Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Аг. Х. Ханмамедов, Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 10, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 06:57:20

УДК 517.9

Аг. Х. Ханмамедов

Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла

Изучаются прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного уравнения Хилла $(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1})y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n)y_n + (\hat{a}_n + a_n)y_{n+1} = \lambda y_n$, $n \in \mathbb{Z}$. По периодическим коэффициентам $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ и по данным рассеяния восстанавливаются коэффициенты возмущения a_n, b_n .

Библиография: 21 название.

Введение

Некоторые физические явления можно моделировать разностными уравнениями второго порядка. Примерами являются колебание частиц в одномерных линейных цепочках [1], разностная аппроксимация дифференциальных уравнений [2] и т.д. В работах [2]–[7] изучалась обратная задача рассеяния для разностного уравнения Штурма–Лиувилля

$$p_{n-1}y_{n-1} + q_n y_n + p_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

в случае, когда коэффициенты p_n, q_n сходятся на бесконечности. Однако классические рассуждения, использованные в [2]–[7], не позволяют исследовать обратную задачу для разностного уравнения Штурма–Лиувилля с расходящимися коэффициентами. Это связано в первую очередь с тем, что решения соответствующего стационарного уравнения, имеющие асимптотики на бесконечности, подвергаются существенным изменениям (см. [8]). Последнее приводит к нарушению аддитивного свойства функции рассеяния. В то же время в связи с запросами теории нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, возникает необходимость изучения таких задач. Кроме того, разностные аналоги некоторых непрерывных моделей таких, как одномерная система Дирака, описываются (см. [8]) разностными уравнениями Штурма–Лиувилля в случае, когда сходятся лишь специальные подпоследовательности коэффициентов p_n, q_n .

В настоящей работе исследуются прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1})y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n)y_n + (\hat{a}_n + a_n)y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (0.1)$$

в котором вещественные коэффициенты $\hat{a}_n, a_n, \hat{b}_n, b_n$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n+N} = \hat{a}_n > 0, \quad \hat{b}_{n+N} = \hat{b}_n, \quad \hat{a}_n + a_n > 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ Q_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^r (|a_n| + |b_n|) < \infty, \quad r = 1 \text{ или } r = 2, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $N \geq 2$ – натуральное число. Это охватывает тот случай, когда коэффициенты разностного уравнения Штурма–Лиувилля содержат N сходящихся специальных подпоследовательностей. При $N = 2$ эта задача рассматривалась в работах [9]–[11]. Однако решения обратных задач рассеяния в этих статьях нельзя считать удовлетворительными в силу отсутствия доказательства положительности некоторых выражений, связанных с коэффициентом возмущения a_n . Кроме того, при $\hat{b}_n + b_n \equiv 0$ этот случай изучен в [12] для более широкого класса коэффициентов возмущения a_n .

В работе найдены условия на данные рассеяния, которые являются необходимыми (при $Q_2 < \infty$) и достаточными для существования единственных коэффициентов a_n, b_n с данными характеристиками рассеяния и конечным первым моментом $Q_1 < \infty$.

Отметим, что уравнение (0.1) служит разностным аналогом возмущенного уравнения Хилла

$$-y'' + p(x)y + q(x)y = \lambda y, \quad p(x+1) = p(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

обратная задача рассеяния для которого исследовалась в работах [13], [14]. Как следует из [14], даже для примесных потенциалов $q(x)$ из класса

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)|q(x)| dx < \infty$$

обратную задачу не удастся решить столь же эффективно, как обратную задачу в случае $p(x) = 0$ (см. также [15; гл. 3, § 5]).

Работа состоит из пяти параграфов. Первый параграф посвящен изучению решений Флоке соответствующего невозмущенного (стационарного) уравнения. С их помощью построены так называемые “регуляризованные” решения Флоке. В § 2 изложена (при $Q_2 < \infty$) теория рассеяния для уравнения (0.1), т.е. построены данные рассеяния, изучены их свойства. Здесь мы следуем схеме, предложенной и разработанной в статьях [3]–[7], где обратная задача решена при $N = 1$. В § 3 получены основные уравнения типа Марченко, позволяющие решить обратную задачу. С помощью этих уравнений найдены некоторые свойства функций рассеяния. При этом некоторые характерные свойства такие, как неаддитивность функций рассеяния, не позволяют дословно применить методики, использованные в [3]–[7]. Последние два параграфа посвящены решению обратной задачи, т.е. задаче восстановления коэффициентов a_n, b_n по невозмущенным коэффициентам $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ и по данным рассеяния. Наличие периодических коэффициентов приводит к тому, что решению невозмущенного уравнения соответствует некоторая система функций, образующая базис в некотором весовом пространстве. При решении обратной задачи мы пользуемся разложениями некоторых функций по такому базису. Исследование таких разложений требует ряда ухищрений. Это обстоятельство и отсутствие аддитивных свойств функции рассеяния вносят существенные трудности при применении традиционных подходов к решению обратной задачи.

§1. Исследование невозмущенного уравнения

Через $\varphi_n = \varphi_n(\lambda)$ и $\theta_n = \theta_n(\lambda)$ обозначим решения невозмущенного уравнения

$$\widehat{a}_{n-1}y_{n-1} + \widehat{b}_n y_n + \widehat{a}_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.1)$$

удовлетворяющие условиям $\varphi_0 = \theta_1 = 0$, $\varphi_1 = \theta_0 = 1$. Обозначим $\Delta(\lambda) = 2^{-1}[\varphi_{N+1} + \theta_N]$. Известно, что [16; гл. 4, § 4] корни многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$ могут быть пронумерованы в невозрастающем порядке:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 > \lambda_4 > \dots > \lambda_{2N-2} \geq \lambda_{2N-1} > \lambda_{2N}.$$

При этом множество $\sigma = \{\lambda : |\Delta(\lambda)| \leq 1\} = \bigcup_{r=1}^N \sigma_r$, где $\sigma_r = [\lambda_{2r}, \lambda_{2r-1}]$, $r = 1, \dots, N$, является непрерывным спектром оператора, порожденного левой частью уравнения (1.1) в пространстве $l^2(-\infty, \infty)$. Многочлен $\Delta(\lambda)$ монотонно убывает от 1 до -1 на четных компонентах спектра σ_{2r} и возрастает от -1 до 1 на нечетных компонентах σ_{2r-1} . Только отрезки $[\lambda_{2r+1}, \lambda_{2r}]$, $r = 1, \dots, N-1$, которые мы назовем *лакунами*, могут вырождаться в точку, давая двукратно вырожденные корни. В каждой лакуне лежит [16], [17] по одному (простому) нулю многочленов $\varphi_N(\lambda)$, $\Delta_\lambda(\lambda)$, $\theta_{N+1}(\lambda)$.

Пусть Γ — комплексная λ -плоскость с разрезами по отрезкам σ_r , $r = 1, 2, \dots, N$. В плоскости Γ рассмотрим функцию

$$z = z(\lambda) = \Delta(\lambda) + \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1} < 0$ при $\lambda > \lambda_1$. Тогда [18] функция $z = z(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$ и обладает свойствами

$$\begin{aligned} |z| < 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in \Gamma, \quad |z| = 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in \partial\Gamma, \\ z = \frac{A}{\lambda^N} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad A = \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \dots \widehat{a}_N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Существует [18] число $r > 0$ такое, что для любой точки $\lambda_0 \in \sigma$ замкнутый полукруг $T^\pm = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq r, \pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$ конформно отображается функцией $z = z(\lambda)$ на внутренность единичного круга $|z| \leq 1$.

