = h_1$ и $\chi_j(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}) = 0$ для любых $i \neq j$, то найдется такая линейная комбинация $\chi = a_2\chi_2 + \dots + a_l\chi_l$, что $\hat{\chi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_1) = \hat{\psi}(e_\gamma, e_{-\gamma}; h_1)$ для любого $\gamma \in R_0$. Складывая ψ с $d(a_2h_2^* \otimes h_1 + \dots + a_lh_l^* \otimes h_1)$, получаем коцикл ψ_1 такой, что $\psi_1(e_\gamma, e_{-\gamma}) \in M_0$ при $\gamma \in R_0$. Заменяем ψ на ψ_1 .

Рассмотрим ограничение ψ на M_0 . Так как $\psi(x, y) \in M_0$ для любых $x, y \in M_0$, то $\psi|_{M_0} \in Z_0^2(M_0, M_0)$. Тогда по условию $H_0^2(M_0, M_0) = 0$, $\psi|_{M_0} = d'\varphi'$ (d' — дифференциал комплекса $C^\bullet(M_0, M_0)$) для некоторого $\varphi' \in C_0^1(M_0, M_0)$. Отображение φ' можно рассматривать как элемент $C_0^1(L, L)$. Получаем, что ограничение на M_0 коцикла $\psi_2 = (\psi + d\varphi')$ равно нулю.

Наконец, применим утверждение (1) или (2) к ψ_2 . Получим, что $\tilde{\psi}_2(h_1, x) = 0$ для любого $x \in M_0$. Так как в утверждениях (1), (2) коцепь φ выбиралась как линейная комбинация $h_1^* \otimes h_i$ и h_1 не содержится в M_0 , то $d\varphi(x, y) = 0$ для любых $x, y \in M_0$. Следовательно, $\psi_2(x, y) = \psi_2(x, y) + d\varphi(x, y) = 0$, если $x, y \in M_0$. Таким образом, коцикл $\tilde{\psi}_2$ равен нулю на L_0 . Положим $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_2$.

Согласно лемме 8 по предположению индукции можно считать, что $\psi|_{L_0} = 0$ и алгебра Ли $L_0 \otimes K[\varepsilon]$ с умножением $[\cdot, \cdot]$ изоморфна $L_0(\varepsilon)$ с умножением $\circ$.

Подалгебру $L_0 \otimes 1$ отождествим с L_0 . Напомним, что $L_0 = M_0 + \langle h_0 \rangle$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \langle h_0 \rangle$, где $\mathcal{H}_0 = \langle h_2, \dots, h_l \rangle_K$ – подалгебра Картана в M_0 .

Для следующего шага доказательства нам понадобятся предложения 4 и 5 из работы [5; § 4], которые формулируются здесь как предложения 3 и 4 соответственно. Доказательство предложения 4 для алгебр Ли с однородной системой корней может быть упрощено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) $L_{-1}(\varepsilon)$ является ограниченным M_0 -модулем.

(2) $\psi(h, L_{-1}) = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = L_{-1}(\varepsilon)$. Как в доказательстве предложения 4 из работы [5; § 4], показываем, что $\widehat{\psi}(h_\alpha, v)$ не зависит от $v \in V$ для любого $\alpha \in R_0$.

Так как ранг алгебры больше двух, то для любого $\alpha \in R_0$ существует $\gamma \in R_{-1}$ такой, что $\alpha + \gamma \notin R$, $-\alpha + \gamma \notin R$. Действительно, для α_3 подходит $-\alpha_1$, а для остальных корней из R_0 существование γ следует из транзитивности действия $W(R_0)$ на R_0 и того, что $W(R_0)(-\alpha_1) \in R_{-1}$.

Пусть $h_\alpha \in \mathcal{H}_0$, выберем $\gamma \in R_{-1}$, для которого $\alpha + \gamma \notin R$, $-\alpha + \gamma \notin R$. Тогда, так как $\psi(x, y) = 0$ для любых $x, y \in L_0$, $0 = d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\gamma) = \psi(h_\alpha, e_\gamma)$. Поскольку $\widehat{\psi}(h_\alpha, v)$ не зависит от v , то $\widehat{\psi}(h_\alpha, v) = 0$ для любого $v \in L_{-1}$. Тем самым, доказаны утверждения (1) и (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [5; § 4, предложение 5]. M_0 -модуль $L_{-1}(\varepsilon)$ является прямой суммой подмодулей, изоморфных L_{-1} , $L_{-1}(\varepsilon) = L'_{-1} + \varepsilon L'_{-1}$.

Согласно предложению 4 можно считать, что $\psi(L_{-1}, M_0) = 0$. Аналогично, можно считать, что $\psi(L_1, M_0) = 0$.

Дальнейшее доказательство тривиальности коцикла ψ будет различным для алгебр Ли без центра и для алгебр Ли, центр которых нетривиален.

3.1. Вычисление $H_0^2(L, L)$ для алгебр Ли без центра. Пусть L – классическая алгебра Ли без центра. Из рассматриваемых алгебр таковыми являются алгебры Ли типа $A_l, l \equiv 0(2)$, $\overline{A}_l, l \equiv 1(2)$, $\overline{D}_l, E_6, \overline{E}_7$ и E_8 .

Если $L_{-2} \neq 0$, то $[L_{-1}, L_{-1}] = L_{-2} = \langle e_\gamma \rangle$. Так как L_{-2} одномерно, то $\psi(e_\alpha, e_\gamma) = 0$ для любого $\alpha \in R_0$. Отсюда, учитывая, что $\psi(L_0, L_0) = 0$, получаем $0 = d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\gamma) = -\psi([e_\alpha, e_{-\alpha}], e_\gamma) = -\psi(h_\alpha, e_\gamma)$. Следовательно, $\psi(L_{-2}, M_0) = 0$. Аналогично, $\psi(L_2, M_0) = 0$.

Для $v_1, v_2 \in L_{-1}$ положим $[v_1, v_2] = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ – M_0 -инвариантная невырожденная кососимметрическая форма на L_{-1} . В $L(\varepsilon)$ $v_1 \circ v_2 \in L_{-2}(\varepsilon)$ и $v_1 \circ v_2 = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma + \varepsilon \langle v_1, v_2 \rangle_2 e_\gamma$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ – также M_0 -инвариантная невырожденная кососимметрическая форма на L_{-1} . Так как L_{-1} – неприводимый M_0 -модуль, то форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ пропорциональна $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, т.е. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = a \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $a \in K$. Заменяя e_γ на $e_\gamma + \varepsilon a e_\gamma$, получаем $v_1 \circ v_2 = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma$. Таким образом, можно считать, что $\psi(L_{-1}, L_{-1}) = 0$. Аналогично, подправив базис в $L_2(\varepsilon)$, можно считать, что $\psi(L_1, L_1) = 0$.

Из леммы 8 следует, что к полученным условиям на ψ можно добавить условие $\psi(h, x) = 0$ для любых $h \in \mathcal{H}$, $x \in L$.

Итак, мы доказали, что коцикл ψ когомологичен коциклу, удовлетворяющему условиям $\psi(L_0, L_i) = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2$, $\psi(L_i, L_i) = 0, i = \pm 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть L – алгебра Ли без центра. Если $\psi \in Z_0^2(L, L)$ такой, что $\psi(L_0, L_i) = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$, $\psi(L_i, L_i) = 0$, $i = \pm 1$, то ψ кохомологичен нулю.

Доказательство совпадает с доказательством аналогичного предложения, см. [5; § 4, предложение 6].

3.2. Вычисление $H_0^2(L, L)$ для алгебр Ли с ненулевым центром. Согласно предложению 1 если L имеет центр, то алгебра Ли L имеет тип A_l , $l+1 \equiv 0(2)$, D_l или E_7 . Если алгебра L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, то размерность центра в L равна 2, в остальных алгебрах центр одномерный. Градуировка в L имеет глубину 1, $L_{\pm 2} = 0$ (см. таблицу 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть L – алгебра Ли одного из типов A_l , $l+1 \equiv 0(2)$, D_l или E_7 , $\psi \in Z_0^2(L, L)$. Если $\psi(M_0, L_{\pm 1}) = 0$, $\psi(L_i, L_i) = 0$, $i = 0, \pm 1$, то ψ кохомологичен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что ψ кохомологичен коциклу $\tilde{\psi}$, для которого при $\alpha \in R_1$ выполняется $\tilde{\psi}(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 0$.

Пусть $\alpha \in R_1$, $\mathcal{H}_0$ – подалгебра с базисом $\{h_2, \dots, h_l\}$. Из леммы 2 следует, что $h_\alpha = h_1 + h$, где $h \in \mathcal{H}_0$. Из предложения 1 следует, что $h_1 = z_1 + h'$, где $h' \in \mathcal{H}_0$, $z_1 \in Z(L) \setminus \mathcal{H}_0$. Следовательно, для любого $\alpha \in R_1$ $h_\alpha = h(\alpha) + z_1$, где $h(\alpha) \in \mathcal{H}_0$, $z_1 \in Z(L) \setminus \mathcal{H}_0$.

Положим $\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = H_\alpha \in H$. Далее, выразим H_α через $h(\alpha)$ и базис $Z(L)$. Если для некоторого $\gamma \in R_0$ $\gamma + \alpha$ и $\gamma - \alpha$ не являются корнями, то из условия $\psi(L_0, L_0) = 0$ и тождества Якоби для $e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\gamma$ (в $L(\varepsilon)$) следует, что $0 = [h_\alpha, e_\gamma] + \varepsilon[H_\alpha, e_\gamma] = (\gamma(h_\alpha) + \varepsilon\gamma(H_\alpha))e_\gamma$. Таким образом, h_α и H_α содержатся в ядре функции γ .

Для любого γ из $\{\alpha_3, \dots, \alpha_l\} \subset R_0$ $\gamma + \alpha_1, \gamma - \alpha_1$ не являются корнями. Если L не имеет типа D_l , $l \equiv 0(2)$, то из предложения 1 следует, что $\alpha_3, \dots, \alpha_l$ линейно независимы как функции на $\mathcal{H}$. Если L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, то среди $\alpha_3, \dots, \alpha_l$ есть $l-3$ линейно независимые функции.

Любой корень $\beta \neq \alpha_1$ из R_1 мы можем получить последовательным прибавлением к α_1 корней из базиса R_0 , при этом на каждом шаге мы получаем корни из R_1 . Так как при $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ выполняется $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ (лемма 1) и, следовательно, $\alpha + \beta = w_\beta(\alpha)$, то $W(R_0)\alpha_1 = R_1$.

Поэтому получаем, что для любого $\alpha \in R_1$ существуют $l-3$, если R имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, и $l-2$ в остальных случаях линейно независимые функции $\gamma \in R_0$ такие, что $\gamma + \alpha, \gamma - \alpha$ не являются корнями.

Таким образом, h_α и H_α содержатся в пересечении ядер $l-2$ (соответственно $l-3$, если R имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$) линейно независимых функций γ . Так как центр алгебры L также содержится в этом пересечении, то $H_\alpha = x_\alpha h(\alpha) + y_\alpha z_1 + t_\alpha z_2$, где $x_\alpha, y_\alpha, t_\alpha \in K$, $\langle z_1, z_2 \rangle_K = Z(L)$, $z_1 \notin \mathcal{H}_0$, $z_2 \in \mathcal{H}_0$ (если центр одномерный, то $z_2 = 0$). Таким образом,

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = h_\alpha + \varepsilon H_\alpha = h(\alpha) + z_1 + \varepsilon(x_\alpha h(\alpha) + y_\alpha z_1 + t_\alpha z_2). \quad (2)$$

Для завершения доказательства предложения применим следующее утверждение.

ЛЕММА 9. Пусть R – однородная система корней, $\alpha, \beta \in R_1$. Если существует $\gamma \in R_0$ такой, что $\alpha = \beta + \gamma$, то $x_\alpha = x_\beta$, $y_\alpha = y_\beta$, $t_\alpha = t_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия леммы 2 получаем, что $h_\alpha = h_\beta + h_\gamma$. Поэтому $h(\alpha) = h(\beta) + h_\gamma$. По условию $\alpha = \beta + \gamma$, следовательно, $[e_\gamma, e_{-\alpha}] = e_{-\beta}$, $[e_\gamma, e_\beta] = e_\alpha$, $e_\beta \circ e_{-\alpha} = (1 + \varepsilon C)e_{-\gamma}$, где $C \in K$. Так как $e_\gamma \in L_0$, то из тождества Якоби для $e_\gamma, e_\beta, e_{-\alpha}$ в $L(\varepsilon)$ и условий на коцикл ψ следует, что $(1 + \varepsilon C)h_\gamma = e_\alpha \circ e_{-\alpha} + e_\beta \circ e_{-\beta}$. Из равенств (2) и $h(\alpha) = h(\beta) + h_\gamma$ получаем, что $(1 + \varepsilon C)h_\gamma = h_\gamma + \varepsilon((x_\beta + x_\alpha)h(\beta) + (y_\beta + y_\alpha)z_1 + (t_\alpha + t_\beta)z_2 + x_\alpha h_\gamma)$. Обозначим $x_\beta + x_\alpha = x_1$, $t_\alpha + t_\beta = x_2$. Тогда так как $z_1 \notin \mathcal{H}_0$, $h(\beta), z_2, h_\gamma \in \mathcal{H}_0$, то из последнего равенства следует, что $y_\beta + y_\alpha = 0$ и $x_1 h(\beta) + x_2 z_2 + x_\alpha h_\gamma = C h_\gamma$. Так как $h(\beta) = h_\beta + z_1$, то $x_1 h_\beta + (x_\alpha + C)h_\gamma = x_1 z_1 + x_2 z_2$. Получаем, что $x_1 h_\beta + (x_\alpha + C)h_\gamma \in Z(L)$. Тогда $0 = [x_1 h_\beta + (x_\alpha + C)h_\gamma, e_\gamma] = x_1 e_\gamma$ (по лемме 1 из условия $\alpha = \beta + \gamma$ следует, что $\langle \beta, \gamma \rangle = -1$). Следовательно, $x_1 = 0$ и $(x_\alpha + C)h_\gamma = x_2 z_2 \in Z(L)$. По следствию 2 леммы 3 имеем $x_2 = 0$. Таким образом, $x_\beta + x_\alpha = 0$, $y_\alpha + y_\beta = 0$, $t_\alpha + t_\beta = 0$.

Теперь, так как любой корень из R_1 может быть включен в цепочку, получающуюся последовательным прибавлением к α_1 простых корней из R_0 , из леммы 9 следует, что $x_\alpha = x_\beta = x$ и $y_\alpha = y_\beta = y$, $t_\alpha = t_\beta = t$ для любых $\alpha, \beta \in R_1$.

