Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Центральные расширения и законы взаимности на алгебраических поверхностях, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 10, 111–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:15:12

:

УДК 512.774.7

Д. В. Осипов

Центральные расширения и законы взаимности на алгебраических поверхностях

В работе доказываются законы взаимности на алгебраических поверхностях для некоторого целочисленного символа при помощи интерпретации этого символа как коммутатора подъема элементов в центральном расширении некоторой группы.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

Пусть X — алгебраическая поверхность над совершенным полем k . Пусть C — неприводимая кривая на X , x — точка на C . По таким данным можно построить артиново кольцо $K_{x,C}$, которое есть конечная прямая сумма двумерных локальных полей L_i (см. [1]–[3]).

Каждое двумерное локальное поле имеет вид $L_i = k_i((t_i))((u_i))$, где поле k_i является конечным расширением поля k . Если точка x гладкая на X , то каждое k_i совпадает с полем вычетов точки x . Если x — гладкая точка на X и C , то $K_{x,C}$ есть просто двумерное локальное поле.

На двумерном локальном поле $L = k((t))((u))$ существует дискретное нормирование ранга 2:

$$(\nu_1, \nu_2): L^* \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Определим символ ν_L :

$$K_2(L) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \nu_L(f, g) = \begin{vmatrix} \nu_1(f) & \nu_1(g) \\ \nu_2(f) & \nu_2(g) \end{vmatrix},$$

где $f, g \in L^*$.

Такой символ использовался в [4] для описания теории пересечения дивизоров на поверхности.

Также в [5] символ ν_L использовался для описания неразветвленных расширений поля L для конечного поля k .

Если L'/L — неразветвленное расширение, то отображение взаимности переводит

$$K_2(L) \ni (f, g) \mapsto \text{Fr}^{\nu_L(f, g)} \in \text{Gal}(L'/L),$$

где Fr — автоморфизм Фробениуса, поднимаемый до элемента из группы Галуа $\text{Gal}(L'/L)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00455).

Для $K_{x,C} = \bigoplus_i L_i$ определим $\nu_{x,C}$:

$$\nu_{x,C} = \bigoplus_i [k_i : k] \cdot \nu_{L_i}.$$

Для отображения $\nu_{x,C}$ верны следующие законы взаимности [3].

Зафиксируем точку $x \in X$. Тогда для любых $f, g \in k(X)^*$ в следующей сумме только конечное число членов отлично от нуля и

$$\sum_{C \ni x} \nu_{x,C}(f, g) = 0,$$

где суммирование ведется по всем неприводимым кривым C на X , проходящим через точку x .

Зафиксируем неприводимую проективную кривую C на гладкой поверхности X . Тогда для любых $f, g \in k(X)^*$ в следующей сумме только конечное число членов отлично от нуля и

$$\sum_{x \in C} \nu_{x,C}(f, g) = 0,$$

где суммирование ведется по всем точкам кривой C .

В работе дается интерпретация отображения $\nu_{K_{x,C}}$ как коммутатора подъема элементов в некотором центральном расширении группы $k(X)^*$. Для этого используется понятие теории размерности, введенное Капрановым в [6].

Также дается доказательство законов взаимности на основании расщепления центрального расширения над кольцами аделей, связанных с точками на поверхностях и с проективными кривыми на поверхностях.

Это доказательство подобно методу Тейта о сумме вычетов дифференциалов на проективной кривой (см. [7], [8]).

Во время работы над этой статьей также были полезны работы [9] и [10].

Автор выражает благодарность А. Н. Паршину за его внимание к этой работе и полезные обсуждения, а также Г. Курке и А. Жеглову за некоторые обсуждения.

§ 2. Конструкция группы

2.1. Линейно локально компактные векторные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [11; гл. III, § 2, упр. 15–21]. Топологическое k -векторное пространство V (над дискретным полем k) называется *линейно компактным*, если выполняются следующие условия:

- 1) пространство V полное и хаусдорфово;
- 2) пространство V обладает базой окрестностей нуля, состоящей из векторных подпространств;
- 3) каждое открытое подпространство в V имеет конечную коразмерность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [12; гл. 2, § 6]. Топологическое k -векторное пространство W (над дискретным полем k) называется *линейно локально компактным*, если оно обладает базой окрестностей нуля, состоящей из линейно компактных открытых подпространств.

Пусть поле k' — конечное расширение поля k . Примером линейно локально компактного пространства является поле лорановских рядов $K = k'((t))$ с базой топологии, задаваемой подпространствами

$$U_n = t^n \mathcal{O}_K,$$

где кольцо $\mathcal{O}_K = k'[[t]]$ является линейно компактным пространством.

ЛЕММА 1. 1) Если k -векторное пространство V линейно компактно, то для любого замкнутого подпространства H пространства H и V/H линейно компактны.

2) Если k -векторное пространство W линейно локально компактно, то для любого замкнутого подпространства E пространства E и W/E линейно локально компактны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) доказан в [12; гл. 2, § 6]. Доказательство п. 2) следует сразу же из п. 1) и определения линейно локально компактного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если k -пространства V_1 и V_2 линейно локально компактны, то $\text{Hom}(V_1, V_2)$ состоит из k -линейных непрерывных отображений между V_1 и V_2 .

Поле лорановских рядов $K = k'((t))$ является одномерным локальным полем над полем k . Введем обозначение для кольца k -линейных непрерывных отображений:

$$\text{End}(K/k) = \text{Hom}(K, K).$$

Определим группу обратимых элементов этого кольца

$$\text{GL}(K/k) = \text{End}(K/k)^*.$$

2.2. Алгебра эндоморфизмов двумерного локального поля. Пусть поле k' — конечное расширение поля k . Рассмотрим теперь поле итерированных рядов Лорана

$$L = k'((t))((u)).$$

Такое поле называется *двумерным локальным полем над полем k* . У поля L есть первое поле вычетов $\bar{L} = k'((t))$, которое является одномерным локальным полем над полем k .

Рассмотрим кольцо $\mathcal{O}_L = k'((t))[[u]]$. Для любого целого n определим пространство

$$\mathcal{O}_n = u^n k'((t))[[u]].$$

Если $m < n$, то k -векторное пространство $\mathcal{O}_m/\mathcal{O}_n$ является линейно локально компактным пространством с топологией, индуцированной открытыми подпространствами $E_l = t^l u^m k'[[t, u]]/t^l u^n k'[[t, u]] \subset \mathcal{O}_m/\mathcal{O}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $L = k'((t))((u))$ – двумерное локальное поле над полем k . Будем говорить, что k -линейное отображение $A: L \rightarrow L$ принадлежит $\text{End}(L/k)$, если выполнены следующие условия:

- 1) для любого целого n существует целое m такое, что $A\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_m$;
- 2) для любого целого m существует целое n такое, что $A\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_m$;
- 3) для любых целых $n_1 < n_2$ и $m_1 < m_2$ таких, что $A\mathcal{O}_{n_1} \subset \mathcal{O}_{m_1}$ и $A\mathcal{O}_{n_2} \subset \mathcal{O}_{m_2}$, индуцированное k -линейное отображение

$$\overline{A}: \mathcal{O}_{n_1}/\mathcal{O}_{n_2} \rightarrow \mathcal{O}_{m_1}/\mathcal{O}_{m_2}$$

принадлежит $\text{Hom}(\mathcal{O}_{n_1}/\mathcal{O}_{n_2}, \mathcal{O}_{m_1}/\mathcal{O}_{m_2})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Множество $\text{End}(L/k)$ является k -алгеброй.
2) Для любого натурального m имеется вложение алгебр

$$\text{End}(L/k)^{\oplus m} \hookrightarrow \text{End}(L/k).$$

3) Для любого натурального m имеется вложение алгебр

$$\text{gl}(m, L) \hookrightarrow \text{End}(L/k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) следует несложно из определения $\text{End}(L/k)$, поэтому мы приведем доказательство пп. 2) и 3). Мы имеем $L = \overline{L}((u))$. Пусть e_i , $1 \leq i \leq m$, – стандартный базис в $L^{\oplus m}$, т.е.

$$L^{\oplus m} = \bigoplus_i L e_i.$$

Мы рассмотрим $\overline{L}$ -линейный изоморфизм $\varphi: L^{\oplus m} \rightarrow L$

$$\varphi\left(\sum_{i,j} a_{i,j} u^j e_i\right) = \sum_{i,j} a_{i,j} u^{mj+i-1}, \quad a_{i,j} \in \overline{L}.$$

Тогда любой k -линейный оператор A , действующий на $L^{\oplus m}$, под действием отображения

$$A \mapsto \varphi A \varphi^{-1} \tag{1}$$

переходит в k -линейный оператор, действующий на L . В определении 4 мы можем заменить пространства $\mathcal{O}_l$ (для всех целых l) на пространства $\mathcal{O}_{lm}$ для фиксированного m . При этом

$$\varphi\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_l e_i\right) = \mathcal{O}_{lm}.$$

Поэтому после несложной проверки мы получаем, что отображение (1) задает вложение алгебр $\text{End}(L/k)^{\oplus m}$ и $\text{gl}(m, L)$, действующих на $L^{\oplus m}$, в алгебру $\text{End}(L/k)$.

