Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, О структуре группы, квазисимметрически сопряженной группе аффинных преобразований прямой, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 10, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:12:11

УДК 512.54

Л. А. Бекларян

О структуре группы, квазисимметрически сопряженной группе аффинных преобразований прямой

Работа посвящена обоснованию критерия квазисимметрической сопряженности произвольной группы гомеоморфизмов прямой некоторой группе аффинных преобразований (задача Альфорса). В критерии, предложенном А. Хинкканеном, константы, входящие в определение квазисимметрического гомеоморфизма, предполагались равномерно ограниченными для всех элементов группы. Позднее для групп, сохраняющих ориентацию, автором был получен более ослабленный критерий, в котором требуется равномерная ограниченность констант только лишь для каждой циклической подгруппы. В настоящей работе доказывается справедливость ослабленного критерия для произвольной группы гомеоморфизмов прямой, а не только сохраняющих ориентацию.

Библиография: 4 названия.

Введение

Гомеоморфизм $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *квазисимметрическим* [1], если он удовлетворяет условию

$$M_g^{-1} \leq \frac{g(x+t) - g(x)}{g(x) - g(x-t)} \leq M_g. \quad (1)$$

Если g – квазисимметрический гомеоморфизм, то гомеоморфизм g^{-1} также является квазисимметрическим. Для любых квазисимметрических гомеоморфизмов g_1, g_2 их суперпозиция также является квазисимметрическим гомеоморфизмом и справедлива оценка $M_{g_1 g_2} \leq M_{g_1} M_{g_2}$ [1]. Так как для гомеоморфизма g константа M_g из условия (1) не единственная, то последнее неравенство означает, что для гомеоморфизма $g_1 g_2$ такая константа $M_{g_1 g_2}$ найдется. Группу G , элементы которой суть квазисимметрические гомеоморфизмы, будем называть *квазисимметрической*.

В [2] для квазисимметрической группы гомеоморфизмов прямой получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – группа гомеоморфизмов прямой. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ G \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа G была квазисимметрической и для любого $g \in G$ выполнялось равенство $M_g = M$, где M – некоторая фиксированная константа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 53-01-00174) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ.457.2003.1).

Так как для гомеоморфизма g константа M_g из условия (1) не единственная, то условие $M_g = M$ из теоремы 1 означает, что для гомеоморфизма g такая константа M_g найдется.

В [3] на основе изучения топологических характеристик (минимальных множеств) и метрических инвариантов (проективно-инвариантной меры) получен новый, более ослабленный критерий квазисимметрической сопряженности произвольной группы гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, некоторой группе аффинных преобразований.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ G \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа G была квазисимметрической и для любых $g \in G$, $n \in \mathbb{Q}$ выполнялось равенство $M_{g^n} = M_g$.

В представленной работе критерий из [3] распространяется на случай произвольной группы гомеоморфизмов прямой. Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть G – группа гомеоморфизмов прямой. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ G \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа G была квазисимметрической и для любых $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнялось равенство $M_{g^n} = M_g$.

В дальнейшем наряду с группой G гомеоморфизмов прямой будем рассматривать ее нормальную подгруппу G_+ , образованную сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами. Заметим, что G_+ – нормальная подгруппа индекса не более двух, так как в случае $G \setminus G_+ \neq \emptyset$ имеет место разложение $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$.

Выделяются два случая относительно нормальной подгруппы G_+ : G_+ – циклическая подгруппа; G_+ – нециклическая подгруппа. В случае цикличности подгруппы G_+ доказательство основано на описании исходной группы G в терминах соотношений, что позволяет непосредственно конструировать гомеоморфизм η . В случае нецикличности подгруппы G_+ доказательство основано на наличии строго эргодичной проективно-инвариантной меры для подгруппы G_+ , а следовательно, и всей группы G [4], с помощью которой и конструируется гомеоморфизм η .

§ 1. Некоторые предварительные результаты

При доказательстве основного результата нам понадобится задание исходной группы G с помощью соотношений в случае, когда нормальная подгруппа G_+ является циклической.

ЛЕММА 1. Подгруппа G_+ нетривиальной группы G гомеоморфизмов прямой является циклической тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из пяти групп, описанных в терминах соотношений

$$Q = \langle q \rangle, \quad (2)$$

$$Q = \langle p \mid p^2 = e \rangle, \quad (3)$$

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = e, qp = pq \rangle, \quad (4)$$

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = q \rangle, \quad (5)$$

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = e, qp = pq^{-1} \rangle. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть G – нетривиальная группа гомеоморфизмов прямой, для которой подгруппа G_+ циклическая.

I) Предположим, что $G = G_+$. Тогда из нетривиальности группы G и циклическости G_+ следует, что $G = \langle g \rangle$, где g – нетривиальный гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, т.е. G – свободная абелева группа с одной образующей. Следовательно, такая группа имеет описание (2).

II) Предположим, что $G \setminus G_+ \neq e$. Тогда существует элемент $f \in G \setminus G_+$ и справедливо разложение $G = G_+ \cup fG_+$.

1) Если подгруппа G_+ тривиальная, то очевидно описание $G = \langle f \mid f^2 = e \rangle$, где f – гомеоморфизм прямой, меняющий ориентацию. Следовательно, такая группа имеет описание (3).

2) Пусть G_+ – нетривиальная циклическая подгруппа с образующей g . Тогда найдутся целые числа m и k такие, что в группе G справедливы соотношения $f^2 = g^m$, $gf = fg^k$. Рассмотрим группу Q с двумя образующими и заданным набором соотношений вида

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = q^m, qp = pq^k \rangle. \quad (7)$$

Очевидно, что существует естественный эпиморфизм $\pi: Q \rightarrow G$, при котором $\pi(p) = f$, $\pi(q) = g$. Изучим группу Q . Из второго соотношения в (7) следует, что $qp^2 = pq^k p$. В полученном соотношении левую часть преобразуем, используя первое соотношение в (7), а правую часть преобразуем, используя второе соотношение в (7). Окончательно получаем $qq^m = p^2 q^{k^2}$. Используя еще раз первое соотношение в (7), получаем $q = q^{k^2}$. Так как $q \neq e$, то $k = \pm 1$.

а) Пусть $k = 1$, т.е.

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = q^n, qp = pq \rangle. \quad (8)$$

Предположим, что $n = 2r$. Тогда из первого и второго соотношений в (8) следует, что $(pq^{-r})(pq^{-r}) = e$ и $q(pq^{-r}) = (pq^{-r})q$. После переобозначений $\bar{p} = pq^{-r}$ получаем новое описание группы Q вида

$$Q = \langle \bar{p}, q \mid \bar{p}^2 = e, q\bar{p} = \bar{p}q \rangle.$$

Из полученного описания группы Q и эпиморфизма π следует, что для группы G также справедливы соотношения $\bar{f}^2 = e$, $g\bar{f} = \bar{f}g$, где $\bar{f} = \pi(\bar{p})$.