Преобразуем формулу (2):

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = (1 + \varepsilon x) \left(h(\alpha) + \frac{z_1 + \varepsilon(yz_1 + tz_2)}{1 + \varepsilon x} \right). \quad (3)$$

Заменяя базис $\{e_\alpha, \alpha \in R_1\}$ на $\{(1 + \varepsilon x)e_\alpha\}$ и заменяя z_1 на $\frac{z_1 + \varepsilon(yz_1 + tz_2)}{1 + \varepsilon x}$, получаем из равенства (3), что

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = h(\alpha) + z_1 = h_\alpha$$

для любого $\alpha \in R_1$. Поэтому мы можем считать, что $\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 0$.

Пусть $\alpha, \beta \in R_1$. Если $\alpha - \beta \notin R$, то $\psi(e_\alpha, e_{-\beta}) = 0$. Если $\gamma = \alpha - \beta \in R_0$, то $\alpha = \beta + \gamma$. Из леммы 1 следует, что $\gamma - \beta \notin R$. Тогда так как $\psi(e_\beta, e_{-\beta}) = 0$, $\psi(M_0, L_0) = \psi(M_0, L_{\pm 1}) = 0$, то

$$0 = d\psi(e_\beta, e_{-\beta}, e_\gamma) = \psi([e_\beta, e_\gamma], e_{-\beta}) = \psi(e_\alpha, e_{-\beta}).$$

Следовательно, $\psi(e_\alpha, e_{-\beta}) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in R_1$ и $\psi(L_{-1}, L_1) = 0$. Далее, так как $\psi(M_0, L_1) = \psi(L_{-1}, L_1) = 0$, то

$$0 = d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\beta) = \psi([e_\alpha, e_{-\alpha}], e_\beta) = \psi(h_\alpha, e_\beta) = \psi(h(\alpha) + z_1, e_\beta) = \psi(z_1, e_\beta).$$

Следовательно, $\psi(\mathcal{H}, L_1) = 0$. Аналогично, $\psi(\mathcal{H}, L_{-1}) = 0$. Объединяя все условия, полученные на коцикл ψ , имеем $\psi(L, L) = 0$.

Итак, мы установили, что любой коцикл ψ нулевого веса когомологичен нулю и, следовательно, $H_0^2(L, L) = 0$.

§ 4. Когомологии ненулевого веса

Пусть R – однородная система корней ранга $l > 2$.

Напомним, что веса $H^2(L, L)$ содержатся в $\Lambda_2(R)$ – множестве весов μ пространства $C^2(L, L)$ таких, что $\mu(h) = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}$. Если $\mu \in \Lambda_2(R)$, то $\langle \mu, \alpha \rangle \equiv 0(2)$ для любого $\alpha \in R$.

4.1. Описание множества $\Lambda_2(R)$. Любой вес $C^2(L, L)$ по определению можно представить в виде $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in R \cup \{0\}$. Так как ранг R больше 2, то любой элемент множества $\Lambda_2(R)$ можно представить в виде суммы трех корней.

ЛЕММА 10. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \alpha + \beta + \gamma$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Тогда $\mu = 2\delta$ для некоторого $\delta \in R \cup \{0\} \Leftrightarrow S = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}} \cap R$ – система корней типа A_2 . Если $\delta \neq 0$, то один из корней α, β, γ совпадает с δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mu = 2\delta$, $\delta \in R \cup \{0\}$. Если $\delta \neq 0$, то $4 = \langle 2\delta, \delta \rangle = \langle \alpha, \delta \rangle + \langle \beta, \delta \rangle + \langle \gamma, \delta \rangle$. Это равенство возможно, только если одно из слагаемых равно 2. Можем считать, что $\langle \alpha, \delta \rangle = 2$. Следовательно, $\delta = \alpha$ и $\beta + \gamma = \mu - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Если $\delta = 0$, то $\beta + \gamma = \mu - \alpha = -\alpha$. В любом случае $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}} \cap R$ имеет тип A_2 .

Пусть S имеет тип A_2 , $\{\delta_1, \delta_2\}$ – базис системы S , $\mu = n_1\delta_1 + n_2\delta_2$ для некоторых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Так как матрица Картана системы корней типа A_2 невырождена, то $n_1, n_2 \in 2\mathbb{Z}$.

Для любого $\sigma \in R$ выполняется $\langle \alpha, \sigma \rangle + \langle \beta, \sigma \rangle + \langle \gamma, \sigma \rangle = \langle \mu, \sigma \rangle \equiv 0(2)$. Если $\alpha = \pm\sigma$, $\beta = \pm\sigma$, $\gamma = \pm\sigma$, то $\mu = a\sigma$, где $a \equiv 1(2)$, и, следовательно, $\sigma(h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Это противоречит лемме 3. Поэтому из леммы 1 получаем, что $|\langle \mu, \sigma \rangle| = |\langle \alpha, \sigma \rangle + \langle \beta, \sigma \rangle + \langle \gamma, \sigma \rangle| < 6$ для любого $\sigma \in R$.

Если μ не пропорционален никакому корню, то, используя [12; гл. VIII, § 4, п. 3, лемма 10], можно заменить μ на $w\mu$ для подходящего $w \in W(R)$ так, что $n_1n_2 < 0$. Тогда $|\langle \mu, \delta_1 \rangle| = |2n_1 - n_2| \geq 6$. Получили противоречие. Следовательно, $\mu = k\delta$ для некоторых $k \in 2\mathbb{Z}$, $\delta \in R$. Так как $|\langle \mu, \sigma \rangle| < 6$ для любого $\sigma \in R$ и, в частности, $|\langle \mu, \delta \rangle| = 2k < 6$, то $k = 0, \pm 2$.

Определим множества

$$\begin{aligned} M_1 &= \{2\delta \mid \delta \in R \cup \{0\}\}, \\ M_2 &= \{\alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}, \\ M_3 &= \{\alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}, \\ M_4 &= \{\alpha + \beta + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in R, \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Любой элемент из $\Lambda_2(R)$ принадлежит одному из этих множеств, а именно верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. (1) Если R имеет тип A_4 , A_l , $l > 5$, E_6 , E_8 , то $\Lambda_2(R) = M_1$.

(2) Если R имеет тип A_3 , D_l , $l \neq 6$, то $\Lambda_2(R) \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

(3) Если R имеет тип A_5 или E_7 , то $\Lambda_2(R) \subset M_1 \cup M_4$.

(4) Если R имеет тип D_6 , то $\Lambda_2(R) \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$.

(5) Если $\mu \in M_2 \cap \Lambda_2(R)$, то μ нельзя представить в виде суммы двух корней и единственным образом можно представить в виде суммы трех корней.

(6) Если $\mu \in M_4 \cap \Lambda_2(R)$, то μ нельзя представить в виде суммы двух корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \alpha + \beta + \gamma$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Рассмотрим векторное подпространство $A = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}}$ в $V_{\mathbb{R}}$. Тогда $S = A \cap R$ является системой корней в A ранга не более 3. Согласно [9; гл. VI, § 1, п. 7, предложение 24] существует базис системы R , содержащий базис системы S . Пусть $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ – такой базис. Исследуем строение системы S .

Согласно лемме 3 корни являются ненулевыми функциями на $\mathcal{H}$, следовательно, S не может иметь тип A_1 .

Предположим, что S есть прямое произведение систем A_2 и A_1 . Изменяя нумерацию, можем считать, что $\{\delta_1\}$ – базис системы A_1 , $\{\delta_2, \delta_3\}$ – базис системы A_2 . Тогда $\mu = \alpha + \beta + \gamma = \pm\delta_1 + n_2\delta_2 + n_3\delta_3$, где $n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. Так как $\mu(h_{\delta_2}) = 2n_2 - n_3$, $\mu(h_{\delta_3}) = -n_2 + 2n_3$, то $n_2 \equiv n_3 \equiv 0(2)$. Поскольку R – неприводимая система корней, то существует корень δ_i , который связан в схеме Дынкина с δ_1 . Тогда $\mu(h_{\delta_i}) = \delta_1(h_{\delta_i}) = 1$. Это противоречит тому, что $\mu|_{\mathcal{H}} = 0$. Следовательно, S не может быть прямым произведением систем A_2 и A_1 .

Предположим, что S есть прямое произведение систем A_1 и A_1 . Тогда по крайней мере два из корней α, β, γ должны быть пропорциональны и $\mu|_{\mathcal{H}}$ совпадает с $\alpha|_{\mathcal{H}}$, $\beta|_{\mathcal{H}}$ или $\gamma|_{\mathcal{H}}$. Получаем противоречие лемме 3. Поэтому S не может иметь тип $A_1 \times A_1$.

Таким образом, S может иметь только тип A_3 , A_2 или являться произведением трех копий систем типа A_1 .

Пусть S имеет тип A_3 , $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ – базис S . Тогда $\mu = n_1\delta_1 + n_2\delta_2 + n_3\delta_3$. Так как $\mu(h_{\delta_1}) = n_2$ и $\mu(h_{\delta_2}) = n_1 + n_3$, то $n_2 \equiv 0(2)$, $n_1 \equiv n_3(2)$. Из вида корней в A_3 следует, что $\mu = \alpha + \beta + \gamma \in 2Q(R) \Leftrightarrow \mu = 2\delta$ для некоторого $\delta \in R \cup \{0\}$. Из леммы 10 тогда получаем, что $\mu \notin 2Q(R)$. Следовательно, $n_1 \equiv 1(2)$ и $n_2 \equiv 1(2)$. Если существует корень δ_i , который связан только с δ_1 или только с δ_3 , то $\mu(h_{\delta_i}) = 1$. Следовательно, корень δ_i при $i \neq 1, 3$ либо связан в схеме Дынкина и с δ_1 , и с δ_3 , либо не связан ни с δ_1 , ни с δ_3 . Таким образом, R может иметь только тип A_3 либо D_l .

Предположим, что S имеет тип $A_1 \times A_1 \times A_1$. Пусть $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ – базис системы S . Тогда $\mu = \alpha + \beta + \gamma = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \varepsilon_3\delta_3$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Если существует корень δ_i , $i \neq 1, 2, 3$, который связан в схеме Дынкина с δ_1, δ_2 и с δ_3 или связан только с одним из них, то $\mu(h_{\delta_i}) = 1$. Полученное противоречие показывает, что в схеме Дынкина корни системы R либо не связаны с $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, либо связаны ровно с двумя из них. Так как R – неприводимая система, то при таких ограничениях R может иметь только один из типов A_5, D_6 или E_7 .

(1) Если R имеет тип $A_2, A_4, A_l, l > 5, E_6, E_8$, то S имеет тип A_2 и $\mu \in M_1$ по лемме 10.

(2) Если R имеет тип $A_3, D_l, l \neq 6$, то S имеет тип A_2 или A_3 . Если S имеет тип A_2 , то $\mu \in M_1$ по лемме 10.

Пусть S имеет тип A_3 . Из леммы 10 следует, что $\mu \neq 2\delta$ ни для какого $\delta \in R \cup \{0\}$. Тогда либо $\mu = \beta_1 + \beta_2$ для некоторых $\beta_1, \beta_2 \in R$, $\beta_1 \neq \pm\beta_2$, либо μ не является суммой двух корней.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\mu = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1, \beta_2 \in R$. Так как корни

являются ненулевыми функциями на $\mathcal{H}$ (лемма 3), то $\beta_1 + \beta_2 = \mu$ и $\beta_1 - \beta_2 = \mu - 2\beta_2$ не являются корнями. Тогда по лемме 1 получаем, что $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle \neq \pm 1$. Так как $\beta_1 \neq \pm \beta_2$, то $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle \neq \pm 2$. Следовательно, $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 0$ и $\mu \in M_3$.

Рассмотрим второй случай. Так как μ не является суммой двух корней, то $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ не являются корнями. Тогда из леммы 1 следует, что $\langle \alpha, \beta \rangle \neq -1$, $\langle \alpha, \gamma \rangle \neq -1$, $\langle \beta, \gamma \rangle \neq -1$. Так как корни являются ненулевыми функциями на $\mathcal{H}$, то $\langle \alpha, \beta \rangle \neq \pm 2$, $\langle \alpha, \gamma \rangle \neq \pm 2$, $\langle \beta, \gamma \rangle \neq \pm 2$.

Если $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, то $\langle \mu, \alpha \rangle = 2 + \langle \gamma, \alpha \rangle$. Следовательно, $\langle \alpha, \gamma \rangle = 0$ и $\langle \mu, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle + 2$. Поэтому $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Получили, что $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Это противоречит тому, что S имеет тип A_3 . Следовательно, $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$. Аналогично, $\langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1$ и $\mu \in M_2$.

(3) Если R имеет тип A_5 или E_7 , то S имеет тип A_2 или $A_1 \times A_1 \times A_1$. Если S имеет тип A_2 , то $\mu \in M_1$ по лемме 10. Если S имеет тип $A_1 \times A_1 \times A_1$, то $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$ и $\mu \in M_4$.

(4) Если R имеет тип D_6 , то S имеет тип A_2 , A_3 или $A_1 \times A_1 \times A_1$. Утверждение (4) тогда следует из доказательства утверждений (2) и (3).

(5) Из условия $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1$ получаем, что $\langle \mu, \alpha \rangle = 2 + 1 + 1 = 4$.

Допустим, что $\mu = \alpha' + \beta' + \gamma'$ для некоторых $\alpha', \beta', \gamma' \in R$. Из равенства $4 = \langle \mu, \alpha \rangle = \langle \alpha', \alpha \rangle + \langle \beta', \alpha \rangle + \langle \gamma', \alpha \rangle$ получаем, что одно из чисел $\langle \alpha', \alpha \rangle$, $\langle \beta', \alpha \rangle$, $\langle \gamma', \alpha \rangle$ равно 2. Можно считать, что $\langle \alpha', \alpha \rangle = 2$ и, следовательно, $\alpha = \alpha'$. Аналогично, далее показываем, что $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

Если $\mu = \sigma_1 + \sigma_2$ для некоторых $\sigma_1, \sigma_2 \in R$, то $4 = \langle \mu, \alpha \rangle = \langle \sigma_1, \alpha \rangle + \langle \sigma_2, \alpha \rangle$. Следовательно, $\langle \sigma_1, \alpha \rangle = \langle \sigma_2, \alpha \rangle = 2$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha$. Тогда $\mu = 2\alpha$. Аналогично, $\mu = 2\beta$ и $\mu = 2\gamma$. Поэтому $\alpha = \beta = \gamma$. Получили противоречие. Следовательно, μ нельзя представить в виде суммы двух корней.