Как следует из [8], [17], уравнение (1.1) имеет решения $\Psi_n^\pm = \Psi_n^\pm(\lambda)$, представимые в виде $\Psi_{nN+j}^\pm = E_{j+1}^\pm z^{\pm n}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, где функции $E_j = E_j(\lambda)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} E_1^\pm \equiv 1, \quad E_m^\pm = \chi^{-1}(1, N-1; \lambda) [\widehat{a}_{m-1} \widehat{a}_m \dots \widehat{a}_{N-1} \chi(1, m-2; \lambda) z^{\pm 1} \\ + \widehat{a}_0 \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_{m-2} \chi(m, N-1; \lambda)], \quad m = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем $\chi(1, 0; \lambda) = \chi(N, N-1; \lambda) \equiv 1$,

$$\chi(m, s; \lambda) = (-1)^{s-m+1} \begin{vmatrix} \widehat{b}_m - \lambda & \widehat{a}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{a}_m & \widehat{b}_{m+1} - \lambda & \widehat{a}_{m+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_{s-2} & \widehat{b}_{s-1} - \lambda & \widehat{a}_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{a}_{s-1} & \widehat{b}_s - \lambda \end{vmatrix}.$$

Так как для любой точки $\lambda \in \Gamma$ выполняются соотношения $\Psi_n^\pm(\lambda) \in l^2(0, \pm\infty)$, то функции $\Psi_n^\pm(\lambda)$ служат решениями Флоке для уравнения (1.1)

$$\Psi_n^\pm(\lambda) = \theta_n(\lambda) + m^\pm(\lambda)\varphi_n(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Учитывая, что $\Psi_n^\pm(\lambda) = z^{\pm 1} = \Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}$, имеем

$$m^\pm(\lambda) = \frac{\varphi_{N+1} - \theta_N}{2\varphi_N} \pm \frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}}{\varphi_N}, \quad (1.5)$$

откуда вытекает, что $m^+(\lambda)m^-(\lambda) = -\theta_{N+1}/\varphi_N$. В силу вышеупомянутых свойств функций φ_N , θ_{N+1} и последнего равенства в нулях многочлена $\varphi_N = \varphi_N(\lambda)$ одно из решений $\Psi_n^\pm(\lambda)$ регулярно, а другое имеет простой полюс. Более того, эти решения непрерывны вплоть до $\partial\Gamma$ плоскости Γ .

Далее, как следует из [16; гл. 4, § 4], для производной $\Delta'(\lambda)$ функции $\Delta(\lambda)$ справедлива формула

$$2\widehat{a}_N\Delta'(\lambda) = \varphi_N \sum_{n=1}^N \left(\theta_n^2 + \frac{\varphi_{N+1} - \theta_N}{\varphi_N} \varphi_n \theta_n - \frac{\theta_{N+1}}{\varphi_N} \varphi_n^2 \right).$$

С другой стороны, в силу (1.4), (1.5) получаем

$$\Psi_n^+(\lambda) \Psi_n^-(\lambda) = \theta_n^2 + \frac{\varphi_{N+1} - \theta_N}{\varphi_N} \varphi_n \theta_n - \frac{\theta_{N+1}}{\varphi_N} \varphi_n^2.$$

Замечая, что $\chi(1, N-1; \lambda) = \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \cdots \widehat{a}_{N-1} \varphi_N(\lambda)$, $\Psi_{nN+j}^\pm = E_{j+1}^\pm z^{\pm n}$, имеем

$$2A\Delta'(\lambda) = \chi(1, N-1; \lambda) \sum_{r=1}^N E_r^+ E_r^-. \quad (1.6)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства решений Флоке. Пусть

$$\rho_0(\lambda) = \frac{A\chi(1, N-1; \lambda)}{(z - z^{-1})}.$$

ЛЕММА 1.1. *Имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) \Psi_n^+(\lambda) \Psi_m^-(\lambda) d\lambda = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.7)$$

где i – мнимая единица, δ_{nm} – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись теоремой о вычетах, находим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) \Psi_n^+(\lambda) \Psi_m^-(\lambda) d\lambda = \operatorname{res}_{\lambda=\infty} \rho_0(\lambda) \Psi_n^+(\lambda) \Psi_m^-(\lambda).$$

Согласно (1.3) при $n \geq m$ верно соотношение

$$\rho_0(\lambda) \Psi_n^+(\lambda) \Psi_m^-(\lambda) = -\frac{\delta_{nm}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

откуда следует справедливость формулы (1.7) при $n \geq m$. Принимая во внимание, что $\overline{\rho_0(\lambda)} = -\rho_0(\lambda)$, $\overline{\Psi_n^+(\lambda)} = \Psi_n^-(\lambda)$ при $\lambda \in \partial\Gamma$, получаем (1.7) для всех n и m .

Лемма доказана.

Обозначим $\widehat{\rho}(\lambda) = -i\rho_0(\lambda + i0)$, $\lambda \in \sigma$. Согласно определению функции $z = z(\lambda)$ выражение $i(-1)^{k-1}(z - z^{-1})$ на верхнем берегу разреза σ_k принимает неотрицательные значения. Кроме этого многочлен $\chi(1, N-1; \lambda)$, устремляясь к $+\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, имеет ровно один нуль между компонентами σ_{k+1} и σ_k . Следовательно, во внутренних точках спектра σ справедливо равенство $\widehat{\rho}(\lambda) > 0$.

Введем в рассмотрение пространство $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$ функций $f(\lambda)$, определенных на $\partial\Gamma$ и удовлетворяющих условиям

$$f(\lambda - i0) = \overline{f(\lambda + i0)} \quad \text{при п.в.} \quad \lambda \in \sigma, \quad \left| \int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) |f(\lambda)|^2 d\lambda \right| < \infty.$$

Ясно, что $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$ представляет собой евклидово пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\lambda.$$

Легко проверить, что это пространство есть сепарабельное гильбертово пространство; доказательство точно такое же, как и в случае обычного пространства L_2 (см. [19; гл. 7, §2]).

ЛЕММА 1.2. Системы функций $\{\Psi_n^+(\lambda)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\Psi_n^-(\lambda)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ являются базисами в $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$ не существует ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\Psi_n^\pm(\lambda)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Пусть $f(\lambda) \in L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$ и

$$\int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) f(\lambda) \overline{\Psi_n^\pm(\lambda)} d\lambda = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как $\overline{\Psi_n^\pm(\lambda)} = \Psi_n^\mp(\lambda)$ при $\lambda \in \partial\Gamma$, то

$$\int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) f(\lambda) \Psi_n^\pm(\lambda) d\lambda = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В силу (1.1) имеем равенство

$$\int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) f(\lambda) \Psi_n^\pm(\lambda) \lambda^m d\lambda = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

согласно которому при всех $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\int_{\partial\Gamma} \rho_0(\lambda) f(\lambda) (\Psi_n^\pm(\lambda) - \Psi_k^\pm(\lambda)) \lambda^m d\lambda = 0.$$

Полагая $n = N, k = -N$ и учитывая (1.3), получаем

$$\int_{\sigma} \lambda^m \chi(1, N-1; \lambda) \operatorname{Im} f(\lambda + i0) d\lambda = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что $\operatorname{Im} f(\lambda + i0) = 0$ при $\lambda \in \sigma$.

С другой стороны, выбирая в предпоследнем равенстве $n = 2N, k = 0$ и используя (1.3), имеем

$$\int_{\sigma} \lambda^m \chi(1, N-1; \lambda) \operatorname{Im}(z(\lambda + i0) f(\lambda + i0)) d\lambda = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому $\operatorname{Im}(z(\lambda + i0) f(\lambda + i0)) = 0$ при $\lambda \in \sigma$. Так как $\operatorname{Im} f(\lambda + i0) = 0$, $\operatorname{Im} z(\lambda + i0) \neq 0$ при $\lambda \in \sigma$, то $\operatorname{Re} f(\lambda + i0) = 0$ при $\lambda \in \sigma$. Следовательно, $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \partial\Gamma$.

Лемма доказана.

Введем теперь “регуляризованные” решения Флоке. С этой целью представим многочлен $\chi(1, N-1; \lambda)$ в виде

$$\chi(1, N-1; \lambda) = D^+(\lambda) D(\lambda) D^-(\lambda), \quad (1.9)$$

где корни многочлена $D^\pm(\lambda)$ совпадают с полюсами функции $m^\pm(\lambda)$, а корни многочлена $D(\lambda)$ состоят из двукратных нулей многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$.

Введем функции $e_r^\pm = e_r^\pm(\lambda)$, полагая

$$e_r^\pm = D^\pm(\lambda) E_r^\pm, \quad r = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Тогда при $\lambda \in \partial\Gamma$ имеют место равенства

$$D^-(\lambda) \overline{e_m^\pm} = D^+(\lambda) e_m^\pm, \quad m = 1, \dots, N. \quad (1.11)$$

Ввиду однородности уравнения (1.1) заметим, что это уравнение имеет решения $\psi_n^\pm = \psi_n^\pm(\lambda)$, регулярные в Γ , непрерывные вплоть до $\partial\Gamma$ и представимые в виде

$$\psi_{nN+j}^\pm = e_{j+1}^\pm z^{\pm n}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.12)$$

Кроме того, в силу (1.7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) \psi_n^+(\lambda) \psi_m^-(\lambda) d\lambda = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.13)$$

где

$$\rho(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{A(z - z^{-1})}. \quad (1.14)$$

§ 2. Прямая задача рассеяния

Рассмотрим решения $f_n^\pm(\lambda)$ уравнения (0.1), удовлетворяющие условиям

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (f_n^\pm(\lambda) - \psi_n^\pm(\lambda)) = 0.$$

Как следует из [8], такие решения существуют при $Q_1 < \infty$ и для них справедливы представления

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\pm(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m) \psi_m^\pm(\lambda) \right), \quad (2.1)$$

причем имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \alpha_n^\pm = 1, \quad |K^\pm(n, m)| \leq C^\pm(n) \xi^\pm \left(\left[\frac{n+m}{2} \right] \right), \quad (2.2)$$

где $\xi^\pm(n) = \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} (|a_k| + |b_k|)$, $[x]$ — целая часть x , $\pm C^\pm(n)$ — здесь и далее невозрастающая функция от n .