Покажем, что в группе G других соотношений нет, т.е. эпиморфизм π является изоморфизмом. Действительно, любое соотношение в группе G либо является следствием соотношений $\bar{f}^2 = e$, $g\bar{f} = \bar{f}g$, либо приводится к одному из двух видов: $\bar{f} = g^l$, $l \in \mathbb{Z}$; $g^l = e$, $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Первое невозможно, так как f и g разной ориентации, а второе невозможно, так как $g \neq e$. Следовательно, в группе G соотношения $\bar{f}^2 = e$, $g\bar{f} = \bar{f}g$ являются определяющими, эпиморфизм π является изоморфизмом и соответственно $G = \langle \bar{f}, g \mid \bar{f}^2 = e, g\bar{f} = \bar{f}g \rangle$, что изоморфно группе Q с описанием (4).

Предположим, что $n = 2r + 1$. Тогда из первого и второго соотношений в (8) следует, что $(pq^{-r})(pq^{-r}) = q$ и $q(pq^{-r}) = (pq^{-r})q$. После переобозначения $\bar{p} = pq^{-r}$ получаем новое описание группы Q

$$Q = \langle \bar{p}, q \mid \bar{p}^2 = q \rangle.$$

Из полученного описания группы Q и эпиморфизма π следует, что для группы G также справедливо соотношение $\bar{f}^2 = g$, где $\bar{f} = \pi(\bar{p})$.

Покажем, что в группе G других нетривиальных соотношений нет, т.е. эпиморфизм π является изоморфизмом. Действительно, любое соотношение в группе G либо является следствием соотношения $\bar{f}^2 = g$, либо приводится к виду $\bar{f} = g^l$, $l \in \mathbb{Z}$. Последнее соотношение невозможно, так как f и g имеют разные ориентации. Следовательно, в группе G соотношение $\bar{f}^2 = g$ является определяющим, эпиморфизм π является изоморфизмом и соответственно $G = \langle \bar{f}, g \mid \bar{f}^2 = g \rangle$, что изоморфно группе Q с описанием (5).

б) Пусть $k = -1$, т.е.

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = q^n, qp = pq^{-1} \rangle. \quad (9)$$

Из второго соотношения в (9) следует $q = pq^{-1}p^{-1}$ и соответственно $q^n = pq^{-n}p^{-1}$. В силу первого соотношения в (9) получаем $p^2 = pq^{-n}p^{-1}$, откуда следует, что $p^2 = q^{-n}$. Тогда из первого соотношения в (9) будет следовать, что $q^{2n} = e$. Так как $q \neq e$, то получаем $n = 0$ и соответственно

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = e, qp = pq^{-1} \rangle.$$

Из полученного описания группы Q и эпиморфизма π следует, что для группы G также справедливы соотношения $f^2 = e$, $gf = fg^{-1}$.

Покажем, что в группе G других нетривиальных соотношений нет, т.е. эпиморфизм π является изоморфизмом. Действительно, любое соотношение либо является следствием соотношений $f^2 = e$, $gf = fg^{-1}$, либо приводится к одному из двух видов: $f = g^l$, $l \in \mathbb{Z}$; $g^l = e$, $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Первое невозможно, так как f и g разной ориентации, а второе невозможно, так как $g \neq e$. Следовательно, в группе G соотношения $f^2 = e$, $gf = fg^{-1}$ являются определяющими, эпиморфизм π является изоморфизмом и соответственно $G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg^{-1} \rangle$, что изоморфно группе Q с описанием (6).

Достаточность. Пусть группа G гомеоморфизмов прямой изоморфна группе Q , имеющей одно из описаний (2)–(6) в виде соотношений, а $\pi: Q \rightarrow G$ задает этот изоморфизм.

I) Пусть группа Q имеет описание (2), т.е.

$$Q = \langle q \rangle.$$

Из цикличности группы Q следует цикличность группы G , а из этого следует цикличность подгруппы G_+ .

II) Пусть группа Q имеет описание (3), т.е.

$$Q = \langle p \mid p^2 = e \rangle.$$

Группа Q циклическая порядка 2. Поэтому группа G также является циклической порядка 2.

Так как нормальная подгруппа G_+ без кручения, то $G_+ = \langle e \rangle$.

III) Пусть группа Q имеет описание (4), т.е.

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = e, qp = pq \rangle.$$

Рассмотрим нетривиальные элементы $f = \pi(p)$, $g = \pi(q)$. Тогда группа G имеет описание

$$G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg \rangle.$$

Из соотношения $f^2 = e$ следует, что гомеоморфизм f меняет ориентацию.

Если g – гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, то очевидно, что подгруппа G_+ группы G имеет вид $G_+ = \langle g \rangle$, откуда и следует ее цикличность.

Пусть гомеоморфизм g меняет ориентацию. Введем обозначение $\bar{g} = gf$. Очевидно, что в группе G имеют место соотношения $f^2 = e$, $\bar{g}f = f\bar{g}$. В действительности в группе G других соотношений нет, так как из них вытекают соотношения $f^2 = e$, $gf = fg$. Следовательно, в группе G соотношения $f^2 = e$, $\bar{g}f = f\bar{g}$ являются определяющими и соответственно

$$G = \langle f, \bar{g} \mid f^2 = e, \bar{g}f = f\bar{g} \rangle.$$

Так как гомеоморфизм $\bar{g}$ сохраняет ориентацию, то подгруппа G_+ группы G имеет вид $G_+ = \langle \bar{g} \rangle$.

IV) Пусть группа Q имеет описание (5), т.е.

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = q \rangle.$$

Очевидно, что группа Q циклическая, поэтому циклическая и группа G . В таком случае подгруппа G_+ группы G также будет циклической.

V) Пусть группа Q имеет описание (6), т.е.

$$Q = \langle p, q \mid p^2 = e, qp = pq^{-1} \rangle.$$

Рассмотрим нетривиальные элементы $f = \pi(p)$, $g = \pi(q)$. Тогда группа G будет иметь описание

$$G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg^{-1} \rangle.$$

Из соотношения $f^2 = e$ следует, что гомеоморфизм f меняет ориентацию.

Если гомеоморфизм g сохраняет ориентацию, то очевидно, что подгруппа G_+ группы G имеет вид $G_+ = \langle g \rangle$, т.е. является циклической.

Пусть гомеоморфизм g меняет ориентацию. Введем обозначение $\bar{g} = gf$. Очевидно, что в группе G имеют место соотношения $f^2 = e$, $\bar{g}f = f\bar{g}^{-1}$. В действительности в группе G других соотношений нет, так как из них вытекают соотношения $f^2 = e$, $gf = fg^{-1}$. Следовательно, в группе G соотношения $f^2 = e$, $\bar{g}f = f\bar{g}^{-1}$ являются определяющими и соответственно

$$G = \langle f, \bar{g} \mid f^2 = e, \bar{g}f = f\bar{g}^{-1} \rangle.$$

Так как гомеоморфизм $\bar{g}$ сохраняет ориентацию, то подгруппа G_+ группы G имеет вид $G_+ = \langle \bar{g} \rangle$.

В действительности при доказательстве леммы 1 мы получили больше условий, характеризующих описания (2)–(6) группы Q . Это будет сформулировано в лемме 2.