Из предложения 1 мы сразу же получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого натурального m имеется вложение торической алгебры Li

$$\mathfrak{gl}(m, k[t, u, t^{-1}, u^{-1}]) \hookrightarrow \text{End}(L/k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поле $L = k'((t))((u)) = k'((u))\{\{t\}\}$, где последнее обозначает выражения вида

$$g = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a_i t^i, \quad a_i \in k'((u)),$$

причем $\lim_{i \rightarrow -\infty} \nu(a_i) = 0$ и для всех i верно $\nu(a_i) > c_g$ для некоторого целого c_g , здесь ν есть дискретное нормирование в поле $k'((u))$.

Тогда для любого натурального m имеется корректно определенный $k'((u))$ -линейный изоморфизм $\psi: L^{\oplus m} \rightarrow L$

$$\psi\left(\sum_{i,j} a_{i,j} t^j e_i\right) = \sum_{i,j} a_{i,j} t^{mj+i-1}, \quad a_{i,j} \in k'((u)).$$

Изоморфизм ψ задает другое вложение алгебры $\mathfrak{gl}(m, L)$ в алгебру $\text{End}(L/k)$ через действие $\mathfrak{gl}(m, L)$ на $L^{\oplus m}$.

Для дальнейшего нам важно

СЛЕДСТВИЕ 2. Действие поля L на себя умножениями задает каноническое вложение

$$L \hookrightarrow \text{End}(L/k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Алгебра $\text{End}(L/k)$ была определена А. Бейлинсоном в [2] для многомерного локального поля. Для поля L мы имеем следующее представление:

$$L = \varinjlim_n \varprojlim_{m \geq n} \mathcal{O}_n / \mathcal{O}_m.$$

Нетрудно понять, что определение $\text{End}(L/k)$ копирует определение морфизмов в IndPro -категории (см. абстрактное описание этого в приложении к [13]).

2.3. Топология двумерного локального поля. На поле $L = k'((t))((u))$ имеется стандартная топология, в которой базой окрестностей нуля являются k' -подпространства

$$\sum_i U_{l_i} u^i + \mathcal{O}_m, \tag{2}$$

где $U_{l_i} = t^{l_i} k'[[t]]$ — открытые k' -векторные подпространства из $k'((t))$ и m — целое число. Отметим, что пространства $\mathcal{O}_m$ замкнуты в этой топологии и пространства $\mathcal{O}_m / \mathcal{O}_n$ являются линейно локально компактными с индуцированной топологией.

ЛЕММА 2. Алгебра $\text{End}(L/k)$ действует непрерывно на поле L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любой элемент $A \in \text{End}(L/k)$ и какое-нибудь открытое подпространство $V = \sum_i U_{l_i} u^i + \mathcal{O}_m$. Тогда из определения алгебры $\text{End}(L/k)$ следует, что существует целое n такое, что $A\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_m$. Из определения $\text{End}(L/k)$ следует, что существует $m_1 < m$ такое, что $A\mathcal{O}_{n-1} \subset \mathcal{O}_{m_1}$. Существует открытое подпространство $E_{k_1} \subset \mathcal{O}_{n-1}/\mathcal{O}_n$ такое, что $AE_{k_1} \subset (V \cap \mathcal{O}_{m_1}/V \cap \mathcal{O}_m)$. Далее, существует $m_2 < m_1$ такое, что $A\mathcal{O}_{n-2} \subset \mathcal{O}_{m_2}$. Тогда существует открытое подпространство $E_{k_2} \subset (\mathcal{O}_{n-2}/\mathcal{O}_n)$ такое, что

$$AE_{k_2} \subset (V \cap \mathcal{O}_{m_2}/V \cap \mathcal{O}_m), \quad E_{k_2} \cap (\mathcal{O}_{n-1}/\mathcal{O}_n) \subset E_{k_1}.$$

Аналогичным образом определим далее индуктивно для каждого натурального i такое $m_i < m_{i-1}$, что $A\mathcal{O}_{n-i} \subset \mathcal{O}_{m_i}$, и определим открытое подпространство $E_{k_i} \subset \mathcal{O}_{n-i}/\mathcal{O}_n$ такое, что

$$AE_{k_i} \subset (V \cap \mathcal{O}_{m_i}/V \cap \mathcal{O}_m), \quad E_{k_i} \cap (\mathcal{O}_{n-i+1}/\mathcal{O}_n) \subset E_{k_{i-1}}.$$

Тогда подпространство $W = \sum_i E_{k_i} + \mathcal{O}_n$ открыто в L и $AW \subset V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть X/k — алгебраическая поверхность над полем k . Для любой неприводимой кривой $C \subset X$ и любой точки $x \in C$ можно канонически определить кольцо

$$K_{x,C} = k(X) \cdot \varprojlim_m (\mathcal{O}_{x,X(J_C)} \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}) / J_C^m,$$

где J_C есть идеал кривой C в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,X}$ точки x на поверхности X , кольцо $\mathcal{O}_{x,X(J_C)}$ есть локализация кольца $\mathcal{O}_{x,X}$ по простому идеалу J_C .

Тогда для кольца $K_{x,C}$ верно

$$K_{x,C} = \bigoplus K_i,$$

где каждое K_i есть двумерное локальное поле над полем k и прямая сумма конечна. На кольце $K_{x,C}$ есть естественная топология индуктивного и проективного пределов, приходящая из конструкции кольца. На поле K_i имеем индуцированную топологию. В каждом двумерном локальном поле K_i можно выбрать систему локальных параметров t_i, u_i и изоморфизм $k_i((t_i))((u_i)) = K_i$ такие, что топология на поле K_i совпадает со стандартной топологией (2) поля $k_i((t_i))((u_i))$ (см. [14]). (Для гладкой точки x на X поле k_i совпадает с полем вычетов точки x .) Другой выбор локальных параметров задает непрерывный автоморфизм поля K_i , сохраняющий подкольца $\mathcal{O}_m$ в K_i . Отсюда мы получаем, что алгебры $\text{End}(K_i/k)$ не зависят от выбора локальных параметров t_i, u_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $L = k'((t))((u))$ — двумерное локальное поле над полем k . Тогда определим *группу*

$$\text{GL}(L/k) = \text{End}(L/k)^*.$$

§ 3. Центральное расширение

3.1. Теория размерности. Пусть V – линейно локально компактное пространство над полем k . Для любых двух открытых линейно компактных k -подпространств A и B из V мы определим

$$[A \mid B]_1 = \dim_k \frac{B}{A \cap B} - \dim_k \frac{A}{A \cap B}.$$

Это определение корректно, так как каждое открытое подпространство в линейно компактном пространстве имеет конечную коразмерность. Имеем следующее свойство.