Подставляя решения (2.1) в уравнение (0.1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{a}_n + a_n}{\hat{a}_n} &= \frac{\alpha_{n+\theta_1^\pm}^\pm}{\alpha_{n-\theta_{-1}^\pm}^\pm}, \quad b_n = \pm(\hat{a}_n K^\pm(n, n+1) - \hat{a}_{n-1} K^\pm(n-1, n)) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_n^\pm, \\ \frac{(\hat{a}_n + a_n)^2}{\hat{a}_n} - \hat{a}_n &= \pm(\hat{a}_{n+1} K^\pm(n, n+2) - \hat{a}_{n-1} K^\pm(n-1, n+1)) \\ &\quad + (\hat{b}_{n+\theta_1^\pm} - \hat{b}_{n-\theta_{-1}^\pm} - \hat{b}_{n-\theta_1^\pm}) K^\pm(n, n+1) \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa_n^\pm, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\theta_j^\pm = [(j\pm 1)/2]$, а при $m > n$ подзаписью $K^-(n, m)$ подразумевается $K^-(m, n)$.

Установим теперь связь между решениями $f_n^+(\lambda)$ и $f_n^-(\lambda)$. Очевидно, что при $\lambda \in \partial\Gamma$ решениями уравнения (0.1) являются также

$$\tilde{f}_n^\pm(\lambda) = \frac{D^\mp(\lambda)}{D^\pm(\lambda)} \overline{f_n^\pm(\lambda)}.$$

Используя (1.11) и (2.1), получаем

$$\tilde{f}_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\mp(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m) \psi_m^\mp(\lambda) \right), \quad \lambda \in \partial\Gamma. \quad (2.4)$$

Пусть множество $\omega = \{\lambda_j\}$ состоит из простых корней многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$ и $'\partial\Gamma = \partial\Gamma \setminus \omega$. Тогда при $\lambda \in '\partial\Gamma$ пары $\{f_n^\pm(\lambda), \tilde{f}_n^\pm(\lambda)\}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (0.1), так как согласно (1.3), (1.9), (1.10), (2.1), (2.2), (2.4) их вронскиан $W[f_n^\pm, \tilde{f}_n^\pm] = (\hat{a}_n + a_n)(f_n^\pm \tilde{f}_{n+1}^\pm - f_{n+1}^\pm \tilde{f}_n^\pm)$ равен $\mp \rho^{-1}(\lambda)$. Следовательно, при $\lambda \in '\partial\Gamma$ справедливы разложения

$$\frac{f_n^\mp(\lambda)}{a(\lambda)} = \tilde{f}_n^\pm(\lambda) + r^\pm(\lambda) f_n^\pm(\lambda), \quad (2.5)$$

где

$$r^+(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r^-(\lambda) = -\left(\frac{D^+(\lambda)}{D^-(\lambda)}\right)^2 \frac{\overline{b(\lambda)}}{a(\lambda)}, \quad (2.6)$$

$$a(\lambda) = \rho(\lambda)W[f_n^-(\lambda), f_n^+(\lambda)], \quad b(\lambda) = \rho(\lambda)W[\tilde{f}_n^+(\lambda), f_n^-(\lambda)].$$

Согласно (2.1), (2.4) и (2.6) функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in {}'\partial\Gamma$. Кроме того, из соотношения $z(\lambda - i0) = \overline{z(\lambda + i0)}$, $\lambda \in \sigma$, и из (2.1), (2.4), (2.5) следует, что

$$a(\lambda - i0) = \overline{a(\lambda + i0)}, \quad b(\lambda - i0) = \overline{b(\lambda + i0)}, \quad \lambda \in \sigma \setminus \omega, \quad (2.7)$$

$$|a(\lambda)|^2 - \left| \frac{D^+(\lambda)}{D^-(\lambda)} b(\lambda) \right|^2 = 1, \quad \lambda \in {}'\partial\Gamma.$$

С другой стороны, ввиду соотношений (2.1), (2.6) функция $a(\lambda)$ допускает регулярное продолжение в Γ , а функция $\rho^{-1}(\lambda)a(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$.

Изучим теперь поведения коэффициентов $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ вблизи точек λ_j множества ω .

ЛЕММА 2.1. *Если $\lambda_0 \in \omega$, то при $Q_2 < \infty$ коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ сингулярны или не сингулярны в точке λ_0 одновременно:*

$$a(\lambda) = C_0 \rho(\lambda) + A(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma, \quad (2.8)$$

$$b(\lambda) = -C_0 \frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)} \rho(\lambda) + B(\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma,$$

где $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ непрерывны в точке $\lambda = \lambda_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности примем, что $z(\lambda_0) = 1$. Тогда

$$f_0^\pm(\lambda) - f_0^\pm(\lambda_0) = A_0^\pm(\lambda)(z - 1), \quad (2.9)$$

$$f_1^\pm(\lambda) - f_1^\pm(\lambda_0) = A_1^\pm(\lambda)(z - 1).$$

Докажем, например, первое равенство. Из (1.12), (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} f_0^+(\lambda) - f_0^+(\lambda_0) &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{N-1} e_{j+1}^+(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} K^+(0, mN + j) z^m(\lambda) \\ &\quad - \alpha_0 \sum_{j=0}^{N-1} e_{j+1}^+(\lambda_0) \sum_{m=0}^{\infty} K^+(0, mN + j) \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{N-1} (e_{j+1}^+(\lambda) - e_{j+1}^+(\lambda_0)) \sum_{m=0}^{\infty} K^+(0, mN + j) z^m(\lambda) \\ &\quad + \alpha_0 (z(\lambda) - 1) \sum_{j=0}^{N-1} e_{j+1}^+(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} K^+(0, mN + j) \\ &\quad \times (z^{m-1}(\lambda) + z^{m-2}(\lambda) + \dots + 1), \end{aligned}$$

где $K^+(0, 0) = 1$.

Согласно (1.3), (1.10) функции $(e_{j+1}^+(\lambda) - e_{j+1}^+(\lambda_0))/(z - 1)$ непрерывны в точке λ_0 . Кроме этого из условия $Q_2 < \infty$ и оценки (2.2) вытекает, что функция $\sum_{m=0}^{\infty} K^+(0, mN + j)(z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + 1)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$ плоскости Γ . Следовательно, $f_0^+(\lambda) - f_0^+(\lambda_0) = A_0^+(\lambda)(z - 1)$, где $A_0^+(\lambda)$ есть непрерывная функция в точке $\lambda = \lambda_0$. Другие соотношения из (2.9) проверяются аналогично.

Далее, так как вронскиан двух решений уравнения (0.1) не зависит (см. [3]) от n , то из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \rho(\lambda)W[f_0^-(\lambda_0), f_0^+(\lambda_0)] + \rho(\lambda)(W[f_0^-(\lambda), f_0^+(\lambda)] - W[f_0^-(\lambda_0), f_0^+(\lambda_0)]), \\ b(\lambda) &= \frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)}\rho(\lambda)W[\overline{f_0^+(\lambda)}, f_0^-(\lambda_0)] \\ &\quad + \frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)}\rho(\lambda)(W[\overline{f_0^+(\lambda)}, f_0^-(\lambda)] - W[\overline{f_0^+(\lambda_0)}, f_0^-(\lambda_0)]). \end{aligned}$$

Полагая $C_0 = W[f_0^-(\lambda_0), f_0^+(\lambda_0)]$ и учитывая $\overline{f_0^\pm(\lambda_0)} = f_0^\pm(\lambda_0)$ и равенства (2.9), получаем (2.8). При этом коэффициенты $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ сингулярны в точке $\lambda = \lambda_0$, если $C_0 \neq 0$, и не сингулярны, если $C_0 = 0$.