ЛЕММА 2. В лемме 1 группы Q могут быть выбраны так, чтобы при изоморфизме $\pi: Q \rightarrow G$ элемент $f = \pi(p)$ задавал гомеоморфизм, меняющий ориентацию, а элемент $g = \pi(q)$ задавал гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве необходимости в лемме 1 нами были построены группы Q , для которых $\pi(p)$ менял ориентацию, а $\pi(q)$ сохранял ориентацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – нетривиальная группа гомеоморфизмов прямой. Подгруппа G_+ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов прямой является циклической тогда и только тогда, когда группа G описывается с помощью соотношений только лишь одного из пяти видов:

$$G = \langle g \rangle, \quad (10)$$

$$G = \langle f \mid f^2 = e \rangle, \quad (11)$$

$$G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg \rangle, \quad (12)$$

$$G = \langle b, g \mid f^2 = g \rangle, \quad (13)$$

$$G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg^{-1} \rangle, \quad (14)$$

где f – меняющий, а g – сохраняющий ориентацию гомеоморфизмы прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все, что мы должны доказать, – это единственность приведенного описания. Все остальное доказано в леммах 1 и 2.

а) Пусть группа G допускает описание (10). Очевидно, что в такой группе нет гомеоморфизмов, меняющих ориентацию. Поэтому такая группа не допускает описаний типа (11)–(14).

б) Пусть группа G допускает описание (11). Такая группа циклическая порядка 2, а группы, допускающие описание (12)–(14), не являются таковыми. Следовательно, такая группа не допускает описаний (12)–(14).

в) Пусть группа G допускает описание (12). Предположим, что наряду с описанием (12) группа G допускает и описание (13), т.е. $G = \langle \bar{f}, \bar{g} \mid \bar{f}^2 = \bar{g} \rangle$. В таком случае имеют место представления $\bar{g} = g^l, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, g = \bar{g}^k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, откуда следует, что либо $l = k = 1$, либо $l = k = -1$. С другой стороны, элемент $\bar{f}$ имеет представление $\bar{f} = fg^r, r \in \mathbb{Z}$. Тогда из $\bar{f}^2 = \bar{g}$ вытекает, что $g^{2r} = g^l$, чего не может быть. Следовательно, описания (12) и (13) для группы G одновременно невозможны.

Предположим, что наряду с описанием (12) группа G допускает и описание (14), т.е. $G = \langle \bar{f}, \bar{g} \mid \bar{f}^2 = e, \bar{g}\bar{f} = \bar{f}\bar{g}^{-1} \rangle$. В таком случае имеют место представления $\bar{g} = g^l, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, g = \bar{g}^k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, откуда следует, что либо $l = k = 1$, либо $l = k = -1$. С другой стороны, элемент $\bar{f}$ имеет представление $\bar{f} = fg^r, r \in \mathbb{Z}$. Тогда из $\bar{f}^2 = e$ вытекает, что $r = 0$, т.е. $\bar{f} = f$. Из соотношений $gf = fg, \bar{g}\bar{f} = \bar{f}\bar{g}^{-1}$ получаем, что $g = e$. Противоречие. Следовательно, описания (12) и (14) для группы G одновременно невозможны.

г) Пусть группа G допускает описание (13). Предположим, что наряду с описанием (13) группа G допускает и описание (14), т.е. $G = \langle \bar{f}, \bar{g} \mid \bar{f}^2 = e, \bar{g}\bar{f} = \bar{f}\bar{g}^{-1} \rangle$. Для элемента $\bar{f}$ имеет место представление $\bar{f} = fg^r, r \in \mathbb{Z}$. Тогда в силу соотношений $\bar{f}^2 = e, \bar{f}^2 = g$ имеем $gg^{2r} = e$, чего не может быть. Следовательно, описания (13) и (14) для группы G одновременно невозможны.

ЛЕММА 3. В описаниях (12), (13) элементы f и g имеют общую неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место описание (12). Из условия коммутативности $gf = fg$ следует, что множество неподвижных точек гомеоморфизма f инвариантно относительно действия гомеоморфизма g . Так как у гомеоморфизма f имеется ровно одна неподвижная точка, то она будет неподвижной и для g .

Если имеет место описание (13), то утверждение леммы следует из равенства $f^2 = g$.

Для подгрупп G_+ специального типа описание, данное в предложении 1, может быть уточнено.

ЛЕММА 4. Пусть G – нетривиальная группа гомеоморфизмов прямой с циклической подгруппой G_+ . Если для любого элемента $g \in G_+$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место условие $M_{g^n} = M_g$, то в описании (14) элемент g не имеет неподвижной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $M_{g^n} = M_g$, $n \in \mathbb{Z}$, для элемента $g \in G_+$ следует, что элемент $g \neq e$ имеет не более одной неподвижной точки; при наличии неподвижной точки график гомеоморфизма g слева и справа от неподвижной точки расположен по разные стороны от графика единичного элемента e .

Доказательство проведем от противного. Пусть справедливо описание (14)

$$G = \langle f, g \mid f^2 = e, gf = fg^{-1} \rangle,$$

где f – меняющий, а g – сохраняющий ориентацию гомеоморфизмы прямой. Очевидно, что гомеоморфизм f имеет ровно одну неподвижную точку $\hat{t}$. Не нарушая общности, можем полагать, что $\hat{t} = 0$. Предположим, что гомеоморфизм g также имеет неподвижную точку. Из соотношения $gf = fg^{-1}$ следует, что множество неподвижных точек g инвариантно относительно действия f . Так как неподвижная точка для g единственная, то она также будет совпадать с точкой $\hat{t} = 0$. Для определенности будем полагать, что на полупрямой $(0, +\infty)$ гомеоморфизм g удовлетворяет условию $g(t) > t$ (по свойству, отмеченному в начале доказательства, на $(-\infty, 0)$ гомеоморфизм g удовлетворяет условию $g(t) < t$). Выберем точку $\bar{t} \in (0, +\infty)$. Последовательность точек $g^{-r}(\bar{t})$, $r = 0, 1, 2, \dots$, монотонно убывая, стремится к точке 0. Тогда в силу непрерывности f последовательность $f(g^{-r}(\bar{t}))$ также стремится к 0. С другой стороны, последовательность $g^r(f(\bar{t}))$, $r = 0, 1, 2, \dots$, стремится к $-\infty$, а в силу соотношения $gf = fg^{-1}$ имеем $f(g^{-r}(\bar{t})) = g^r(f(\bar{t}))$, $r = 0, 1, 2, \dots$. Противоречие. Следовательно, гомеоморфизм g не может иметь неподвижных точек.

§ 2. Доказательство основной теоремы

2.1. Необходимость. Пусть $\eta G \eta^{-1}$ является группой аффинных преобразований прямой, а η – квазисимметрическое преобразование. Заметим, что любое аффинное преобразование $q(t) = at + b$ является квазисимметрическим, причем $M_q = 2$. Так как для любых квазисимметрических преобразований q_1, q_2 имеет место оценка $M_{q_1 q_2} \leq M_{q_1} M_{q_2}$, то группа G будет квазисимметрической и для нее существует равномерная константа M такая, что для любого $g \in G$ имеет место равенство $M_g = M$. Необходимость доказана.

