Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горькавый, Конгруенции Бьянки двумерных поверхностей в E^4 , *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 10, 79–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:57:11

УДК 514

В. А. Горькавый

Конгруенции Бьянки двумерных поверхностей в E^4

Исследуются псевдосферические конгруенции Бьянки в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 . Доказано, что фокальные поверхности каждой такой конгруенции имеют постоянную отрицательную гауссову кривизну. Получены геометрическое и аналитическое описания специальных псевдосферических поверхностей в E^4 , допускающих конгруенцию Бьянки.

Библиография: 8 названий.

Введение

В настоящей статье изучаются двумерные поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 . Теория псевдосферических поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E^3 и обобщающая ее теория n -мерных псевдосферических подмногообразий в $(2n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве являются хорошо изученными направлениями классической дифференциальной геометрии, содержащими множество глубоких и красивых результатов (см., например, [1; гл. 10], [2]). Кроме того, теория псевдосферических поверхностей послужила становлению теории солитонов, в рамках которой получила затем свое дальнейшее развитие: уравнение $\sin$ -Гордона, описывающее поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной в E^3 , и обобщающая его система нелинейных уравнений, описывающая псевдосферические подмногообразия $F^n \subset E^{2n-1}$, представляют собой один из самых содержательных и наглядных примеров интегрируемых систем. Геометрически изящные конструкции преобразований псевдосферических поверхностей, найденные и изученные Л. Бьянки, А. В. Беклундом, Г. Дарбу (обобщенные на n -мерный случай в работах Ю. А. Аминова, см. [1; гл. 10, §24], К. Тенеблат и Ч.-Л. Тернг [3], [4]), стимулировали возникновение и развитие одного из важнейших объектов теории солитонов — понятия преобразования Бэклунда нелинейного уравнения.

В отличие от классической теории геометрии псевдосферических поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 представляет собой менее изученную область. Безусловно, имеется большое число работ, в которых такие поверхности исследуются, например, с точки зрения вопросов существования. Однако проблема вложимости этой теории в рамки теории солитонов остается пока что открытой. Не ясно, представляют ли псевдосферические поверхности F^2 в E^4 пример интегрируемой системы; не построена система дифференциальных уравнений,

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины.

которая бы обобщала уравнение sin-Гордона и эффективно описывала такие поверхности; не выяснен вопрос о существовании аналога преобразований Бэклунда. Первые результаты в данном направлении были получены Ю. А. Аминовым и А. Сымом в [5]. Было построено понятие преобразования Бьянки псевдосферических поверхностей в E^4 , обобщающее классическое преобразование Бьянки для F^2 в E^3 [6] и аналогичное многомерному преобразованию Бьянки для F^n в E^{2n-1} [1; гл. 10, §24]. А именно, пусть $F^2 \subset E^4$ – поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K = -1$, параметризованная орициклическими координатами u, v так, что ее метрика имеет вид $ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2$. Пусть $\rho(u, v)$ – соответствующий радиус-вектор F^2 . Преобразованием Бьянки поверхности F^2 называется регулярная поверхность $\tilde{F}^2$ в E^4 с радиус-вектором $\tilde{\rho} = \rho - \partial_u \rho$. Было показано, что в общем случае поверхность $\tilde{F}^2$ уже не является псевдосферической. Далее было выяснено, в каком случае преобразование Бьянки переводит псевдосферическую поверхность в псевдосферическую. Соответствующий специальный класс псевдосферических поверхностей описывается системой нелинейных уравнений, установленной в [5]. Как следствие было показано, что псевдосферические поверхности с плоской нормальной связностью в E^4 , не лежащие в гиперплоскостях $E^3 \subset E^4$, не допускают преобразований Бьянки.

Мы предлагаем несколько иной подход к построению аналога преобразований Бьянки для поверхностей в E^4 , основываясь на классических конструкциях Бьянки и Бэклунда. Пусть F^2 и $\tilde{F}^2$ – регулярные двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 . Линейной конгруэнцией называют диффеоморфизм $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, обладающий свойством “двойного касания”: для каждой точки $P \in F^2$ прямая линия, соединяющая P с ее образом $\psi(P) = \tilde{P} \in \tilde{F}^2$, касается поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$. Конгруэнцией Бьянки будем называть линейную конгруэнцию, обладающую двумя дополнительными свойствами:

- В₁) расстояние l между соответствующими точками P и $\psi(P) = \tilde{P}$ постоянно и равно 1;
- В₂) угол между касательными плоскостями $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$ в соответствующих точках равен $\pi/2$.

Как было показано Ю. А. Аминовым и А. Сымом в [5], построенное ими преобразование Бьянки не является, вообще говоря, линейной конгруэнцией. Однако если преобразование Бьянки псевдосферической поверхности в E^4 представляет собой линейную конгруэнцию, то преобразованная поверхность тоже псевдосферична; кроме того, не составляет труда показать, что в этом случае само преобразование Бьянки обладает дополнительными свойствами В₁), В₂). Таким образом, понятие конгруэнции Бьянки в E^4 является не менее естественным, чем понятие преобразования Бьянки из [5]. Более того, в определении конгруэнции Бьянки нет никаких априорных предположений о поверхностях F^2 и $\tilde{F}^2$, а сами эти поверхности входят в рассматриваемую конструкцию на равных правах.

Основной целью статьи является доказательство того факта, что, как и в классических случаях, конгруэнция Бьянки в E^4 связывает между собой только псевдосферические поверхности. Также изучается вопрос о том, насколько широко множество конгруэнций Бьянки, допускаемых заданной псевдосферической

поверхностью; дается эффективное описание тех псевдосферических поверхностей в E^4 , которые допускают преобразования Бьянки; указана взаимосвязь геометрических свойств псевдосферических поверхностей, связанных конгруенцией Бьянки.

Чтобы исключить из рассмотрения гиперповерхности в гиперплоскостях $E^3 \subset E^4$, являющихся хорошо изученным объектом классической теории, воспользуемся понятием точечной коразмерности (размерности первого нормального пространства) и будем всегда предполагать, что точечная коразмерность рассматриваемых поверхностей в E^4 равна 2. Нам понадобится следующая классификация точек таких поверхностей:

- 1) гиперболические точки — в каждой из них в касательной плоскости поверхности имеются два однозначно определенных сопряженных направления;
- 2) параболические точки — в каждой из них в касательной плоскости поверхности имеется однозначно определенное асимптотическое направление;
- 3) эллиптические точки — в каждой из них в касательной плоскости поверхности нет ни асимптотических, ни сопряженных направлений.

Такая классификация соответствует известным классификациям, рассмотренным в [1; гл. 8, § 5] и [7]. Поверхность, состоящая из гиперболических точек, несет однозначно определенную регулярную сеть сопряженных линий — обычно она называется *картановой поверхностью*. Поверхность, которая состоит из параболических точек и которую мы будем называть *P-поверхностью*, однозначным образом расслаивается на асимптотические линии. Наконец, поверхности, которые состоят из эллиптических точек и которые мы будем называть *E-поверхностями*, не содержат ни асимптотических, ни сопряженных линий. Следует напомнить, что произвольная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E^3 несет большое множество сетей сопряженных линий, поскольку для любого касательного направления на такой поверхности всегда существует сопряженное направление.

Важность сопряженных направлений и необходимость использования упомянутой классификации объясняется следующим классическим фактом, доказательство которого мы приводим для полноты изложения в § 1: *прямые линии линейной конгруенции $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ в E^4 задают направления на поверхностях F^2 и $\tilde{F}^2$, для которых существуют сопряженные направления*. Кроме того, по заданному полю направлений на поверхности $F^2 \subset E^4$, для которого существует поле сопряженных направлений, в общем случае можно построить линейную конгруенцию $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$. Как следствие поверхности с точечной коразмерностью 2 в E^4 допускают более узкое множество линейных конгруенций, чем поверхности в E^3 . В частности, *E-поверхности* вообще не допускают линейных конгруенций. Кроме того, можно показать, что *P-поверхности*, допускающие линейные конгруенции, — это в точности линейчатые поверхности, а конгруенций Бьянки такие поверхности вообще не допускают.

Таким образом, мы сосредоточиваем основное внимание на картановых поверхностях в E^4 . В общем случае каждая из картановых поверхностей допускает в точности две линейные конгруенции, соответствующие линейным конгруенциям сопряженных сетей, хорошо известным в классической терминологии как *первое* и *минус первое преобразования Лапласа* [2].

Основным результатом является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, и пусть $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – конгруенция Бьянки. Тогда гауссова кривизна K поверхности F^2 постоянна и равна -1 . При этом сеть сопряженных линий на F^2 нигде не ортогональна, а координатные линии $v = \text{const}$ сопряженной сети, касательные прямые которых представляют конгруенцию Бьянки, образуют семейство параллельных геодезических с орициклическими ортогональными траекториями.