(6) Если $\mu = \sigma_1 + \sigma_2$ для некоторых $\sigma_1, \sigma_2 \in R$, то $\langle \mu, \alpha \rangle = \langle \sigma_1, \alpha \rangle + \langle \sigma_2, \alpha \rangle$. С другой стороны, $\langle \mu, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \gamma, \alpha \rangle = 2 + 0 + 0 = 2$. Следовательно, $\langle \sigma_1, \alpha \rangle + \langle \sigma_2, \alpha \rangle = 2$. Предположим, что $\langle \sigma_1, \alpha \rangle = 2$. Тогда $\sigma_1 = \alpha$, $\beta + \gamma = \mu - \alpha = \mu - \sigma_1 = \sigma_2$ является корнем, поэтому $\langle \beta, \gamma \rangle = -1$. Получили противоречие, следовательно, $\langle \sigma_1, \alpha \rangle \neq 2$. Точно так же показываем, что $\langle \sigma_2, \alpha \rangle \neq 2$. Тогда поскольку $\langle \sigma_1, \alpha \rangle + \langle \sigma_2, \alpha \rangle = 2$, то $\langle \sigma_1, \alpha \rangle = \langle \sigma_2, \alpha \rangle = 1$. Аналогично, $\langle \sigma_1, \beta \rangle = \langle \sigma_2, \beta \rangle = 1$ и $\langle \sigma_1, \gamma \rangle = \langle \sigma_2, \gamma \rangle = 1$. Получаем, что $\langle \mu, \sigma_1 \rangle = \langle \alpha, \sigma_1 \rangle + \langle \beta, \sigma_1 \rangle + \langle \gamma, \sigma_1 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$. Это противоречит условию $\mu \in \Lambda_2(R)$. Поэтому μ не является суммой двух корней.

Следующие утверждения описывают свойства элементов из $\Lambda_2(R)$.

ЛЕММА 11. Пусть $\gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1 \in R$ такие, что $\langle \gamma, \delta \rangle = 0$ и $\gamma + \delta = \gamma_1 + \delta_1$. Тогда

- (1) $\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle = 0$, и если $\{\gamma, \delta\} \neq \{\gamma_1, \delta_1\}$, то $\langle \gamma_1, \gamma \rangle = \langle \gamma_1, \delta \rangle = \langle \delta_1, \gamma \rangle = \langle \delta_1, \delta \rangle = 1$;
- (2) если $R_{\pm 2} = \emptyset$, $\gamma + \delta$ является линейной комбинацией корней из R_0 , а $\gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1$ не содержатся в R_0 , то $\{\gamma, \delta\} = \{\gamma_1, \delta_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\gamma_1 + \delta_1 = \gamma + \delta$, то $\langle \gamma_1, \gamma \rangle + \langle \delta_1, \gamma \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle + \langle \delta, \gamma \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = 2$. Если $\langle \gamma_1, \gamma \rangle = 2$, то $\gamma_1 = \gamma$, $\delta_1 = \delta$. Аналогично, мы получим противоречие условию $\{\gamma, \delta\} \neq \{\gamma_1, \delta_1\}$, если предположим, что $\langle \gamma_1, \gamma \rangle = 0$.

Поэтому $\langle \gamma_1, \gamma \rangle = \langle \delta_1, \gamma \rangle = 1$. Так как $\gamma_1 - \gamma = \delta - \delta_1$ и $\delta_1 - \gamma = \delta - \gamma_1$, то из леммы 1 теперь следует, что $\langle \gamma_1, \delta \rangle = \langle \delta_1, \delta \rangle = 1$. Из условий $\langle \gamma, \gamma_1 \rangle = \langle \delta, \gamma_1 \rangle = 1$ получаем, что $2 = \langle \gamma + \delta, \gamma_1 \rangle = \langle \gamma_1 + \delta_1, \gamma_1 \rangle = 2 + \langle \delta_1, \gamma_1 \rangle$. Отсюда $\langle \delta_1, \gamma_1 \rangle = 0$. Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2). Если $\{\gamma, \delta\} \neq \{\gamma_1, \delta_1\}$, то из утверждения (1) и леммы 1 следует, что $\gamma - \gamma_1$ и $\gamma - \delta_1$ являются корнями. Так как $R_{\pm 2} = \emptyset$, $\gamma, \gamma_1, \delta_1 \in R_1 \cup R_{-1}$, то $\gamma - \gamma_1$ и $\gamma - \delta_1$ содержатся в R_0 . Не ограничивая общности, можем считать, что $\gamma \in R_1$. Тогда γ_1, δ_1 также содержатся в R_1 . Это противоречит тому, что $\gamma_1 + \delta_1 = \gamma + \delta$ является линейной комбинацией корней из R_0 . Следовательно, $\{\gamma, \delta\} = \{\gamma_1, \delta_1\}$.

ЛЕММА 12. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \delta_1 + \delta_2$, где $\delta_1, \delta_2 \in R$, $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 0$. Если $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ для $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, то $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ можно перенумеровать так, что $\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ являются корнями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку корни являются ненулевыми функциями на $\mathcal{H}$ (лемма 3) и $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \in \Lambda_2(R)$, то $\gamma_1 \neq \pm \gamma_2$, $\gamma_1 \neq \pm \gamma_3$, $\gamma_2 \neq \pm \gamma_3$.

Так как $\mu = \delta_1 + \delta_2$, $\delta_1, \delta_2 \in R$, то предположения $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 1$ или $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 0$ приводят к противоречию с утверждениями (5) или (6) предложения 7. Следовательно, мы можем предположить, что, например, $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = -1$ и $\gamma_1 + \gamma_2 \in R$ (лемма 1).

Рассмотрим равенство $\mu = \delta_1 + \delta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$. Так как $\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = 0$, то из леммы 11 следует, что $\langle \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 0$. Получаем $\langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = -\langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle$. Если $\langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 0$, то $\langle \mu, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle + \langle \gamma_2, \gamma_2 \rangle + \langle \gamma_3, \gamma_2 \rangle = -1 + 2 = 1$. Это противоречит условию $\mu \in \Lambda_2(R)$. Следовательно, $\langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle \neq 0$, $\langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle \neq 0$. Учитывая условия $\gamma_1 \neq \pm \gamma_3$, $\gamma_2 \neq \pm \gamma_3$, получаем, что при подходящей перенумерации $\langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = -1$, $\langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 1$. Тогда из леммы 1 следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \in R$ и $\gamma_2 - \gamma_3 \in R$.

ЛЕММА 13. Пусть R имеет тип D_l , $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \gamma_0 + \delta_0$, где $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Тогда

- (1) если $l = 4$, то $\mu \in M$, где $M = \{\pm(\alpha_1 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 - \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + \alpha_4), \pm(\alpha_1 - \alpha_4), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4), \pm(\alpha_4 + \alpha_3), \pm(\alpha_4 - \alpha_3), \pm(\alpha_4 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_4 + 2\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_3)\}$ — множество всех весов, $W(R)$ -сопряженных с $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$;
- (2) если $l > 4$, то $\mu \in M$, где $M = \{\pm(\alpha_1 - \alpha_l), \pm(\alpha_1 + \alpha_l), \pm(\alpha_1 + \alpha_l + 2\alpha_2), \dots, \pm(\alpha_1 + \alpha_l + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{l-1})\}$ — множество всех весов, $W(R)$ -сопряженных с $\alpha_1 + \alpha_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства утверждения (1) леммы 4 следует существование $w \in W(R)$ такого, что $w\gamma_0 = \alpha_i$, $w\delta_0 = \alpha_j$ для некоторых $i \neq j$. То есть μ $W(R)$ -сопряжен с $\alpha_i + \alpha_j$ и, следовательно, $\alpha_i + \alpha_j \in \Lambda_2(R)$. Если существует простой корень, который связан в схеме Дынкина только с одним из α_i, α_j или не связан ни с α_i , ни с α_j , то получаем противоречие условию $\alpha_i + \alpha_j \in \Lambda_2(R)$. Поэтому в D_4 имеются три возможности: $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_4$, $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_3 + \alpha_4$, а в $D_l, l > 4$, — единственная возможность: $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_l$. Описание множества M получается прямой проверкой.

ЛЕММА 14. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, где $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Тогда

- (1) если R имеет тип A_5 , то $\mu \in M$, где M – множество всех весов, $W(R)$ -сопряженных с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$, $|M| = 20$;
- (2) если R имеет тип D_6 , то $\mu \in M$, где M – множество всех весов, $W(R)$ -сопряженных с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$ или с $\alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_5$, $|M| = 64$;
- (3) если R имеет тип E_7 , то $\mu \in M$, где M – множество всех весов, $W(R)$ -сопряженных с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_7$, $|M| = 56$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства утверждения (2) леммы 4 следует существование $w \in W(R)$ такого, что $\mu = w(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)$ для некоторых $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$. Из условия $\mu \in \Lambda_2(R)$ следует, что $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \in \Lambda_2(R)$. Поэтому любой корень в схеме Дынкина должен быть связан либо с двумя корнями из $\{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k\}$, либо не связан ни с одним из них. Таким образом, в A_5 μ сопряжен с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$, в D_6 μ сопряжен либо с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$, либо с $\alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_5$, в E_7 μ сопряжен с $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_7$. Утверждения о мощности множества M получаются прямой проверкой.

4.2. Вычисление когомологий ненулевого веса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для любого $\sigma \in R$ $H_{2\sigma}^2(L, L) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все корни $W(R)$ -сопряжены с максимальным корнем γ_0 , то достаточно рассмотреть $H_{2\gamma_0}^2(L, L)$.

Пусть $\psi \in Z_{2\gamma_0}^2(L, L)$. Если $h \in \mathcal{H}$, $\gamma \neq -\gamma_0$, то $\psi(h, e_\gamma) = 0$. Очевидно, что γ_0 можно представить в виде $\gamma_0 = \gamma + \delta$, $\gamma \neq \gamma_0$, $\delta \neq \gamma_0$. Тогда из леммы 5 получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}, h) = \psi([e_{-\gamma}, e_{-\delta}], h) + [\psi(e_{-\gamma}, h), e_{-\delta}] + [\psi(e_{-\delta}, h), e_{-\gamma}] \\ &= \psi(e_{-\gamma_0}, h). \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(\mathcal{H}, L) = 0$.

Пусть $2\gamma_0 = \alpha + \beta + \gamma$. Из леммы 10 следует, что $S = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}} \cap R$ является системой корней типа A_2 и $\gamma_0 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Рассмотрим подалгебру M типа A_2 , порожденную $\{e_\delta, h_\delta \mid \delta \in S\}$. Если $\delta_1, \delta_2 \in S$, $\delta_1 \neq \delta_2$, то либо $\delta_1 - \delta_2 + 2\gamma_0 \notin R \cup \{0\}$, либо $-\delta_1 - \delta_2 + 2\gamma_0 \in S$. Следовательно, $\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}) \in M$ для любых $\delta_1, \delta_2 \in S$. Поэтому $\psi|_M \in Z_{2\gamma_0}^2(M, M)$. Из предложения 2 следует, что $\psi|_M = d'\varphi$, где d' – дифференциал комплекса $C^\bullet(M, M)$, $\varphi = Ne_{\gamma_0}^* \otimes e_{\gamma_0}$, $N = 0, 1$. Покажем, что $\psi = d\varphi = N \sum_{-\gamma - \delta + 2\gamma_0 \in R} e_{-\gamma}^* \wedge e_{-\delta}^* \otimes e_{-\gamma - \delta + 2\gamma_0}$, $N = 0, 1$.

Так как $-\alpha - \beta + 2\gamma_0 = \gamma \in S$, $-\alpha - \gamma + 2\gamma_0 = \beta \in S$, $-\beta - \gamma + 2\gamma_0 = \alpha \in S$ и $\psi|_M = d'\varphi$, то $\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}) = \widehat{\psi}(e_{-\beta}, e_{-\gamma})$ для любых α, β, γ таких, что $\alpha + \beta + \gamma = 2\gamma_0$.

Допустим, что $2\gamma_0 = \alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$, где $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \{\alpha', \beta', \gamma'\}$. Используя лемму 10, можно считать, что $\gamma_0 = \gamma = \gamma' = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. Рассмотрим $d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\alpha'})$. Так как $\gamma_0 = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ и $\{\alpha, \beta\} \neq \{\alpha', \beta'\}$, то из леммы 1 следует, что $\langle \gamma_0, \alpha \rangle = \langle \gamma_0, \beta \rangle = \langle \gamma_0, \alpha' \rangle = \langle \gamma_0, \beta' \rangle = 1$ и $\langle \alpha, \alpha' \rangle \neq 2$, $\langle \beta, \alpha' \rangle \neq 2$. Тогда $1 = \langle \gamma_0, \alpha' \rangle = \langle \alpha + \beta, \alpha' \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle + \langle \beta, \alpha' \rangle$ и, следовательно, $\langle \alpha, \alpha' \rangle \neq -1$, $\langle \beta, \alpha' \rangle \neq -1$. Поэтому $\alpha + \alpha' \notin R$, $\beta + \alpha' \notin R$ (лемма 1) и

$[e_{-\alpha}, e_{-\alpha'}] = [e_{-\alpha'}, e_{-\beta}] = 0$. Аналогично, $\alpha + \beta' \notin R$, $\beta + \beta' \notin R$. Так как $-\alpha - \alpha' + 2\gamma_0 = \beta + \beta'$, $-\beta - \alpha' + 2\gamma_0 = \alpha + \beta'$, то $\psi(e_{-\alpha}, e_{-\alpha'}) = \psi(e_{-\beta}, e_{-\alpha'}) = 0$. Таким образом, $d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\alpha'}) = [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}), e_{-\alpha'}] + \psi([e_{-\alpha}, e_{-\beta}], e_{-\alpha'}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})[e_{\gamma_0}, e_{-\alpha'}] + \psi(e_{-\gamma_0}, e_{-\alpha'}) = (\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_0}, e_{-\alpha'}))e_{\beta'}$. Поэтому $\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_0}, e_{-\alpha'}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha'}, e_{-\beta'})$ для любых $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in R$ таких, что $-\alpha - \beta + 2\gamma_0 \in R$, $-\alpha' - \beta' + 2\gamma_0 \in R$. Учитывая, что $\psi(\mathcal{H}, L) = 0$, получаем $\psi = d\varphi$ и, следовательно, $H_{2\gamma_0}^2(L, L) = 0$.