ЛЕММА 3. *Для любых трех открытых линейно компактных k -подпространств пространства V выполнено*

$$[A \mid B]_1 + [B \mid C]_1 = [A \mid C]_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно понять, что для любого открытого линейно компактного k -подпространства $U \subset A$, $U \subset B$ выполнено

$$[A \mid B]_1 = \dim_k B/U - \dim_k A/U.$$

Выбирая такое $U \subset A$, $U \subset B$, $U \subset C$, мы получаем утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [6]. Пусть V – линейно локально компактное пространство над полем k . Целочисленная функция d на множестве открытых линейно компактных подпространств пространства V называется *теорией размерности*, если для любых двух открытых линейно компактных подпространств A и B из V выполнено

$$d(B) = d(A) + [A \mid B]_1.$$

Мы будем обозначать множество теорий размерности пространства V через $\text{Dim}(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [6]. 1) *Множество $\text{Dim}(V)$ является $\mathbb{Z}$ -торсором.*
2) *Для каждой короткой точной последовательности k -пространств*

$$0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow V_2 \rightarrow 0, \tag{3}$$

где V локально линейно компактно, V_1 замкнуто в V и на V_1 рассматривается топология ограничения, а на V_2 – фактортопология, мы имеем естественный изоморфизм $\mathbb{Z}$ -торсоров

$$\text{Dim}(V_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}(V_2) \rightarrow \text{Dim}(V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если d – теория размерности на V , то после прибавления целого числа мы получаем новую теорию размерности на V . Это действие $\mathbb{Z}$ превращает $\text{Dim}(V)$ в $\mathbb{Z}$ -торсор.

Если d_1 – теория размерности на V_1 и d_2 – теория размерности на V_2 , то для любого линейно компактного подпространства U из V мы положим

$$d_1 \otimes d_2(U) = d_1(U \cap V_1) + d_2(U/U \cap V_1).$$

Тогда $d_1 \otimes d_2$ будет корректно определенной теорией размерности на V .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Любое линейно компактное подпространство W из V определяет канонически $d_W \in \text{Dim}(V)$ по следующему правилу:

$$d_W(U) = [W \mid U]_1.$$

3.2. $\mathbb{Z}$ -торсор относительных теорий размерности. Рассмотрим k -векторное пространство

$$M = \prod_{i \in I} L_i,$$

где I – некоторое множество и каждое $L_i = k_i((t_i))((u_i))$ – двумерное локальное поле над полем k . На каждом L_i есть топология, и на M есть поэтому топология произведения.

Для любых двух замкнутых k -подпространств W_1, W_2 из M таких, что существует замкнутое k -подпространство $W \subset W_1, W \subset W_2$, для которого пространства W_1/W и W_2/W линейно локально компактны с индуцированной топологией из M , мы определим $\mathbb{Z}$ -торсор

$$[W_1 \mid W_2; W]_2 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(W_1/W), \text{Dim}(W_2/W)).$$

Имеем следующую очевидную лемму.

ЛЕММА 4. Пусть W_1, W_2, W_3, W – замкнутые k -подпространства в M такие, что $W_1/W, W_2/W, W_3/W$ линейно локально компактны. Тогда имеется канонический изоморфизм $\mathbb{Z}$ -торсоров

$$[W_1 \mid W_2; W]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_2 \mid W_3; W]_2 \rightarrow [W_1 \mid W_3; W]_2.$$

ЛЕММА 5. Пусть k -подпространство $W' \subset W$ удовлетворяет тем же условиям, что и W . Тогда существует канонический изоморфизм

$$[W_1 \mid W_2; W']_2 \rightarrow [W_1 \mid W_2; W]_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2 мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Dim}(W_1/W') &= \text{Dim}(W_1/W) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}(W/W'), \\ \text{Dim}(W_2/W') &= \text{Dim}(W_2/W) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}(W/W'). \end{aligned}$$

Поэтому если $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(W_1/W), \text{Dim}(W_2/W))$, то для фиксированного $a \in \text{Dim}(W/W')$ положим $\varphi'(d \otimes a) = \varphi(d) \otimes a$, где $d \in \text{Dim}(W_1/W)$. Тогда

$$\varphi' \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(W_1/W'), \text{Dim}(W_2/W'))$$

и изоморфизм $\varphi \mapsto \varphi'$ не зависит от выбора a .

Благодаря последней лемме мы можем дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть k -подпространства W_1 и W_2 те же, что и выше. Определим

$$[W_1 \mid W_2]_2 = \varprojlim_W [W_1 \mid W_2; W]_2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Множество $[W_1 \mid W_2]_2$ есть $\mathbb{Z}$ -торсор.

2) Для замкнутых k -подпространств W_1, W_2, W_3 пусть существует замкнутое k -подпространство $W \subset W_1, W \subset W_2, W \subset W_3$ такое, что $W_1/W, W_2/W$ и W_3/W линейно локально компактны. Тогда существует канонический изоморфизм

$$[W_1 \mid W_2]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_2 \mid W_3]_2 \rightarrow [W_1 \mid W_3]_2$$

такой, что для четырех замкнутых k -подпространств W_1, W_2, W_3, W_4 , для которых существует замкнутое k -подпространство W с линейно локально компактными пространствами $W_1/W, W_2/W, W_3/W, W_4/W$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} [W_1 \mid W_2]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_2 \mid W_3]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_3 \mid W_4]_2 & \longrightarrow & [W_1 \mid W_2]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_2 \mid W_4]_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [W_1 \mid W_3]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_3 \mid W_4]_2 & \longrightarrow & [W_1 \mid W_4]_2 \end{array} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $[W_1 \mid W_2; W]_2$ суть $\mathbb{Z}$ -торсоры. Мы отождествляем все эти множества при помощи проективного предела с изоморфными отображениями. Поэтому $[W_1 \mid W_2]_2$ есть тоже $\mathbb{Z}$ -торсор.

Остальные утверждения легко проверяются для фиксированного W с помощью леммы 4, и они коммутируют с заменой W на W' . Поэтому они верны для всего проективного предела $[W_1 \mid W_2]_2$.

3.3. Центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}}_W$. Пусть теперь $M = L = k'((t))((u))$ — двумерное локальное поле над полем k . Напомним, что $\mathcal{O}_n = u^n k'((t))[[u]]$. Рассмотрим замкнутое k -подпространство $W \subset L$ такое, что существуют целые $n_1 \leq n_2$ такие, что

$$\mathcal{O}_{n_1} \subset W \subset \mathcal{O}_{n_2}. \quad (5)$$

Тогда для любого элемента $g \in \mathrm{GL}(L/k)$ мы получаем из определения 4, что существуют целые $k \leq l$ такие, что

$$\mathcal{O}_k \subset gW \subset \mathcal{O}_l.$$

Поэтому для любого $l_1 \geq l$ k -векторное пространство $gW/\mathcal{O}_{l_1}$ локально линейно компактно. Следовательно, для любого $l_2 \geq \max\{l_1, n_2\}$ определен $\mathbb{Z}$ -торсор $[W \mid gW; \mathcal{O}_{l_2}]_2$ и, значит, определен $\mathbb{Z}$ -торсор $[W \mid gW]_2$.

Более того, для любых $h_1, h_2 \in \mathrm{GL}(L/k)$ определен $[h_1 W \mid h_2 W]_2$.

По лемме 2 группа $\mathrm{GL}(L/k)$ действует на L непрерывно. Поэтому для любых двух элементов $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(L/k)$ мы имеем канонический изоморфизм

$$g_1[h_1 W \mid h_2 W]_2 \rightarrow [g_1 h_1 W \mid g_1 h_2 W]_2$$

такой, что

$$g_2(g_1(d)) = (g_2 g_1)(d) \quad (6)$$

для любого $d \in [h_1 W \mid h_2 W]_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Определим множество пар

$$\widehat{\mathrm{GL}}_W = (g, d),$$

где $g \in \mathrm{GL}(L/k)$, $d \in [W \mid gW]_2$.