Лемма доказана.

Изучим асимптотическое поведение функции $a(\lambda)$ на бесконечности.

ЛЕММА 2.2. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = \alpha_n^+ \alpha_n^-. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.3), (1.10), (1.12), (2.1) следует, что

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \psi_n^\pm(\lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Учитывая эту асимптотику в формуле (2.6), получаем (2.10).

Лемма доказана.

В силу леммы 2.2 нули функции $a(\lambda)$ образуют ограниченное множество. Так как $a(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \partial\Gamma$, то предельными точками этого множества могут быть лишь простые нули $\lambda_j \in \omega$ многочлена $\Delta^2(\lambda) - 1$. Однако согласно лемме 2.1 это невозможно. Следовательно, нули функции $a(\lambda)$ образуют конечное множество.

С другой стороны, нули функции $a(\lambda)$, как следует из (2.6), служат собственными значениями оператора, порожденного левой частью уравнения (0.1) в пространстве $l^2(-\infty, \infty)$. В силу (0.2) этот оператор самосопряжен. Поэтому нули функции $a(\lambda)$ вещественны. Таким образом, функция $a(\lambda)$ может иметь только конечное число вещественных нулей μ_k , $k = 1, 2, \dots, p$, лежащих вне $\partial\Gamma$. Докажем, что эти нули простые.

Пусть

$$c_k = \frac{f_n^+(\mu_k)}{f_n^-(\mu_k)}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.11)$$

$$(m_k^\pm)^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(\mu_k)|^2. \quad (2.12)$$

ЛЕММА 2.3. Нули μ_k , $k = 1, \dots, p$, функции $a(\lambda)$ простые, и справедливы равенства

$$\rho^{-1}(\mu_k) \dot{a}(\mu_k) = -c_k^{-1}(m_k^+)^{-2} = -c_k(m_k^-)^{-2}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.13)$$

где точкой сверху обозначается производная по λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммируя соотношения

$$u_n v_n = W[\dot{u}_{n-1}, v_{n-1}] - W[\dot{u}_n, v_n] = W[\dot{v}_{n-1}, u_{n-1}] - W[\dot{v}_n, u_n]$$

при $u_n = f_n^+(\lambda)$, $v_n = f_n^-(\lambda)$, $\lambda = \mu_k$, и используя (2.11), получаем

$$\begin{aligned} W[f_n^+(\mu_k), f_n^-(\mu_k)] &= c_k^{\pm 1} \sum_{m=n+1}^{\infty} |f_m^{\mp}(\mu_k)|^2, \\ W[f_n^+(\mu_k), \dot{f}_n^-(\mu_k)] &= c_k^{\pm 1} \sum_{m=-\infty}^n |f_m^{\mp}(\mu_k)|^2. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и учитывая (2.6), (2.12), получаем соотношения (2.13), которые показывают, что нули μ_k являются простыми.

Лемма доказана.

Воспользовавшись (2.13), заметим, что

$$(m_k^+)^2 (m_k^-)^2 = (\rho^{-1}(\mu_k) \dot{a}(\mu_k))^{-2}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.14)$$

Выпишем некоторые из установленных свойств в виде условия, которое нам понадобится.

I) Функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma$, удовлетворяют соотношениям (2.7), (2.8). Функция $a(\lambda)$ регулярно продолжима в плоскости Γ , имеет асимптотику $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = d > 0$ и может иметь простые нули в точках μ_k , $k = 1, \dots, p$. Функция $\rho^{-1}(\lambda)a(\lambda)$ непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$. Нормировочные числа m_k^+ и m_k^- связаны соотношениями (2.14).

Известно [16], что ограниченные при $n \rightarrow \pm\infty$ решения уравнения вида (0.1) называются “волновыми” функциями. Если заданы “потенциалы” возмущения a_n , b_n и надо определить асимптотическое поведение волновых функций, то мы имеем прямую задачу рассеяния. Обратная же задача рассеяния – нахождение “потенциалов” возмущения a_n , b_n по заданным асимптотикам “волновых” функций и по невозмущенным “потенциалам” $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$. В математических терминах обратная задача рассеяния для уравнения вида (0.1) состоит в восстановлении возмущенного оператора, порождаемого этим уравнением в $l^2(-\infty, \infty)$, по асимптотикам “собственных” функций и по соответствующему невозмущенному оператору (см. [3], [4]).

В силу (2.1), (2.2), (2.5) уравнение (0.1) имеет ограниченные решения при $\lambda \in \sigma$ и $\lambda = \mu_k$, $k = 1, \dots, p$. Кроме того, согласно (2.5), (2.11), (2.13) набор величин $\{a(\lambda), b(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \mu_k; m_k^{\pm} > 0, k = 1, \dots, p\}$ полностью определяет асимптотики при $n \rightarrow \pm\infty$ ограниченных решений уравнения (0.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Набор величин

$$\{a(\lambda), b(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \mu_k; m_k^\pm > 0, k = 1, \dots, p\}$$

назовем *данными рассеяния для уравнения (0.1)*.

Обратная задача рассеяния для уравнения (0.1) заключается в восстановлении коэффициентов a_n, b_n этого уравнения по невозмущенным коэффициентам $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ и по данным рассеяния.

§3. Вывод основных уравнений

Выведем для нашей задачи уравнения, связывающие данные рассеяния с ядрами $K^\pm(n, m)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M^\pm(n, m) &= \sum_{k=1}^p (m_k^\pm)^2 \psi_n^\pm(\mu_k) \psi_m^\pm(\mu_k), \\ S^\pm(n, m) &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) r^\pm(\lambda) \psi_n^\pm(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda, \\ F^\pm(n, m) &= M^\pm(n, m) + S^\pm(n, m). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$F^\pm(n, m) + K^\pm(n, m) + \sum_{s=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, s) F^\pm(s, m) = 0, \quad \pm m \geq \pm(n \pm 1), \quad (3.1)$$

$$(\alpha_n^\pm)^{-2} = 1 + F^\pm(n, n) + \sum_{s=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, s) F^\pm(s, n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части равенства (2.5) на

$$\frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \rho(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda), \quad \pm m \geq \pm n,$$

и подставляя вместо $f_n^\pm(\lambda)$, $\tilde{f}_n^\pm(\lambda)$ их представления в виде (2.1), (2.4), проведем интегрирование по $\partial\Gamma$. Используя (1.13), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) f_n^\mp(\lambda) a^{-1}(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda \\ &= \delta_{nm} + (1 - \delta_{nm}) K^\pm(n, m) + S^\pm(n, m) + \sum_{r=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, r) S^\pm(r, m). \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя теорему о вычетах и учитывая (1.8), (1.10), (1.12), (1.14), а также используя лемму 2.2, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_n^\pm)^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) f_n^\mp(\lambda) a^{-1}(\lambda) \psi_m^\pm(\lambda) d\lambda \\ &= (\alpha_n^\pm)^{-2} \delta_{nm} - M^\pm(n, m) - \sum_{r=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, r) M^\pm(r, m). \end{aligned}$$

Сравнивая первое и последнее равенства, приходим к соотношениям (3.1), (3.2).

Лемма доказана.

Уравнения (3.1) назовем *основными уравнениями типа Марченко*.

Используем теперь уравнение (3.1) для уточнения свойств величины $F^\pm(n, m)$.