Заметим, что вследствие симметрии рассматриваемой конструкции поверхность $\tilde{F}^2$ обладает в общем случае теми же свойствами, что и поверхность F^2 . Таким образом, если две поверхности F^2 и $\tilde{F}^2$ в E^4 связаны конгруенцией Бьянки, то они являются псевдосферическими поверхностями гауссовой кривизны $K = -1$, как и в классической трехмерной теории. С другой стороны, в отличие от классического случая в E^4 уже не любая псевдосферическая поверхность с точечной коразмерностью 2 допускает конгруенцию Бьянки: такая поверхность должна допускать введение двух систем координат, орициклической и сопряженной, имеющих одно общее семейство координатных линий. Орициклическая система является естественным объектом внутренней геометрии плоскости Лобачевского, тогда как требование наличия системы сопряженных координат (внешне-геометрический объект), как мы отметили выше, является существенным ограничением для поверхностей в E^4 . Например, нет никаких причин отрицать существование псевдосферических E - или P -поверхностей в E^4 , а такие поверхности не будут допускать конгруенций Бьянки.

В дополнение к теореме 1 мы доказываем, что найденные необходимые условия являются также и достаточными – аналогичное утверждение было сформулировано в иных терминах и доказано в [5].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность с гауссовой кривизной $K = -1$. Предположим, что на поверхности F^2 можно ввести сопряженные координаты u, v такие, что семейство координатных линий $v = \text{const}$ представлено параллельными геодезическими с ортогональными траекториями, т.е. метрика поверхности F^2 представляется в виде

$$ds^2 = (d\varphi(u, v))^2 + e^{2\varphi(u, v)}(dv)^2,$$

где $\varphi(u, v)$ – некоторая функция с $\partial_u \varphi \neq 0$. Предположим, что сопряженные координаты u, v нигде не ортогональны, т.е. $\partial_v \varphi \neq 0$. Тогда преобразование $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, задаваемое формулой

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho,$$

представляет конгруенцию Бьянки.

Следует подчеркнуть, что картанова псевдосферическая поверхность в E^4 допускает не более двух конгруенций Бьянки, что разительно отличает трехмерный

случай от четырехмерного. Интересно было бы построить псевдосферические картановы поверхности, допускающие в точности две конгруэнции Бьянки. На наш взгляд, таких поверхностей не существует, и если уж поверхность допускает конгруэнцию Бьянки, то такая конгруэнция единственна. Это дало бы повод использовать термин “пара псевдосферических картановых поверхностей в E^4 , связанных преобразованием Бьянки”, по аналогии, например, с термином “пара изотермических поверхностей, связанных преобразованием Кристоффеля”.

Доказательство теорем 1 и 2 проведено в §§2, 3, где также установлены некоторые взаимосвязи геометрических свойств картановых поверхностей, связанных конгруэнцией Бьянки. Мы находим эффективное представление для таких поверхностей в терминах решений специальной системы нелинейных уравнений: это позволяет убедиться в существовании описанных в теореме 2 псевдосферических поверхностей, с одной стороны, и выяснить, как преобразуются основные фундаментальные формы поверхностей под действием конгруэнции Бьянки, с другой стороны (теоремы 3 и 4). В работе [5] был найден один из вариантов такого описания в терминах орициклических координат, мы же используем сопряженные координаты, более удобные и естественные в рассматриваемой задаче. Основной результат в этом направлении можно сформулировать следующим образом: *псевдосферическая картанова поверхность F^2 в E^4 , несущая конгруэнцию Бьянки $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, описывается решением $\{\varphi(u, v), P(u, v), Q(u, v)\}$ системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \partial_{uu}^2 \varphi \cdot e^{2\varphi} + 2(\partial_u \varphi)^2 e^{2\varphi} - \partial_{vv}^2 \varphi \cdot e^{-2\varphi} + 2(\partial_v \varphi)^2 e^{-2\varphi} + PQ + 1 &= 0, \\ \partial_u P - \partial_u \varphi Q e^{2\varphi} &= 0, \\ \partial_v Q + \partial_v \varphi P e^{-2\varphi} &= 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющим условиям $\partial_u \varphi > 0$, $\partial_v \varphi > 0$, $P \neq 0$ и $Q \neq 0$. При этом самой конгруэнции Бьянки отвечает следующее преобразование решений этой системы:

$$\{\varphi(u, v), P(u, v), Q(u, v)\} \mapsto \{-\varphi(-v, -u), -Q(-v, -u), -P(-v, -u)\}.$$

В статье приводятся выражения фундаментальных форм поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в терминах функций $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$, сами же указанные уравнения представляют собой систему уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи как для F^2 , так и для $\tilde{F}^2$. Выписанная система уравнений может рассматриваться как некий аналог уравнения sin-Гордона. Представляется интересным исследовать вопрос интегрируемости этой системы, нахождение ее конкретных решений. В завершающем параграфе статьи находятся решения типа “бегущей волны”

$$\{\varphi(au + bv), P(au + bv), Q(au + bv)\}$$

и изучается вопрос существования решений вида

$$\{\varphi(u, v), P(\varphi(u, v)), Q(\varphi(u, v))\}.$$

Автор выражает благодарность профессорам Ю. А. Аминову и А. Сыму за stimulating и плодотворное обсуждение работы.

§ 1. Линейные конгруенции в E^4

По определению линейной конгруенцией в E^4 называют локальный диффеоморфизм регулярных поверхностей $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ в E^4 , обладающий свойством “двойного касания”: для каждой точки $P \in F^2$ прямая линия, соединяющая P с ее образом $\psi(P) = \tilde{P} \in \tilde{F}^2$, касается поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$. Часто линейная конгруенция ассоциируется с соответствующим двупараметрическим семейством прямых в E^4 , а F^2 и $\tilde{F}^2$ называются *фокальными поверхностями конгруенции*. В отличие от линейных конгруенций в E^3 линейные конгруенции в E^4 образуют весьма специальный класс двупараметрических семейств прямых. Прежде всего, мы рассмотрим следующий вопрос: когда поле касательных прямых, выбранное на заданной поверхности F^2 , соответствует некоторой линейной конгруенции $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$?

Предположим, что поверхность F^2 задана радиус-вектором $r = \rho(u, v)$, и обозначим через X поле направляющих векторов выбранного поля прямых линейной конгруенции. Векторное поле X разлагается в линейную комбинацию базисных векторов: $X = X^1 \partial_u \rho + X^2 \partial_v \rho$. Радиус-вектор поверхности $\tilde{F}^2$ должен записываться в виде

$$\tilde{\rho}(u, v) = \rho + \lambda(X^1 \partial_u \rho + X^2 \partial_v \rho). \quad (1)$$

Задача состоит в нахождении гладкой функции $\lambda(u, v)$ такой, чтобы F^2 и $\tilde{F}^2$ обладали свойством двойного касания, т.е. чтобы векторное поле X разлагалось в линейную комбинацию касательных векторов $\partial_u \tilde{\rho}$, $\partial_v \tilde{\rho}$ поверхности $\tilde{F}^2$.

Дифференцируя (1) и находя $\partial_u \tilde{\rho}$, $\partial_v \tilde{\rho}$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_u \tilde{\rho} &= \partial_u \rho (1 + \partial_u (\lambda X^1) + \lambda X^1 \Gamma_{11}^1 + \lambda X^2 \Gamma_{12}^1) \\ &\quad + \partial_v \rho (\partial_u (\lambda X^2) + \lambda X^1 \Gamma_{11}^2 + \lambda X^2 \Gamma_{12}^2) + \sum_{\sigma=1}^2 n_\sigma (X^1 L_{11}^\sigma + X^2 L_{12}^\sigma) \lambda \\ &= \partial_u \rho A_1 + \partial_v \rho B_1 + n_1 C_1 + n_2 D_1, \\ \partial_v \tilde{\rho} &= \partial_u \rho (\partial_v (\lambda X^1) + \lambda X^1 \Gamma_{12}^1 + \lambda X^2 \Gamma_{22}^1) \\ &\quad + \partial_v \rho (1 + \partial_v (\lambda X^2) + \lambda X^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda X^2 \Gamma_{22}^2) + \sum_{\sigma=1}^2 n_\sigma (X^1 L_{12}^\sigma + X^2 L_{22}^\sigma) \lambda \\ &= \partial_u \rho A_2 + \partial_v \rho B_2 + n_1 C_2 + n_2 D_2, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь и ниже через g_{ij} и Γ_{ij}^k обозначены коэффициенты метрики и символы Кристоффеля поверхности F^2 , через n_1 , n_2 обозначены поля нормалей к F^2 , образующих в каждой точке $P \in F^2$ ортонормированный базис в нормальной плоскости $N_P F^2$, а L_{ij}^1 и L_{ij}^2 обозначают коэффициенты вторых квадратичных форм F^2 относительно n_1 и n_2 . Записывая разложение векторов $\partial_u \tilde{\rho}$, $\partial_v \tilde{\rho}$ и X в базисе $\partial_u \rho$, $\partial_v \rho$, n_1 , n_2 в E^4 , легко увидеть, что условие двойного касания эквивалентно равенству

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ X^1 & X^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad (4)$$

причем первая и вторая строки выписанной матрицы должны быть линейно независимы, чтобы гарантировать регулярность поверхности $\tilde{F}^2$. Условие (4) представляет собой систему алгебраических и дифференциальных уравнений для нахождения функции $\lambda(u, v)$. Ясно, что $\lambda \equiv 0$ удовлетворяет (4), так как X образовано касательными векторами к самой исходной поверхности F^2 . Нас же будет интересовать не обращающееся в нуль решение $\lambda(u, v)$ системы (4), а линейную конгруэнцию в таком случае будем называть *нетривиальной*.