Мы можем умножать эти пары по правилу

$$(g_1, d_1)(g_2, d_2) = (g_1 g_2, d_1 g_1(d_2)), \quad (7)$$

где мы использовали изоморфизм $[W \mid g_1 W]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [g_1 W \mid g_1 g_2 W]_2 \rightarrow [W \mid g_1 g_2 W]_2$ и то, что $g_1(d_2) \in [g_1 W \mid g_1 g_2 W]_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) *Определенное при помощи равенства (7) умножение превращает множество $\widehat{\mathrm{GL}}_W$ в группу.*

2) *Для любого другого замкнутого k -подпространства W' такого, что для некоторых целых m_1, m_2 верно $\mathcal{O}_{m_1} \subset W' \subset \mathcal{O}_{m_2}$, существует канонический изоморфизм*

$$\widehat{\mathrm{GL}}_{W'} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_W.$$

3) *Имеется центральное расширение*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_W \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(L/k) \rightarrow 1. \quad (8)$$

4) *Пусть H – подгруппа в $\mathrm{GL}(L/k)$ такая, что для любого элемента $h \in H$ выполнено $hW \subset W$. Тогда центральное расширение (8) расщепляется над подгруппой H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что единицей группы является элемент (e, d_0) , где d_0 – функция на нулевом пространстве, сопоставляющая ему нуль. Также из конструкции сразу видно наличие обратного элемента. Ассоциативность произведения следует из диаграммы (4) и равенства (6). Поэтому $\widehat{\mathrm{GL}}_W$ является группой.

Рассмотрим теперь подпространство W' . Зафиксируем произвольный элемент $c \in [W' \mid W]_2$. Тогда отображение

$$(g, d) \mapsto (g, cdg(c^{-1})), \quad d \in [W \mid gW]_2,$$

задает изоморфизм $\widehat{\mathrm{GL}}_W$ на $\widehat{\mathrm{GL}}_{W'}$. Легко видеть, что этот изоморфизм не зависит от выбора элемента $c \in [W' \mid W]_2$.

Отображение

$$(g, d) \mapsto g$$

задает отображение π группы $\widehat{\mathrm{GL}}_W$ на группу $\mathrm{GL}(L/k)$ с ядром $\mathbb{Z}$.

Пункт 4) следует из определения, так как $[hW \mid W]_2 = [W \mid W]_2$ будет тривиальным $\mathbb{Z}$ -торсором. Мы можем взять нулевой элемент в качестве сечения.

3.4. Символ ν_L . Пусть $L = k'((t))((u))$ – двумерное локальное поле над полем k , $\bar{L} = k'((t))$ – его поле вычетов. На L имеется дискретное нормирование ранга 2:

$$(\nu_1, \nu_2): L^* \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

где ν_2 – обычное дискретное нормирование по отношению к локальному параметру u и

$$\nu_1(b) = \nu_{\bar{L}}(\overline{bu^{-\nu_2(b)}}),$$

здесь $\nu_{\bar{L}}$ – дискретное нормирование поля $\bar{L}$. Отметим, что нормирование ν_2 определено канонически по L , а нормирование ν_1 зависит от выбора локального параметра u в поле L .

Определим отображение

$$\nu_L: L^* \times L^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

по следующей формуле:

$$\nu_L(f, g) = \begin{vmatrix} \nu_1(f) & \nu_1(g) \\ \nu_2(f) & \nu_2(g) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) *Отображение ν_L не зависит от выбора локальных параметров t , u двумерного локального поля L .*

2) *Отображение ν_L бимультимпликативно и кососимметрично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения следует из явной формулы (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Можно показать, что отображение ν_L совпадает с композицией следующих отображений:

$$L^* \times L^* \rightarrow K_2(L) \xrightarrow{\partial_2} \bar{L}^* \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z},$$

где отображение ∂_i есть граничное отображение в алгебраической K -теории. Отображение ∂_2 совпадает с ручным символом по отношению к дискретному нормированию ν_2 поля L . Отображение ∂_1 совпадает с дискретным нормированием $\nu_{\bar{L}}$ поля $\bar{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Символ ν_L использовался в [4], [15] для описания индекса пересечения дивизоров на алгебраической поверхности при помощи кольца аделей на алгебраической поверхности.

Кроме того, отметим, что символ ν_L возникает при описании неразветвленных расширений двумерных локальных полей, когда поле k конечно (см. [1]).

3.5. Коммутатор $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Рассмотрим центральное расширение (8)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_W \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(L/k) \rightarrow 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Для любых двух элементов $a, b \in \mathrm{GL}(L/k)$ таких, что коммутатор $[a, b] = 1$, определим элемент

$$\langle a, b \rangle_L = [a', b'] \in \mathbb{Z},$$

где $a' \in \widehat{\mathrm{GL}}_W$ и $b' \in \widehat{\mathrm{GL}}_W$ любые при условии $\pi(a') = a$, $\pi(b') = b$.

Ясно, что $\langle a, b \rangle_L$ не зависит от выбора соответствующих a' и b' . Кроме того, $\langle a, b \rangle_L$ не зависит от выбора W , так как центральное расширение (8) не зависит от выбора W вследствие п. 2) предложения 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) *Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ кососимметрично и бимультимпликативно.*

2) *Справедливо равенство*

$$\langle a, b \rangle_L = c(a, b) - c(b, a), \quad (10)$$

где $c(\cdot, \cdot)$ – любой коцикл, задающий центральное расширение (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кососимметричность очевидна. Докажем бимультимпликативность. Для любой группы верно следующее:

$$[fg, h] = [f, [g, h]] [g, h] [f, h].$$

В нашем случае $[b', c']$ централен и, следовательно,

$$\langle ab, c \rangle_L = \langle a, c \rangle_L + \langle b, c \rangle_L.$$

Формула (10) вытекает из явной конструкции коцикла в центральном расширении и определения $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Напомним, что $L' = k'((t))((u))$. Из следствия 2 предложения 1 имеем, что $L^* \subset \text{GL}(L/k)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых элементов $f, g \in L^*$ верно*

$$\langle f, g \rangle_L = [k' : k] \nu_L(f, g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \mathcal{O}_L = k'((t))[[u]]$. Как $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, так и ν_L бимультимпликативны и кососимметричны. Имеется мультипликативное разложение:

$$L^* = \overline{L}^* \times u^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{U}_L^1,$$

где $\mathcal{U}_L^1 = 1 + uk'((t))[[u]]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть следующие случаи.

- 1) Пусть $f, g \in \overline{L}^* \times \mathcal{U}_L^1$. Тогда $\nu_L(f, g) = 0$. С другой стороны, $f\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L$, $g\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L$. Поэтому из п. 4) предложения 4 следует $\langle f, g \rangle_L = 0$.
- 2) Пусть $f \in \overline{L}^*$, $g = u^{-1}$. Тогда $\nu_L(f, u^{-1}) = -\nu_{\overline{L}}(f)$. Зафиксируем любой элемент d из

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\overline{L}) &= \text{Dim}(\mathcal{O}_L/u^{-1}\mathcal{O}_L) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(0), \text{Dim}(\mathcal{O}_L/u^{-1}\mathcal{O}_L)) \\ &= [\mathcal{O}_L \mid u^{-1}\mathcal{O}_L]_2. \end{aligned}$$

Пусть $f' = (f, d_0)$, $g' = (g, d)$ – элементы из $\widehat{\text{GL}}_W$, где d_0 – нулевая функция. Пусть k -подпространство $U = k[[t]]$. Тогда

$$f'g' = (fu^{-1}, f(d)), \quad g'f' = (fu^{-1}, d).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_L &= [f', g'] = f(d)(U) - d(U) = d(f^{-1}(U)) - d(U) \\ &= [U \mid f^{-1}U]_1 = -\nu_{\overline{L}}(f) [k' : k]. \end{aligned}$$

3.6. Аддитивность $\langle \cdot, \cdot \rangle_M = \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_2}$. Пусть, как в п. 3.2, k -пространство

$$M = \prod_{i \in I} L_i,$$

где каждое L_i — двумерное локальное поле над полем k . Для каждого $i \in I$ зафиксируем k -подпространство $W_i \subset L_i$ такое, что для каждого W_i выполняется условие (5) из п. 3.3. Рассмотрим группу H такую, что для любого i имеем вложение

$$H \subset \text{GL}(L_i/k)$$

и, следовательно, действие группы H на каждом L_i . Пусть для любого элемента $h \in H$ для почти всех $i \in I$ выполнено

$$hW_i \subset W_i.$$

Пусть

$$W = \prod_{i \in I} W_i$$

— k -подпространство в M . Тогда, как в определении 8, введем в рассмотрение группу $\hat{H}_W$ как множество пар (h, d) , где $h \in H$, $d \in [W \mid gW]_2$. Получаем центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \hat{H}_W \rightarrow H \rightarrow 1.$$