Полагая

$$\begin{aligned} e(\lambda; j) &= (e_1^+, \dots, e_j^+, e_{j+1}^+ z^{-1}, \dots, e_N^+ z^{-1}), \quad j = 1, \dots, N, \\ A_{nm}^{sj} &= \begin{cases} K^+(nN + s - 1, (n + m)N + j - 1), & 1 \leq j \leq s; \\ K^+(nN + s - 1, (n + m - 1)N + j - 1), & s < j \leq N, \end{cases} \end{aligned}$$

в силу (1.12), (2.1), (2.2) получаем

$$\begin{aligned} f_{nN+j-1}^+ &= \alpha_{nN+j-1} z^n \left(e_j^+ + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}^{j1}, \dots, A_{nm}^{jN}) e^*(\lambda; j) z^m \right), \\ |A_{nm}^{sj}| &\leq C_{sj}(n) \xi^+ \left(nN + \left[\frac{m-1}{2} N \right] \right), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $e^*(\lambda; j)$ – транспонированный вектор, $C_{sj}(n)$ – невозрастающая функция от n . При таких обозначениях уравнение (3.1) для случая “+” видоизменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & (F_{2n+m}^{s1}(s), \dots, F_{2n+m}^{sN}(s)) + (A_{nm}^{s1}, \dots, A_{nm}^{sN}) \\ & + \sum_{k=m+1}^{\infty} (A_{n,k-m}^{s1}, \dots, A_{n,k-m}^{sN}) F_{2n+k}(s) = 0, \\ & m = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где матрица $F_n(s)$ определяется формулой

$$F_n(s) = \sum_{j=1}^p (m_j^+)^2 e^*(\mu_j; s) e(\mu_j; s) z^n(\mu_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) r^+(\lambda) e^*(\lambda; s) e(\lambda; s) z^n d\lambda.$$

Обозначим $\|F_n\| = \max_{1 \leq s \leq N} \max_{(i,j)} |F_n^{ij}(s)|$. Из определения $F_n(s)$ следует, что при любых s_1 и s_2 , $s_1 < s_2$, существует такое l , $l = 0, 1, 2$, что

$$F_n^{ij}(s_2) = F_{n+l}^{ij}(s_1).$$

Учитывая это и используя (3.3), из последних уравнений находим, что для каждого конечного числа a при $n > a$ верно неравенство

$$\|F_{2n+m}\| \leq C \left(\xi^+ \left(nN + \left\lfloor \frac{m-1}{2} N \right\rfloor \right) + \xi^+(nN) \right) + C \sum_{k=m+1}^{\infty} \xi^+ \left(nN + \left\lfloor \frac{k-m-1}{2} N \right\rfloor \right) \|F_{2n+k}\|,$$

где $C > 0$ не зависит от n . Полагая $\xi_0(n, k) = \xi^+(nN + [(k-1)N/2]) + \xi^+(nN)$, имеем

$$\|F_{2n+m}\| \xi_0^{-1}(n, m) \leq C + C \xi_0^{-1}(n, m) \times \sum_{k=m+1}^{\infty} \xi^+ \left(nN + \left\lfloor \frac{k-m-1}{2} N \right\rfloor \right) \xi_0(n, k) (\|F_{2n+k}\| \xi_0^{-1}(n, k)).$$

Так как последовательности $\gamma_k = C \xi_0^{-1}(n, m) \xi^+(nN + [(k-m-1)N/2]) \xi_0(n, k)$ и $\|F_{2n+k}\| \xi_0^{-1}(n, k) \gamma_k$ суммируемы по m при $m \geq k+1$, то в силу разностного аналога леммы Гроуолла (см. [4]) получаем

$$\|F_{2n+m}\| \xi_0^{-1}(n, m) \leq C \exp \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_k \right),$$

согласно которому

$$\|F_{2n+m}\| \leq C_1 \xi_0(n, m), \quad C_1 > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$|F_n^{ij}(s)| < C^+ \xi^+ \left(\left\lfloor \frac{nN}{2} \right\rfloor \right).$$

Поэтому если $n = n_1N + n_2$, $k = k_1N + k_2$, $n_2, k_2 = 0, 1, \dots, N-1$, то

$$|F^+(n, n+k)| < C^+ \xi^+ \left(n_1N + \left\lfloor \frac{k_1N}{2} \right\rfloor \right) < C^+ \xi^+ \left(n + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 2N \right).$$

Таким образом, при $n > a$ для всех $m \geq n$ верно неравенство

$$|F^+(n, m)| < C^+ \xi^+ \left(\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor - 2N \right).$$

Аналогично, при $n < a$, $a \neq \pm\infty$, для всех $m \leq n$ справедливо неравенство

$$|F^-(n, m)| < C^- \xi^- \left(\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + 2N \right).$$

Так как $F^{\pm}(n, m) = F^{\pm}(m, n)$, то из последних неравенств вытекает следующее свойство.

II) При любом $a \neq \pm\infty$ величина $F^{\pm}(n, m)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\pm(n-a) > 0} \sup_{\pm(m-a) > 0} |nF^{\pm}(n, m)| < \infty.$$

§ 4. Исследование основных уравнений

Предположим, что данные рассеяния удовлетворяют условиям I), II). Построим по данным рассеяния $\{a(\lambda), b(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \mu_k; m_k^\pm > 0, k = 1, \dots, p\}$ функции $F^\pm(n, m)$ и рассмотрим (3.1) с этими функциями $F^\pm(n, m)$ как уравнения относительно $K^\pm(n, m)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть для данных рассеяния выполнены условия I), II). Тогда при каждом n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, уравнение (3.1) имеет единственное решение в $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, $p = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись критерием компактности в $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$ (см. [20; гл. V, § 2]), заметим, что при выполнении условия II) оператор $\mathcal{F}_{(n)}^\pm$, действующий по формуле

$$(\mathcal{F}_{(n)}^\pm h)_m = \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} F^\pm(k, m) h_k, \quad \pm(m - n) \geq 1,$$

вполне непрерывен в $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, $p = 1, 2$. В силу альтернативы Фредгольма уравнение (3.1) имеет единственное решение из $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$, если у однородного уравнения отсутствуют нетривиальные решения из $l^p(n \pm 1, \pm\infty)$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$h_m^\pm + \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} F^\pm(k, m) h_k^\pm = 0, \quad \pm(m - n) \geq 1. \quad (4.1)$$

В силу вещественности $F^\pm(m, k)$ можно считать, что все $h_m^\pm$ вещественны. Кроме того, поскольку каждое решение уравнения (3.1) из $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ принадлежит и $l^2(n \pm 1, \pm\infty)$, достаточно доказать, что (4.1) имеет в $l^2(n \pm 1, \pm\infty)$ только тривиальное решение. Пользуясь представлением (1.12) и свойствами класса функций H_2 (см. [21; гл. 2, § 4]), заметим, что функция

$$H^\pm(\lambda) = \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \psi_m^\pm(\lambda),$$

регулярная в Γ , имеет почти всюду на $\partial\Gamma$ конечные угловые граничные значения, причем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho(\lambda) |H^\pm(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Согласно (1.11), (1.12) при $\lambda \in \partial\Gamma$ имеем

$$\overline{H^\pm(\lambda)} = \frac{D^\pm(\lambda)}{D^\mp(\lambda)} \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \psi_m^\mp(\lambda).$$

Поэтому из леммы 1.2 вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \rho_1(\lambda) |H^\pm(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |h_m^\pm|^2, \quad (4.2)$$

где

$$\rho_1(\lambda) = \frac{\chi(1, N-1; \lambda)}{(D^+(\lambda))^2 A(z - z^{-1})}.$$

Умножим теперь обе части равенства (4.1) на $h_m^\pm$ и просуммируем по m в пределах от $n \pm 1$ до $\pm\infty$:

$$\sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |h_m^\pm|^2 + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} h_m^\pm \sum_{k=n\pm 1}^{\pm\infty} F^\pm(m, k) h_k^\pm = 0.$$

Пользуясь определениями величин $H^\pm(\lambda)$, $F^\pm(m, k)$ и предпоследним равенством, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{\rho}_1(\lambda) (2|H^\pm(\lambda + i0)|^2 + R^\pm(\lambda)(H^\pm(\lambda + i0))^2 + \overline{R^\pm(\lambda)}(\overline{H^\pm(\lambda + i0)})^2) d\lambda \\ + \sum_{j=1}^p (m_j^\pm)^2 (H^\pm(\mu_j))^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\tilde{\rho}_1(\lambda) = -i\rho_1(\lambda + i0), \quad R^\pm(\lambda) = \frac{D^\pm(\lambda)}{D^\mp(\lambda)} r^\pm(\lambda + i0), \quad \lambda \in \sigma \setminus \omega.$$

Как показано в §1, $\hat{\rho}(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \sigma \setminus \omega$. Поэтому $\hat{\rho}_1(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \sigma \setminus \omega$, так как $\hat{\rho}_1(\lambda) = \hat{\rho}(\lambda)/(D^+(\lambda))^2$. Кроме того, так как в силу (2.6), (2.7) $|R^\pm(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \sigma \setminus \omega$, то

$$\begin{aligned} 2|H^\pm(\lambda + i0)|^2 + R^\pm(\lambda)(H^\pm(\lambda + i0))^2 + \overline{R^\pm(\lambda)}(\overline{H^\pm(\lambda + i0)})^2 \\ \geq |\overline{H^\pm(\lambda + i0)} + R^\pm(\lambda)H^\pm(\lambda + i0)|^2, \end{aligned}$$

поэтому для выполнения равенства (4.3) необходимо, чтобы $H^\pm(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in \partial\Gamma$. В силу (4.2) получаем $h_m^\pm \equiv 0$, т.е. однородное уравнение (4.1) имеет только тривиальное решение.