2.2. Достаточность. Пусть G – группа квазисимметрических гомеоморфизмов прямой и для любых $g \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $M_{g^n} = M_g$.

Рассмотрим нормальную подгруппу G_+ . По теореме 2 группа G_+ квазисимметрически сопряжена группе аффинных преобразований прямой, т.е. существует квазисимметрическое отображение η такое, что $\eta G_+ \eta^{-1}$ является группой аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию.

Если $G = G_+$, то доказательство завершено.

Пусть $G \neq G_+$. Тогда существует элемент $f \in G \setminus G_+$ и справедливо разложение $G = G_+ \cup f G_+$. Из полученного разложения следует разложение

$$\eta G \eta^{-1} = (\eta G_+ \eta^{-1}) \cup (\eta f \eta^{-1})(\eta G_+ \eta^{-1}).$$

Для любого $g \in G$ будем пользоваться обозначением $*g = \eta g \eta^{-1}$. Тогда $*G = \eta G \eta^{-1}$, $*G_+ = \eta G_+ \eta^{-1}$ и последнее разложение примет вид

$$*G = *G_+ \cup *f *G_+.$$

Напомним, что $*G_+$ является группой аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию.

Следует выделить два случая, когда группа $*G_+$ (соответственно группа G_+) является циклической либо нециклической.

1) Пусть $*G_+$ – циклическая группа. Тогда для группы $*G$ выполняются условия лемм 1 и 2. Поэтому разложение группы $*G$ может быть выбрано таким (т.е. выбран элемент $*f$), что с учетом условия $*G \neq *G_+$ группа $*G$ может быть описана в терминах соотношений одного из четырех видов:

$$*G = \langle *f \mid *f^2 = e \rangle, \quad (15)$$

$$*G = \langle *f, *g \mid *f^2 = e, *g*f = *f*g \rangle, \quad (16)$$

$$*G = \langle *f, *g \mid *f^2 = *g \rangle, \quad (17)$$

$$*G = \langle *f, *g \mid *f^2 = e, *g*f = *f*g^{-1} \rangle, \quad (18)$$

где $*f$ – гомеоморфизм прямой, меняющий ориентацию, а $*g$ – аффинное преобразование прямой, сохраняющее ориентацию. Более того, в описаниях (16), (17) элементы $*f$ и $*g$ имеют общую неподвижную точку, а в описании (18) элемент $*g$ не имеет неподвижной точки (свободно действующий гомеоморфизм).

1) Рассмотрим случай

$$*G = \langle *f \mid *f^2 = e \rangle.$$

Определим гомеоморфизм $\bar{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$\bar{\eta}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0; \\ -*f(t), & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что обратное преобразование $\bar{\eta}^{-1}$ имеет вид

$$\bar{\eta}^{-1}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0; \\ *f(-t), & t < 0. \end{cases}$$

В таком случае гомеоморфизм $\widehat{*f} = \bar{\eta} *f \bar{\eta}^{-1}$ является отражением, т.е. $\widehat{*f}(t) \equiv -t$ при $t \in \mathbb{R}$, и группа $\bar{\eta} \eta G \eta^{-1} \bar{\eta}^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

Нам остается показать, что отображение $\bar{\eta}$ также является квазисимметрическим.

Для любых $t \geq 0, 0 < \tau \leq t$ имеем

$$\frac{\bar{\eta}(t + \tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t - \tau)} = 1.$$

Для любых $t \geq 0, \tau > t$ имеем

$$\frac{\bar{\eta}(t + \tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t - \tau)} = \frac{\tau}{t + {}_*f(t - \tau)}. \quad (19)$$

Так как отображение f квазисимметрическое и $f(0) = 0$, то справедливы оценки

$$M_{*f}^{-1} \leq \frac{{}_*f(\tau)}{-{}_*f(-\tau)} \leq M_{*f}, \quad \tau > 0. \quad (20)$$

Если $-{}_*f(\tau) \geq \tau, \tau > 0$, то из неравенства (20) следуют неравенства

$$\begin{cases} M_{*f} {}_**f(-\tau) \geq \tau, \\ {}_**f(-\tau) \leq \tau. \end{cases} \quad (21)$$

Если $-{}_*f(\tau) \leq \tau, \tau > 0$, то из неравенства (20) следуют неравенства

$$\begin{cases} M_{*f}^{-1} {}_**f(-\tau) \leq \tau, \\ {}_**f(-\tau) \geq \tau. \end{cases} \quad (22)$$

В случае $-f(\tau - t) \geq \tau - t, \tau - t > 0$, из системы (21) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{t + {}_**f(t - \tau)} &\leq \frac{\tau}{t + M_{*f}^{-1}(\tau - t)} = \frac{M_{*f}\tau}{(M_{*f} - 1)t + \tau} \leq M_{*f}, \\ \frac{\tau}{t + {}_**f(t - \tau)} &\geq \frac{\tau}{t + \tau - t} = 1. \end{aligned}$$

В случае $-f(\tau - t) \leq \tau - t, \tau - t > 0$, из системы (22) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{t + {}_**f(t - \tau)} &\leq \frac{\tau}{t + \tau - t} = 1, \\ \frac{\tau}{t + {}_**f(t - \tau)} &\geq \frac{\tau}{t + M_{*f}(\tau - t)} = \frac{\tau}{(1 - M_{*f})t + \tau M_{*f}} \geq \frac{\tau}{M_{*f}\tau} = M_{*f}^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, для любых $t \geq 0, \tau > 0$ справедливы оценки

$$M_{*f}^{-1} \leq \frac{\bar{\eta}(t + \tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t - \tau)} \leq M_{*f}. \quad (23)$$

Для любых $t < 0, 0 < \tau \leq t$ имеем

$$\frac{\bar{\eta}(t + \tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t - \tau)} = \frac{-{}_**f(t + \tau) + {}_**f(t)}{-{}_**f(t) + {}_**f(t - \tau)} = \frac{{}_**f(t + \tau) - {}_**f(t)}{{}_**f(t) - {}_**f(t - \tau)},$$

и поэтому для таких t и τ имеют место оценки

$$M_{*f}^{-1} \leq \frac{\bar{\eta}(t+\tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t-\tau)} \leq M_{*f}. \quad (24)$$

Для любых $t < 0, \tau > -t$ имеем

$$\frac{\bar{\eta}(t+\tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t-\tau)} = \frac{(t+\tau) + *f(t)}{-*f(t) + *f(t-\tau)}.$$

Если $-*f(t+\tau) \geq t+\tau$, из (21) следует неравенство $-*f(t+\tau) \leq M_{*f}(t+\tau)$ и соответственно оценки

$$\begin{aligned} \frac{(t+\tau) + *f(t)}{-*f(t) + *f(t-\tau)} &\leq \frac{*f(t+\tau) - *f(t)}{*f(t) - *f(t-\tau)} \leq M_{*f}, \\ \frac{(t+\tau) + *f(t)}{-*f(t) + *f(t-\tau)} &\geq \frac{M_{*f}^{-1} *f(t+\tau) - *f(t)}{*f(t) - *f(t-\tau)} \geq \frac{M_{*f}^{-1} [*f(t+\tau) - *f(t)]}{*f(t) - *f(t-\tau)} \geq M_{*f}^{-2}. \end{aligned}$$