Для любых двух элементов $a, b \in H$ таких, что $[a, b] = 1$, мы можем подобно определению 9 задать $\langle a, b \rangle_M = [a', b']$, где a' и b' — произвольные подьемы в $\hat{H}_W$ элементов a и b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть заданы множество индексов $I = I_1 \cup I_2$, k -пространства

$$M_l = \prod_{i \in I_l} L_i, \quad W_l = \prod_{i \in I_l} W_i, \quad l = 1, 2.$$

Тогда для любых коммутирующих $a, b \in H$ верно

$$\langle a, b \rangle_M = \langle a, b \rangle_{M_1} + \langle a, b \rangle_{M_2}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$M = M_1 \times M_2, \quad W = W_1 \times W_2.$$

Для любого $h \in H$ верно

$$[hW \mid W]_2 = [hW_1 \mid W_1]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [hW_2 \mid W_2]_2.$$

Поэтому центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \hat{H}_W \rightarrow H \rightarrow 1$$

получается как сумма центральных расширений

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \hat{H}_{W_1} \rightarrow H \rightarrow 1, \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \hat{H}_{W_2} \rightarrow H \rightarrow 1$$

и естественного отображения суммирования ядра $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Следовательно, (11) вытекает из (10).

§ 4. Законы взаимности вокруг точек

Пусть X — алгебраическая поверхность над полем k . Зафиксируем гладкую точку x на X . Пусть $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ — пополненное локальное кольцо точки x на поверхности X . Мы рассмотрим адельное кольцо точки x :

$$\mathbb{A}_x = \left\{ \{f_F\} \in \prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} K_{x,F}, \text{ так что } f_F \in \mathcal{O}_{K_{x,F}} \text{ для почти всех } F \right\},$$

где произведение берется по всем простым идеалам F кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, которые имеют высоту 1, и двумерное локальное поле $K_{x,F}$ задается следующей формулой:

$$K_{x,F} = \text{Frac} \left(\varprojlim_m \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(F) / F^m \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(F) \right).$$

Кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}(F)$ есть локализация кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ по простому идеалу (F) .

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$ — свободный $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модуль. Рассмотрим комплекс $\mathcal{A}_x(\mathcal{F})$:

$$\text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x) \times \prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} (\mathcal{O}_{K_{x,F}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_x.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Группы когомологий комплекса $\mathcal{A}_x(\mathcal{F})$ являются линейно локально компактными k -пространствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль $\mathcal{F}$ задает локально свободный пучок на схеме $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Этот пучок мы будем обозначать также через $\mathcal{F}$. Тогда из определения аделей на произвольных схемах (см. [2], [16]) мы получаем, что комплекс $\mathcal{A}_x(\mathcal{F})$ является адельным комплексом пучка $\mathcal{F}$ на одномерной схеме

$$U = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_x \setminus x$$

(U есть формальная окрестность точки без самой точки). Поэтому группы когомологий комплекса $\mathcal{A}_x(\mathcal{F})$ совпадают с группами когомологий $H^*(U, \mathcal{F}|_U)$.

Но для любого i верно

$$H^i(U, \mathcal{F}|_U) = \varinjlim_n \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(m_x^n, \mathcal{F}), \quad (12)$$

где m_x — максимальный идеал кольца $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$.

Равенство (12) следует из того, что

$$H^0(U, \mathcal{G}|_U) = \varinjlim_n \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}(m_x^n, \mathcal{G}),$$

где $\mathcal{G}$ — любой модуль над кольцом $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ (см. [17; гл. 3, упр. 3.7]).

Теперь, применяя к точной последовательности $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модулей

$$0 \rightarrow m_x^n \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n \rightarrow 0 \quad (13)$$

функтор $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{F})$, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}(m_x^n, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^1(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Всегда верно, что k -пространства

$$\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{F})$$

конечномерны (см. лемму 6 ниже). Поэтому $H^0(U, \mathcal{F}|_U)$ является локально линейно компактным подпространством, в котором линейно компактным открытым подпространством будет сам модуль $\mathcal{F}$ с базой топологии, задаваемой степенями максимального идеала $m_x^n \mathcal{F}$.

Для гладкой точки x верно $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^1(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{F}) = 0$. Поэтому в этом случае $H^0(U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}$.

Из точной последовательности (13) мы получаем, что

$$\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^1(m_x^n, \mathcal{F}) = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{F}).$$

Поэтому

$$H^1(U, \mathcal{F}|_U) = \varinjlim_n \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}^2(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{F})$$

есть индуктивный предел конечномерных k -пространств, т.е. дискретное пространство, т.е. локально линейно компактное пространство.

После предложения 8 мы можем определить $\mathbb{Z}$ -торсор

$$\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{F})) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(H^1(\mathcal{A}_x(\mathcal{F}))), \text{Dim}(H^0(\mathcal{A}_x(\mathcal{F}))).$$

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$ – свободный $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модуль. Определим k -подпространство

$$W_{\mathcal{F}} = \prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{O}_{K_{x,F}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F} \subset \mathbb{A}_x.$$

Так как $\mathbb{A}_x \subset \prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} K_{x,F}$, то, как в п. 3.2, мы можем определить следующий $\mathbb{Z}$ -торсор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для любых двух свободных $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ таких, что $\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$ и $\mathcal{G} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$, определим

$$[W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{G}}]_2 = \varinjlim_{W_{\mathcal{H}}} [W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{G}}; W_{\mathcal{H}}]_2,$$

где предел берется по всем свободным $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модулям $\mathcal{H}$ таким, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

Напомним, что из предложения 3 мы имеем канонический изоморфизм $\mathbb{Z}$ -торсоров:

$$[W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{G}}]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_{\mathcal{G}} | W_{\mathcal{H}}]_2 \rightarrow [W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{H}}]_2,$$

где $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ – любые три свободных $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модуля таких, что

$$\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}), \quad \mathcal{G} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}), \quad \mathcal{H} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}).$$

Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любых двух свободных $\mathcal{O}_{x,X}$ -модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ таких, что

$$\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}), \quad \mathcal{G} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}),$$

имеем канонический изоморфизм $\mathbb{Z}$ -торсоров

$$[W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{G}}]_2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{F})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{G}))), \quad (14)$$

и для любых трех свободных $\mathcal{O}_{x,X}$ -модулей $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ таких, что

$$\mathcal{F} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}), \quad \mathcal{G} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}), \quad \mathcal{H} \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}),$$

изоморфизм (14) переводит изоморфизм

$$[W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{G}}]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [W_{\mathcal{G}} \mid W_{\mathcal{H}}]_2 \rightarrow [W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{H}}]_2$$

в композицию отображений Hom для $\mathbb{Z}$ -торсоров $\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{F}))$, $\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{G}))$ и $\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{H}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $[W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{G}}]_2$ ясно, что достаточно доказать предложение в случае, когда

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H}.$$

Рассмотрим точную последовательность пучков на схеме $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0. \quad (15)$$

Ограничим точную последовательность (15) на подсхему $U = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \setminus x$ и применим к этой точной последовательности функтор аделей на схеме U . Так как адельный комплекс является точным функтором (см. [2], [16]), то мы имеем следующую точную последовательность комплексов:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_x(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{A}_x(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{A}_x(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0. \quad (16)$$

Схема U одномерна, и пучок $(\mathcal{G}/\mathcal{F})|_U$ имеет носитель на подсхеме размерности 0 в U . Поэтому адельный комплекс $\mathcal{A}_x(\mathcal{G}/\mathcal{F})$ имеет только нулевую компоненту, которая равна $H^0(U, \mathcal{G}/\mathcal{F}|_U)$. Так как

$$H^0(U, \mathcal{G}/\mathcal{F}|_U) = \varinjlim_n \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}}(m_x^n, \mathcal{G}/\mathcal{F}),$$

то

$$\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{G}/\mathcal{F})) = \text{Dim}(H^0(U, (\mathcal{G}/\mathcal{F})|_U)) = [\mathcal{F} \mid \mathcal{G}]_2. \quad (17)$$