Поскольку X^1 и X^2 не равны нулю одновременно, из (4) следует, что $C_1 D_2 - C_2 D_1 = 0$. Поэтому если существует не обращающееся в нуль решение λ системы (4), то

$$(X^1)^2 \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{vmatrix} + X^1 X^2 \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} + (X^2)^2 \begin{vmatrix} L_{12}^1 & L_{12}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Как следствие касательное векторное поле X на F^2 не может быть выбрано произвольным, оно обязано удовлетворять условию (5). Это однородное уравнение второго порядка, чьи коэффициенты определяются вторыми квадратичными формами F^2 . Такое уравнение в точности описывает сопряженные направления на F^2 .

Напомним, что направления $(V^1 : V^2)$, $(W^1 : W^2)$ в касательной плоскости $T_P F^2$ сопряжены друг другу, если $L_{ij}^1 V^i W^j = 0$, $L_{ij}^2 V^i W^j = 0$. Самосопряженное направление называется *асимптотическим*, если координаты удовлетворяют условиям $L_{ij}^1 V^i V^j = 0$, $L_{ij}^2 V^i V^j = 0$. Условие сопряженности можно переписать как систему линейных уравнений для W^1, W^2 :

$$\begin{pmatrix} L_{11}^1 V^1 + L_{12}^1 V^2 & L_{12}^1 V^1 + L_{22}^1 V^2 \\ L_{11}^2 V^1 + L_{12}^2 V^2 & L_{12}^2 V^1 + L_{22}^2 V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда V^1, V^2 являются решением однородного уравнения второго порядка

$$(V^1)^2 \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{12}^1 & L_{12}^2 \end{vmatrix} + V^1 V^2 \begin{vmatrix} L_{11}^1 & L_{11}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} + (V^2)^2 \begin{vmatrix} L_{12}^1 & L_{12}^2 \\ L_{22}^1 & L_{22}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Ясно, что W^1, W^2 тоже должны быть решением этого уравнения. Сравнивая (5) и (6), получаем следующее условие на X , необходимое для существования линейной конгруэнции.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – нетривиальная линейная конгруэнция. Тогда прямые линейной конгруэнции ψ представляют поле касательных направлений на F^2 , для которого существует поле сопряженных направлений.

Очевидно ввиду симметричности рассматриваемой конструкции, что прямые линейной конгруэнции ψ представляют поле касательных направлений, для которого существует поле сопряженных направлений, и на поверхности $\tilde{F}^2$. Позже мы покажем, что найденное условие является не только необходимым, но и достаточным в общем случае для существования линейной конгруэнции.

Непосредственным следствием леммы 1 является существенное различие в поведении линейных конгруенций в E^3 и в E^4 . Анализируя условие сопряженности, аналитически выраженное уравнением (6), легко увидеть, что разрешимость (6) зависит от коэффициентов вторых квадратичных форм и в первую очередь – от точечной коразмерности F^2 . Напомним, что *точечной коразмерностью* (размерностью первого нормального пространства) поверхности F^2 называют величину

$$\text{codim}_P = \text{Rank} \begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{12}^1 & L_{22}^1 \\ L_{11}^2 & L_{12}^2 & L_{22}^2 \end{pmatrix},$$

зависящую от точки $P \in F^2$. Если codim_P равна 2, то (6) является невырожденным однородным уравнением второго порядка. В этом случае в зависимости от точки $P \in F^2$ уравнение (6) имеет либо два линейно независимых решения $(V^1 : V^2)$, $(W^1 : W^2)$, либо одно ненулевое решение $(V^1 : V^2)$, либо не имеет решений. Соответственно в касательной плоскости $T_P F^2$ будет либо пара однозначно определенных сопряженных направлений, либо одно однозначно определенное асимптотическое направление, либо не будет ни сопряженных, ни асимптотических направлений. Если codim_P равна 1 в точке P , то уравнение (6) вырождается в тождество и, значит, для любого направления V в $T_P F^2$ будет существовать однозначно определенное сопряженное направление W ; такая ситуация возникает во всех точках, например когда F^2 принадлежит некоторой аффинной гиперплоскости $E^3 \subset E^4$. Наконец, если codim_P равна 0 в точке P , то все направления в $T_P F^2$ сопряжены друг другу. Таким образом, мы видим, что понятие сопряженности для векторов на поверхности в E^4 , а значит, и понятие линейной конгруенции в E^4 , связано со значительно более существенными ограничениями, чем в классической трехмерной ситуации.

Проведенный анализ уравнения (6), описывающего сопряженные направления, позволяет сформулировать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Предположим, что точечная коразмерность поверхности $F^2 \subset E^4$ в точке P равна 2. Тогда имеет место одна и только одна ситуация из трех:*

- 1) *касательная плоскость $T_P F^2$ содержит единственную пару линейно независимых сопряженных направлений V, W , т.е. $L(V, W) = 0$;*
- 2) *касательная плоскость $T_P F^2$ содержит единственное асимптотическое направление V , т.е. $L(V, V) = 0$;*
- 3) *в касательной плоскости $T_P F^2$ нет ни сопряженных, ни асимптотических направлений, но зато для любого вектора V существует единственный $\pm W$ (комплексно-сопряженный к V) такой, что $L(V + iW, V - iW) = 0$.*

В зависимости от того, какая из трех ситуаций имеет место, точка P называется гиперболической, параболической или эллиптической соответственно. Эта классификация эквивалентна классификации точек поверхности F^2 в E^4 с помощью грасманова образа, предложенной Аминовым, и аффинной классификации, исследованной С. З. Шефелем, А. А. Борисенко и др., см. [1; гл. 8, § 5], [7], [8]. В частности, Аминов рассмотрел секционную кривизну $\bar{K}$ многообразия Грассмана $G_{2,4}$ по

двумерным площадкам, касательным к грасманову образу поверхности $F^2 \subset E^4$. Кривизна $\overline{K}$ принимает следующие значения: $0 < \overline{K} < 1$, если P гиперболическая; $\overline{K} = 1$, если P параболическая; и $1 < \overline{K} < 2$, если P эллиптическая.

Поверхность в E^4 , состоящая из гиперболических точек, представляет собой картанову поверхность, такая поверхность характеризуется наличием однозначно определенной регулярной сети сопряженных линий. Поверхность в E^4 , все точки которой параболические, мы будем называть P -поверхностью, такая поверхность однозначным образом расслаивается на асимптотические линии. Поверхность в E^4 , все точки которой эллиптические, мы будем называть E -поверхностью, такая поверхность не содержит ни асимптотических, ни сопряженных направлений. Напомним, что произвольная поверхность в E^3 несет большое множество сетей сопряженных линий, в этом смысле трехмерный случай существенно отличается от четырехмерного.

Отметим тот очевидный факт, что с локальной точки зрения картановы и E -поверхности представляют собой ситуацию общего положения, тогда как P -поверхности и поверхности с точечной коразмерностью меньше 2 (поверхности в гиперплоскостях $E^3 \subset E^4$ и поверхности с вырожденным грасмановым образом) представляют собой более частные, специальные классы поверхностей в E^4 .

Принимая во внимание описанную классификацию и доказанную выше лемму 1, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2. Пусть $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – нетривиальная линейная конгруэнция. Тогда F^2 состоит из гиперболических и параболических точек. При этом поле прямых линейной конгруэнции ψ обладает следующим свойством: в каждой гиперболической точке на F^2 прямая конгруэнции представляет одно из двух сопряженных направлений в касательной плоскости, а в каждой из параболических точек – асимптотическое направление.