Пусть L имеет тип A_3 , D_l , $\overline{A}_3$ или $\overline{D}_l$. Исследуем пространства $H_\mu^2(L, L)$, где $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\mu = \alpha + \beta + \gamma \in \Lambda_2(R)$, $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1$. Тогда

- (1) если L имеет тип A_3 , D_l или $\overline{D}_l$, то $H_\mu^2(L, L) = 0$;
- (2) если L имеет тип $\overline{A}_3$, то $\dim H_\mu^2(L, L) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in H_\mu^2(L, L)$. Согласно утверждению (5) предложения 7 μ не является суммой двух корней и $\mu = \alpha + \beta + \gamma$ — единственное представление μ в виде суммы трех корней. Поэтому если $\psi(x, y) \neq 0$, то можно считать, что $x = e_{\gamma_1}$, $y = e_{\gamma_2}$, где $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\gamma}) \\ &= [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}), e_{-\gamma}] + [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}), e_{-\beta}] + [\psi(e_{-\gamma}, e_{-\beta}), e_{-\alpha}] \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})[e_{\gamma}, e_{-\gamma}] + \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma})[e_{\beta}, e_{-\beta}] + \widehat{\psi}(e_{-\gamma}, e_{-\beta})[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})h_{\gamma} + \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma})h_{\beta} + \widehat{\psi}(e_{-\gamma}, e_{-\beta})h_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4)$$

(1) Если L имеет тип A_3 или D_l , то из леммы 4, следствия 2 леммы 3 и равенства (4) получаем, что $\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \psi(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}) = \psi(e_{-\gamma}, e_{-\beta}) = 0$. Следовательно, $\psi = 0$.

Пусть L имеет тип $\overline{D}_l$. Предположим, что $\alpha = \delta_1 + \delta_2$, где $\delta_1, \delta_2 \in R \setminus \{\beta, \gamma\}$. Рассмотрим $d\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\beta})$.

По лемме 1 $-\delta_1 + (-\delta_2) + \mu = \beta + \gamma \notin R$ ($\langle \beta, \gamma \rangle = 1$) и $[\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}), e_{-\beta}] = 0$. Из равенства $1 = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \delta_1, \beta \rangle + \langle \delta_2, \beta \rangle$ и условий $\delta_1 \neq \beta$, $\delta_2 \neq \beta$ получаем, что $\langle \delta_1, \beta \rangle \neq -1$ и $\langle \delta_2, \beta \rangle \neq -1$. Следовательно, $\delta_1 + \beta \notin R$, $\delta_2 + \beta \notin R$ и $\psi([e_{-\delta_1}, e_{-\beta}], e_{-\delta_2}) = \psi([e_{-\beta}, e_{-\delta_2}], e_{-\delta_1}) = 0$. Аналогично, $\delta_1 + \gamma \notin R$, $\delta_2 + \gamma \notin R$ и, следовательно, $-\delta_1 + (-\beta) + \mu = \delta_2 + \gamma$ и $-\delta_2 + (-\beta) + \mu = \delta_1 + \gamma$ не являются корнями. Поэтому $[\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\beta}), e_{-\delta_2}] = [\psi(e_{-\delta_2}, e_{-\beta}), e_{-\delta_1}] = 0$.

Таким образом, если $\alpha = \delta_1 + \delta_2$, причем $\delta_1 \neq \beta, \gamma$, $\delta_2 \neq \beta, \gamma$, то $d\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\beta}) = \psi([e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}], e_{-\beta}) = \psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta})$. Так как $\psi \in Z_\mu^2(L, L)$, то получаем, что $\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = 0$. Аналогично, $\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}) = 0$. Тогда из равенства (4) и следствия 2 леммы 3 следует, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma}, e_{-\beta}) = 0$. Таким образом, $\psi = 0$.

Если система R имеет тип D_l , то любой корень этой системы можно представить в виде суммы двух корней не менее чем тремя способами. Например, $\alpha_1 = (\alpha_1 + \dots + \alpha_l) + (-\alpha_2 - \dots - \alpha_l) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}) + (-\alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1}) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-2}) + (-\alpha_2 - \dots - \alpha_{l-2})$ (см. таблицу 1). Поэтому обязательно существуют

такие корни $\delta_1, \delta_2 \in R$, что $\alpha = \delta_1 + \delta_2$, причем $\delta_1 \neq \beta, \gamma$, $\delta_2 \neq \beta, \gamma$. По ранее доказанному получаем, что $\psi = 0$.

(2) Пусть L имеет тип $\overline{A}_3$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – базис системы корней типа A_3 . Прямая проверка показывает, что $\mu \in \{\pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3), \pm(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)\}$. Так как перечисленные элементы сопряжены относительно группы Вейля, то достаточно рассмотреть $H_{3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}^2(L, L)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, $\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)$, $\gamma = \alpha_1$. Из замечаний, сделанных в начале доказательства, следует, что $\mu = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha + \beta + \gamma$ – единственное представление μ в виде суммы трех корней и $B_\mu^2(L, L) = 0$. Из равенства (4) получаем, что $\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma}, e_{-\beta})$ и, следовательно, $\dim Z_\mu^2(L, L) \leq 1$.

Нетрудно проверить, что $e_{-\alpha}^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes e_\gamma + e_{-\alpha}^* \wedge e_{-\gamma}^* \otimes e_\beta + e_{-\gamma}^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes e_\alpha$ является элементом $Z_\mu^2(L, L)$.

Таким образом, $\dim H_\mu^2(L, L) = \dim Z_\mu^2(L, L) = 1$.

Из утверждений (2), (3) предложения 7 следует, что в когомологиях алгебр Ли типов $A_3, \overline{A}_3, D_l, \overline{D}_l$ могут возникать веса вида $\mu = \gamma + \delta$, $\langle \gamma, \delta \rangle = 0$.

Во-первых, исследуем коциклы ψ веса μ такие, что $\psi(x, h) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$.

ЛЕММА 15. Пусть L имеет тип D_l или $\overline{D}_l$, $\psi \in H_\mu^2(L, L)$, где $\mu = \gamma_0 + \delta_0$, $\gamma_0, \delta_0 \in R$, $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Если $l \equiv 1(2)$ и $\psi(x, h) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$ или $l \equiv 0(2)$, то для любых $\gamma, \delta \in R$ таких, что $-\gamma - \delta + \mu = 0$, выполняется $\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) \in \langle h_\gamma \rangle_K + Z(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu = \gamma + \delta$, $\gamma, \delta \in R$. Согласно лемме 11 $\langle \gamma, \delta \rangle = 0$. Так как $-\gamma - \delta + \mu = 0$, то $\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = h'$, где $h' \in \mathcal{H}$.

Допустим, для $\beta \in R$ выполняется $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \delta \rangle = 0$. Тогда $\mu + \beta - \gamma = \gamma + \delta + \beta - \gamma = \delta + \beta$ и $\mu + \beta - \delta = \gamma + \beta$ не являются корнями и, следовательно, $\psi(e_\beta, e_{-\gamma}) = \psi(e_\beta, e_{-\delta}) = 0$. Из условий $\langle \gamma, \delta \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \delta \rangle = 0$ следует, что $\beta - \gamma$, $\beta - \delta$, $-\gamma - \delta$ не являются корнями и, значит, $\psi([e_\beta, e_{-\gamma}], e_{-\delta}) = 0$, $\psi([e_\beta, e_{-\delta}], e_{-\gamma}) = 0$, $\psi([e_{-\gamma}, e_{-\delta}], e_\beta) = 0$. Поэтому

$$0 = d\psi(e_\beta, e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = [e_\beta, \psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta})] = [e_\beta, h'] = \beta(h')e_\beta.$$

То есть $\beta(h') = 0$, если $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \delta \rangle = 0$.

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис системы R (корни занумерованы согласно таблице 1). Так же как в доказательстве леммы 13, заменим μ на $w\mu$ для подходящего $w \in W(R)$ так, что $\gamma = \alpha_1$, $\delta = \alpha_l$. Тогда для любого $\beta \in \{\alpha_3, \dots, \alpha_{l-1}\}$ выполняется $\langle \beta, \gamma \rangle = \langle \beta, \delta \rangle = 0$.

Пусть $l \equiv 0(2)$. Обозначим через V пересечение ядер функций $\alpha_3, \dots, \alpha_{l-1}$. Из предложения 1 следует, что $\alpha_3, \dots, \alpha_{l-1}$ – линейно независимые функции на $\mathcal{H}$ и, следовательно, $\dim V = \dim \mathcal{H} - (l - 3)$. Очевидно, что $h_1 = h_\gamma \in V$ и $Z(L) \subset V$. Согласно предложению 1 $\dim Z(L) = 2$, если L имеет тип D_l . Тогда $\dim V = 3$, если L имеет тип D_l , и $\dim V = 1$, если L имеет тип $\overline{D}_l$. Таким образом, $V = \langle h_\gamma \rangle_K + Z(L)$. Следовательно, $h' \in \langle h_\gamma \rangle_K + Z(L)$ и при $l \equiv 0(2)$ утверждение доказано.

Пусть $l \equiv 1(2)$ и $\psi(x, h) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$. Из равенства $d\psi(e_{\alpha_l}, e_{-\alpha_l}, e_{-\alpha_1}) = 0$ ($\mu = \alpha_1 + \alpha_l$) получаем, что $[e_{\alpha_l}, \psi(e_{-\alpha_l}, e_{-\alpha_1})] = 0$ и, следовательно, $\alpha_l(h') = 0$. Таким образом, для любого $\beta \in \{\alpha_3, \dots, \alpha_l\}$ выполняется $\beta(h') = 0$. Обозначим через V пересечение ядер функций $\alpha_3, \dots, \alpha_l$. Из предложения 1 следует, что $\alpha_3, \dots, \alpha_l$ — линейно независимые функции на $\mathcal{H}$ и, следовательно, $\dim V = \dim \mathcal{H} - (l - 2)$. Далее, так же как в случае $l \equiv 0(2)$, получаем, что $h' \in \langle h_\gamma \rangle_K + Z(L)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть L имеет тип $A_3, \bar{A}_3, D_l, \bar{D}_l$, $\psi \in H_\mu^2(L, L)$, где $\mu = \gamma_0 + \delta_0$ и $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Если $\psi(x, h) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) ψ когомологичен тривиальному коциклу;
- (2) L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, и $\psi(x, y) = nh_0$, где $h_0 \in Z(L)$, $n \in K$, для любых $x, y \in L$ (h_0 зависит от ψ и не зависит от x, y).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве будем использовать ограничения коцикла ψ на подалгебры в алгебре Ли L . Сначала выясним, как устроено ограничение ψ на подалгебру типа A_2 .

Пусть $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$. Используя лемму 12, мы можем перенумеровать $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ так, что $\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ являются корнями. Тогда $L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2) = \langle h_{\gamma_1}, h_{\gamma_2}, e_{\pm\gamma_1}, e_{\pm\gamma_2}, e_{\pm(\gamma_1+\gamma_2)} \rangle_K$ — подалгебра типа A_2 .

Нетрудно показать, что $\psi(e_\alpha, e_\beta)$ при $e_\alpha, e_\beta \in L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)$ может быть отличным от нуля, только если $\{\alpha, \beta\} = \{-\gamma_1, -\gamma_2\}$, $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma_1, -\gamma_1 - \gamma_2\}$ или $\{\alpha, \beta\} = \{-\gamma_2, -\gamma_1 - \gamma_2\}$. Например, $\psi(e_{\gamma_2}, e_{-\gamma_1-\gamma_2}) = 0$, поскольку $\gamma_2 + (-\gamma_1 - \gamma_2) + \mu = \gamma_2 + \gamma_3$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ мы перенумеровали так, что $\gamma_2 + \gamma_3$ не является корнем, $\gamma_2 + \gamma_3 \neq 0$). Более того, так как $\psi(x, h) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$, то из равенств $d\psi(e_{\gamma_1}, e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_1-\gamma_2}) = 0$ и $d\psi(e_{\gamma_2}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_1-\gamma_2}) = 0$ получаем, что $\hat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \hat{\psi}(e_{\gamma_1}, e_{-\gamma_1-\gamma_2}) = \hat{\psi}(e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_1-\gamma_2})$.

Таким образом, если $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ перенумерованы так, что $\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ являются корнями, то $\psi|_{L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)} \in \langle z(-\gamma_1, -\gamma_2) \rangle_K$, где $z(-\gamma_1, -\gamma_2) = e_{-\gamma_1}^* \wedge e_{-\gamma_2}^* \otimes e_{\gamma_3} + e_{\gamma_1}^* \wedge e_{-\gamma_1-\gamma_2}^* \otimes e_{\gamma_1+\gamma_3} + e_{-\gamma_2}^* \wedge e_{-\gamma_1-\gamma_2}^* \otimes e_{\gamma_3-\gamma_2}$.

Пусть $\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) \neq 0$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in R$. Если $\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) \notin \mathcal{H}$, то $\gamma_3 = -\gamma_1 - \gamma_2 + \mu \in R$. Так как $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, то из леммы 12 следует, что $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \pm 1$. Поэтому из леммы 1 следует, что подалгебра, порожденная множеством $\{e_{\pm\gamma_1}, e_{\pm\gamma_2}\}$, является алгеброй Ли типа A_2 . То есть если $\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2})$ не содержится в $\mathcal{H}$, то $e_{-\gamma_1}$ и $e_{-\gamma_2}$ содержатся в некоторой подалгебре типа A_2 .

Дальнейшее доказательство будем проводить индукцией по рангу l , $l \geq 3$.

Пусть $l = 3$. В этом случае L имеет тип A_3 или $\bar{A}_3$. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ — базис системы корней типа A_3 . Применив к γ_0, δ_0 подходящее $w \in W(R)$, можно считать, что $\gamma_0 = \alpha_1$. Так как $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$, то $\delta_0 = \pm\alpha_3$. Следовательно, заменяя ψ на $w\psi$ для подходящего $w \in W(R)$, можем предполагать, что $\mu = \alpha_1 + \alpha_3$.

В алгебрах Ли типов A_3 и $\bar{A}_3$ есть четыре подалгебры типа A_2 вида $L_\mu(\gamma_1, \gamma_2)$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in R$, а именно $L_\mu(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1)$, $L_\mu(-\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2)$, $L_\mu(-\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1)$, $L_\mu(-\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_3)$.

Пусть $z_1 = z(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1)$, $z_2 = z(-\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2)$, $z_3 = z(-\alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1)$,

$z_4 = z(-\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_3)$. Согласно доказанному выше $\psi = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 + \psi_1$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in K$, $\psi_1(x, y) \in \mathcal{H}$ для всех $x, y \in L$.