Рассмотрим длинную точную когомологическую последовательность, ассоциированную с последовательностью комплексов (16),

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H^0(U, \mathcal{G}|_U) \rightarrow H^0(U, (\mathcal{G}/\mathcal{F})|_U) \\ \rightarrow H^1(U, \mathcal{F}|_U) \rightarrow H^1(U, \mathcal{G}|_U) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Расщепим последовательно эту последовательность на короткие точные последовательности:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{(0)} \rightarrow \mathcal{G}_{(0)} \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(0)} \rightarrow 0, \quad (18)$$

$$0 \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(0)} \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(1)} \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(2)} \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$0 \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(2)} \rightarrow \mathcal{F}_{(2)} \rightarrow \mathcal{G}_{(2)} \rightarrow 0. \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(0)} &= H^0(U, \mathcal{F}|_U), \\ \mathcal{G}_{(0)} &= H^0(U, \mathcal{G}|_U), \\ (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(1)} &= H^0(U, (\mathcal{G}/\mathcal{F})|_U), \\ \mathcal{F}_{(2)} &= H^1(U, \mathcal{F}|_U), \\ \mathcal{G}_{(2)} &= H^1(U, \mathcal{G}|_U). \end{aligned}$$

Как следует из явного доказательства предложения 8, точные последовательности (18)–(20) являются точными тройками линейно локально компактных k -пространств, как в п. 2) предложения 2. Поэтому по предложению 2 мы получаем изоморфизм $\mathbb{Z}$ -торсоров

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\mathcal{F}_{(0)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}((\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(0)}) &\rightarrow \text{Dim}(\mathcal{G}_{(0)}), \\ \text{Dim}((\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(0)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}((\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(2)}) &\rightarrow \text{Dim}((\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(1)}), \\ \text{Dim}((\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(2)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Dim}(\mathcal{G}_{(2)}) &\rightarrow \text{Dim}(\mathcal{F}_{(2)}). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (17), мы получаем требуемый изоморфизм (14).

Согласованность изоморфизма (14) с фильтрацией $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ следует из точности следующей диаграммы локально линейно компактных k -пространств:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(0)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{F})_{(0)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{G})_{(0)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(1)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{F})_{(1)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{G})_{(1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}/\mathcal{F})_{(2)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{F})_{(2)} & \longrightarrow & (\mathcal{H}/\mathcal{G})_{(2)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Рассмотрим k -пространство

$$W = W_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \subset \prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} K_{x,F}.$$

Также рассмотрим группу

$$H = \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})^*,$$

которая действует на $\prod_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} K_{x,F}$ диагональным образом. Как в п. 3.6, мы получаем центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{H}_W \rightarrow H \rightarrow 1. \quad (21)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Центральное расширение (21) расщепляется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется естественное действие группы H на множестве комплексов $\mathcal{A}_x(\mathcal{F})$:

$$h \in H: \mathcal{A}_x(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{A}_x(h\mathcal{F}).$$

Как следует из доказательства предложения 8, это действие индуцирует корректное действие на $\mathbb{Z}$ -торсорах:

$$h \in H: \text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{F})) \rightarrow \text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\mathcal{F})), \quad (22)$$

это действие будет согласовано с изоморфизмом (14), т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} [W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{G}}] & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{F})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(\mathcal{G}))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [W_{h\mathcal{F}} \mid W_{h\mathcal{G}}]_2 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\mathcal{F})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\mathcal{G}))) \end{array}$$

Чтобы доказать расщепление центрального расширения (21), определим другое центральное расширение $\widehat{H}'_W$ группы H при помощи $\mathbb{Z}$ как множество пар (h, d) , где $h \in H$ и элемент d принадлежит $\mathbb{Z}$ -торсору

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}))).$$

Умножение в $\widehat{H}'_W$, заданное по правилу $(h, d_1)(g, d_2) = (hg, d_1 \otimes h(d_2))$, превращает $\widehat{H}'_W$ в группу.

Теперь изоморфизм (14) $\mathbb{Z}$ -торсоров

$$[W \mid hW]_2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})))$$

индуцирует изоморфизм центральных расширений: $\widehat{H}_W \rightarrow \widehat{H}'_W$. Но центральное расширение $\widehat{H}'_W$ имеет каноническое расщепление, которое переводит элемент $h \in H$ в действие (22) элемента h на $\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}))$, т.е. элемент из

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_x(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})), \text{Dim}(\mathcal{A}_x(h\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}))).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f, g \in \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})^*$. Тогда следующая сумма содержит только конечное число ненулевых членов и

$$\sum_{F \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \nu_{x,F}(f, g) = 0, \quad (23)$$

где сумма берется по всем простым идеалам высоты 1 в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1

$$\nu_{x,F}(f, g) = \langle f, g \rangle_{K_{x,F}}.$$

Поэтому будем доказывать (23) для $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K_{x,F}}$. Выберем свободные $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модули $\mathcal{H}_1 \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$ и $\mathcal{H}_2 \subset \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})$, так что

$$\mathcal{H}_1 \subset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}, \quad \mathcal{H}_2 \supset \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}, \quad \mathcal{H}_1 \subset f\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \subset \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 \subset g\widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \subset \mathcal{H}_2.$$

Пусть $I = \text{Supp}(\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1)$ — множество простых идеалов F , являющихся носителем $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модуля $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$. Множество I конечно. (Мы выбрали множество I так, чтобы оно содержало все нули и полюсы функций f и g в $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$.) Пусть

$$M_1 = \prod_{F \in I} K_{x,F}, \quad M_2 = \prod_{F \neq I} K_{x,F}, \quad M = M_1 \times M_2.$$

Тогда согласно предложению 7

$$\langle f, g \rangle_M = \langle f, g \rangle_{M_1} + \langle f, g \rangle_{M_2}.$$

Так как

$$f \prod_{F \neq I} \mathcal{O}_{K_{x,F}} = \prod_{F \neq I} \mathcal{O}_{K_{x,F}}, \quad g \prod_{F \neq I} \mathcal{O}_{K_{x,F}} = \prod_{F \neq I} \mathcal{O}_{K_{x,F}},$$

то, как при доказательстве п. 4) предложения 4, центральное расширение $\widehat{H}_{M_2 \cap W}$ расщепляется над подгруппой, порожденной элементами f и g , и с учетом предложения 6 мы получаем

$$\langle f, g \rangle_{M_2} = 0.$$

Из предложения 10 получаем $\langle f, g \rangle_M = 0$. Поэтому имеем

$$0 = \langle f, g \rangle_{M_1} = \sum_{F \in I} \langle f, g \rangle_{K_{x,F}}. \quad (24)$$

Для любого $F \neq I$ верно

$$f\mathcal{O}_{K_{x,F}} = \mathcal{O}_{K_{x,F}}, \quad g\mathcal{O}_{K_{x,F}} = \mathcal{O}_{K_{x,F}},$$

это влечет $\langle f, g \rangle_{K_{x,F}} = 0$, если $F \neq I$. Последнее вместе с равенством (24) эквивалентно утверждению теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f, g \in k(X)^*$. Тогда следующая сумма содержит только конечное число ненулевых членов и

$$\sum_{C \ni x} \nu_{x,C}(f, g) = 0,$$

где сумма берется по всем неприводимым кривым $C \subset X$, проходящим через точку x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J_C \subset \mathcal{O}_{x,X}$ — идеал кривой C в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,X}$ точки x на X . Если с идеалом $J_C \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ в пополненном кольце $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ ассоциированы простые идеалы $F_1, \dots, F_m$, то

$$K_{x,C} = \bigoplus_{i=1}^m K_{x,F_i}, \quad \nu_{x,C} = \bigoplus_{i=1}^m \nu_{x,F_i}.$$

Если простой идеал F высоты 1 в кольце $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ не является ассоциированным с некоторым идеалом $J_C \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ для некоторой неприводимой кривой $C \subset X$, то $F = F' \cap \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ для некоторого простого идеала F' из одномерного кольца $k(X) \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$. Тогда мы имеем $\langle f, g \rangle_{K_{x,F}} = 0$ для $f, g \in k(X)^*$. Далее применяем теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Результаты этого параграфа верны также для особых точек x на алгебраических поверхностях X . Как и раньше, надо рассматривать адельные комплексы на схемах $U = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{x,X} \setminus x$. Тогда ключевым будет аналог предложения 8, при доказательстве которого применяется следующая лемма.