СЛЕДСТВИЕ. Произвольная картанова поверхность в E^4 допускает не более двух нетривиальных линейных конгруэнций. Произвольная P -поверхность в E^4 допускает не более одной нетривиальной линейной конгруэнции. Произвольная E -поверхность в E^4 не допускает нетривиальных линейных конгруэнций.

Подводя итог, с локальной точки зрения мы можем дать следующую классификацию поверхностей в E^4 , возможно допускающих линейные конгруэнции: картановы поверхности, P -поверхности, поверхности с вырожденным грасмановым образом, поверхности в аффинных гиперплоскостях $E^3 \subset E^4$. Далее внимание в основном будет уделено картановым поверхностям, представляющим в данной ситуации наиболее общий класс поверхностей.

§ 2. Линейные конгруэнции картановых поверхностей

Будем предполагать, что поверхность $F^2 \subset E^4$ картанова. Она имеет точечную коразмерность 2 и состоит из гиперболических точек. В каждой точке на F^2 в касательной плоскости имеется единственная пара сопряженных направлений.

Мы можем ввести локальные координаты u, v на F^2 так, чтобы координатные линии касались сопряженных направлений и, таким образом, образовывали бы сеть сопряженных линий на F^2 . Очевидно, что сеть сопряженных линий на картановой поверхности F^2 определена однозначно, а сами координаты допускают шкалирующее преобразование $\hat{u} = \hat{u}(u)$, $\hat{v} = \hat{v}(v)$. В данной параметризации обе вторые квадратичные формы диагональны: $L_{12}^1 = 0$, $L_{12}^2 = 0$. Кроме того, $L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2 \neq 0$, поскольку точечная коразмерность поверхности F^2 равна 2. (Если бы нормальная связность F^2 была плоской, то можно было бы диагонализировать и первую квадратичную форму, $g_{12} = 0$, и тогда координатные кривые были бы линиями кривизны.)

Найдем аналитическое представление рассматриваемой линейной конгруенции $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$. Вследствие леммы 2 поле прямых линейной конгруенции ψ должно соответствовать одному из двух полей сопряженных направлений на F^2 . Иначе говоря, в качестве направляющего векторного поля X мы должны взять либо $\partial_u \rho$, либо $\partial_v \rho$. Не уменьшая общности, положим $X = \partial_u \rho$, т.е. $X^1 = 1$, $X^2 = 0$. Тогда условие двойного касания (4) примет вид:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} 1 + \partial_u \lambda + \lambda \Gamma_{11}^1 & \lambda \Gamma_{11}^2 & \lambda L_{11}^1 & \lambda L_{11}^2 \\ \partial_v \lambda + \lambda \Gamma_{12}^1 & 1 + \lambda \Gamma_{12}^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (7)$$

Так как L_{11}^1 и L_{11}^2 не могут быть равными нулю одновременно ввиду того, что $\text{codim}_P \equiv 2$, условие (7) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$1 + \lambda \Gamma_{12}^2 = 0. \quad (8)$$

Таким образом, на векторное поле X не налагается более никаких ограничений, и мы имеем алгебраическое уравнение для λ . Если Γ_{12}^2 не обращается в нуль, то решением будет функция $\lambda = -1/\Gamma_{12}^2$. Следовательно, для радиус-вектора поверхности $\tilde{F}^2$ получаем выражение [2]

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u \rho. \quad (9)$$

Используя (9), установим некоторые геометрические свойства поверхности $\tilde{F}^2$. Продифференцируем $\tilde{\rho}$ и найдем касательные векторы $\tilde{F}^2$:

$$\partial_u \tilde{\rho} = \partial_u \rho \left(1 - \partial_u \left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2} \right) - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \Gamma_{11}^1 \right) - \left(\partial_v \rho \Gamma_{11}^2 + n_\sigma L_{11}^\sigma \right) \frac{1}{\Gamma_{12}^2}, \quad (10.1)$$

$$\partial_v \tilde{\rho} = -\partial_u \rho \left(\partial_v \left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2} \right) + \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \Gamma_{12}^1 \right). \quad (10.2)$$

Как следствие легко видеть, что $\tilde{F}^2$ регулярна тогда и только тогда, когда

$$\hat{A} = - \left(\partial_v \left(\frac{1}{\Gamma_{12}^2} \right) + \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \Gamma_{12}^1 \right) = \frac{1}{(\Gamma_{12}^2)^2} (\partial_v \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1) \neq 0. \quad (11)$$

Далее, дифференцируя (10.2), получаем

$$\partial_u \partial_v \tilde{\rho} = \partial_u \rho (\partial_u \hat{A} + \hat{A} \Gamma_{11}^1) + (\partial_v \rho \Gamma_{11}^2 + n_\sigma L_{11}^\sigma) \hat{A}.$$

Не составляет труда убедиться в том, что $\partial_u \partial_v \tilde{\rho}$ разлагается в линейную комбинацию векторов $\partial_u \tilde{\rho}$ и $\partial_v \tilde{\rho}$, касательных к $\tilde{F}^2$. Это означает, что координатные u - и v -кривые на $\tilde{F}^2$ являются сопряженными. Таким образом, как и ожидалось ввиду симметричности рассматриваемой конструкции, сеть сопряженных линий на F^2 отображается линейной конгруенцией ψ на сеть сопряженных линий на $\tilde{F}^2$, т.е. ψ может рассматриваться как линейная конгруенция сопряженных сетей [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, параметризованная сопряженными координатами, $r = \rho(u, v)$ – ее радиус-вектор. Пусть $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – нетривиальная линейная конгруенция. Тогда ψ представляется (с точностью до переобозначения $u \leftrightarrow v$) в виде

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u \rho,$$

и при этом имеет место (11). Линейная конгруенция ψ сохраняет сопряженность координатных кривых.

Очевидно, верен и обратный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, параметризованная сопряженными координатами, $r = \rho(u, v)$ – ее радиус-вектор. Предположим, что $\Gamma_{12}^2 \neq 0$, $\partial_v \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 \neq 0$. Тогда радиус-вектор

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u \rho$$

задает линейную конгруенцию.

Отметим, что выражение $(1/\Gamma_{12}^2) \partial_u \rho$ инвариантно при любом шкалирующем преобразовании сопряженных координат $\hat{u} = \hat{u}(u)$, $\hat{v} = \hat{v}(v)$. Как следствие, если поверхность F^2 и поле сопряженных направлений на F^2 заданы, то по ним однозначно восстанавливается линейная конгруенция ψ и поверхность $\tilde{F}^2$. Согласно классической терминологии поверхность $\tilde{F}^2$ – первое преобразование Лапласа поверхности F^2 [2].

Аналогичным образом можно проанализировать ситуацию, когда X направлено вдоль второго поля сопряженных направлений $\partial_v \rho$ на F^2 , т.е. $X^1 = 0$, $X^2 = 1$. Радиус-вектор поверхности $\tilde{F}^2$ будет иметь в этом случае вид

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\Gamma_{12}^1} \partial_v \rho. \quad (12)$$

Поверхность $\tilde{F}^2$ называется минус первым преобразованием Лапласа поверхности F^2 [2].

Подводя итог, можем сделать следующий вывод: в противоположность классической трехмерной ситуации произвольная картанова поверхность F^2 в E^4 допускает в общем случае две и только две нетривиальные линейные конгруенции.

Эти конгруенции, первое и минус первое преобразования Лапласа, определяются однозначно и соответствуют двум однозначно определенным полям сопряженных направлений на F^2 [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Было бы желательным, чтобы линейная конгруенция преобразовывала картанову поверхность снова в картанову. Это свойство, очевидно, имеет место при дополнительном предположении, что точечная коразмерность преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$ равна 2. Если же не делать этого предположения, то можно, вообще говоря, столкнуться с ситуацией, когда в некоторых точках на $\tilde{F}^2$ точечная коразмерность становится меньше 2, а значит, $\tilde{F}^2$ уже не будет картановой.

§3. Конгруенции Бьянки картановых поверхностей

Теперь будем предполагать, что линейная конгруенция $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ в E^4 обладает двумя дополнительными свойствами:

- В₁) расстояние l между соответствующими точками $P \in F^2$ и $\psi(P) = \tilde{P} \in \tilde{F}^2$ постоянно и равно 1, т.е. $l = |P\tilde{P}| \equiv 1$;
- В₂) угол ω между касательными плоскостями поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в соответствующих по конгруенции точках постоянен и равен $\pi/2$, т.е.

$$\angle(T_P F^2, T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2) \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Естественно назвать такую линейную конгруенцию $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ в E^4 конгруенцией Бьянки, подобно аналогичной классической конструкции в E^3 . Очевидно, что поверхности F^2 и $\tilde{F}^2$, связанные конгруенцией Бьянки, должны обладать некоторыми специальными свойствами, являющимися следствием выполнения условий В₁) и В₂).