Если $-*f(t+\tau) \leq t+\tau, t+\tau > 0$, то из неравенств (20) и системы (21) следует неравенство $-*f(t+\tau) \geq M_{*f}^{-2}(t+\tau)$ и соответственно оценки

$$\begin{aligned} \frac{(t+\tau) + *f(t)}{-*f(t) + *f(t-\tau)} &\leq \frac{M_{*f}^2 *f(t+\tau) - *f(t)}{*f(t) - *f(t-\tau)} \leq \frac{M_{*f}^2 [*f(t+\tau) - *f(t)]}{*f(t) - *f(t-\tau)} \leq M_{*f}^3, \\ \frac{(t+\tau) + *f(t)}{-*f(t) + *f(t-\tau)} &\geq \frac{*f(t+\tau) - *f(t)}{*f(t) - *f(t-\tau)} \geq M_{*f}^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, для любых $t < 0, \tau > 0$ имеют место оценки

$$M_{*f}^{-2} \leq \frac{\bar{\eta}(t+\tau) - \bar{\eta}(t)}{\bar{\eta}(t) - \bar{\eta}(t-\tau)} \leq M_{*f}^3,$$

что вместе с оценкой (23) указывает на квазисимметричность отображения $\bar{\eta}$.

2) Рассмотрим случай

$$*G = \langle *f, *g \mid *f^2 = e, *g*f = *f*g \rangle.$$

По лемме 3 элементы $*f$ и $*g$ имеют общую неподвижную точку. Так как $*g$ — аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию, то

$$*g(t) = \alpha t, \quad \alpha > 0.$$

Пусть гомеоморфизм $\bar{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тот же, что и в предыдущем п. 1).

В таком случае гомеоморфизм $*\hat{f} = \bar{\eta}_* f \bar{\eta}^{-1}$ является отражением, а $\bar{\eta}$ — квазисимметрическим гомеоморфизмом. Остается показать, что $*\hat{g} = \bar{\eta}_* g \bar{\eta}^{-1}$ также является аффинным преобразованием.

Действительно, в силу определения гомеоморфизма $\bar{\eta}$ для любого $t \geq 0$ имеем

$$*\hat{g}(t) = \bar{\eta}_* g \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta}_* g(t) = \bar{\eta}(\alpha t) = \alpha t.$$

С учетом условия коммутативности $*g*f = *f*g$ для любого $t < 0$ справедлива цепочка равенств

$$*\hat{g}(t) = \bar{\eta} * g \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta} * g(*f(-t)) = \bar{\eta} * f(*g(-t)) = \bar{\eta} * f(-\alpha t) = -*f^2(-\alpha t) = \alpha t.$$

Следовательно, вся группа $\bar{\eta}\eta G\eta^{-1}\bar{\eta}^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

3) Рассмотрим случай

$$*G = \langle *f, *g \mid *f^2 = *g \rangle.$$

Очевидно, что $*f$ и $*g$ имеют общую неподвижную точку. Так как $*g$ — аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию и не совпадающее с тождественным, то

$$*g(t) = \alpha t, \quad t > 0.$$

Определим гомеоморфизм

$$\bar{\eta}(t) = \begin{cases} \alpha t, & t \geq 0; \\ -\alpha^{1/2} *f(t), & t < 0. \end{cases}$$

Обратное преобразование $\bar{\eta}^{-1}$ имеет вид

$$\bar{\eta}^{-1}(t) = \begin{cases} \alpha^{-1}t, & t \geq 0; \\ \alpha^{-1} *f(-\alpha^{-1/2}t), & t < 0. \end{cases}$$

В частности, из определения $\bar{\eta}$ и задания $\bar{\eta}^{-1}$ следует, что для любого $t < 0$ имеет место условие $-\alpha^{1/2} *f(\alpha^{-1} *f(-\alpha^{-1/2}t)) = t$.

Заметим, что в п. 1) при доказательстве квазисимметричности гомеоморфизма $\bar{\eta}$ использовалось лишь условие квазисимметричности гомеоморфизма $*f$. Условие $*f^2 = e$ нигде не использовалось. Определим кусочно линейный гомеоморфизм

$$g_1(t) = \begin{cases} \alpha t, & t \geq 0; \\ \alpha^{1/2}t, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда гомеоморфизм $\bar{\eta}$, определенный в настоящем пункте, равен суперпозиции гомеоморфизмов $\bar{\eta}$ из п. 1) и g_1 , т.е. имеет вид $g_1\bar{\eta}$. Так как гомеоморфизм $\bar{\eta}$ из п. 1) квазисимметрический, а кусочно линейный гомеоморфизм g_1 также квазисимметрический, то суперпозиция $g_1\bar{\eta}$ также будет квазисимметрической.

Выясним, как задается элемент $*\hat{f} = \bar{\eta} * f \bar{\eta}^{-1}$. В силу определения гомеоморфизма $\bar{\eta}$ для любого $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} *\hat{f}(t) &= \bar{\eta} * f \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta} * f(\bar{\eta}^{-1}(t)) = \bar{\eta} * f(\alpha^{-1}t) = \bar{\eta}(*f(\alpha^{-1}t)) \\ &= -\alpha^{1/2} *f(*f(\alpha^{-1}t)) = -\alpha^{1/2} *f^2(\alpha^{-1}t) = -\alpha^{1/2}t, \end{aligned}$$

а для любого $t < 0$

$$\begin{aligned} *\hat{f}(t) &= \bar{\eta} * f \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta} * f(\bar{\eta}^{-1}(t)) = \bar{\eta} * f(\alpha^{-1} *f(-\alpha^{-1/2}t)) \\ &= \bar{\eta}(*f(\alpha^{-1} *f(-\alpha^{-1/2}t))) = \bar{\eta}((-\alpha^{-1/2})(-\alpha^{1/2}) *f(\alpha^{-1} *f(-\alpha^{-1/2}t))) \\ &= \bar{\eta}(-\alpha^{-1/2}t) = -\alpha^{1/2}t. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что ${}^*\hat{f}(t) = -\alpha^{1/2}t$. В таком случае

$${}^*\hat{g}(t) = \bar{\eta} {}^*g \bar{\eta}^{-1} = {}^*\hat{f}^2(t) = \alpha t$$

и группа $\bar{\eta} \eta G \eta^{-1} \bar{\eta}^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

4) Рассмотрим случай

$${}^*G = \langle {}^*f, {}^*g \mid {}^*f^2 = e, {}^*g {}^*f = {}^*f {}^*g^{-1} \rangle.$$