ЛЕММА 6. Пусть $x \in X$ — любая точка на алгебраической поверхности, не обязательно гладкая. Тогда для любого конечно порожденного $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модуля $\mathcal{G}$ k -пространства

$$\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\hat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{G})$$

конечномерны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\hat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \cdot)$ как функтор от второго аргумента через инъективную резольвенту $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модулей, мы получаем, что группы $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\hat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \cdot)$ как $\mathcal{O}_{x,X}$ -модули аннулируются m_x^n . Вычисляя теперь группу $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\cdot, \mathcal{G})$ как функтор по первому аргументу через свободную резольвенту $\hat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -модулей, получаем, что группы $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\cdot, \mathcal{G})$ — конечно порожденные $\mathcal{O}_{x,X}$ -модули. Поэтому k -пространства $\text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x,X}}^i(\hat{\mathcal{O}}_{x,X}/m_x^n, \mathcal{G})$ конечномерны над k .

§ 5. Законы взаимности вдоль кривых

5.1. Адельный комплекс, связанный с кривой на поверхности. Пусть X — гладкая алгебраическая поверхность над полем k . Пусть C — неприводимая кривая на X .

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X . Построим адельный комплекс $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$ абелевых групп следующим образом:

$$\mathcal{A}_C(\mathcal{F}) = \varinjlim_n \varprojlim_{m \geq n} \mathcal{A}_X(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n / J_C^m).$$

Здесь J_C – пучок идеалов на X , определяющий кривую C , и $\mathcal{A}_X$ – функтор, сопоставляющий когерентному пучку на поверхности X адельный комплекс на X (см. [2], [16]).

Комплекс $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$ имеет не более чем два члена, так как пучок $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n/J_C^m$ сосредоточен на некоторой инфинитезимальной окрестности кривой C в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

– точная тройка когерентных пучков на X . Тогда точна тройка комплексов абелевых групп

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_C(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{A}_C(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{A}_C(\mathcal{H}) \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как инъективные пределы сохраняют точность комплексов, то для каждого целого n докажем точность функтора

$$\varprojlim_{m \geq n} \mathcal{A}_X(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n/J_C^m).$$

Для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X и целого n пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n$.

Для любого натурального l точна следующая последовательность пучков на X :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{G}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{H}_n/J_C^l \mathcal{H}_n \rightarrow 0.$$

Функтор $\mathcal{A}_X$ является точным функтором, поэтому точна последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathcal{A}_X(\mathcal{G}_n/J_C^l \mathcal{G}_n) \rightarrow \mathcal{A}_X(\mathcal{H}_n/J_C^l \mathcal{H}_n) \rightarrow 0.$$

Для любого $l \geq l'$ отображения

$$\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n/J_C^{l'} \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n$$

сюръективны, следовательно сюръективны отображения

$$\mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^{l'} \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n).$$

Поэтому функтор $\varprojlim$ точен. Следовательно, точна последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_{l \geq 0} \mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n) \rightarrow \varprojlim_{l \geq 0} \mathcal{A}_X(\mathcal{G}_n/J_C^l \mathcal{G}_n) \rightarrow \varprojlim_{l \geq 0} \mathcal{A}_X(\mathcal{H}_n/J_C^l \mathcal{H}_n) \rightarrow 0. \quad (25)$$

Из леммы Артина–Рисса (см. [18]) следует, что существует натуральное k такое, что $J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n = J_C^{l-k}(J_C^k \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n)$ для всех $l \geq k$. Поэтому следующие отображения корректно определены:

$$\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n/J_C^{l-k} \mathcal{F}_n, \quad \mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n.$$

Поэтому $\mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n)$ и $\mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{F}_n)$, когда l пробегает натуральные числа, являются кофинальными проективными системами. Отсюда

$$\varinjlim_{m \geq n} \mathcal{A}_X(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n/J_C^m) = \varinjlim_{l \geq 0} \mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{F}_n) = \varinjlim_{l \geq 0} \mathcal{A}_X(\mathcal{F}_n/J_C^l \mathcal{G}_n \cap \mathcal{F}_n).$$

Отсюда и из (25) после перехода к инъективному пределу мы получаем, что функтор $\mathcal{A}_C$ точен.

Для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X комплекс $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$ имеет следующий вид:

$$A(\mathcal{F}) \times \prod_{x \in C} B_x(\mathcal{F}) \rightarrow D(\mathcal{F}).$$

Из предложения 11 и аналогично доказательству предложения (10.13) из [18] мы получаем, что $B_x(\mathcal{F}) = B_x(\mathcal{O}_X) \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F}$. Обозначим $B_x = B_x(\mathcal{O}_X)$.

Пусть $\mathcal{F} \subset k(X)$ – обратимый пучок на X . Тогда комплекс $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$ имеет следующий вид:

$$\widehat{k(X)}_C \times \prod_{x \in C} (B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_C,$$

где произведение берется по всем точкам кривой C , поле $\widehat{k(X)}_C$ есть пополнение поля $k(X)$ по отношению к дискретному нормированию, задаваемому неприводимой кривой C , кольцо B_x является $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ -подмодулем в кольце $K_{x,C}$.

Кольцо $\mathbb{A}_C$ имеет следующий явный вид:

$$\mathbb{A}_C = \{f_x\} \in \prod_{x \in C} K_{x,C},$$

так что для некоторого локального параметра u_C , задающего кривую C на открытом $U \subset X$, для почти всех $x \in C \cap U$ из разложения $f_x = \sum_{i \geq n_f} a_{x,i} u_C^i$ мы имеем для каждого i набор $\{a_{x,i} \in \widehat{k(C)}_x\}$, который есть обычный адель на кривой C . (Это значит, что для каждого фиксированного i для почти всех точек $x \in C$ верно $a_{x,i} \in \widehat{\mathcal{O}_{k(C)}_x}$.)

Если точка x гладкая на кривой C , то после выбора локальных параметров $K_{x,C} = k'((t))((u_C))$. Тогда $B_x = k'[[t]]((u_C))$. (Поле $k' = k(x)$ есть поле вычетов точки x .)

Для любого обратимого пучка $\mathcal{F} \subset k(X)$ обозначим

$$W_{\mathcal{F}} = \prod_{x \in C} B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F} \subset \mathbb{A}_C.$$

Для любых обратимых пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ таких, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} \subset k(X)$, k -пространство

$$W_{\mathcal{F}}/W_{\mathcal{H}} = \prod_{x \in C} B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} (\mathcal{F}/\mathcal{H})$$

локально линейно компактно. Поэтому имеет смысл следующее определение из п. 3.2: для любых обратимых пучков $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, лежащих в $k(X)$,

$$[W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{G}}]_2 = \varprojlim_{W_{\mathcal{H}}} [W_{\mathcal{F}} | W_{\mathcal{G}}; W_{\mathcal{H}}]_2,$$

где предел берется по всем обратимым пучкам $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

Рассмотрим центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{k(X)}_{W_{\mathcal{O}_X}}^* \rightarrow k(X)^* \rightarrow 1, \quad (26)$$

где $\widehat{k(X)}_{W_{\mathcal{O}_X}}^*$ состоит из множества пар (g, d) , $g \in k(X)^*$, $d \in [W_{\mathcal{O}_X} | gW_{\mathcal{O}_X}]_2$, и умножение стандартно: $(g_1, d_1)(g_2, d_2) = (g_1g_2, d_1g_1(d_2))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть кривая C проективна. Тогда центральное расширение (26) расщепляется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обратимого пучка $\mathcal{F} \subset k(X)$ рассмотрим когомологии комплекса $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$. Из конечномерности когомологий $H^i(X, \mathcal{F} \otimes J_C^n/J_C^m)$ следует, что когомологии комплекса $\mathcal{A}_C(\mathcal{F})$ совпадают с

$$\varprojlim_n \varprojlim_{m \geq n} H^i(X, \mathcal{F} \otimes J_C^n/J_C^m).$$

Отсюда мы получаем, что $H^0(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))$ является локально линейно компактным k -пространством с топологией, задаваемой индуктивными и проективными пределами.