Мы по-прежнему будем рассматривать наиболее общий с локальной точки зрения случай и будем предполагать, что $F^2 \subset E^4$ является картановой поверхностью. Воспользуемся параметризацией $r = \rho(u, v)$ поверхности F^2 с помощью сопряженных координат, рассмотренной в предыдущем параграфе. Как было установлено, линейная конгруенция ψ описывается либо формулой (9), либо формулой (12). Не уменьшая общности, будем предполагать, что поверхность $\tilde{F}^2$ задана радиус-вектором (9), при этом выполнено условие регулярности (11). Поскольку Γ_{12}^2 не обращается в нуль, мы можем, не уменьшая общности, специализировать выбор параметра u таким образом, чтобы Γ_{12}^2 было положительным.

Расстояние l между соответствующими точками на F^2 и $\tilde{F}^2$ находится легко с помощью (9):

$$l = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\Gamma_{12}^2}. \quad (13)$$

Найдем теперь угол ω между касательными плоскостями $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$. Напомним, что взаимное расположение двух векторных подпространств E_1^2, E_2^2 в E^4 корректно определяется двумя углами [8]. Если пересечение $\zeta = E_1^2 \cup E_2^2$ является прямой, то один из этих двух углов равен нулю, а второй определяется как

угол между прямыми линиями в E_1^2 , E_2^2 , ортогональными прямой пересечения ζ . Именно этот угол подразумевается в условии В₂).

Вектор ξ в $T_P F^2$, ортогональный $\partial_u \rho$, и вектор η в $T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$, ортогональный $\partial_v \tilde{\rho} = \hat{A} \partial_u \rho$, находятся элементарно:

$$\begin{aligned}\xi &= -g_{12} \partial_u \rho + g_{11} \partial_v \rho, \\ \eta &= \Gamma_{11}^2 (-g_{12} \partial_u \rho + g_{11} \partial_v \rho) + g_{11} L_{11}^\sigma n_\sigma.\end{aligned}$$

Как следствие для угла между ξ и η , который как раз и равен углу ω между касательными плоскостями $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$, получаем следующую формулу:

$$\cos \omega = \frac{\Gamma_{11}^2}{\sqrt{(\Gamma_{11}^2)^2 + \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \sum_\sigma (L_{11}^\sigma)^2}}. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражения в правых частях формул (13) и (14) для l и $\cos \omega$ инвариантны относительно шкалирующих замен координат $\hat{u} = \hat{u}(u)$, $\hat{v} = \hat{v}(v)$, сохраняющих сопряженность. Их геометрическая интерпретация будет дана в приложении.

Таким образом, условия В₁) и В₂) можно записать в форме двух следующих равенств:

$$\Gamma_{12}^2 = \sqrt{g_{11}}, \quad (15)$$

$$\Gamma_{11}^2 \equiv 0. \quad (16)$$

Эти равенства содержат только коэффициенты метрики и символы Кристоффеля поверхности F^2 , поэтому они представляют собой некоторые ограничения на внутреннюю геометрию F^2 , дополняющие внешне-геометрическую сопряженность используемых координат на F^2 .

ЛЕММА 3. *Условия $\Gamma_{12}^2 = \sqrt{g_{11}} > 0$ и $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$ выполнены тогда и только тогда, когда существуют функция $\varphi(u, v)$ с положительной производной $\partial_u \varphi$ и положительная функция $f(v)$ такие, что*

$$g_{11} = (\partial_u \varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi, \quad g_{22} = (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\varphi} f^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем условие $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$ через коэффициенты g_{ij} первой квадратичной формы:

$$g_{11} \cdot \partial_u g_{12} - \frac{1}{2} g_{11} \cdot \partial_v g_{11} - \frac{1}{2} g_{12} \cdot \partial_u g_{11} = 0.$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$\partial_u \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_v \sqrt{g_{11}}.$$

Как следствие существует функция $\varphi(u, v)$ такая, что

$$\sqrt{g_{11}} = \partial_u \varphi \quad \text{и} \quad \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_v \varphi,$$

т.е.

$$g_{11} = (\partial_u \varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi, \quad (17)$$

при этом, очевидно, $\partial_u \varphi > 0$.

Теперь проанализируем условие $\Gamma_{12}^2 = \sqrt{g_{11}}$. С помощью коэффициентов g_{ij} это равенство записывается в виде

$$-\frac{1}{2}g_{12} \cdot \partial_v g_{11} + \frac{1}{2}g_{11} \cdot \partial_u g_{22} = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\sqrt{g_{11}}.$$

Применяя (17), получаем

$$\frac{1}{2}\partial_u g_{22} - \partial_u \partial_v \varphi \partial_v \varphi = (g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) \partial_u \varphi. \quad (18)$$

Перепишем несколько иначе:

$$\partial_u (g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) = 2(g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) \partial_u \varphi.$$

Очевидно, полученное равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует функция $f(v)$ такая, что

$$g_{22} = (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\varphi} f^2(v).$$

Поскольку $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = (\partial_u \varphi)^2 e^{2\varphi} f^2(v) > 0$, функцию $f(v)$ можно считать положительной. Подчеркнем, что функция $\varphi(u, v)$ определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, после чего функция $f(v)$ тоже определяется единственным образом.

Обратно, если существуют функция $\varphi(u, v)$ с положительной производной $\partial_u \varphi > 0$ и положительная функция $f(v)$ такие, что $g_{11} = (\partial_u \varphi)^2$, $g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi$, $g_{22} = (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\varphi} f^2$, то будут выполнены условия (15) и (16) – в этом легко убедиться, вычислив символы Кристоффеля Γ_{12}^2 и Γ_{22}^1 . Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 3 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, и пусть $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – конгруенция Бьянки. Тогда гауссова кривизна K поверхности F^2 постоянна и равна -1 . При этом сеть сопряженных линий на F^2 нигде не ортогональна, а координатные линии $v = \text{const}$ этой сети, касательные прямые которых представляют конгруенцию Бьянки, образуют семейство параллельных геодезических с орициклическими ортогональными траекториями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие леммы 3 метрика поверхности F^2 приводит к виду $ds^2 = (d\varphi)^2 + e^{2\varphi}(f dv)^2$. После замены координат $d\bar{u} = d\varphi(u, v)$, $d\bar{v} = f(v) dv$ мы получаем стандартный вид метрики плоскости Лобачевского в орициклических координатах $ds^2 = (d\bar{u})^2 + e^{2\bar{u}}(d\bar{v})^2$. Поэтому F^2 , очевидно, является псевдосферической поверхностью с постоянной гауссовой кривизной $K \equiv -1$. Напомним, что в орициклической системе координат координатные линии $\bar{v} = \text{const}$ – это параллельные геодезические, а ортогональные им координатные линии $\bar{u} = \text{const}$ – орициклы. С другой стороны, семейство линий $v = \text{const}$ представляется теми же кривыми, что и семейство координатных линий $\bar{v} = \text{const}$.

Наконец, поскольку в рассматриваемой ситуации $\Gamma_{12}^2 = \sqrt{g_{11}} = (\partial_u \varphi)^2$ и $\partial_v \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = \partial_u \varphi \partial_v \varphi = g_{12}$, что проверяется непосредственным вычислением, то условие (11), являющееся необходимым для существования конгруенции Бьянки и эквивалентное регулярности преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$, будет выполнено тогда и только тогда, когда $g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi$ не обращается в нуль. Это и означает, что сеть сопряженных линий на F^2 нигде не ортогональна. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, и пусть $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – конгруенция Бьянки. Тогда нормальная связность F^2 не может быть плоской.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы нормальная связность F^2 была плоской, то на F^2 можно было бы ввести координаты кривизны. Сеть сопряженных координатных линий на F^2 была бы образована линиями кривизны, а значит, была бы ортогональной, что противоречит необходимому условию $g_{12} \neq 0$, установленному в теореме 1.

Заметим, что аналогичное утверждение было ранее установлено Аминовым и Сымом в [5].

Принимая во внимание утверждение 3 и учитывая, что лемма 3 представляет необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейная конгруенция была конгруенцией Бьянки, не составляет труда убедиться в истинности следующего результата, дополняющего теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность с гауссовой кривизной $K = -1$. Предположим, что на поверхности F^2 можно ввести сопряженные координаты u, v такие, что семейство координатных линий $v = \text{const}$ представлено параллельными геодезическими с ортогональными траекториями, т.е. метрика поверхности F^2 представляется в виде

$$ds^2 = (d\varphi(u, v))^2 + e^{2\varphi(u, v)}(dv)^2,$$

где $\varphi(u, v)$ – некоторая функция с $\partial_u \varphi \neq 0$. Предположим, что сопряженные координаты u, v нигде не ортогональны, т.е. $\partial_v \varphi \neq 0$. Тогда преобразование $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, задаваемое формулой

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho,$$

представляет конгруенцию Бьянки.