Так как $(-\alpha_1) + (-\alpha_3) + \mu = 0$, то $\psi(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_3}) = h \in \mathcal{H}$. Из равенств $d\psi(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_3}) = 0$ и $d\psi(e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_3}) = 0$ получаем соотношения $a_3 + a_4 - \alpha_2(h) = 0$ и $a_1 + a_2 + \alpha_2(h) = 0$ соответственно. Следовательно, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. Поэтому мы можем найти такую линейную комбинацию коцепей $\varphi_1 = d(e_{-\alpha_1}^* \otimes e_{\alpha_3}) = z_1 + z_3 + e_{-\alpha_1}^* \wedge e_{-\alpha_3}^* \otimes h_3$, $\varphi_2 = d(e_{-\alpha_3}^* \otimes e_{\alpha_1}) = z_2 + z_4 + e_{-\alpha_3}^* \wedge e_{-\alpha_1}^* \otimes h_1$, $\varphi_3 = d(e_{\alpha_2}^* \otimes e_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}) = z_1 + z_2 + e_{\alpha_2}^* \wedge e_{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}^* \otimes (h_1 + h_2 + h_3)$, что $\tilde{\psi} = \psi + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3$ удовлетворяет условию $\tilde{\psi}(x, y) \in \mathcal{H}$ для всех $x, y \in L$. Таким образом, коцикл ψ когомологичен коциклу $\tilde{\psi}$ такому, что $\tilde{\psi}(x, y) \in \mathcal{H}$ для всех $x, y \in L$. Нетрудно убедиться в том, что коцикл ψ когомологичен тривиальному коциклу.

Предположим, что предложение верно для алгебр Ли типа D_n и $\overline{D}_n$, $n < l$.

Построим в L градуировку, аналогичную определенной в §2, используя в качестве корня α корень α_{l-1} (см. таблицу 1), $L = L_{-1} + L_0 + L_1$, $L_0 = M_0 + \langle h_0 \rangle$, $h_0 \in \mathcal{H}$, M_0 – алгебра Ли типа D_{l-1} . Из леммы 13 следует, что, заменяя ψ на $w\psi$ для подходящего $w \in W(R)$ (если R имеет тип D_4 , то используем еще и симметричность диаграммы), можно считать, что μ является линейной комбинацией корней из R_0 . Тогда если $\gamma, \delta \in R_0$, то либо $\gamma + \delta + \mu$ является линейной комбинацией корней из R_0 и $\psi(e_\gamma, e_\delta) \in M_0$, либо $\gamma + \delta + \mu = 0$. Если $\gamma + \delta + \mu = 0$, то из леммы 15 следует, что $\psi(e_\gamma, e_\delta) \in \langle h_\gamma \rangle_K + Z(L)$. В алгебрах Ли типа $\overline{D}_l$ центр равен нулю и $\psi(e_\gamma, e_\delta) \in \langle h_\gamma \rangle_K \subset M_0$. В алгебре Ли типа D_l при $l \equiv 1(2)$ центр L содержится в M_0 (см. предложение 1). Поэтому $\psi(e_\gamma, e_\delta)$ также содержится в M_0 . Следовательно, в алгебрах Ли типов $D_l, l \equiv 1(2)$, и $\overline{D}_l$ ограничение коцикла ψ на M_0 является коциклом из $Z_\mu^2(M_0, M_0)$ и к нему применимо предположение индукции. Если L имеет тип $D_l, l \equiv 0(2)$, то согласно предложению 1 центр L двумерен и существует центральный элемент, не содержащийся в M_0 . Поэтому L_0 является прямой суммой $M_0 \oplus \langle h_0 \rangle$, $h_0 \in Z(L)$, и мы можем применить предположение индукции к проекции $\text{pr}|_{M_0} \psi$ коцикла ψ на M_0 , которая также принадлежит $Z_\mu^2(M_0, M_0)$ (для любых $x, y \in M_0$ $\psi(x, y) = \psi'(x, y) + ah_0$, где $\psi'(x, y) \in M_0$, $a \in K$, ψ' называем проекцией ψ на M_0).

Заменим коцикл ψ на когомологичный коцикл $\psi + d\varphi$, где $\varphi \in C_\mu^1(M_0, M_0)$, такой, что $\psi|_{M_0} = d'\varphi$ или $\text{pr}|_{M_0} \psi = d'\varphi$ (d' – дифференциал комплекса $C^\bullet(M_0, M_0)$). Тогда $\psi(x, y) \in \langle h_0 \rangle_K$ для любых $x, y \in M_0$, где $h_0 \in Z(L) \setminus M_0$ (полагаем $h_0 = 0$, если L имеет тип $D_l, l \equiv 1(2)$, или $\overline{D}_l$).

Покажем, что $\psi(x, y) \in \langle h_0 \rangle_K$ для любых $x, y \in L$. Если это не выполняется, то для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ ограничение ψ на подалгебру типа A_2 вида $L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)$ отлично от нуля. По определению подалгебры $L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)$ имеем $-\gamma_1 - \gamma_2 + \mu = \gamma_3 \in R$ и $\gamma_1 + \gamma_2 \in R$, $\gamma_1 + \gamma_3 \in R$, $\gamma_2 - \gamma_3 \in R$. Подалгебра $L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)$ не может целиком содержаться в M_0 , поскольку иначе $\psi|_{L_\mu(-\gamma_1, -\gamma_2)} = 0$ по предположению индукции. Следовательно, по крайней мере один из корней γ_1, γ_2 не содержится в M_0 . Тогда так как μ является комбинацией корней из R_0 и $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, то ровно два из корней $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не содержатся в R_0 . Поэтому либо $\gamma_1 + \gamma_2 \notin R_0$, либо $\gamma_1 + \gamma_3 \notin R_0$.

Если $\gamma_1 + \gamma_2 \notin R_0$, то $\mu = \gamma_3 + (\gamma_1 + \gamma_2)$ – представление μ в виде суммы двух

корней, не содержащихся в M_0 . Если $\gamma_1 + \gamma_3 \notin R_0$, то $\mu = \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_3)$ – представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в M_0 . Из утверждения (3) леммы 11 следует, что представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в R_0 , единственно с точностью до перестановки слагаемых. Пусть $\mu = \gamma_0 + \delta_0$ – такое представление. Тогда либо $\gamma_1 + \gamma_2$ совпадает с γ_0 или δ_0 , либо γ_2 совпадает с γ_0 или δ_0 . В любом случае в $L(-\gamma_1, -\gamma_2)$ содержится один из $e_{\gamma_0}, e_{\delta_0}$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $e_{\gamma_0} \in L(-\gamma_1, -\gamma_2)$. Следовательно, $L(-\gamma_1, -\gamma_2)$ можно представить в виде $\langle h_\alpha, h_\beta, e_{\pm\alpha}, e_{\pm\beta}, e_{\pm\gamma_0} \rangle_K$, где $\gamma_0 = \alpha + \beta$.

Рассмотрим другую подалгебру типа A_2 , содержащую e_{γ_0} : $\{h_{\alpha'}, h_{\beta'}, e_{\pm\alpha'}, e_{\pm\beta'}, e_{\pm\gamma_0}\}$, где $\gamma_0 = \alpha' + \beta'$ и $\{\alpha, \beta\} \neq \{\alpha', \beta'\}$. Так как $\gamma_0 \notin R_0$, $\gamma_0 = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$, то можно считать, что $\beta, \beta' \in R_0$. Рассмотрим $d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\beta'})$. Поскольку $\beta, \beta' \in R_0$, то по предположению индукции $[\psi(e_{-\beta}, e_{-\beta'}), e_{-\alpha}] = 0$. Так как $\gamma_0 = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$, то $\langle \gamma_0, \alpha \rangle = \langle \gamma_0, \beta \rangle = \langle \gamma_0, \alpha' \rangle = \langle \gamma_0, \beta' \rangle = 1$. Тогда если $\alpha + \beta'$ является корнем, то $\langle \alpha + \beta', \gamma_0 \rangle = 1 + 1 = 2$ и, следовательно, $\alpha + \beta' = \gamma_0$. Отсюда $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha', \beta'\}$. Получили противоречие. Следовательно, $\alpha + \beta' \notin R$ и $[e_{-\alpha}, e_{-\beta'}] = 0$, $\psi([e_{-\alpha}, e_{-\beta'}], e_{-\beta}) = 0$. Аналогично, $\beta + \beta' \notin R$ и $\psi([e_{-\beta}, e_{-\beta'}], e_{-\alpha}) = 0$. Если $\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta'}) \neq 0$, то $\mu = \alpha + \beta' + \lambda$, где $\lambda \in R$ ($\lambda \neq 0$), так как μ является комбинацией корней из R_0 . Так как $\alpha + \beta' \notin R$, то из леммы 12 следует, что $\alpha + \lambda \in R$, $\beta' + \lambda \in R$. Тогда $\mu = \alpha + (\beta' + \lambda)$ – представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в R_0 . Такое представление единственно, следовательно, $\alpha = \delta_0$, $\lambda + \beta' = \gamma_0$, $\mu = \gamma_0 + \delta_0 = (\alpha + \beta) + \alpha = 2\alpha + \beta$. Поэтому из условия $\mu|_{\mathcal{H}} = 0$ получаем, что $\beta|_{\mathcal{H}} = 0$. Это противоречит лемме 3. Следовательно, $\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta'}) = 0$. Так как $\mu = \gamma_0 + \delta_0 = \alpha' + \beta' + \delta_0$, то из леммы 12 следует, что либо $\beta' + \delta_0 \in R$, либо $\beta' - \delta_0 \in R$. Поскольку представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в R_0 , единственно и $\beta' \neq 0$, то $\beta' + \delta_0 \notin R$. Следовательно, $\beta' - \delta_0 \in R$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\beta'}) &= [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}), e_{-\beta'}] + \psi([e_{-\alpha}, e_{-\beta}], e_{-\beta'}) \\ &= (\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) + \widehat{\psi}(e_{-\alpha-\beta}, e_{-\beta'}))e_{\delta_0-\beta'}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_0}, e_{-\beta'})$.

То есть если ограничение ψ на $L(-\gamma_1, -\gamma_2)$ отлично от нуля, то ограничение ψ на любую подалгебру $\langle h_{\alpha'}, h_{\beta'}, e_{\pm\alpha'}, e_{\pm\beta'}, e_{\pm\gamma_0} \rangle_K$, содержащую e_{γ_0} , также отлично от нуля. Аналогичный результат верен и для подалгебр $\langle h_{\alpha'}, h_{\beta'}, e_{\pm\alpha'}, e_{\pm\beta'}, e_{\pm\delta_0} \rangle_K$, содержащих δ_0 . Поэтому, складывая ψ с линейной комбинацией

$$d(e_{-\gamma_0}^* \otimes e_{\delta_0}) \text{ и } d(e_{-\delta_0}^* \otimes e_{\gamma_0}),$$

получаем коцикл $\widetilde{\psi}$ такой, что $\widetilde{\psi}(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}) = 0$ для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ таких, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \mu \neq 0$. Заменим коцикл ψ на когомологичный ему коцикл $\widetilde{\psi}$.

Мы показали, что $\psi(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}) = 0$ для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ таких, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \mu \neq 0$. Также по предположению индукции $\psi(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}) \in \langle h_0 \rangle_K$ для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in R_0$ таких, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \mu = 0$. Так как μ является линейной комбинацией корней из R_0 и $\mu = \gamma_0 + \delta_0$ – единственное представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в R_0 , то достаточно показать, что $\psi(e_{-\gamma_0}, e_{-\delta_0}) \in \langle h_0 \rangle_K$.

Представим γ_0 в виде суммы двух корней $\gamma_0 = \alpha + \beta$, где $\alpha \notin R_0$, $\beta \in R_0$. Рассмотрим $d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\delta_0})$. Если $\beta + \delta_0 \in R$, то $\mu = \alpha + (\beta + \delta_0)$ – представление μ в виде суммы двух корней, не содержащихся в R_0 . Так как $\beta \neq 0$, то $\alpha = \delta_0$, $\beta + \delta_0 = \gamma_0$, $\mu = \alpha + \beta + \delta_0 = 2\delta_0 + \beta$. Поэтому $\beta|_{\mathcal{H}} = 0$, что противоречит лемме 3. Следовательно, $\beta + \delta_0 \notin R$ и $\psi([e_{-\delta_0}, e_{-\beta}], e_{-\alpha}) = 0$. Слагаемые $[\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}), e_{-\delta_0}]$, $[\psi(e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}), e_{-\beta}]$, $[\psi(e_{-\delta_0}, e_{-\beta}), e_{-\alpha}]$ равны нулю, так как $-\alpha - \beta + \mu \neq 0$, $-\alpha - \delta_0 + \mu \neq 0$ и $-\delta_0 - \beta + \mu \neq 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\delta_0}) = \psi([e_{-\alpha}, e_{-\beta}], e_{-\delta_0}) + \psi([e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}], e_{-\beta}) \\ &= \psi(e_{-\gamma_0}, e_{-\delta_0}) + \psi([e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}], e_{-\beta}). \end{aligned}$$

Так как $\delta_0, \alpha \notin R_0$, $L_{\pm 2} = 0$, то $[e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}] \in M_0$. Поэтому

$$\psi([e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}], e_{-\beta}) \in \langle h_0 \rangle_K$$

по предположению индукции. Следовательно, для

$$\psi(e_{-\gamma_0}, e_{-\delta_0}) = -\psi([e_{-\alpha}, e_{-\delta_0}], e_{-\beta})$$

это также выполняется. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \gamma_0 + \delta_0$, где $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Тогда

- (1) если L имеет тип A_3 или D_l , $l \equiv 1(2)$, то $H_\mu^2(L, L) = 0$;
- (2) если L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, то $\dim H_\mu^2(L, L) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in H_\mu^2(L, L)$, $h \in \mathcal{H}$, $e_{-\gamma} \in L$. По лемме 3 корни являются ненулевыми функциями на $\mathcal{H}$, следовательно, $-\gamma + \mu \neq 0$, и если $-\gamma + \mu$ не является корнем, то $\psi(h, e_{-\gamma}) = 0$. Предположим, что $-\gamma + \mu = \delta \in R$. Согласно лемме 3 $\gamma + \delta = \mu$ не является корнем и $[e_{-\gamma}, e_{-\delta}] = 0$. Тогда из леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}, h) = [\psi(e_{-\gamma}, h), e_{-\delta}] + [\psi(e_{-\delta}, h), e_{-\gamma}] \\ &= \hat{\psi}(e_{-\gamma}, h)[e_\delta, e_{-\delta}] + \hat{\psi}(e_{-\delta}, h)[e_\gamma, e_{-\gamma}] = \hat{\psi}(e_{-\gamma}, h)h_\delta + \hat{\psi}(e_{-\delta}, h)h_\gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно следствию 2 леммы 3 и лемме 4 $h_\delta \neq 0$, $h_\gamma \neq 0$ и $h_\delta + h_\gamma \neq 0$. Поэтому из формулы (5) получаем, что $\hat{\psi}(e_{-\gamma}, h) = \hat{\psi}(e_{-\delta}, h) = 0$. Таким образом, $\psi(h, x) = 0$ для всех $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$. Утверждение (1) следует теперь из предложения 10.