Теорема доказана.

В силу доказанной теоремы существует ограниченный в $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ обратный оператор $(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Более того, согласно условию II)

$$\|\mathcal{F}_{(n)}^\pm\|_{l^1(n \pm 1, \pm\infty)} \leq \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} \sup_{\pm(k-n) \geq 1} |F^\pm(m, k)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \pm\infty,$$

откуда следует, что семейство операторов $(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}$ равномерно ограничено в $l^1(n \pm 1, \pm\infty)$ при $\pm(n - a) > 0$:

$$\|(I + \mathcal{F}_{(n)}^\pm)^{-1}\|_{l^1(n \pm 1, \pm\infty)} \leq C^\pm(a).$$

Тогда из уравнения (3.1) с учетом последнего неравенства имеем

$$\sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |K^\pm(n, m)| \leq C^\pm(n) \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} |F^\pm(m, n)|,$$

откуда

$$|K^\pm(n, m)| \leq |F^\pm(n, m)| + C^\pm(n) \sup_{\pm(k-n) \geq 1} |F^\pm(m, k)|. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если данные рассеяния удовлетворяют условиям I), II) и $K^\pm(n, m)$ – решение уравнения (3.1), то имеет место неравенство

$$(\alpha_n^\pm)^{-2} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + F^\pm(n, n) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)F^\pm(m, n) > 0. \quad (4.5)$$

Действительно, если $H_n^\pm(\lambda) = \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)\psi_m^\pm(\lambda)$, то

$$\begin{aligned} (\alpha_n^\pm)^{-2} &> \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \widehat{\rho}_1(\lambda) \left| \overline{H_n^\pm(\lambda + i0)} + \overline{\psi_n^\pm(\lambda + i0)} \right. \\ &\quad \left. + R^\pm(\lambda) (H_n^\pm(\lambda + i0) + \psi_n^\pm(\lambda + i0)) \right|^2 d\lambda + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} (\mu_j^\pm)^2 |H_n^\pm(\mu_j) + \psi_n^\pm(\mu_j)|^2. \end{aligned}$$

Этот факт доказывается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 4.1.

§ 5. Обратная задача рассеяния. Основная теорема

В § 2 и § 3 были получены необходимые условия I), II) на данные рассеяния в случае $Q_2 < \infty$. Докажем, что эти условия также достаточны, чтобы по невозмущенным коэффициентам $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n$ и по данным рассеяния можно было однозначно восстановить коэффициенты a_n, b_n , удовлетворяющие требованию $Q_1 < \infty$.

Итак, пусть условия I), II) выполняются. Тогда уравнение (3.1) имеет единственное решение $K^\pm(n, m)$. Определим величины $b_n^\pm = \tau_n^\pm, \varkappa_n^\pm$ и $\alpha_n^\pm > 0$ по формулам (2.3), (4.5) соответственно. Определим также величины a_n^+ и a_n^- из соотношений

$$\frac{\widehat{a}_n + a_n^+}{\widehat{a}_n} = \frac{\alpha_{n+1}^+}{\alpha_n^+}, \quad \frac{\widehat{a}_n + a_n^-}{\widehat{a}_n} = \frac{\alpha_n^-}{\alpha_{n+1}^-}.$$

Положим

$$f_n^\pm(\lambda) = \alpha_n^\pm \left(\psi_n^\pm(\lambda) + \sum_{m=n\pm 1}^{\pm\infty} K^\pm(n, m)\psi_m^\pm(\lambda) \right). \quad (5.1)$$

ТЕОРЕМА 5.1. Величина $f_n^\pm = f_n^\pm(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{n-[(1\pm 1)/2]} \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\mp 1}^\pm} f_{n\mp 1}^\pm + (\widehat{b}_n + b_n^\pm) f_n^\pm \\ + \frac{\alpha_n^\pm}{\alpha_{n\pm 1}^\pm} (\widehat{a}_{n+[(1\pm 1)/2]} + \varkappa_{n+[(1\pm 1)/2]}^\pm) f_{n\pm 1}^\pm = \lambda f_n^\pm, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

где $[x]$ – целая часть x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая “+”. Так как $K^+(n, m)$ удовлетворяет оценке (4.4), то достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{n-1}K^+(n-1, m) + (\hat{b}_n + b_n^+)K^+(n, m) + (\hat{a}_n + \varkappa_n^+)K^+(n+1, m) \\ &= \hat{a}_{m-1}K^+(n, m-1) + \hat{b}_mK^+(n, m) + \hat{a}_mK^+(n, m+1), \quad m \geq n+2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассмотрим разностное выражение

$$(\hat{H}y)_{nm} = \hat{a}_{n-1}y_{n-1,m} + \hat{a}_ny_{n+1,m} + \hat{b}_ny_{nm} - \hat{a}_{m-1}y_{n,m-1} - \hat{a}_my_{n,m+1} - \hat{b}_my_{nm}.$$

Ясно, что $\hat{H}F^+(n, m) = 0$. Тогда из (3.1) находим, что

$$(\hat{H}K^+)_{nm} + \left(\hat{H} \left(\sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l)F^+(l, m) \right) \right)_{nm} = 0.$$

Преобразуя второе слагаемое, имеем

$$\begin{aligned} & (\hat{H}K^+)_{nm} + \sum_{l=n+2}^{\infty} (\hat{H}K^+)_{nl}F^+(l, m) \\ &= b_n^+F^+(n, m) + \varkappa_n^+F^+(n+1, m) + b_n^+K^+(n, n+1)F^+(n+1, m). \end{aligned}$$

Определим теперь разностное выражение H , полагая

$$(Hy)_{nm} = (\hat{H}y)_{nm} + b_n^+y_{nm} + \varkappa_n^+y_{n+1,m}.$$

Согласно уравнению (3.1)

$$\begin{aligned} & b_n^+F^+(n, m) \\ &= -b_n^+ \left(K^+(n, m) + K^+(n, n+1)F^+(n+1, m) + \sum_{l=n+2}^{\infty} K^+(n, l)F^+(m, l) \right), \\ & \varkappa_n^+F^+(n+1, m) = -\varkappa_n^+ \left(K^+(n+1, m) + \sum_{l=n+2}^{\infty} K^+(n+1, l)F^+(l, m) \right). \end{aligned}$$

Три последних тождества приводят нас к соотношению

$$(HK^+)_{nm} + \sum_{l=n+2}^{\infty} (HK^+)_{nl}F^+(l, m) = 0.$$

Тогда $(HK^+)_{nm} \equiv 0$, так как в силу теоремы 4.1 последнее уравнение имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, имеет место равенство (5.2). Случай “−” рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Наша ближайшая цель состоит теперь в том, чтобы установить равенства $a_n^+ = a_n^-$, $b_n^+ = b_n^-$.

Определим величину $G(n, m)$:

$$G(n, m) = R^+(n, m) + K^+(n, m) + \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l)R^+(l, m), \quad (5.3)$$

где $K^+(n, m) \equiv 0$ при $m \leq n$. Ясно, что при каждом n величина $G^+(n, \cdot)$ принадлежит пространству $l^2(-\infty, \infty)$. Из основного уравнения (3.1) и формулы (5.1) имеем

$$G(n, m) = \begin{cases} -(\alpha_n^+)^{-1} \sum_{j=1}^p (m_j^+)^2 f_n^+(\mu_j) \psi_m^+(\mu_j), & m \geq n+1; \\ R^+(n, m) + \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l)R^+(l, m), & m \leq n. \end{cases} \quad (5.4)$$

Умножим обе части равенства (5.3) на $\psi_m^-(\lambda)$, $\lambda \in \partial\Gamma$, и просуммируем по m в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} R^+(n, m) \psi_m^-(\lambda) + \sum_{m=n+1}^{\infty} K^+(n, m) \psi_m^-(\lambda) \\ & + \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} R^+(l, m) \psi_m^-(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda), \end{aligned}$$

где сходимости рядов (кроме второго) понимаются в смысле метрики пространства $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$. Согласно определению величины $R^+(n, m)$ (см. §3) и лемме 1.2 получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R^+(n, m) \psi_m^-(\lambda) = r^+(\lambda) \psi_n^+(\lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma.$$

Прибавляя к обеим частям предпоследнего равенства $\psi_n^-(\lambda)$ и умножая на α_n^+ , с учетом последней формулы имеем

$$r^+(\lambda) f_n^+(\lambda) + \tilde{f}_n^+(\lambda) = \alpha_n^+ \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right),$$

где

$$\tilde{f}_n^+(\lambda) = \alpha_n^+ \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=n+1}^{\infty} K^+(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right).$$

Умножая обе части последнего равенства на $a(\lambda)$ и обозначая

$$g_n^-(\lambda) = a(\lambda) \alpha_n^+ \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right), \quad (5.5)$$

находим, что

$$g_n^-(\lambda) = a(\lambda) \tilde{f}_n^+(\lambda) + b(\lambda) f_n^+(\lambda), \quad \lambda \in {}'\partial\Gamma. \quad (5.6)$$

ЛЕММА 5.1. *Функция $g_n^-(\lambda)$ допускает регулярное продолжение в плоскости Γ и непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$ этой плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $g_n^-(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \partial\Gamma$. Согласно условию I) коэффициенты $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma$. Кроме того, из условия II) и из (4.4), (5.1) следует, что функции $f_n^+(\lambda)$ и $\tilde{f}_n^+(\lambda)$ непрерывны при $\lambda \in \partial\Gamma$. Тогда из (5.6) вытекает непрерывность функции $g_n^-(\lambda)$ при $\lambda \in \partial\Gamma$.