Таким образом, картанова поверхность F^2 в E^4 , допускающая конгруенцию Бьянки, обязана быть псевдосферической и иметь гауссову кривизну $K = -1$. Кроме того, в теоремах 1 и 2 указаны ограничения внутри-геометрического характера, предъявляемые к координатной сети сопряженных линий картановой поверхности F^2 , которые вместе с псевдосферичностью являются необходимыми и достаточными условиями существования конгруенции Бьянки. А именно, семейство координатных линий сопряженной сети на F^2 , касательные прямые к которым представляют конгруенцию Бьянки, образовано параллельными геодезическими с ориентированными ортогональными траекториями. Вообще говоря, произвольная псевдосферическая поверхность в E^4 не обязана быть картановой и, более того, не обязана нести сопряженную сеть указанного выше специального вида. Поэтому интерес представляет вопрос описания таких поверхностей. Мы дадим ответ на этот вопрос, воспользовавшись уравнениями Гаусса–Кодацци–Риччи, и существенно усилим теоремы 1 и 2.

Заменой $d\hat{v} = f(v) dv$ всегда можно добиться того, что $f \equiv 1$; не уменьшая общности, будем предполагать, что v специализировано именно таким образом. Еще раз отметим, что $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\partial_u \varphi)^2 e^{2\varphi}$, т.е. условие регулярности F^2 эквивалентно тому, что $\partial_u \varphi$ не обращается в нуль. Кроме того, в рассматриваемой ситуации $\partial_v \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = \partial_u \varphi \partial_v \varphi$, поэтому условие (11), необходимое для существования конгруенции Бьянки (и эквивалентное регулярности преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$), будет выполнено тогда и только тогда, когда $\partial_v \varphi$ не обращается в нуль. Мы всегда можем выбрать параметр v , сделав при необходимости замену $v \mapsto -v$, таким образом, чтобы производная $\partial_v \varphi$ (т.е. коэффициент g_{12}) была положительной.

Далее, специализируем выбор нормальных векторов n_1, n_2 на F^2 таким образом, чтобы добиться выполнения равенства $L_{11}^2 \equiv 0$. Это всегда можно сделать, направив вектор n_1 вдоль вектора нормальной кривизны геодезической линии $v = \text{const}$. Вектор n_2 выберем так, чтобы n_1 и n_2 образовывали положительно ориентированный базис нормальной плоскости, а векторы $\partial_u \rho, \partial_v \rho, n_1$ и n_2 — положительно ориентированный базис в E^4 .

После такого выбора сопряженных координат u, v и нормальных векторов n_1, n_2 на рассматриваемой псевдосферической картановой поверхности F^2 уравнение Гаусса и два из четырех уравнений Кодацци для F^2 (вытекающие из равенства $\partial_{uv}\rho = \partial_{vu}\rho$) будут иметь следующий вид:

$$L_{11}^1 L_{22}^1 + (\partial_u \varphi)^2 e^{2\varphi} = 0, \quad (19.1)$$

$$\partial_v \left(\frac{L_{11}^1 e^\varphi}{\partial_u \varphi} \right) = 0, \quad (19.2)$$

$$L_{11}^1 \mu_2 = 0. \quad (19.3)$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения $\mu_1 = \langle \partial_u n_1, n_2 \rangle$, $\mu_2 = \langle \partial_v n_1, n_2 \rangle$. Из (19.2) следует, что функция $Z = L_{11}^1 e^\varphi / \partial_u \varphi$ не зависит от v . Не составляет труда убедиться в том, что заменой $d\hat{u} = Z(u) du$ можно добиться того, чтобы $Z \equiv 1$ (если Z отрицательна, то следует сначала заменить n_1 на $-n_1$). Не уменьшая общности, мы будем предполагать, что именно такие специализация координаты u и выбор нормального вектора n_1 были сделаны с самого начала, т.е. $L_{11}^1 = \partial_u \varphi e^{-\varphi}$.

Далее, поскольку точечная коразмерность F^2 равна 2, то коэффициент L_{11}^1 не обращается в нуль, поэтому из (19.3) получаем $\mu_2 \equiv 0$. Наконец, из уравнения Гаусса (19.1) следует $L_{22}^1 = -\partial_u \varphi e^{3\varphi}$.

Таким образом, метрика, вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения рассматриваемой поверхности $F^2 \subset E^4$ представляются в виде

$$g = \begin{pmatrix} (\partial_u \varphi)^2 & \partial_u \varphi \partial_v \varphi \\ \partial_u \varphi \partial_v \varphi & (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\varphi} \end{pmatrix}, \quad (20.1)$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & -\partial_u \varphi e^{3\varphi} \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad (20.2)$$

$$\mu_1 = \mu_1, \quad \mu_2 \equiv 0. \quad (20.3)$$

Следует отметить, что теперь сопряженные координаты u, v на F^2 фиксированы однозначно с точностью до постоянных слагаемых, поскольку выше мы воспользовались шкалирующими заменами $\hat{u} = \hat{u}(u)$, $\hat{v} = \hat{v}(v)$, чтобы избавиться от функций $f(v)$ и $Z(u)$. Кроме того, однозначно определены и нормальные векторные поля n_1 и n_2 . С другой стороны, функция φ с положительными производными $\partial_u \varphi, \partial_v \varphi$, которая используется в выражении (20.1) для коэффициентов метрики F^2 , определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому если вместо φ мы возьмем $\bar{\varphi} = \varphi + c_0$, то это повлечет за собой шкалирующую замену координат $\bar{u} = e^{-c_0} u$, $\bar{v} = e^{c_0} v$. Благодаря такой замене координат мы снова получим выражения вида (20.1)–(20.3) для коэффициентов фундаментальных форм поверхности F^2 .

Найдем теперь коэффициенты фундаментальных форм преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$, заданной радиус-вектором (9). Используя выражения (20.1), легко получить $\Gamma_{12}^2 = \partial_u \varphi$, поэтому

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho. \quad (21)$$

Дифференцируя (21), находим касательные векторы $\tilde{F}^2$:

$$\partial_u \tilde{\rho} = \partial_u \rho - e^{-\varphi} n_1, \quad \partial_v \tilde{\rho} = \frac{\partial_v \varphi}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho. \quad (22)$$

Еще раз убеждаемся, что $\tilde{F}^2$ будет регулярной тогда и только тогда, когда $\partial_v \varphi \neq 0$. Далее, легко проверить, что векторы

$$\tilde{n}_1 = \frac{1}{e^\varphi \partial_u \varphi} (\partial_v \varphi \partial_u \rho - \partial_u \varphi \partial_v \rho), \quad \tilde{n}_2 = -n_2 \quad (23)$$

ортогональны касательным векторам $\partial_u \tilde{\rho}, \partial_v \tilde{\rho}$ и образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_{\tilde{F}^2}$. Наконец, вычисляя коэффициенты $\tilde{g}_{ij}$ метри-

ки $\tilde{F}^2$, коэффициенты $\tilde{L}_{ij}^\sigma$ вторых фундаментальных форм и коэффициенты кручения $\tilde{\mu}_i$ поверхности $\tilde{F}^2$ относительно нормалей $\tilde{n}_\sigma$ из (23), получаем

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} (\partial_u \varphi)^2 + e^{-2\varphi} & \partial_u \varphi \partial_v \varphi \\ \partial_u \varphi \partial_v \varphi & (\partial_v \varphi)^2 \end{pmatrix}, \quad (24.1)$$

$$\tilde{L}^1 = \begin{pmatrix} \partial_v \varphi e^{-3\varphi} & 0 \\ 0 & -\partial_v \varphi e^\varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}^2 = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24.2)$$

$$\tilde{\mu}_1 = (\partial_u \tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = 0, \quad \tilde{\mu}_2 = (\partial_v \tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = L_{22}^2 e^{-\varphi}. \quad (24.3)$$

Из (24.1) сразу же вытекает, что $\tilde{F}^2$, как и F^2 , является псевдосферической поверхностью с постоянной гауссовой кривизной $\tilde{K} = -1$, а координатные линии $u = \text{const}$ на $\tilde{F}^2$ являются параллельными геодезическими с орициклическими ортогональными траекториями.

Элементарным следствием выражений (24.2) является отмеченная выше сопряженность координатных u - и v -линий на $\tilde{F}^2$. Кроме того, из (24.2) следует, что точечная коразмерность $\tilde{F}^2$ равна рангу матрицы

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{11}^1 & \tilde{L}_{12}^1 & \tilde{L}_{22}^1 \\ \tilde{L}_{11}^2 & \tilde{L}_{12}^2 & \tilde{L}_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi e^{-3\varphi} & 0 & -\partial_v \varphi e^\varphi \\ -e^{-\varphi} \mu_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому точечная коразмерность $\tilde{F}^2$ в точке $\tilde{P}$ будет меньше 2 тогда и только тогда, когда μ_1 обратится в нуль в соответствующей точке P на F^2 .