По лемме 4 элемент *g не имеет неподвижной точки. Так как *g — аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию, то это сдвиг

$${}^*g(t) = t + \alpha.$$

Для определенности будем полагать, что $\alpha > 0$. Пусть гомеоморфизм $\bar{\eta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тот же, что и в п. 1), поэтому $\bar{\eta}$ квазисимметрический. Как и в п. 1), гомеоморфизм ${}^*\hat{f} = \bar{\eta} {}^*f \bar{\eta}^{-1}$ является отражением, т.е. ${}^*f(t) = -t$, $t \in \mathbb{R}$. Остается описать гомеоморфизм ${}^*\hat{g} = \bar{\eta} {}^*g \bar{\eta}^{-1}$. В силу определения гомеоморфизма $\bar{\eta}$ для любого $t \geq 0$ имеем

$${}^*g(t) = \bar{\eta} {}^*g \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta} {}^*g(\bar{\eta}^{-1}(t)) = \bar{\eta} {}^*g(t) = \bar{\eta}({}^*g(t)) = \bar{\eta}(t + \alpha) = t + \alpha.$$

С учетом условия ${}^*g {}^*f = {}^*f {}^*g^{-1}$ для любого $t < 0$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} {}^*\hat{g}(t) &= \bar{\eta} {}^*g \bar{\eta}^{-1}(t) = \bar{\eta} {}^*g(\bar{\eta}^{-1}(t)) = \bar{\eta} {}^*g({}^*f(-t)) = \bar{\eta}({}^*g({}^*f(-t))) \\ &= \bar{\eta}({}^*g {}^*f(-t)) = \bar{\eta}({}^*f {}^*g^{-1}(-t)) = \bar{\eta}({}^*f({}^*g^{-1}(-t))) = \bar{\eta}({}^*f(-t - \alpha)). \end{aligned}$$

Если $t \leq -\alpha$, то

$${}^*\hat{g}(t) = \bar{\eta}({}^*f(-t - \alpha)) = -{}^*f({}^*f(-t - \alpha)) = -{}^*f^2(-t - \alpha) = t + \alpha.$$

Если $-\alpha \leq t < 0$, то

$${}^*\hat{g}(t) = \bar{\eta}({}^*f(-t - \alpha)) = {}^*f(-t - \alpha).$$

Окончательно получаем, что

$${}^*\hat{g}(t) = \begin{cases} t + \alpha, & t \geq 0; \\ {}^*f(-t - \alpha), & -\alpha < t < 0; \\ t + \alpha, & t \leq -\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что для ${}^*\hat{f}$ и ${}^*\hat{g}$ также должно выполняться соотношение

$${}^*\hat{g} {}^*\hat{f} = {}^*\hat{f} {}^*\hat{g}^{-1}.$$

Пусть $T(t) = t + \alpha$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что имеет место соотношение $*\hat{f}T = T^{-1}*\hat{f}$. Определим гомеоморфизм

$$\tilde{\eta}(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[-n\alpha, -\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ T^{-n}*\hat{g}^n(t), & t \in \left[-\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha, -(n-1)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ T^n*\hat{g}^{-n}(t), & t \in \left[(n-1)\alpha, \left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ t, & t \in \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha, n\alpha\right], n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Обратное отображение $\tilde{\eta}^{-1}$ имеет вид

$$\tilde{\eta}^{-1}(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[-n\alpha, -\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ *\hat{g}^{-n}T^n(t), & t \in \left[-\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha, -(n-1)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ *\hat{g}^nT^{-n}(t), & t \in \left[(n-1)\alpha, \left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha\right], n = 1, 2, \dots; \\ t, & t \in \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha, n\alpha\right], n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Выясним, как задаются элементы $*\tilde{f} = \tilde{\eta}*\hat{f}\tilde{\eta}^{-1}$, $*\tilde{g} = \tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}$.

В силу определения гомеоморфизма $\tilde{\eta}$ и соотношений

$$*\hat{f}T = T^{-1}*\hat{f}, \quad *\hat{g}*\hat{f} = *\hat{f}*\hat{g}^{-1}$$

имеют место следующие равенства:

для любого $t \in [-n\alpha, -(n-1/2)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{\eta}*\hat{f}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{f}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}(t) = \tilde{\eta}(*\hat{f}(t)) = \tilde{\eta}(-t) = -t;$$

для любого $t \in [-(n-1/2)\alpha, -(n-1)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}*\hat{f}\tilde{\eta}^{-1}(t) &= \tilde{\eta}*\hat{f}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}(*\hat{g}^{-n}T^n(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}*\hat{g}^{-n}T^n(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}^{-n}T^{-n}*\hat{f}(t) \\ &= \tilde{\eta}(*\hat{g}^nT^{-n}*\hat{f}(t)) = T^n*\hat{g}^{-n}*\hat{g}^nT^{-n}*\hat{f}(t) = *\hat{f}(t) = -t; \end{aligned}$$

для любого $t \in [(n-1)\alpha, (n-1/2)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}*\hat{f}\tilde{\eta}^{-1}(t) &= \tilde{\eta}*\hat{f}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}(*\hat{g}^nT^{-n}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}*\hat{g}^nT^{-n}(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}^{-n}T^n*\hat{f}(t) \\ &= \tilde{\eta}(*\hat{g}^{-n}T^n*\hat{f}(t)) = T^{-n}*\hat{g}^n*\hat{g}^{-n}T^n*\hat{f}(t) = *\hat{f}(t) = -t; \end{aligned}$$

для любого $t \in [(n-1/2)\alpha, n\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{\eta}*\hat{f}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{f}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{f}(t) = \tilde{\eta}(-t) = -t.$$

Окончательно получили представление для гомеоморфизма $*\tilde{f}$:

$$*\tilde{f}(t) = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу определения гомеоморфизма $\tilde{\eta}$ и соотношений

$$*\hat{f}T = T^{-1}*\hat{f}, \quad *\hat{g}*\hat{f} = *\hat{f}*\hat{g}^{-1}, \quad *\hat{g}(t) = T(t),$$

$t \in (-\infty, -\alpha) \cup (0, +\infty)$, имеют место следующие равенства:
для любого $t \in [-n\alpha, -(n-1/2)\alpha]$, $n = 2, 3, \dots$,

$$\tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(t) = \tilde{\eta}(*\hat{g}(t)) = *\hat{g}(t) = t + \alpha;$$

для любого $t \in [-1, -1/2]$

$$\tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(t) = \tilde{\eta}(*\hat{g}(t)) = T*\hat{g}^{-1}(g(t)) = T(t) = t + \alpha;$$

для любого $t \in [-(n-1/2)\alpha, -(n-1)\alpha]$, $n = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) &= \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(\hat{g}^{-n}T^n(t)) = \tilde{\eta}(*\hat{g}*\hat{g}^{-n}T^n(t)) \\ &= T^{-n}*\hat{g}^n(*\hat{g}*\hat{g}^{-n}T^n(t)) = *\hat{g}(t) = t + \alpha; \end{aligned}$$

для любого $t \in [-1/2, 0]$

$$\tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(*\hat{g}^{-1}T(t)) = \tilde{\eta}T(t) = \tilde{\eta}(t + \alpha) = t + \alpha;$$