С другой стороны, из (5.6) имеем

$$g_n^-(\lambda) = \frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)} \rho^{-1}(\lambda) a(\lambda) \rho(\lambda) (\overline{f_n^+(\lambda)} - f_n^+(\lambda)) + \left(\frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)} a(\lambda) + b(\lambda) \right) f_n^+(\lambda).$$

Используя условие II) и оценку (4.4), легко убедиться, что $\rho(\lambda) (\overline{f_n^+(\lambda)} - f_n^+(\lambda))$ — непрерывная в точках $\lambda_i, \lambda_j \in \omega$, функция. Кроме этого в силу условия I) функции $\rho^{-1}(\lambda) a(\lambda)$ и $D^-(\lambda)/D^+(\lambda) a(\lambda) + b(\lambda)$ также непрерывны в точках $\lambda_i, \lambda_j \in \omega$. Следовательно, функция $g_n^-(\lambda)$ непрерывна в точках $\lambda_i, \lambda_j \in \omega$. Тем самым непрерывность функции $g_n^-(\lambda)$ при $\lambda \in \partial\Gamma$ доказана.

Представим теперь $g_n^-(\lambda)$ в виде

$$g_n^-(\lambda) = a(\lambda) \alpha_n^+ \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^n G(n, m) \psi_m^-(\lambda) + \sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right). \quad (5.7)$$

В силу (1.2), (1.3), (1.10), (1.12) функция $\sum_{m=-\infty}^n G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$ допускает регулярное продолжение в Γ . Кроме того, из (5.4) вытекает, что

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda) = -(\alpha_n^+)^{-1} \sum_{j=1}^p (m_j^+)^2 f_n^+(\mu_j) \sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m^+(\mu_j) \psi_m^-(\lambda). \quad (5.8)$$

Пусть $n = n_1 N + k - 1$, $k = 1, \dots, N$. Тогда из (1.12) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m^+(\mu_j) \psi_m^-(\lambda) &= \left(\sum_{r=1}^k e_r^+(\mu_j) e_r^-(\lambda) \right) \sum_{m=n_1+1}^{\infty} \left(\frac{z(\mu_j)}{z(\lambda)} \right)^m \\ &\quad + \left(\sum_{r=k+1}^N e_r^+(\mu_j) e_r^-(\lambda) \right) \sum_{m=n_1}^{\infty} \left(\frac{z(\mu_j)}{z(\lambda)} \right)^m, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m^+(\mu_j) \psi_m^-(\lambda) &= z^{-n_1}(\lambda) \frac{z^{n_1+1}(\mu_j)}{z(\lambda) - z(\mu_j)} \sum_{r=1}^k e_r^+(\mu_j) e_r^-(\lambda) \\ &\quad + z^{1-n_1}(\lambda) \frac{z^{n_1}(\mu_j)}{z(\lambda) - z(\mu_j)} \sum_{r=k+1}^N e_r^+(\mu_j) e_r^-(\lambda). \quad (5.9) \end{aligned}$$

Последняя формула показывает, что функция $\sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m^+(\mu_j) \psi_m^-(\lambda)$ и тем самым функция $\sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$ допускает регулярное продолжение в область $\Gamma \setminus \{\mu_j\}_{j=1}^p$. Вместе с тем из условия I) и из (1.6), (1.10), (1.14), (5.8), (5.9)

вытекает, что функция $a(\lambda) \sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$ регулярна в Γ , а в точках μ_j , $j = 1, \dots, p$, имеют место равенства

$$\left(a(\lambda) \sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=\mu_j} = -(\alpha_n^+)^{-1} \rho^{-1}(\mu_j) \dot{a}(\mu_j) (m_j^+)^2 f_n^+(\mu_j).$$

Тогда из (2.14) и (5.7) получим

$$g_n^-(\mu_j) = -(m_j^-)^{-2} \frac{\rho(\mu_j) f_n^+(\mu_j)}{\dot{a}(\mu_j)}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (5.10)$$

Далее, известно, что (см. [21; гл. 2, §§4, 5]) функция вида $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, где $C_n \in l^2(0, \infty)$, принадлежит классу H_2 , обладает конечными угловыми значениями почти всюду на окружности $|z| = 1$ и представима своим интегралом Коши в замкнутом круге $|z| \leq 1$. В силу конформных свойств функции $z = z(\lambda)$, упомянутых в §1, функция $G(z(\lambda))$ обладает конечными угловыми значениями почти всюду на $\partial\Gamma$.

С другой стороны, для любой точки $\lambda_0 \in \sigma$ некоторый полукруг

$$U^\pm = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq r, \pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$$

конформно отображается функцией $z = z(\lambda)$ на область $\hat{U}^\pm$, являющуюся частью круга $|z| \leq 1$. Так как функция $G(z)$ представима в области $\hat{U}^\pm$ своим интегралом Коши, то она принадлежит [21; гл. 3, §7] классу E_1 в области $\hat{U}^\pm$. Отсюда следует, что функция

$$G(z(\lambda)) z'(\lambda) = 2H(z(\lambda)) \frac{\Delta'(\lambda) z(\lambda)}{z(\lambda) - z^{-1}(\lambda)}$$

принадлежит классу E_1 в области $U^\pm$. Тогда верна принадлежность функции $\rho(\lambda) G(z(\lambda))$ классу E_1 в области $U^\pm$, так как в ней функция $D(\lambda)/(\Delta'(\lambda) z(\lambda))$ ограничена.

В силу (1.12) и непрерывности функций $e_j^-(\lambda)$, $j = 1, \dots, p$, функция

$$\rho(\lambda) \sum_{m=-\infty}^n G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$$

принадлежит классу E_1 в полукругах $U^\pm$. Кроме этого из (5.8), (5.9) следует непрерывность функции $\sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$ в тех же полукругах. Следовательно, $\rho(\lambda) \sum_{m=n+1}^{\infty} G(n, m) \psi_m^-(\lambda)$ принадлежит классу E_1 в $U^\pm$. Используя (5.7) и принимая во внимание, что функция $\rho^{-1}(\lambda) \alpha(\lambda)$ непрерывна вплоть до $\partial\Gamma$, получаем принадлежность функции $g_n^-(\lambda)$ к классу E_1 в области $U^\pm$. Следовательно, функция $g_n^-(\lambda)$ в полукругах $U^\pm$ представима [21; гл. 3, §7] своим интегралом Коши. Как отмечалось выше, функция $g_n^-(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \partial\Gamma$. Тогда она непрерывна на границе полукруга $U^\pm$. Поэтому [21; гл. 3, §4] функция $g_n^-(\lambda)$ непрерывна на полукруге U^+ . Так как λ_0 – любая точка из σ , то $g_n^-(\lambda)$ непрерывна вплоть до $\partial\Gamma$.

Лемма доказана.

Мы теперь подготовлены к тому, чтобы доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА 5.2 (основная). 1) Пусть $Q_2 < \infty$. Тогда данные рассеяния уравнения вида (0.1) удовлетворяют условиям I), II).

2) По коэффициентам $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ и по данным рассеяния, для которых выполнены условия I), II), можно однозначно восстановить уравнения вида (0.1), для которого коэффициенты a_n, b_n удовлетворяют условию $Q_1 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы доказано в §§2, 3. Покажем справедливость второго утверждения.