Пусть для $k \leq n \leq m$ $\varphi_{knm}: H^1(X, \mathcal{F} \otimes J_C^n/J_C^m) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F} \otimes J_C^k/J_C^m)$ — естественное отображение. Пусть

$$\text{Ker } \varphi_{nm} = \varprojlim_k \text{Ker } \varphi_{knm}.$$

Обозначим

$$H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})) = \varprojlim_n \varprojlim_{m \geq n} H^1(X, \mathcal{F} \otimes J_C^n/J_C^m) / \text{Ker } \varphi_{nm}.$$

Тогда k -пространство $H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))$ локально линейно компактно, и мы имеем естественное отображение

$$H^1(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})) \rightarrow H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})).$$

Мы здесь переходим от нехаусдорфова пространства к хаусдорфову, факторизуя по замыканию нуля в $H^1(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))$.

Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ — обратимые пучки в $k(X)$, то имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})) \rightarrow H^0(\mathcal{A}_C(\mathcal{G})) \rightarrow H^0(\mathcal{A}_C(\mathcal{G}/\mathcal{F})) \\ \rightarrow H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})) \rightarrow H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{G})) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (27)$$

которая получается из обычной длинной точной когомологической последовательности фактором по замыканию нуля в каждом члене.

Обозначив $\text{Dim } \mathcal{A}_C(\mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(H^{1'}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))), \text{Dim}(H^0(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))))$, рассуждая как при доказательстве предложения 9 и используя точную последовательность (27), мы получаем канонический изоморфизм

$$[W_{\mathcal{F}} \mid W_{\mathcal{G}}]_2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F})), \text{Dim}(\mathcal{A}_C(\mathcal{G}))) \quad (28)$$

для любых обратимых пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ из $k(X)$.

Любой элемент $h \in k(X)^*$ переводит $\text{Dim}(\mathcal{A}_C(\mathcal{F}))$ в $\text{Dim}(\mathcal{A}_C(h\mathcal{F}))$. Поэтому, рассуждая как при доказательстве предложения 10 и используя изоморфизм (28), мы получаем, что центральное расширение (26) расщепляется.

5.2. Связь центрального расширения, приходящего из кривой и из точки. Пусть X — гладкая алгебраическая поверхность, C — неприводимая кривая на X , x — точка на C . Пусть группа $H = \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X})^*$.

Рассмотрим центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{H}_{B_x} \rightarrow H \rightarrow 0, \quad (29)$$

где $\widehat{H}_{B_x}$ есть множество пар (g, d) , $g \in H$, $d \in [B_x \mid gB_x]_2$, со стандартным умножением $(g_1, d_1)(g_2, d_2) = (g_1g_2, d_1g_1(d_2))$.

Рассмотрим другое центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{H}_{\mathcal{O}_{K_{x,C}}} \rightarrow H \rightarrow 0, \quad (30)$$

где $\widehat{H}_{\mathcal{O}_{K_{x,C}}}$ есть множество пар (g, d) , $g \in H$, $d \in [\mathcal{O}_{K_{x,C}} \mid g\mathcal{O}_{K_{x,C}}]_2$, со стандартным умножением $(g_1, d_1)(g_2, d_2) = (g_1g_2, d_1g_1(d_2))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Центральное расширение (29) дуально центральному расширению (30).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ — обратимый пучок, $\mathcal{F} \subset k(X)$. Тогда так как $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \setminus C$ — аффинная схема, то по теореме 2 из [19] когомологии комплекса $\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F})$

$$(B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F}) \times (\mathcal{O}_{K_{x,C}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F}) \rightarrow K_{x,C}$$

совпадают с когомологиями $H^i(U, \mathcal{F} \mid U)$ для одномерной схемы $U = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{x,X} \setminus x$. В самом деле, комплекс $\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F})$ есть комплекс из соответствия Кричевера для одномерной схемы U , замкнутой точки $C \cap U$ и аффинной схемы $U \setminus C$.

Из доказательства предложения 8 следует, что определен $\mathbb{Z}$ -торсор

$$\text{Dim}(\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F})) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(H^1(\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F}))), \text{Dim}(H^0(\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F})))).$$

Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, то, применяя функтор $\mathcal{A}_{x,C}$ и выписывая длинную точную когомологическую последовательность, получаем существование изоморфизма

$$\begin{aligned} [B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F} \mid B_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{G}]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathcal{O}_{K_{x,C}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{F} \mid \mathcal{O}_{K_{x,C}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}} \mathcal{G}]_2 \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Dim}(\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{F})), \text{Dim}(\mathcal{A}_{x,C}(\mathcal{G}))). \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим центральное расширение $\widehat{H}$, состоящее из множества пар (h, d) , где $h \in H$, $d \in [B_x \mid hB_x]_2 \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathcal{O}_{K_{x,C}} \mid h\mathcal{O}_{K_{x,C}}]_2$, со стандартным умножением $(g_1, d_1)(g_2, d_2) = (g_1g_2, d_1g_1(d_2))$. Рассуждая как при доказательстве предложения 10, используя (31), мы получаем, что центральное расширение $\widehat{H}$ расщепляется над группой H .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из этого предложения и из (10) следует, что коммутатор подъемов элементов в центральном расширении (29) равен минус коммутатору подъема элементов в центральном расширении (30).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f, g \in k(X)^*$. Тогда следующая сумма содержит только конечное число ненулевых членов и

$$\sum_{x \in C} \nu_{x,C}(f, g) = 0,$$

где сумма берется по всем точкам x неприводимой проективной кривой C на поверхности X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение 12 и рассуждая как при доказательстве теоремы 2, мы получаем, что сумма коммутаторов подъемов элементов из $k(X)^*$, вычисленных по центральному расширению (29), равна нулю.

Теперь, используя замечание 8 и теорему 1, мы получаем, что каждый коммутатор подъема элементов, вычисленный по центральному расширению (29), совпадает с $-\nu_{x,C}$.

Список литературы

1. Паршин А. Н. Локальная теория полей классов // Труды МИАН. 1985. Т. 165. С. 157–185.
2. Бейлинсон А. А. Вычеты и адели // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. № 1. С. 44–45.
3. Fimmel T., Parshin A. N. Introduction to higher adelic theory // Preprint. M.: Steklov Mathematical Institute, 1999.
4. Parshin A. N. Chern classes, adeles and L -functions // J. Reine Angew Math. 1983. V. 341. P. 174–192.
5. Паршин А. Н. К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты // Изв. АН СССР Сер. матем. 1976. Т. 40. № 4. С. 736–773.
6. Kapranov M. M. Semiinfinite symmetric powers // E-print: math.QA/0107089.
7. Tate J. Residues of differentials on curves // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1968. V. 1. P. 149–159.
8. Arbarello E., De Concini C., Kac V. G. The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves // Theta functions. Proc. 35th Summer Res. Inst. Bowdoin Coll., Brunswick, ME, 1987. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. P. 171–190. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 49. Part I.)
9. Brylinski J.-L. Central extensions and reciprocity laws // Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 1997. V. 38. № 3. P. 193–215.
10. Pablos Romo F. On the tame symbol of an algebraic curve // Comm. Algebra. 2002. V. 30. № 9. P. 4349–4368.
11. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
12. Lefschetz S. Algebraic topology. New York: Amer. Math. Soc., 1942. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 27.)

13. *Beilinson A. A.* How to glue perverse sheaves // *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow Univ. 1984–86). Berlin: Springer-Verlag, 1987. P. 42–51. (Lecture Notes in Math. V. 1289.)
14. *Yekutieli A.* An explicit construction of the Grothendieck residue complex. With an appendix by Pramathanath Sastry. Paris: Soc. Math. France, 1992. (Astérisque. V. 208.)
15. *Ломадзе В. Г.* Об индексе пересечения дивизоров // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1980. Т. 44. С. 1120–1130.
16. *Huber A.* On the Parshin–Beilinson adeles for schemes // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1991. V. 61. P. 249–273.
17. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
18. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
19. *Осипов Д. В.* Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2001. Т. 65. № 5. С. 91–128.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
29.12.2004