для любого $t \in [(n-1)\alpha, (n-1/2)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) &= \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(*\hat{g}^nT^{-n}(t)) = \tilde{\eta}(*\hat{g}*\hat{g}^nT^{-n}(t)) \\ &= T^n*\hat{g}^{-n}(*\hat{g}*\hat{g}^nT^{-n}(t)) = *\hat{g}(t) = t + \alpha; \end{aligned}$$

для любого $t \in [(n-1/2)\alpha, n\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{\eta}*\hat{g}\tilde{\eta}^{-1}(t) = \tilde{\eta}*\hat{g}(\tilde{\eta}^{-1}(t)) = \tilde{\eta}*\hat{g}(t) = \tilde{\eta}(*\hat{g}(t)) = *g(t) = t + \alpha.$$

Окончательно получили представление для гомеоморфизма $*\tilde{g}$:

$$*\tilde{g}(t) = t + \alpha, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, группа $\tilde{\eta}\tilde{\eta}G\eta^{-1}\tilde{\eta}^{-1}\tilde{\eta}^{-1}$ является группой аффинных преобразований. Для завершения доказательства остается показать, что гомеоморфизм $\tilde{\eta}$ является квазисимметрическим.

Приведем график, соответствующий квазисимметрическому гомеоморфизму $*\hat{g}$.

Рис. 1

В силу соотношения $*\hat{g}*f = *f*\hat{g}^{-1}$ (т.е. для любого $t \in \mathbb{R}$ $*\hat{g}(-t) = -*\hat{g}^{-1}(t)$) график функции $*\hat{g}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, симметричен относительно графика функции $x(t) = -t$.

Определим гомеоморфизмы

$$*\hat{g}_1(t) = \begin{cases} *\hat{g}(t), & t \geq -\frac{1}{2}\alpha; \\ t + \alpha, & t < -\frac{1}{2}\alpha, \end{cases} \quad *\hat{g}_2(t) = \begin{cases} t + \alpha, & t \geq -\frac{1}{2}\alpha; \\ *\hat{g}(t), & t < -\frac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

В силу квазисимметричности гомеоморфизма $*\hat{g}$ и соотношения $*\hat{g}*f = *f*\hat{g}^{-1}$ гомеоморфизмы $*\hat{g}_1$ и $*\hat{g}_2$ также будут квазисимметричными.

Заметим, что на интервалах $[-(n-1/2)\alpha, -(n-1)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$, справедливы тождества $*\hat{g}^n(t) \equiv *\hat{g}T^{n-1}(t)$, а на интервалах $[(n-1)\alpha, (n-1/2)\alpha]$, $n = 1, 2, \dots$, справедливы другие тождества $*\hat{g}^{-n}(t) \equiv *\hat{g}^{-1}T^{-(n-1)}(t)$. Поэтому график функции $\tilde{\eta}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет следующий вид.

Рис. 2

Определим гомеоморфизмы

$$\tilde{\eta}_1(t) = \begin{cases} t + \alpha, & t \geq 0; \\ \tilde{\eta}(t), & t < 0, \end{cases} \quad \tilde{\eta}_2(t) = \begin{cases} \tilde{\eta}(t), & t \geq 0; \\ t + \alpha, & t < 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}_2\tilde{\eta}_1$. Поэтому если будет установлена квазисимметричность гомеоморфизмов $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$, то будет установлена квазисимметричность и $\tilde{\eta}$.

Из вида графика функции $\tilde{\eta}_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, следует, что на множестве пар $\Omega = \{(t, \tau) : t \in \mathbb{R}, \tau \geq \alpha/2\}$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\tilde{\eta}_1(t + \tau) - \tilde{\eta}_1(t)}{\tilde{\eta}_1(t) - \tilde{\eta}_1(t - \tau)} \leq 2.$$

Остается проверить равномерную ограниченность как снизу, так и сверху отношения

$$\frac{\tilde{\eta}_1(t + \tau) - \tilde{\eta}_1(t)}{\tilde{\eta}_1(t) - \tilde{\eta}_1(t - \tau)} \quad (25)$$

на множестве пар $\Omega' = \{(t, \tau) : t \in \mathbb{R}, 0 < \tau < \alpha/2\}$. Функция $\tilde{\eta}_1(t)$ на полупрямой $(-\infty, 0]$ удовлетворяет условию $\tilde{\eta}_1(t - \alpha) = \tilde{\eta}_1(t) - \alpha$, а на полупрямой $[0, +\infty)$ —

условию $\tilde{\eta}_1(t + \alpha) = \tilde{\eta}_1(t) + \alpha$. Поэтому отношение (25) достаточно проверить на множестве пар $\Omega'' = \{(t, \tau) : -\alpha < t < \alpha, 0 < \tau < \alpha/2\}$. Несложно заметить, что для $t \in (-3\alpha/2, 3\alpha/2)$ имеет место тождество

$$\tilde{\eta}_1(t) = T^{-2} * \hat{g}_1^2(t). \quad (26)$$

Так как $*\hat{g}_1$ и T квазисимметрические, то гомеоморфизм $T^{-2} * \hat{g}_1^2$ также будет квазисимметрическим. Поэтому в силу тождества (26) отношение (25) будет равномерно ограниченным на множестве Ω'' , что и доказывает квазисимметричность гомеоморфизма $\tilde{\eta}_1$.

Из вида графика функции $\tilde{\eta}_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, следует, что на множестве пар Ω имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\tilde{\eta}_2(t + \tau) - \tilde{\eta}_2(t)}{\tilde{\eta}_2(t) - \tilde{\eta}_2(t - \tau)} \leq 2.$$

Остается проверить равномерную ограниченность как снизу, так и сверху отношения

$$\frac{\tilde{\eta}_2(t + \tau) - \tilde{\eta}_2(t)}{\tilde{\eta}_2(t) - \tilde{\eta}_2(t - \tau)} \quad (27)$$

на множестве пар Ω' . Функция $\tilde{\eta}_2(t)$ на полупрямой $(-\infty, 0]$ удовлетворяет условию $\tilde{\eta}_2(t - \alpha) = \tilde{\eta}_2(t) - \alpha$, а на полупрямой $[0, +\infty)$ — условию $\tilde{\eta}_2(t + \alpha) = \tilde{\eta}_2(t) + \alpha$. Поэтому отношение (27) достаточно проверить на множестве пар Ω'' . Несложно заметить, что для $t \in (-3\alpha/2, 3\alpha/2)$ имеет место тождество

$$\tilde{\eta}_2(t) = T^2 * \hat{g}_2^{-2}(t). \quad (28)$$

Так как $*\hat{g}_2$ и T квазисимметрические, то гомеоморфизм $T^2 * \hat{g}_2^{-2}$ также будет квазисимметрическим. Поэтому в силу тождества (28) отношение (27) будет равномерно ограниченным на множестве Ω'' , что и доказывает квазисимметричность гомеоморфизма $\tilde{\eta}_1$, а следовательно, и гомеоморфизма $\tilde{\eta}$.