В итоге, мы можем сформулировать утверждение, представляющее один из основных результатов статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F^2 \subset E^4$ – картанова поверхность, $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ – конгруенция Бьянки. Тогда справедливо следующее.

1) Существуют система сопряженных координат u, v на F^2 , однозначно определенные нормальные векторные поля n_1, n_2 , образующие положительно ориентированный ортонормированный базис нормальной плоскости F^2 , и функция $\varphi(u, v)$ с положительными производными $\partial_u \varphi > 0$, $\partial_v \varphi > 0$ такие, что имеют место выражения (20) для коэффициентов фундаментальных форм F^2 . В частности, F^2 имеет гауссову кривизну $K = -1$, а координатные линии $v = \text{const}$ сопряженной сети являются параллельными геодезическими с орициклическими ортогональными траекториями. Функция φ и координаты u и v определены однозначно с точностью до преобразования $\varphi \mapsto \varphi + c_0$, $u \mapsto ue^{-c_0} + u_0$, $v \mapsto ve^{c_0} + v_0$, где c_0, u_0, v_0 – константы.

2) Конгруенция Бьянки ψ задается в виде

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho,$$

где $\rho(u, v)$ и $\tilde{\rho}(u, v)$ – радиус-векторы поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$.

3) Для коэффициентов фундаментальных форм поверхности $\tilde{F}^2$ относительно координат u, v и нормальных векторных полей (23) имеют место

выражения (24). В частности, поверхность $\tilde{F}^2$ имеет гауссову кривизну $\tilde{K} = -1$, координатные u - и v -линии на $\tilde{F}^2$ образуют сопряженную сеть, при этом координатные линии $u = \text{const}$ являются параллельными геодезическими с орициклическими ортогональными траекториями. Кроме того, $\tilde{F}^2$ является картановой поверхностью тогда и только тогда, когда $\mu_1 \neq 0$ во всех точках на F^2 .

Таким образом, из существования сопряженной сети на F^2 , у которой одно семейство линий образовано параллельными геодезическими с орициклическими ортогональными траекториями, вытекает возможность привести фундаментальные формы F^2 к специальному виду (20). Обратно, если фундаментальные формы произвольной поверхности в E^4 приводятся к виду (20), то эта поверхность, очевидно, будет картановой псевдосферической поверхностью, несущей сопряженную сеть указанного специального вида. По теореме 2 такая поверхность допускает конгруэнцию Бьянки.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что на псевдосферической картановой поверхности $F^2 \subset E^4$ можно ввести сопряженные координаты u, v и ортонормированные нормальные векторные поля n_1, n_2 так, что имеют место выражения (20) для коэффициентов фундаментальных форм F^2 , причем $\varphi(u, v)$ имеет положительные производные $\partial_u \varphi > 0, \partial_v \varphi > 0$. Тогда радиус-вектор*

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\partial_u \varphi} \partial_u \rho$$

определяет преобразование $\psi: F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, являющееся конгруэнцией Бьянки.

Теперь, опираясь на классическую теорему Бонне, мы можем использовать (20) для доказательства существования, описания и построения конкретных примеров псевдосферических картановых поверхностей в E^4 , допускающих конгруэнцию Бьянки.

Коэффициенты L_{22}^1, μ_1 и функция φ , присутствующие в формулах (20), не могут быть произвольными. Они обязаны удовлетворять некоторым соотношениям, являющимися следствием уравнений Гаусса–Кодацци–Риччи.

Для удобства записи вместо коэффициентов L_{22}^2 и μ_1 мы введем в рассмотрение функции $P(u, v), Q(u, v)$, положив $L_{22}^2 = e^\varphi P(u, v), \mu_1 = Q(u, v)$. Тогда выражения (20) переписутся следующим образом:

$$g = \begin{pmatrix} (\partial_u \varphi)^2 & \partial_u \varphi \partial_v \varphi \\ \partial_u \varphi \partial_v \varphi & (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\varphi} \end{pmatrix}, \quad (25.1)$$

$$L^1 = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & -\partial_u \varphi e^{3\varphi} \end{pmatrix}, \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^\varphi P(u, v) \end{pmatrix}, \quad (25.2)$$

$$\mu_1 = Q(u, v), \quad \mu_2 \equiv 0. \quad (25.3)$$

Часть уравнений (уравнение Гаусса и два из четырех уравнений Кодацци) уже выполнены, они использовались при получении выражений (20). Легко проверить,

что оставшиеся два уравнения Кодацци и уравнение Риччи для F^2 сводятся к трем следующим уравнениям для трех функций $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$:

$$\partial_{uu}^2 \varphi \cdot e^{2\varphi} + 2(\partial_u \varphi)^2 e^{2\varphi} - \partial_{vv}^2 \varphi \cdot e^{-2\varphi} + 2(\partial_v \varphi)^2 e^{-2\varphi} + PQ + 1 = 0, \quad (26.1)$$

$$\partial_u P - \partial_u \varphi Q e^{2\varphi} = 0, \quad (26.2)$$

$$\partial_v Q + \partial_v \varphi P e^{-2\varphi} = 0, \quad (26.3)$$

при этом $\partial_u \varphi > 0$ (регулярность F^2), $\partial_v \varphi > 0$ (сопряженная сеть на F^2 нигде не ортогональна, эквивалентно – регулярность $\tilde{F}^2$), $P \neq 0$ (точечная коразмерность F^2 равна 2), $Q \neq 0$ (точечная коразмерность $\tilde{F}^2$ равна 2).

Обратно, любому решению $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ системы уравнений (26) с $\partial_u \varphi > 0$, $\partial_v \varphi > 0$, $P \neq 0$ будет соответствовать по классической теореме Бонне псевдосферическая картанова поверхность, чьи фундаментальные формы выражаются в терминах $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ с помощью формул (25). Как следствие такая поверхность будет нести сопряженную сеть, у которой одно семейство линий представлено параллельными геодезическими с ориентированными ортогональными траекториями.

Таким образом, мы можем утверждать, что псевдосферическая картанова поверхность F^2 в E^4 , несущая конгруенцию Бьянки, посредством формул (25) описывается решением $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений (26), удовлетворяющих условиям $\partial_u \varphi > 0$, $\partial_v \varphi > 0$, $P \neq 0$. При этом преобразованная поверхность $\tilde{F}^2$ будет картановой тогда и только тогда, когда выполнено еще и условие $Q \neq 0$. Такое описание однозначно с точностью до преобразования переменных $u \mapsto ue^{-c_0} + u_0$, $v \mapsto ve^{c_0} + v_0$ и функций $\varphi \mapsto \varphi + c_0$, $P \mapsto Pe^{-c_0}$, $Q \mapsto Qe^{c_0}$, где c_0 , u_0 , v_0 – константы; легко проверить, что система уравнений (26) действительно инварианта относительно таких преобразований.

Теперь запишем выражения (24) для коэффициентов фундаментальных форм преобразованной поверхности $\tilde{F}^2$ в терминах $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} (\partial_u \varphi)^2 + e^{-2\varphi} & \partial_u \varphi \partial_v \varphi \\ \partial_u \varphi \partial_v \varphi & (\partial_v \varphi)^2 \end{pmatrix}, \quad (27.1)$$

$$\tilde{L}^1 = \begin{pmatrix} \partial_v \varphi e^{-3\varphi} & 0 \\ 0 & -\partial_v \varphi e^\varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}^2 = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27.2)$$

$$\tilde{\mu}_1 = (\partial_u \tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = 0, \quad \tilde{\mu}_2 = (\partial_v \tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = P. \quad (27.3)$$

Легко видеть, что если произвести замену $\tilde{u} = -v$, $\tilde{v} = -u$ и ввести функции $\tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -Q(u, v)$, $\tilde{Q}(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(u, v)$, $\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\varphi(u, v)$, то выражения (27) примут точно такую же форму, что и выражения (25). Иначе говоря, преобразованная поверхность $\tilde{F}^2$ представляется функциями $-\varphi(-v, -u)$, $-Q(-v, -u)$, $-P(-v, -u)$.

Таким образом, преобразование псевдосферических картановых поверхностей в E^4 посредством конгруенции Бьянки соответствует алгебраическому инволютивному преобразованию решений

$$\{\varphi(u, v), P(u, v), Q(u, v)\} \mapsto \{-\varphi(-v, -u), -Q(-v, -u), -P(-v, -u)\} \quad (28)$$

системы дифференциальных уравнений (26), которое тоже естественно называть преобразованием Бьянки.