Пусть L – алгебра Ли типа D_l , $l \equiv 0(2)$. Согласно утверждению (2) предложения 10 $\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta})$ может быть отлично от нуля только при $\gamma + \delta = \mu$, и если $\mu = \gamma + \delta$, то $\psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = Nh_0$, где $N \in K$, $h_0 \in Z(L)$.

Пусть $\mu = \gamma + \delta = \gamma_1 + \delta_1$. Согласно леммам 11 и 1 $-\gamma + \gamma_1$ является корнем, а $-\delta - \gamma_1$ не является корнем. Тогда так как $[h_0, L] = 0$, то

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\gamma+\gamma_1}, e_{-\delta}, e_{-\gamma_1}) = \psi([e_{-\gamma+\gamma_1}, e_{-\delta}], e_{-\gamma_1}) + \psi([e_{-\gamma+\gamma_1}, e_{-\gamma_1}], e_{-\delta}) \\ &= \psi(e_{-\gamma+\gamma_1-\delta}, e_{-\gamma_1}) + \psi(e_{-\gamma+\gamma_1-\gamma_1}, e_{-\delta}) = \psi(e_{-\delta_1}, e_{-\gamma_1}) + \psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}). \end{aligned}$$

Отсюда $\psi(e_{-\delta_1}, e_{-\gamma_1}) = \psi(e_{-\gamma}, e_{-\delta})$. Таким образом, коэффициент N не зависит от γ, δ и $\dim H_\mu^2(L, L) \leq \dim Z(L) = 2$ ($\dim Z(L) = 2$ согласно предложению 1).

Покажем, что для любого $z \in Z(L)$ коцепь $\chi_z = \sum_{\gamma+\delta=\mu} e_{-\gamma}^* \wedge e_{-\delta}^* \otimes z$ является коциклом.

Пусть $e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_3} \in L$. Если $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \neq \mu$, то $d\chi_z(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_3}) = 0$. Предположим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \mu$. Согласно лемме 12 можно считать, что $\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_3$ являются корнями, а $\gamma_2 + \gamma_3$ не является корнем. Тогда

$$\begin{aligned} d\chi_z(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_3}) &= \chi_z([e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}], e_{-\gamma_3}) + \chi_z([e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3}], e_{-\gamma_2}) \\ &\quad + \chi([e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_3}], e_{-\gamma_1}) \\ &= \chi_z(e_{-\gamma_1-\gamma_2}, e_{-\gamma_3}) + \chi_z(e_{-\gamma_1-\gamma_3}, e_{-\gamma_2}) = h_0 + h_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $d\chi_z = 0$ и $\chi_z \in Z_\mu^2(L, L)$.

Так как $\mu = \gamma_0 + \delta_0 \in \Lambda_2(R)$, то $h_{\gamma_0} + h_{\delta_0} \in Z(L)$. Положим $z_1 = h_{\gamma_0} + h_{\delta_0}$. Тогда $Z(L) = \langle z_1, z_2 \rangle_K$ для некоторого $z_2 \in \mathcal{H}$.

Если $\gamma + \delta = \gamma_0 + \delta_0$, то согласно леммам 11 и 1 $\gamma - \gamma_0 = \delta_0 - \delta \in R$. Согласно следствию леммы 2 $h_{\gamma-\gamma_0} = h_\gamma + h_{\gamma_0}$, $h_{\delta_0-\delta} = h_{\delta_0} + h_\delta$. Следовательно, $h_\gamma + h_\delta = h_{\gamma_0} + h_{\delta_0} = z_1$. Так как $C_\mu^1(L, L) = \langle e_{-\gamma}^* \otimes e_\delta \mid \gamma + \delta = \mu \rangle_K$, то для любого $\varphi \in C_\mu^1(L, L)$ и любых γ, δ таких, что $\gamma + \delta = \mu$, $d\varphi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) \in \langle z_1 \rangle_K$. Поэтому $\chi_{z_2} \notin B_\mu^2(L, L)$.

Пусть $\varphi = \sum_{\gamma+\delta=\mu} e_{-\gamma}^* \otimes e_\delta$. Покажем, что $\chi_{z_1} = d\varphi$. Если $-\gamma - \delta + \mu \notin R \cup \{0\}$, то $d\varphi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = 0$. Если $-\gamma - \delta + \mu = 0$, то $d\varphi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = [\varphi(e_{-\gamma}), e_{-\delta}] + [e_{-\gamma}, \varphi(e_{-\delta})] = [e_\delta, e_{-\delta}] + [e_\gamma, e_{-\gamma}] = h_\delta + h_\gamma = z_1 = \chi_{z_1}(e_{-\gamma}, e_{-\delta})$. Пусть $-\gamma - \delta + \mu = \sigma \in R$. Тогда $\mu = \gamma + \delta + \sigma$. Если $\gamma + \delta \in R$, то, используя лемму 12, можем считать, что $\gamma + \sigma \in R, \delta + \sigma \notin R$. Тогда $d\varphi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = \varphi([e_{-\gamma}, e_{-\delta}]) + [\varphi(e_{-\delta}), e_{-\gamma}] = e_\sigma + e_\sigma = 0$. Если $\gamma + \delta \notin R$, то из леммы 12 следует, что $\gamma + \sigma \in R, \delta + \sigma \in R$. Тогда $d\varphi(e_{-\gamma}, e_{-\delta}) = [\varphi(e_{-\gamma}), e_{-\delta}] + [\varphi(e_{-\delta}), e_{-\gamma}] = [e_{\delta+\sigma}, e_{-\delta}] + [e_{\gamma+\sigma}, e_{-\gamma}] = e_\sigma + e_\sigma = 0$. Следовательно, $\chi_{z_1} = d\varphi \in B^2(L, L)$.

Таким образом, $H_\mu^2(L, L) = \langle \chi_{z_2} \rangle_K$ и утверждение (2) доказано.

ЛЕММА 16. Пусть L имеет тип $\overline{A}_3$ или $\overline{D}_l$, $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \gamma_0 + \delta_0$, где $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Если $\psi \in H_\mu^2(L, L)$, то $\widehat{\psi}(h, e_{-\gamma}) = \widehat{\psi}(h, e_{-\gamma_1})$ для любых $h \in \mathcal{H}$, $\gamma, \gamma_1 \in R$ таких, что $-\gamma + \mu \in R, -\gamma_1 + \mu \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-\gamma + \mu = \delta, -\gamma_1 + \mu = \delta_1$. Из леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\gamma}, e_{-\gamma_1}, h) = [\psi(e_{-\gamma}, h), e_{-\gamma_1}] + [\psi(e_{-\gamma_1}, h), e_{-\gamma}] + \psi([e_{-\gamma}, e_{-\gamma_1}], h) \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\gamma}, h)[e_\delta, e_{-\gamma_1}] + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, h)[e_{\delta_1}, e_{-\gamma}] + \psi([e_{-\gamma}, e_{-\gamma_1}], h). \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что $\{\gamma_1, \delta_1\} \neq \{\gamma, \delta\}$. Так как $\mu = \gamma + \delta = \gamma_1 + \delta_1$, то из лемм 11 и 1 следует, что $\gamma + \gamma_1$ не является корнем, а $\delta - \gamma_1 = \delta_1 - \gamma$ является корнем. Тогда $\psi([e_{-\gamma}, e_{-\gamma_1}], h) = 0, [e_\delta, e_{-\gamma_1}] = [e_{\delta_1}, e_{-\gamma}] \neq 0$ и из равенства (6) следует, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma}, h) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, h)$.

Если $\gamma_1 = \delta$, то $\gamma + \gamma_1 = \mu \notin R$ и из равенства (6) следует, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma}, h)h_\delta + \widehat{\psi}(e_{-\delta}, h)h_\gamma = 0$. Так как $h_\gamma \neq 0$ и $h_\delta \neq 0$ (следствие 2 леммы 3), то $\widehat{\psi}(e_{-\gamma}, h) = \widehat{\psi}(e_{-\delta}, h)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть L имеет тип $\overline{D}_l$, $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \gamma_0 + \delta_0$, где $\langle \gamma_0, \delta_0 \rangle = 0$. Тогда

- (1) если $l \equiv 0(2)$, то $H_\mu^2(L, L) = 0$;
- (2) если $l \equiv 1(2)$, то $\dim H_\mu^2(L, L) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in H_\mu^2(L, L)$. Используя лемму 13, можем считать, что $\mu = \alpha_1 + \alpha_l$. Тогда $\alpha_l \pm \alpha_i, \pm \alpha_i - \alpha_l + \mu$ не являются корнями при $i = 3, \dots, l-1$ и

$$0 = d\psi(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}, e_{-\alpha_l}) = \psi([e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}], e_{-\alpha_l}) = \psi(h_i, e_{-\alpha_l}). \quad (7)$$

Пусть $l \equiv 0(2)$. Так как $\pm \alpha_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_l), -\alpha_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_l) + \mu$ не являются корнями, то

$$\begin{aligned} d\psi(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}) \\ = \psi([e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}], e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}) + [\psi(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}), e_{-\alpha_2}]. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_l) = -\mu$, то из леммы 15 следует, что

$$\psi(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}) = N_1 h_2 + N_2 h_c, \quad N_1, N_2 \in K, \quad h_c \in Z(L).$$

Поэтому $[\psi(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}), e_{-\alpha_2}] = 0$ и

$$0 = d\psi(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}) = \psi(h_2, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_l}). \quad (8)$$

Используя лемму 16, из равенств (7) и (8) получаем, что $\psi(h_i, x) = 0$ для любого $i = 2, \dots, l-1$ и любого $x \in L$. Из предложения 1 следует, что $\langle h_{\alpha_2}, \dots, h_{l-1} \rangle = \mathcal{H}$. Таким образом, $\psi(h, x) = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}$, $x \in L$. Теперь утверждение (1) следует из предложения 10.

Пусть $l \equiv 1(2)$. Из леммы 16 и предложения 10 следует, что коцикл ψ может быть не когомологичен нулю, только если существует $h \in \mathcal{H}$ такой, что $\psi(h, x) \neq 0$, и размерность $H_\mu^2(L, L)$ не превосходит числа таких линейно независимых h .

Из равенства (7) и леммы 16 следует, что $\psi(h_i, x) = 0$ для всех $i = 3, \dots, l-1$ и любого $x \in L$. Так как $h_1 + h_l = 0$ в алгебре типа $\overline{D}_l$, то $\psi(x, h_1) = \psi(x, h_l)$ для любого $x \in L$. Остается выяснить, как связаны $\psi(x, h_1)$ и $\psi(x, h_2)$.

Так как $\alpha_2 \pm (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \alpha_2 \pm (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \mu$ не являются корнями, то

$$\begin{aligned} 0 = d\psi(e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) &= \psi(e_{\alpha_2}, [e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}]) \\ &= \psi(e_{\alpha_2}, h_1 + h_2 + h_3) = \psi(e_{\alpha_2}, h_1) + \psi(e_{\alpha_2}, h_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(e_{\alpha_2}, h_1) = \psi(e_{\alpha_2}, h_2)$. Тогда из леммы 16 получаем, что

$$\psi(x, h_1) = \psi(x, h_2)$$

для любого $x \in L$. Таким образом, $\dim H_\mu^2(L, L) \leq 1$.

Чтобы описать когомологии алгебр Ли типа $\overline{D}_l$ при нечетном l и алгебры Ли типа $\overline{A}_3$, нам понадобится следующее описание $\overline{D}_l$ и $\overline{A}_3$.

Можно считать, что $\overline{A}_3 = \overline{D}_3$. Согласно [8] группа автоморфизмов алгебры Ли L типа $\overline{D}_l$ при l нечетном изоморфна группе Шевалле типа C_l . Пусть V – векторное пространство над K размерности $2l$ с симплектической формой $(\cdot, \cdot)$. Группа $G = \text{Aut } L$ является симплектической группой $\text{Sp}(2l)$, ассоциированной с формой $(\cdot, \cdot)$. Выберем симплектический базис $\{e_1, \dots, e_l, e_{-l}, \dots, e_{-1}\}$ в V , состоящий из собственных векторов относительно действия максимального тора группы G . Пусть e_i имеет вес ε_i , e_{-i} имеет вес $(-\varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, l$. Алгебру Ли $\tilde{L}$ типа C_l отождествим с $S^{(2)}V$ (где $S^{(2)}V$ – нулевая компонента гамильтоновой алгебры Ли $H(V)$ в разделенных степенях относительно стандартной градуировки, см. [13]). Факторалгебра внешней алгебры $\wedge^2 V$ по идеалу $I = \langle e_1 e_{-1} + \dots + e_l e_{-l} \rangle$ является идеалом в $\tilde{L}/I$, изоморфным алгебре Ли L (это верно только при нечетном l).

ТЕОРЕМА 1. Пусть L имеет тип $\overline{D}_l$, $l > 3$ нечетное. Тогда $\dim H^2(L, L) = 2l$ и с точностью до морфизма Фробениуса $H^2(L, L)$ как модуль над $\text{Sp}(2l) = \text{Aut } G$ изоморфен V , где V – стандартный модуль над $\text{Sp}(2l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов §3 следует, что $H_0^2(L, L) = 0$. Из предположений 7–9 и леммы 13 получаем, что $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\pm(\alpha_1 - \alpha_l), \pm(\alpha_1 + \alpha_l), \pm(\alpha_1 + \alpha_l + 2\alpha_2), \dots, \pm(\alpha_1 + \alpha_l + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{l-1})\}$. Из предложения 12 тогда следует, что $\dim H^2(L, L) \leq 2l$.

Построим гомоморфизм модуля V в модуль $H^2(L, L)$.