II) Пусть $*G_+$ — нециклическая группа аффинных преобразований. С нециклическостью связано свойство строгой эргодичности для некоторых групп, индуцированных группой $*G_+$, используемое далее. Очевидно, что мера Лебега dt , обозначаемая далее через μ , является проективно-инвариантной относительно группы $*G_+$, т.е. для любого $*g \in *G_+$ и любого лебегова множества A справедливо равенство $\mu(*g^{-1}(A)) = c_{*g}\mu(A)$, $c_{*g} > 0$.

1) Пусть группа $*G_+$ некоммутативная. В этом случае, как показано в [4], мера μ будет также проективно-инвариантной и относительно всей группы $*G$. Введем обозначение

$$\bar{\mu}([t_0, t)) = \begin{cases} \mu([t_0, t)) = t - t_0, & t \geq t_0; \\ -\mu((t, t_0]) = t - t_0, & t < t_0. \end{cases} \quad (29)$$

Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\bar{\mu}([0, *f(t))) = \bar{\mu}([0, *f(0))) + \bar{\mu}([*f(0), *f(t))) = \bar{\mu}([0, *f(0))) + c_{*f}\bar{\mu}([0, t)), \quad (30)$$

откуда и следует, что гомеоморфизм $*f$ также является аффинным преобразованием. Следовательно, вся группа $\eta G \eta^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

2) Пусть группа $*G_+$ коммутативная. Определим меру $\nu = (*f)_*\mu$. Из условия нормальности подгруппы $*G_+$ следует, что мера ν также является проективно-инвариантной относительно $*G_+$. Из коммутативности группы аффинных преобразований $*G_+$ следует, что она либо группа сдвигов, либо группа аффинных преобразований с общей неподвижной точкой.

Если $*G_+$ – группа сдвигов, то проективно-инвариантные меры μ (мера Лебега) и ν будут просто инвариантными. Так как группа $*G_+$ нециклическая, то она будет строго эргодичной [4] и соответственно $\nu = p\mu$, $p > 0$. Повторяя рассуждения п. 1) начиная с формулы (29), получаем, что вся группа $\eta G \eta^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

Если $*G_+$ – группа аффинных преобразований с общей неподвижной точкой $\bar{t}$, то, не нарушая общности, можем положить $\bar{t} = 0$. Рассмотрим ограничения меры ν на полупрямые $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, которые обозначим через ν^- , ν^+ соответственно.

Мы хотим показать справедливость представлений

$$\nu^- = p^- \mu, \quad \nu^+ = p^+ \mu, \quad p^-, p^+ > 0. \quad (31)$$

Для меры ν введем обозначение $\bar{\nu}$, аналогичное обозначениям (29). Из определения меры ν следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\bar{\nu}([0, *f(t))) = -t \quad (32)$$

и соответственно

$$\bar{\nu}([0, t)) = *f^{-1}(-t). \quad (33)$$

Мы уже отмечали, что мера ν также проективно-инвариантна относительно группы $*G_+$, т.е. для любого $*g \in *G_+$ справедливо представление $(*g)_*\nu = r_{*g}\nu$, $r_{*g} > 0$. Следовательно, для любых $*g \in *G_+$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\bar{\nu}([0, *g^{-k}(t))) = r_{*g}^k \bar{\nu}([0, t)). \quad (34)$$

Так как $*g^k(t) = c_{*g}^{-k}t$, то равенство (34) примет вид

$$\bar{\nu}([0, c_{*g}^k t)) = r_{*g}^k \bar{\nu}([0, t)). \quad (35)$$

Из (33), в частности, следует, что для любых $*g \in *G_+$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ также справедливы соотношения

$$\bar{\nu}([0, c_{*g}^k t)) = *f^{-1}(-c_{*g}^k t). \quad (36)$$

В силу равенства (35) соотношение (36) примет вид

$$r_{*g}^k \bar{\nu}([0, t)) = *f^{-1}(-c_{*g}^k t). \quad (37)$$

Из равенств (33), (37) следует, что для любых $*g \in *G_+$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ функция $*f$ удовлетворяет соотношениям

$$*f(c_{*g}^k t) = r_{*g}^k *f(t). \quad (38)$$

Заметим, что между нециклическими мультипликативными группами

$$\langle c_{*g}, *g \in *G \rangle, \quad \langle r_{*g}, *g \in *G \rangle$$

существует естественный изоморфизм. Так как функция $*f$ квазисимметрическая, то соотношения (38) могут выполняться только при выполнении условий

$$c_{*g} = r_{*g}, \quad *g \in *G. \quad (39)$$

Рассмотрим ограничение группы $*G$ на полупрямые $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, которые обозначим через $*G^-$ и $*G^+$ соответственно.

Проведем рассуждения для группы $*G^+$. Для этого определим отображение $\theta: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу: $\theta(t) = \ln t$. Несложно проверить, что группа $\theta_*G^+\theta^{-1}$ является группой сдвигов на прямой. При этом мера $(1/t) d\mu$ (т.е. мера $(1/t) dt$), определенная на полупрямой $(0, +\infty)$, отображением θ переводится в меру Лебега $d\tau$, определенную на $\mathbb{R}$ и инвариантную относительно группы сдвигов $\theta_*G^+\theta^{-1}$. В силу равенств (39) мера $(1/t) d\nu^+$, определенная на полупрямой $(0, +\infty)$, отображением θ переводится в меру, определенную на $\mathbb{R}$ и также инвариантную относительно группы сдвигов $\theta_*G^+\theta^{-1}$. Так как такая группа сдвигов нециклическая, то она строго эргодическая. В таком случае [4] образ меры $(1/t) d\nu^+$ при отображении θ имеет представление $p^+ d\tau$, $p^+ > 0$, откуда и будет следовать, что $\nu^+ = p^+ \mu$. Точно так же доказывается справедливость представления $\nu^- = p^- \mu$, $p^- > 0$.

В силу равенства (33) и представлений (31) получаем

$$*f^{-1}(-t) = \begin{cases} p^+ t, & t \geq 0; \\ p^- t, & t < 0, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$*f(t) = \begin{cases} -\frac{t}{p^+}, & t \geq 0; \\ -\frac{t}{p^-}, & t < 0. \end{cases}$$

Определим отображение

$$\eta_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{p^+}}, & t \geq 0; \\ \frac{t}{\sqrt{p^-}}, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для группы аффинных преобразований $*G^+$ группа $\eta_1 *G^+ \eta_1^{-1}$ также будет группой аффинных преобразований. Прямая проверка показывает, что преобразование $\eta_1 *f \eta_1^{-1}$ также является аффинным. Следовательно, вся группа $\eta_1 \eta_*G^+ \eta^{-1} \eta_1^{-1}$ является группой аффинных преобразований.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову, А. М. Степину и Р. И. Григорчуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. *Альфорс Л. В.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
2. *Hinkkanen A.* The structure of certain quasisymmetric groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 422.)
3. *Бекларян Л. А.* О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$ // Матем. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 31–42.
4. *Бекларян Л. А.* Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности и прямой // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №3. С. 334–347.

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва
E-mail: beklar@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
09.06.2004 и 18.01.2005