Отдельный интерес представляет вопрос о разрешимости системы уравнений (26). Мы рассмотрим два частных случая, в которых удастся упростить задачу и даже получить конкретные решения.

ПРИМЕР 1. Найдем решение системы (26) вида “бегущей волны”:

$$\varphi = f(au + bv), \quad P = p(au + bv), \quad Q = q(au + bv). \quad (29)$$

Подставляя (29) в (26), получаем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$p' - f'qe^{2f} = 0, \quad (30.1)$$

$$q' + f'pe^{-2f} = 0, \quad (30.2)$$

$$\left(\frac{a^2e^{2f} + b^2e^{-2f}}{2} \right)'' + pq + 1 = 0 \quad (30.3)$$

для трех функций $p(\tau)$, $q(\tau)$, $f(\tau)$ одной переменной $\tau = au + bv$.

Из уравнений (30.1), (30.2) вытекает, что

$$pe^{-f} - qe^f = \text{const.}$$

Это уравнение разрешается следующим образом:

$$p = e^f(\xi + c_1), \quad q = e^{-f}(\xi - c_1), \quad (31)$$

где $\xi = \xi(\tau)$, $c_1 = \text{const.}$ Подставляя (31) в (30.1), (30.2), получаем

$$\xi' + 2c_1f' = 0.$$

Проинтегрируем данное уравнение и подставим решение $\xi = c_2 - 2c_1f$ в (31):

$$p = e^f(c_2 + c_1 - 2c_1f), \quad q = e^{-f}(c_2 - c_1 - 2c_1f), \quad (32)$$

здесь c_2 — произвольная константа. Уравнение (30.3) для f теперь принимает следующую форму:

$$\left(\frac{a^2e^{2f} + b^2e^{-2f}}{2} \right)'' + (c_2 - 2c_1f)^2 - c_1^2 + 1 = 0. \quad (33)$$

В частности, если $c_1 = 0$, то получаем уравнение

$$\left(\frac{a^2e^{2f} + b^2e^{-2f}}{2} \right)'' + c_2^2 + 1 = 0, \quad (34)$$

которое легко проинтегрировать:

$$\frac{a^2 e^{2f} + b^2 e^{-2f}}{2} = -C_1(\tau + C_2)^2 + C_3,$$

здесь $C_1 = (c_2^2 + 1)/2$, а C_2, C_3 – произвольные константы. Находя f и подставляя в (32), получаем явные выражения для p и q . Как следствие из (29) получаем конкретное решение типа “бегущей волны” системы уравнений (26). Преобразование Бьянки переводит построенное решение $\varphi = f(au + bv)$, $P = p(au + bv)$, $Q = q(au + bv)$ системы (26) в новое решение $\varphi = -f(-bu - av)$, $P = q(-bu - av)$, $Q = p(-bu - av)$ той же системы.

В самом простом случае, при $a = 1, b = 1, c_2 = 1, C_2 = 0$ и $C_3 = 2$, получаем решение

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \frac{1}{2} \ln(2 - (u + v)^2 + \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}), \\ P(u, v) &= \sqrt{2 - (u + v)^2 + \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}}, \\ Q(u, v) &= \sqrt{2 - (u + v)^2 - \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}},\end{aligned}$$

определенное в полосе $|u + v| < 1$. С помощью преобразования Бьянки (28) получаем другое решение системы (26):

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= -\frac{1}{2} \ln(2 - (u + v)^2 + \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}), \\ P(u, v) &= -\sqrt{2 - (u + v)^2 - \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}}, \\ Q(u, v) &= -\sqrt{2 - (u + v)^2 + \sqrt{(2 - (u + v)^2)^2 - 1}}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Найдём решение системы уравнений (26) в виде

$$\varphi = \varphi(u, v), \quad P = \mathcal{P}(\varphi(u, v)), \quad Q = \mathcal{Q}(\varphi(u, v)).$$

Уравнения (26.2), (26.3) переписутся так:

$$\mathcal{P}'_{\varphi} - \mathcal{Q}e^{2\varphi} = 0, \quad \mathcal{Q}'_{\varphi} + \mathcal{P}e^{-2\varphi} = 0,$$

откуда находим

$$\mathcal{P} = e^{\varphi}(c_1\varphi + c_2), \quad \mathcal{Q} = e^{-\varphi}(c_1\varphi + c_1 + c_2),$$

где c_1 и c_2 – произвольные константы. Оставшееся уравнение (26.1) для φ примет вид

$$\partial_{uu}^2 e^{2\varphi} + \partial_{vv}^2 e^{-2\varphi} + 2((c_1\varphi + c_2)^2 + c_1(c_1\varphi + c_2) + 1) = 0.$$

В простейшем случае при $c_1 = 0$ получаем уравнение

$$\partial_{uu}^2 e^{2\varphi} + \partial_{vv}^2 e^{-2\varphi} + C = 0,$$

где $C = 2(c_2^2 + 1)$ – константа. Легко видеть, что вместе с $\varphi(u, v)$ решением этого уравнения будет и $-\varphi(-u, -v)$.

В завершение статьи сформулируем ряд вопросов, представляющих с нашей точки зрения определенный интерес в связи с дальнейшим исследованием преобразований Бьянки поверхностей в E^4 .

1) Предположим, что первое преобразование Лапласа псевдосферической картановой поверхности F^2 в E^4 представляет конгруенцию Бьянки. Что можно сказать о минус первом преобразовании Лапласа поверхности F^2 в E^4 ? Будет ли оно тоже представлять конгруенцию Бьянки?

2) Существует ли псевдосферическая картанова поверхность F^2 в E^4 , первое и минус первое преобразования Лапласа которой представляют конгруенции Бьянки? Иначе говоря, существует ли псевдосферическая картанова поверхность F^2 в E^4 , у которой каждое из двух семейств линий сопряженной сети представляется параллельными геодезическими с ортогональными траекториями? Если ответ положителен, то будут ли в свою очередь обладать таким же свойством и преобразованные поверхности?

Приложение

Выясним геометрический смысл инвариантных выражений, стоящих в правых частях в формулах (13) и (14) для угла между касательными плоскостями и расстояния между соответствующими точками линейной конгруенции $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$. Для этого запишем геодезическую кривизну k_g и нормальную кривизну k_n (длину вектора нормальной кривизны) координатной линии $v = \text{const}$ сопряженной сети на F^2 :

$$k_g = \frac{\Gamma_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}^3} \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}, \quad k_n = \frac{\sqrt{(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2}}{g_{11}}.$$

Формулу (14) для угла ω мы можем теперь переписать следующим образом:

$$\cos \omega = \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} = \frac{k_g}{k},$$

где k – кривизна линии $v = \text{const}$, рассматриваемой как кривая в E^4 . Как следствие условие В₂) в определении конгруенции Бьянки будет выполнено, т.е. $\cos \omega = 0$, тогда и только тогда, когда координатные линии $v = \text{const}$ сопряженной сети на F^2 являются геодезическими.

Аналогичным образом можно переписать и формулу (13) для длины l между соответствующими точками линейной конгруенции:

$$l = \frac{1}{|k_g^\perp + k_g \operatorname{ctg} \theta|},$$

где $k_g^\perp$ — геодезическая кривизна ортогональных траекторий линий $v = \text{const}$, а θ — угол между координатными линиями сопряженной сети. Если $k_g = 0$, то $l = 1/|k_g^\perp|$, поэтому условие B_1) в определении конгруенции Бьянки будет выполнено, т.е. $l = 1$, тогда и только тогда, когда $|k_g^\perp| = 1$. Таким образом, геодезическая кривизна ортогональных траекторий координатных линий $v = \text{const}$ на F^2 постоянна и равна 1. Как результат мы получаем семейство геодезических линий с ортогональными траекториями постоянной геодезической кривизны 1. Такая ситуация возможна лишь на плоскости Лобачевского, когда речь идет о параллельных геодезических с ортогональными орициклическими траекториями.

Список литературы

1. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев: Наукова думка, 2000.
2. Tenenblat K. Transformations of manifolds and applications to differential equations. London: Longman, 1998.
3. Tenenblat K., Terng C.-L. Backlund theorem for n -dimensional submanifolds of R^{2n-1} // Ann. of Math. (2). 1980. V. 111. P. 477–490.
4. Terng C.-L. A higher dimension generalisation of the Sine-Gordon equation and its soliton theory // Ann. of Math. (2). 1980. V. 111. P. 491–510.
5. Aminov Yu., Sym A. On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Phys. Anal. Geom. 2000. V. 3. № 1. P. 75–89.
6. Eisenhart L. P. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. New York: Ginn, 1909.
7. Шефель С. З. Геометрические свойства погруженных многообразий // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 170–188.
8. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46. № 2. С. 41–83.

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
17.05.2004 и 15.04.2005