Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Давыдов, Последовательности прямоугольных сумм Фурье непрерывных функций с заданными мажорантами смешанных модулей гладкости, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 35–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:24:17

УДК 517.5

О. В. Давыдов

Последовательности прямоугольных сумм Фурье непрерывных функций с заданными мажорантами смешанных модулей гладкости

Исследуется приближение прямоугольными суммами Фурье $S_N(f)$ для классов функций многих переменных, определяемых порядками убывания смешанных модулей гладкости. Решается задача о существовании единой (не зависящей от N) функции f , на которой реализуется порядок приближения соответствующего класса.

Библиография: 9 названий.

Введение

Д. Е. Меньшов [1] доказал, что существует непрерывная 2π -периодическая функция f такая, что любая подпоследовательность частичных сумм $S_{n_l}(f)$ ее ряда Фурье расходится в некоторой точке. К. И. Осолков [2] уточнил этот результат, показав, что для любого заданного модуля непрерывности $\omega(\delta) \not\equiv 0$ существует такая непрерывная 2π -периодическая функция f с модулем непрерывности, удовлетворяющим неравенству $\omega(f, \delta) \leq \omega(\delta)$, $\delta \in [0, \pi]$, что для произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_l\}_{l=1}^\infty$ найдется точка x , в которой

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{|S_{n_l}(f, x) - f(x)|}{\omega(1/n_l) \log n_l} \geq C > 0,$$

где C — абсолютная постоянная.

В настоящей работе мы решаем соответствующую задачу в многомерном случае: построить непрерывную функцию f , для которой сразу все последовательности прямоугольных сумм Фурье ведут себя наихудшим возможным образом при заданных свойствах гладкости у f (теорема 1). При этом в отличие от работы [2] мы рассматриваем свойства гладкости f , выраженные в терминах разностей не только первого, но произвольного натурального порядка, и, тем самым, полученные результаты являются новыми также в случае функций одной переменной.

Отметим, что основным элементом конструкции Д. Е. Меньшова [1] являются сложным образом составленные суммы сдвигов полиномов

$$Q(t; N, n, m) = \sin Nt \sum_{\nu=m}^n \frac{\sin \nu t}{\nu}, \quad 0 < m < n \leq N \quad (1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № U92000) и Государственного фонда фундаментальных исследований при ГКНТ Украины.

(см. также [3, с. 479]). К.И. Осколков в [2] использовал ряды, составленные из функций со сколь угодно малыми носителями. Наша конструкция основана на полиномах

$$\begin{aligned} F_{np}(t) &= \sin^{2p}(n^5 t) Q(t; n^5, n^5, (n+1)^5 - n^5) \\ &= \sin^{2p+1}(n^5 t) \sum_{\nu=(n+1)^5 - n^5}^{n^5} \frac{\sin \nu t}{\nu}, \quad n \geq 7, \quad p = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

которые при $p = 0$ имеют вид (1). Именно использование множителя $\sin^{2p}(n^5 t)$ при $p \geq 1$ позволило включить в рассмотрение классы функций с заданными мажорантами модулей гладкости порядка выше 1.

Другой целью статьи является исследование класса функций H_Ω^k с заданной совокупностью мажорант смешанных модулей гладкости (см. § 1). Показано, что в каждом таком классе существует функция, для которой сразу все смешанные модули гладкости имеют “правильный” порядок убывания около нуля (теорема 2).

Основные результаты работы анонсированы в [4].

§ 1. Определения и основные результаты

Пусть $C(\mathbf{T}^m)$ обозначает пространство непрерывных функций на m -мерном торе $\mathbf{T}^m$, с равномерной нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbf{T}^m\}$;

$$c_\nu(f) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbf{T}^m} f(x) e^{-i(\nu, x)} dx, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{Z}^m,$$

– коэффициенты Фурье,

$$S_N(f, x) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^m \\ |\nu_j| \leq N_j, j=1, \dots, m}} c_\nu(f) e^{i(\nu, x)}, \quad N = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{Z}_+^m,$$

– прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции f .