Определим $\Phi_0: V \rightarrow C^2(L, L)$. Пусть $\{w_1 w_2, v\} = (w_1, v)w_2 + (w_2, v)w_1$, $\{v_1 v_2, v_3 v_4\} = (v_1, v_3)v_2 v_4 + (v_1, v_4)v_2 v_3 + (v_2, v_3)v_1 v_4 + (v_2, v_4)v_1 v_3$ – скобки Пуассона в гамильтоновой алгебре $H(V)$. Для любого $v \in V$ положим $\Phi_0(v) = \psi$, где

$$\psi(w_1 w_2, w_3 w_4) = \{w_1 w_2, v\}\{w_3 w_4, v\} + v\{v, (w_3, w_4)w_1 w_2 + (w_1, w_2)w_3 w_4\}.$$

Отметим, что ψ корректно определено на элементах $\wedge^2 V/I \cong L$, также ψ линейно и кососимметрично, а следовательно, является элементом $C^2(L, L)$.

Вычисление $d\psi$ на произвольных элементах $w_1 w_2, w_3 w_4, w_5 w_6$ показывает, что $\psi \in Z^2(L, L)$. Рассмотрим, например, слагаемое

$$\{\psi(w_1 w_2, w_3 w_4), w_5 w_6\} = \{(v, w_1)(v, w_3)w_2 w_4 + \dots, w_5 w_6\}$$

в $d\psi(w_1 w_2, w_3 w_4, w_5 w_6)$. Здесь есть член $(v, w_1)(v, w_3)(w_2, w_5)w_4 w_6$. Но точно такой же член возникнет в слагаемом

$$\begin{aligned} \psi(\{w_1 w_2, w_5 w_6\}, w_3 w_4) &= \psi((w_2, w_5)w_1 w_6 + \dots, w_3 w_4) \\ &= (w_2, w_5)(v, w_1)(v, w_3)w_6 w_4 + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, в $d\psi$ эти члены взаимно уничтожаются. Аналогично сокращаются остальные слагаемые в $d\psi$.

Пусть $\{e_1, \dots, e_l, e_{-l}, \dots, e_{-1}\}$ – симплектический базис в V . Рассмотрим цикл $\Phi_0(e_i)$.

Пусть $j \neq \pm i, k \neq \pm i$. Тогда $\Phi_0(e_i)(e_k e_{-k}, e_{-i} e_j) = (e_k, e_{-k})(e_i, e_{-i})e_i e_j = e_i e_j \neq 0$. Поэтому $\Phi_0(e_i)(h, x) \neq 0$ для некоторых $h \in \mathcal{H}, x \in L$.

Для $\varphi \in C_\mu^1(L, L)$, $h \in \mathcal{H}$, $e_\gamma \in L$ выполняется $d\varphi(h, e_\gamma) = [e_\gamma, \varphi(h)]$. Поэтому $d\varphi(h, e_\gamma) \neq 0$ только при условии $\varphi(h) \neq 0$, а следовательно, при условии $\mu \in R \cup \{0\}$. Так как коцикл $\Phi_0(e_i)$ имеет вес $2\varepsilon_i$ и $2\varepsilon_i \notin R \cup \{0\}$, то $\Phi_0(e_i)$ не является кограницей. Таким образом, $\Phi_0(e_{\pm 1}), \dots, \Phi_0(e_{\pm l})$ определяют $2l$ нетривиальных коциклов различных весов.

Поскольку $\Phi_0(v) \in Z^2(L, L)$ для любого $v \in V$, то $\Phi_0(e_i + e_j) - \Phi_0(e_i) - \Phi_0(e_j) \in Z_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^2(L, L) = B_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}^2(L, L)$ ($H^2(L, L) = \bigoplus_{k=-l}^l H_{2\varepsilon_k}^2(L, L)$). Следовательно, Φ_0 индуцирует аддитивное отображение $\Phi: V \rightarrow H^2(L, L)$. Так как $\dim H^2(L, L) \leq 2l$, то Φ является биекцией.

Легко проверить, что

$$\Phi(gv)(w_1 w_2, w_3 w_4) = g(\Phi(v)(g^{-1} w_1 g^{-1} w_2, g^{-1} w_3 g^{-1} w_4))$$

для любого $g \in \text{Sp}(2l)$ (так как ψ линейно). Из определений действия $\text{Aut } L = \text{Sp}(2l)$ на V и на $C^2(L, L)$ сразу следует, что Φ перестановочно с действием $\text{Aut } L$. Так как для любого $k \in K$ $\Phi(kv) = k^2 \Phi(v)$, то действие $\text{Sp}(2l)$ на $H^2(L, L)$ отличается от действия на V морфизмом Фробениуса.

В алгебре Ли типа $\bar{A}_3$ ситуация аналогична.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – алгебра Ли типа $\bar{A}_3$, V – стандартный шестимерный модуль над $\text{Sp}(6) \cong \text{Aut } L$. Тогда $\dim H^2(L, L) = 20$ и представление $\text{Sp}(6)$ на $H^2(L, L)$ эквивалентно композиции морфизма Фробениуса и естественного представления на $\wedge^3 V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – базис системы корней типа A_3 .

В §3 доказано, что $H_0^2(L, L) = 0$. Из предложений 7, 8 следует, что

$$H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_2(R) \cap (M_2 \cup M_3)} H_\mu^2(L, L),$$

где $M_2 = \{\mu = \alpha + \beta + \gamma \mid \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}$, $M_3 = \{\mu = \gamma + \delta \mid \langle \gamma, \delta \rangle = 0\}$. Согласно утверждению (2) предложения 9 $\dim H_\mu^2(L, L) = 1$, если $\mu \in M_2 \cap \Lambda_2(R)$. Также из доказательства предложения 9 получаем, что $M_2 \cap \Lambda_2(R) = \{\pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3), \pm(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)\}$. Все элементы этого множества сопряжены относительно $W(R)$. Если $\mu \in M_3 \cap \Lambda_2(R)$, то из леммы 16 и предложения 10 следует, что $\dim H_\mu^2(L, L) \leq \dim \mathcal{H} = 2$. Из доказательства предложения 10 получаем, что $M_3 \cap \Lambda_2(R) = \{\pm(\alpha_1 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 - \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)\}$ и все элементы M_3 сопряжены относительно $W(R)$. Таким образом, $\dim H^2(L, L) \leq 8 + 2 \cdot 6 = 20$.

Построим гомоморфизм модуля $\wedge^3 V$ в модуль $H^2(L, L)$.

Пусть $\{v_1 v_2, v\} = (v_1, v)v_2 + (v_2, v)v_1$, $\{v_1 v_2 v_3, v\} = (v_1, v)v_2 v_3 + (v_2, v)v_1 v_3 + (v_3, v)v_1 v_2$ – скобки Пуассона.

Для $w_1 w_2, w_3 w_4 \in \wedge^2 V$ положим

$$\Delta(w_1 w_2, w_3 w_4) = (w_3, w_4)w_1 w_2 + (w_1, w_2)w_3 w_4,$$

$$v \circ w_1 w_2 = (v, w_1)w_2 + (v, w_2)w_1,$$

$$\Gamma_{v_1 v_2 v_3}^{w_1 w_2 w_3} = \begin{vmatrix} (v_1, w_1) & (v_2, w_1) & (v_3, w_1) \\ (v_1, w_2) & (v_2, w_2) & (v_3, w_2) \\ (v_1, w_3) & (v_2, w_3) & (v_3, w_3) \end{vmatrix}.$$

Определим $\Phi_0: \wedge^3 V \rightarrow C^2(L, L)$, $\Phi_0(v_1 v_2 v_3) = \psi$, где

$$\begin{aligned} \psi(w_1 w_2, w_3 w_4) = & \{ \{v_1 v_2 v_3, w_1\}, w_2 \} \{ \{v_1 v_2 v_3, w_3\}, w_4 \} \\ & + (v_2, v_3)^2 v_1 \circ \Delta(w_1 w_2, w_3 w_4) + (v_1, v_3)^2 v_2 \circ \Delta(w_1 w_2, w_3 w_4) \\ & + (v_1, v_2)^2 v_3 \circ \Delta(w_1 w_2, w_3 w_4) \\ & + \left(\sum_{i=1}^4 \Gamma_{v_1 v_2 v_3}^{w_1 \cdots \widehat{w_i} \cdots w_4} w_i \right) ((v_2, v_3)v_1 + (v_1, v_3)v_2 + (v_1, v_2)v_3). \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что ψ корректно определено на $\wedge^2 V / I \cong L$ и $\psi \in Z^2(L, L)$.

Так как $B_{2\varepsilon_i + 2\varepsilon_j + 2\varepsilon_k}^2(L, L) = 0$ при $i \neq \pm j$, $k \neq \pm j$, $i \neq \pm k$, то $\Phi_0(e_i e_j e_k)$ определяют 8 нетривиальных коциклов различных весов.

Такое же рассуждение, как в доказательстве теоремы 1, показывает, что любой коцикл, удовлетворяющий условию $\psi(h, x) \neq 0$ для некоторых $x \in L$, $h \in \mathcal{H}$, не когомологичен нулю. Так как $\Phi_0(e_i e_j e_{-j})(e_k e_{-k}, e_{-i} e_s) = e_i e_s \neq 0$ при $k \neq \pm i$, $k \neq \pm j$, то $\Phi_0(e_i e_j e_{-j})$ нетривиальны. Коциклы $\Phi_0(e_i e_j e_{-j})$ и $\Phi_0(e_i e_k e_{-k})$ при $k \neq \pm j$ не когомологичны. Например, $\Phi_0(e_1 e_2 e_{-2})(e_3 e_{-3}, e_{-1} e_3) = e_1 e_3$, а $\Phi_0(e_1 e_3 e_{-3})(e_3 e_{-3}, e_{-1} e_3) = 0$. Следовательно, $\Phi_0(e_i e_j e_{-j})$ определяют 12 нетривиальных не когомологичных коциклов.

Таким образом, Φ_0 определяет не меньше 20 нетривиальных не когомологичных коциклов.

Так же как в доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что отображение Φ_0 индуцирует аддитивное отображение Φ пространства $\wedge^3 V$ на $H^2(L, L)$. Так как $\dim H^2(L, L) \leq 20$, то Φ является биекцией. Отображение Φ перестановочно с естественным действием $\text{Sp}(6)$ на $\wedge^3 V$ и $H^2(L, L)$. Для любого $k \in K$ $\Phi(kv_1 v_2 v_3) = k^2 \Phi(v_1 v_2 v_3)$. Следовательно, Φ с точностью до морфизма Фробениуса является изоморфизмом $\text{Sp}(6)$ -модулей.

Осталось исследовать когомологии весов вида $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, где $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Из предложения 7 следует, что такие веса могут возникать только у алгебры Ли одного из типов $A_5, D_6, E_7, \overline{A}_5, \overline{D}_6, \overline{E}_7$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, где $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Тогда

- (1) если L имеет тип A_5, D_6 или E_7 , то $H_\mu^2(L, L) = 0$;
- (2) если L имеет тип $\overline{A}_5, \overline{D}_6$ или $\overline{E}_7$, то $\dim H_\mu^2(L, L) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in H_\mu^2(L, L)$. Из утверждения (6) предложения 7 следует, что $B_\mu^2(L, L) = 0$ и $\psi(h, x) = 0$ для любых $h \in \mathcal{H}$, $x \in L$.

Предположим, что $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$. Согласно утверждению (6) предложения 7 μ нельзя представить в виде суммы двух корней. Поэтому из утверждений (3), (4) предложения 7 следует, что $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 0, 1$. В случае $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 1$ из утверждения (5) предложения 7 получаем противоречие условию $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 0$.

Поэтому $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma_2, \gamma_3 \rangle = 0$ для любых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ таких, что $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Тогда для любого $\psi \in C_\mu^2(L, L)$

$$\begin{aligned} d\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma_3}) &= [\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}), e_{-\gamma_3}] + [\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3}), e_{-\gamma_2}] + [\psi(e_{-\gamma_3}, e_{-\gamma_2}), e_{-\gamma_1}] \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2})[e_{\gamma_3}, e_{-\gamma_3}] + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3})[e_{\gamma_2}, e_{-\gamma_2}] \\ &\quad + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_3}, e_{-\gamma_2})[e_{\gamma_1}, e_{-\gamma_1}] \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2})h_{\gamma_3} + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3})h_{\gamma_2} + \widehat{\psi}(e_{-\gamma_3}, e_{-\gamma_2})h_{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если L имеет тип A_5 , D_l или E_7 , то $h_{\gamma_3}, h_{\gamma_2}, h_{\gamma_1}$ линейно независимы (следствие 2 леммы 3, лемма 4) и из равенства (9) следует, что

$$\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_3}, e_{-\gamma_2}) = 0$$

для любых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$ таких, что $\mu = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Следовательно, $\psi = 0$ и утверждение (1) доказано.

Так как в алгебрах типа $\overline{A}_5, \overline{D}_6, \overline{E}_7$ выполняется $h_{\gamma_1} + h_{\gamma_2} + h_{\gamma_3} = 0$, то из следствия 2 леммы 3 и равенства (9) получаем, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_3}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_3}, e_{-\gamma_2})$.

Покажем, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})$. Сначала рассмотрим случай, когда $A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \neq \emptyset$. Можем считать, что $\gamma_1 = \alpha$.

Рассмотрим $d\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma})$. Так как $\alpha = \gamma_1$ и $\langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = 0$, то $\psi([e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}], e_{-\gamma}) = 0$ и $\psi([e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma}], e_{-\gamma_2}) = 0$. Из равенств $\langle \mu, \gamma \rangle = \langle \alpha + \beta + \gamma, \gamma \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = 2$ и $\langle \mu, \gamma \rangle = \langle \alpha + \gamma_2 + \gamma_3, \gamma \rangle = \langle \gamma_2 + \gamma_3, \gamma \rangle$ следует, что $\langle \gamma_2, \gamma \rangle + \langle \gamma_3, \gamma \rangle = 2$. Если $\gamma_2 = \gamma$ или $\gamma_3 = \gamma$, то $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ и $\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})$. Если $\gamma_2 \neq \gamma, \gamma_3 \neq \gamma$, то $\langle \gamma_2, \gamma \rangle \neq 2$ и $\langle \gamma_3, \gamma \rangle \neq 2$. Поэтому из равенства $\langle \gamma_2, \gamma \rangle + \langle \gamma_3, \gamma \rangle = 2$ следует, что $\langle \gamma_2, \gamma \rangle = \langle \gamma_3, \gamma \rangle = 1$. Тогда согласно лемме 1 $-\gamma_2 - \gamma \notin R, \gamma_3 - \gamma \in R$. Поэтому $\psi([e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma}], e_{-\gamma_1}) = 0$. Из условий $\langle \gamma_1, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = 0, \langle \gamma_1, \gamma_3 \rangle = 0$ следует, что $\langle \gamma_1, \gamma_3 - \gamma \rangle = 0$. Поэтому так как $\gamma_3 - \gamma \in R$, то $-\gamma_2 - \gamma + \mu = \gamma_1 + \gamma_3 - \gamma \notin R$ и $\psi(e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma}) = 0$.