Из (1.3), (1.10), (1.12), (5.9) следует, что

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m^+(\mu_j) \psi_m^-(\lambda) = -\psi_n^+(\mu_j) \psi_n^-(\lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда в силу условия I) и формул (5.7), (5.8) получим

$$g_n^-(\lambda) = d\alpha_n^+ \left(1 + G(n, n) + \sum_{j=1}^p (\alpha_n^+)^{-2} f_n^+(\mu_j) (m_j^+)^2 \psi_n^+(\mu_j) \right) \psi_n^-(\lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$$

С другой стороны, согласно (5.1), (5.4) имеем

$$\begin{aligned} & 1 + G(n, n) + \sum_{j=1}^p (\alpha_n^+)^{-1} f_n^+(\mu_j) (m_j^+)^2 \psi_n^+(\mu_j) \\ &= 1 + R^+(n, n) + \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l) R^+(l, n) + M^+(n, n) \\ &+ \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l) M^+(l, n) \\ &= 1 + F^+(n, n) + \sum_{l=n+1}^{\infty} K^+(n, l) F^+(l, n) = (\alpha_n^+)^{-2}, \end{aligned}$$

где мы учли равенство (4.5). Таким образом,

$$g_n^-(\lambda) = \frac{d}{\alpha_n^+} \psi_n^-(\lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Из леммы (5.1) следует, что $g_n^-(\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(\partial\Gamma; \rho_0(\lambda))$. Разлагая функцию $g_n^-(\lambda)/D^-(\lambda)$ по базису $\{\Psi_n^-(\lambda)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и используя теорему о вычетах, с учетом (5.11) заключаем, что

$$g_n^-(\lambda) = \frac{d}{\alpha_n^+} \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^{n-1} B(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right), \quad (5.11)$$

где $B(n, \cdot) \in l^2(-\infty, n-1)$.

Далее, переходя в равенстве (5.6) к сопряженным выражениям и полагая

$$\tilde{g}_n^-(\lambda) = \frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)} \overline{g_n^-(\lambda)} = \frac{d}{\alpha_n^+} \left(\psi_n^+(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^{n-1} B(n, m) \psi_m^+(\lambda) \right), \quad (5.12)$$

получаем

$$\tilde{g}_n^-(\lambda) = \left(\frac{D^-(\lambda)}{D^+(\lambda)} \right)^2 \overline{b(\lambda)} \tilde{f}_n^+(\lambda) + \overline{a(\lambda)} f_n^+(\lambda). \quad (5.13)$$

Решая (5.6) и (5.13) как систему уравнений с неизвестными $f_n^+(\lambda)$ и $\tilde{f}_n^+(\lambda)$ и принимая во внимание (2.6), (2.7), находим, что

$$\frac{f_n^+(\lambda)}{a(\lambda)} = \tilde{g}_n^-(\lambda) + r^-(\lambda) g_n^-(\lambda), \quad \lambda \in {}'\partial\Gamma.$$

Из этого соотношения, как это было сделано в §3, используя (5.10), (5.12), (5.13), получаем, что

$$F^-(n, m) + B(n, m) + \sum_{l=-\infty}^{n-1} B(n, l) F^-(l, m) = 0, \quad m \leq n-1,$$

$$\left(\frac{\alpha_n^+}{d} \right)^2 = 1 + F^-(n, n) + \sum_{l=-\infty}^{n-1} B(n, l) F^-(l, n).$$

Так как основное уравнение (3.1) для случая “-” имеет единственное решение из $l^2(-\infty, n-1)$, то из предпоследнего равенства следует, что $B(n, m) = K^-(n, m)$.

Тогда из (4.5) получим $(\alpha_n^+/d)^2 = (\alpha_n^-)^{-2}$. Кроме того, в силу (5.11) имеем

$$g_n^-(\lambda) = \alpha_n^- \left(\psi_n^-(\lambda) + \sum_{m=-\infty}^{n-1} K^-(n, m) \psi_m^-(\lambda) \right) = f_n^-(\lambda). \quad (5.14)$$

Теперь из (5.6) и (5.14) и из леммы 5.1 вытекает, что $f_n^- = f_n^-(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{a}_{n-1} \frac{\alpha_n^+}{\alpha_{n-1}^+} f_{n-1}^- + (\hat{b}_n + b_n^+) f_n^- + \frac{\alpha_n^+}{\alpha_{n+1}^+} (\hat{a}_n + \varkappa_n^+) f_{n+1}^- = \lambda f_n^-.$$

Подставляя в это уравнение вместо f_n^- его представление (5.1), приравнивая коэффициенты при $\psi_m^-(\lambda)$ и учитывая (2.3), получаем

$$\frac{\alpha_n^-}{\alpha_{n+1}^+} = \frac{\hat{a}_n + \varkappa_n^-}{\hat{a}_n} = \frac{\hat{a}_n + \varkappa_n^+}{\hat{a}_n} = \frac{\alpha_{n+1}^+}{\alpha_n^+}, \quad b_n^+ = b_n^-.$$

Таким образом, если мы решим обратную задачу, то формулы (2.3), (3.1), (3.2) приведут нас к одному и тому же уравнению

$$(\hat{a}_{n-1} + a_{n-1}) y_{n-1} + (\hat{b}_n + b_n) y_n + (\hat{a}_n + a_n) y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $a_n = a_n^+ = a_n^-$, $b_n = b_n^+ = b_n^-$. Согласно формулам (2.3), условию II) и оценке (4.4) коэффициенты a_n, b_n удовлетворяют условию

$$Q_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Остается еще проверить справедливость формул

$$(m_k^\pm)^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(\mu_k)|^2, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.15)$$

Так как $a_n^+ = a_n^-$, $b_n^+ = b_n^-$, то для вычисления $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n^\pm(\mu_k)|^2$ можно использовать формулы (2.13), в которых согласно (5.10) следует положить

$$c_k = -(m_k^-)^2 \rho^{-1}(\mu_k) \dot{a}(\mu_k), \quad k = 1, \dots, p.$$

Отсюда следует и справедливость равенств (5.15).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как показано в [8], при $N = 2$ уравнение (0.1) эквивалентно разностному аналогу одномерной системы Дирака. Следовательно, полученные результаты распространяются на случай системы разностных уравнений Дирака.

Список литературы

1. *Тарнопольский В. Г.* Задача рассеяния для разностного уравнения // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 4. С. 779–782.
2. *Case K. M., Kac M.* A discrete version of the inverse scattering problem // J. Math. Phys. 1973. V. 14. № 5. P. 594–603.
3. *Гусейнов Г. Ш.* Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 5. С. 1045–1048.
4. *Гусейнов Г. Ш.* Обратные задачи теории рассеяния для самосопряженных разностных операторов второго порядка. // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1976.
5. *Никишин Е. М.* Разностный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые вопросы теории функций // Труды сем. им. И. Г. Петровского. Т. 10. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 3–77.
6. *Аптекарев А. И., Никишин Е. М.* Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 3. С. 327–358.
7. *Гусейнов И. М., Ханмамедов Аг. Х.* Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки // ТМФ. 1999. Т. 119. № 3. С. 429–440.
8. *Ханмамедов Аг. Х.* Операторы преобразования для возмущенного разностного уравнения Хилла и их одно приложение // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 4. С. 926–937.
9. *Geronimo J., Van Assche W.* Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients // J. Approx. Theory. 1986. V. 46. P. 251–283.
10. *Teschl G.* Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Math. Surveys Monographs. V. 72.)
11. *Bazargan J., Egorova I.* Jacobi operator with step-like asymptotically periodic coefficients // Mat. Fiz. Anal. Geom. 2003. V. 10. № 3. P. 425–442.
12. *Khanmamedov Ag. Kh.* On the theory of inverse scattering problems for a system of a difference equations // Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2000. V. 20. № 4, Math. Mech. P. 132–135.
13. *Newton R. G.* Inverse scattering by a local impurity in a periodic potential in one dimension // J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2152–2162.

14. *Фирсова Н. Е.* Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного возмущенного оператора Хилла // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 3 (7). С. 349–385.
15. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
16. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
17. *Ханмамедов Аг. Х.* К спектральной теории разностного уравнения с периодическими коэффициентами // Вестн. БГУ. Сер. физ.-матем. наук. 2001. № 1. С. 124–130.
18. *Ханмамедов Аг. Х.* О конформности отображения, порождаемого функцией Блоха разностного уравнения Хилла // Вестн. БГУ. Сер. физ.-матем. наук. 2004. № 1. С. 115–121.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
20. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
21. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1950.

Бакинский государственный университет,
Азербайджан

Поступила в редакцию
12.05.2004 и 04.10.2004