Таким образом,

$$0 = d\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}, e_{-\gamma}) = [\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}), e_{-\gamma}] + [\psi(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma}), e_{-\gamma_2}].$$

Так как $\langle \gamma_2, \gamma_3 - \gamma \rangle = -\langle \gamma_2, \gamma \rangle = -1$ и $\gamma_3 - \gamma \in R$, то по лемме 1 $-\gamma_1 - \gamma + \mu = \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma \in R$. Поэтому из последнего равенства следует, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma})$. С учетом $\alpha = \gamma_1$ получаем, что $\widehat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma}) = \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})$.

Пусть $A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = \emptyset$. Тогда по лемме 1 $\langle \alpha, \gamma_3 \rangle \neq 2, \langle \beta, \gamma_3 \rangle \neq 2, \langle \gamma, \gamma_3 \rangle \neq 2$. Поэтому из равенства $2 = \langle \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \gamma_3 \rangle = \langle \alpha + \beta + \gamma, \gamma_3 \rangle = \langle \alpha, \gamma_3 \rangle + \langle \beta, \gamma_3 \rangle + \langle \gamma, \gamma_3 \rangle$ следует, что два из чисел Картана $\langle \alpha, \gamma_3 \rangle, \langle \beta, \gamma_3 \rangle, \langle \gamma, \gamma_3 \rangle$ равны 1. Можно считать, что $\langle \beta, \gamma_3 \rangle = \langle \gamma, \gamma_3 \rangle = 1$, а $\langle \alpha, \gamma_3 \rangle = 0$. При этих условиях $[e_\gamma, e_{-\gamma_3}] \neq 0$ (лемма 1) и

$$\begin{aligned} 0 = d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\gamma_3}) &= [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}), e_{-\gamma_3}] + [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\gamma_3}), e_{-\beta}] \\ &= \widehat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})[e_{-\gamma}, e_{-\gamma_3}] + [\psi(e_{-\alpha}, e_{-\gamma_3}), e_{-\beta}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Поясним равенство (10). Так как $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, $\langle \alpha, \gamma_3 \rangle = 0$, $\langle \beta, \gamma_3 \rangle = 1$, то $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma_3$, $\beta + \gamma_3$ не являются корнями и $[e_{-\alpha}, e_{-\beta}] = 0$, $[e_{-\alpha}, e_{-\gamma_3}] = 0$, $[e_{-\beta}, e_{-\gamma_3}] = 0$. Далее, $\psi(e_{-\beta}, e_{-\gamma_3})$ отлично от нуля, только если $\lambda = -\beta - \gamma_3 + \mu$ является корнем. Но $\lambda = -\beta - \gamma_3 + \alpha + \beta + \gamma = -\gamma_3 + \alpha + \gamma = (\gamma - \gamma_3) + \alpha$. Так как $\langle \gamma, \gamma_3 \rangle = 1$, то $\gamma - \gamma_3 \in R$ и $\langle \gamma - \gamma_3, \alpha \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle - \langle \gamma_3, \alpha \rangle = 0$. Следовательно, $(\gamma - \gamma_3) + \alpha = \lambda$ не является корнем и $\psi(e_{-\beta}, e_{-\gamma_3}) = 0$.

Так как $[e_{\gamma}, e_{-\gamma_3}] \neq 0$ и $\sigma = -\alpha - \gamma_3 + \mu \in R$ ($\sigma = -\alpha - \gamma_3 + \alpha + \beta + \gamma = (\gamma - \gamma_3) + \beta$ и $\langle \gamma - \gamma_3, \beta \rangle = \langle \gamma, \beta \rangle - \langle \gamma_3, \beta \rangle = 0 - 1 = -1$), то из равенства (10) получаем, что $\hat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta}) = \hat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma_3})$. Так как $\mu = \alpha + \gamma_3 + \sigma$ и $\{\alpha, \sigma, \gamma_3\} \cap \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \neq \emptyset$, то $\hat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\gamma_3}) = \hat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2})$.

Таким образом, $\hat{\psi}(e_{-\gamma_1}, e_{-\gamma_2}) = \hat{\psi}(e_{-\alpha}, e_{-\beta})$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ таких, что $-\gamma_1 - \gamma_2 + \mu \in R$. Следовательно, $\dim Z_{\mu}^2(L, L) \leq 1$.

Покажем, что $\psi_0 = \sum_{-\gamma_1 - \gamma_2 + \mu \in R} e_{-\gamma_1}^* \wedge e_{-\gamma_2}^* \otimes e_{-\gamma_1 - \gamma_2 + \mu}$ является коциклом.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R$. Если $-\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \mu \notin R \cup \{0\}$, то $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$.

Если $-\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \mu = 0$, то из (9) следует, что $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = h_{\delta_3} + h_{\delta_2} + h_{\delta_1} = 0$ (так как $\mu \in \Lambda_2(R)$ и, следовательно, $h_{\delta_3} + h_{\delta_2} + h_{\delta_1}$ в алгебрах Ли A_5, D_6, E_7 принадлежит центру).

Пусть $\delta = -\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \mu \in R$. Предположения $\delta_1 = -\delta_2$ или $\delta_1 = -\delta$ приводят к представлению μ в виде суммы двух корней, что противоречит утверждению (6) предложения 7. Если $\delta_1 = \delta_2$, то $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$. Следовательно, можем предполагать, что $\delta_1 \neq \pm\delta_2$, $\delta \neq -\delta_1$. Аналогично, $\delta_1 \neq \pm\delta_3$, $\delta_2 \neq \pm\delta_3$, $\delta \neq -\delta_2$, $\delta \neq -\delta_3$.

Поскольку $-\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \mu \in R$, то слагаемые

$$\psi_0([e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}], e_{-\delta_3}) \quad \text{и} \quad [\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}), e_{-\delta_3}]$$

отличны от нуля тогда и только тогда, когда $\delta_1 + \delta_2 \in R$, $-\delta_1 - \delta_2 + \mu = \delta_3 + \delta \in R$ соответственно. Аналогично, равенство нулю остальных слагаемых в $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3})$ зависит от того, являются $\delta_2 + \delta_3$, $\delta_1 + \delta_3$, $\delta_1 + \delta$, $\delta_2 + \delta$ корнями или нет. Поэтому рассмотрим множество $Q = \{\delta_1 + \delta_2, \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_3, \delta_1 + \delta, \delta_2 + \delta, \delta_3 + \delta\}$. Так как по определению ψ_0 любое слагаемое в $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3})$ либо равно нулю, либо равно e_{δ} , то $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$ в том и только том случае, когда $R \cap Q$ содержит четное количество элементов.

Если $Q \cap R = \emptyset$, то $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$. Предположим, что $Q \cap R \neq \emptyset$ и, например, $\delta_1 + \delta_2 \in R$ ($\langle \delta_1, \delta_2 \rangle = -1$). Так как $\mu = (\delta_1 + \delta_2) + \delta_3 + \delta$, то $\langle \delta, \delta_1 + \delta_2 \rangle = \langle \delta, \delta_3 \rangle = \langle \delta_1 + \delta_2, \delta_3 \rangle = 0$ (в начале доказательства показано, что для любого представления μ в виде суммы трех корней числа Картана этих корней равны 0). Из условий $\delta \neq -\delta_1$, $\delta \neq -\delta_2$, $\langle \delta, \delta_1 + \delta_2 \rangle = 0$ и леммы 1 следует, что $\delta \neq \pm\delta_1$, $\delta \neq \pm\delta_2$.

Поскольку $\mu \in \Lambda_2(R)$, то $\langle \mu, \delta_1 \rangle = \langle \delta_1 + \delta_2, \delta_1 \rangle + \langle \delta_3, \delta_1 \rangle + \langle \delta, \delta_1 \rangle = 1 + \langle \delta_3, \delta_1 \rangle + \langle \delta, \delta_1 \rangle \equiv 0(2)$ и $\langle \mu, \delta_2 \rangle = \langle \delta_1 + \delta_2, \delta_2 \rangle + \langle \delta_3, \delta_2 \rangle + \langle \delta, \delta_2 \rangle = 1 + \langle \delta_3, \delta_2 \rangle + \langle \delta, \delta_2 \rangle \equiv 0(2)$. Отсюда следует, что $\langle \delta_3, \delta_1 \rangle + \langle \delta, \delta_1 \rangle = \pm 1$ и $\langle \delta_3, \delta_2 \rangle + \langle \delta, \delta_2 \rangle = \pm 1$ (так как $\delta_3 \neq \pm\delta_1$, $\delta_3 \neq \pm\delta_2$, $\delta \neq \pm\delta_1$, $\delta \neq \pm\delta_2$). Так как $\langle \delta, \delta_1 + \delta_2 \rangle = \langle \delta_1 + \delta_2, \delta_3 \rangle = 0$, то, не ограничивая общности, можем считать, что $\langle \delta_3, \delta_1 \rangle + \langle \delta, \delta_1 \rangle = 1$ и $\langle \delta_3, \delta_2 \rangle + \langle \delta, \delta_2 \rangle = -1$. Из этих равенств при условиях $\delta_3 \neq \pm\delta_1$, $\delta_3 \neq \pm\delta_2$, $\delta \neq \pm\delta_1$, $\delta \neq \pm\delta_2$ получаем, что только одно из чисел $\langle \delta_3, \delta_1 \rangle$, $\langle \delta, \delta_1 \rangle$, $\langle \delta_3, \delta_2 \rangle$, $\langle \delta, \delta_2 \rangle$

равно -1 . Тогда из леммы 1 следует, что корнем является единственный элемент из множества $\{\delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_3, \delta_1 + \delta, \delta_2 + \delta\}$.

Если предположить, что $\delta_3 + \delta \in R$, то получим представление $\mu = (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_3 + \delta)$, что противоречит утверждению (6) предложения 7. Следовательно, $\delta_3 + \delta \notin R$.

Таким образом, из предположения $\delta_1 + \delta_2 \in R$ следует, что ровно два элемента из множества Q являются корнями, а следовательно, ровно два слагаемых в $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3})$ отличны от нуля и $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$. Аналогично, $d\psi_0(e_{-\delta_1}, e_{-\delta_2}, e_{-\delta_3}) = 0$, если корнем является любой другой элемент из Q .

Поэтому ψ_0 является коциклом и, следовательно, $\dim Z_\mu^2(L, L) = 1$. Так как $\dim B_\mu^2(L, L) = 0$, то $\dim H_\mu^2(L, L) = 1$ и утверждение (2) доказано.

Теперь мы можем привести доказательство основной теоремы, сформулированной во введении.

Если L имеет тип A_2 , то $H^2(L, L) = 0$ согласно предложению 2. Если L имеет тип A_l , $l \neq 2, 3, 5$, $\overline{A}_l$, $l \neq 3, 5$, $l \equiv 1(2)$, E_6 , E_8 , то из результатов §3 и предложений 7, 8 следует, что $H^2(L, L) = 0$. Если L имеет тип A_3 или D_l , $l \equiv 1(2)$, то $H^2(L, L) = 0$ согласно результатам §3 и предложениям 7–9, 11. Если L имеет тип A_5 или E_7 , то $H^2(L, L) = 0$ согласно результатам §3 и предложениям 7, 8, 13. Если L имеет тип $\overline{D}_l$, $l \equiv 0(2)$, $l \neq 6$, то $H^2(L, L) = 0$ согласно результатам §3 и предложениям 7–9, 12.

Таким образом, утверждение (1) основной теоремы доказано.

Если L имеет тип $\overline{A}_3$, то $\dim H_2(L, L) = 20$ согласно теореме 2. Если L имеет тип $\overline{A}_5$, то из результатов §3 и предложений 7, 8, 13 следует, что $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\alpha + \beta + \gamma \mid \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}$. Согласно лемме 14 $|M| = 20$. Тем самым, утверждение (2) основной теоремы доказано.

Если L имеет тип D_4 , то из результатов §3 и предложений 7–9, 11 следует, что $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\gamma + \delta \mid \langle \gamma, \delta \rangle = 0\}$. Согласно лемме 13 $|M| = 64$, поэтому выполняется утверждение (3) основной теоремы.

Если L имеет тип $\overline{D}_l$, $l \equiv 1(2)$, то $\dim H^2(L, L) = 2l$ согласно теореме 1. Если L имеет тип D_l , $l \equiv 0(2)$, $l > 6$, то из результатов §3 и предложений 7–9, 11 следует, что $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\gamma + \delta \mid \langle \gamma, \delta \rangle = 0\}$. Согласно лемме 13 $|M| = 2l$, поэтому $\dim H_2(L, L) = 2l$. Если L имеет тип D_6 , то $\dim H^2(L, L) = 12$ согласно §3 и предложениям 7–9, 11, 13. Тем самым, утверждение (4) основной теоремы доказано.

Если L имеет тип $\overline{D}_6$, то согласно §3 и предложениям 7–9, 12, 13 $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\alpha + \beta + \gamma \mid \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}$. Согласно лемме 14 $|M| = 64$. Если L имеет тип $\overline{E}_7$, то из результатов §3 и предложений 7, 8, 13 следует, что $H^2(L, L) = \bigoplus_{\mu \in M} H_\mu^2(L, L)$, где $M = \{\alpha + \beta + \gamma \mid \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle = 1\}$. Согласно лемме 14 $|M| = 56$. Следовательно, выполняются утверждения (5) и (6) основной теоремы.

Список литературы

1. Кострикин А. И. Параметрическое семейство простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 744–756.
2. Джумадильдаев А. С. К деформациям классических простых алгебр Ли // УМН. 1976. Т. 31. №3 (189). С. 211–212.

3. Кострикин А. И., Кузнецов М. И. О деформациях классических алгебр Ли характеристики три // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 3. С. 299–301.
4. Рудаков А. Н. Деформации простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 1113–1119.
5. Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г. Деформации классических алгебр Ли // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 8. С. 69–88.
6. Кириллов С. А., Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г. О деформациях алгебры Ли типа G_2 характеристики три // Изв. вузов. Сер. матем. 2000. № 3(454). С. 33–38.
7. Shen Guangyu Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics // Nova J. Alg. Geom. 1993. V. 2. № 3. P. 217–243.
8. Frohardt D. E., Griess R. L., Jr. Automorphisms of modular Lie algebras // Nova J. Alg. Geom. 1992. V. 1. № 4. P. 339–345.
9. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
10. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
11. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.: Мир, 1984.
12. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978.
13. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 251–322.

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kuznets@unn.ac.ru

Поступила в редакцию
29.11.2004