Определим классы H_Ω^k функций с заданными мажорантами смешанных модулей гладкости, для которых мы будем рассматривать отклонения сумм $S_N(f, x)$. Пусть $\mathfrak{B}_m$ – множество всех непустых подмножеств из $\{1, \dots, m\}$, $k: \mathfrak{B}_m \rightarrow \mathbb{Z}_+^m$, $k(B) = (k_1, \dots, k_m)$ ($B \in \mathfrak{B}_m$) – некоторая фиксированная вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $k_j(B) = 0$ в том и только том случае, когда $j \notin B$;
- 2) $k_j(B_1) \leq k_j(B_2)$, если $j \in B_1 \subset B_2$.

Положим

$$|k(B)| = \sum_{j \in B} k_j(B) \quad (B \in \mathfrak{B}_m), \quad |k| = |k(\{1, \dots, m\})|. \quad (3)$$

Через $|B|$ будем обозначать число элементов множества B . Пусть $f \in C(\mathbf{T}^m)$. Для каждого $B \in \mathfrak{B}_m$ введем смешанный модуль гладкости порядка $k(B)$ формулой

$$\omega_{k(B)}(f; \delta) = \sup_{\substack{|h_j| \leq \delta_j \\ j=1, \dots, m}} \|\Delta_h^{k(B)} f\|, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in [0, \pi],$$

где $\Delta_h^{k(B)} f = \Delta_{1,h_1}^{k_1(B)} \dots \Delta_{m,h_m}^{k_m(B)} f$, $h = (h_1, \dots, h_m)$, а

$$\Delta_{j,\eta}^k = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} C_k^s f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + s\eta, x_{j+1}, \dots, x_m) \quad (4)$$

— разность порядка k с шагом η по j -ой переменной, причем $\Delta_{j,\eta}^0$ — тождественный оператор. Таким образом, $\omega_{k(B)}(f; \delta)$ фактически зависит только от тех переменных δ_j , для которых $j \in B$.

Пусть имеем фиксированный набор $\Omega = \{\omega_{k(B)} : B \in \mathfrak{B}_m\}$, где $\omega_{k(B)} = \omega_{k(B)}(\delta)$ ($\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in [0, \pi]^m$) — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\omega_{k(B)}(\delta)$ постоянна по переменным δ_j , для которых $j \notin B$;
- 2) $\omega_{k(B)}(\delta) = 0$, если $\delta_j = 0$ при некотором $j \in B$;
- 3) $\omega_{k(B)}(\delta)$ не убывает по δ_j , $j \in B$;
- 4) для любых $B, B' \in \mathfrak{B}_m$ таких, что $B' \subset B$,

$$\omega_{k(B)}(\delta) \leq 2^{|k(B)| - |k(B')|} \omega_{k(B')}(\delta), \quad \delta \in [0, \pi]^m;$$

- 5) если $\delta, \Delta \in [0, \pi]^m$ таковы, что $\delta_j \leq \Delta_j$, $j \in B$, то

$$\omega_{k(B)}(\Delta) \Big/ \prod_{j \in B} \Delta_j^{k_j(B)} \leq 2^{|k(B)|} \omega_{k(B)}(\delta) \Big/ \prod_{j \in B} \delta_j^{k_j(B)}.$$

Положим

$$H_\Omega^k = \{f \in C(\mathbf{T}^m) : \forall B \in \mathfrak{B}_m \ \omega_{k(B)}(f; \delta) \leq \omega_{k(B)}(\delta), \ \delta \in [0, \pi]^m\}.$$

В случае

$$k_j(B) = \begin{cases} 0, & j \notin B, \\ 1, & j \in B, \end{cases}$$

будем обозначать этот класс функций H_Ω , а при $m = 1$, $k(\{1\}) = 1$, приходим к классу H_ω непрерывных 2π -периодических функций одной переменной с заданной мажорантой $\omega(\delta)$ модуля непрерывности.

Отметим, что условия 1)–5) на мажоранты $\omega_{k(B)}(\delta)$ естественны, так как, с одной стороны, для любой функции $f \in C(\mathbf{T}^m)$ совокупность ее смешанных модулей гладкости $\omega_{k(B)}(f; \delta)$, как нетрудно видеть (см. [7, гл. 3]), удовлетворяет этим условиям, так что f лежит в соответствующем классе H_Ω^k , и, с другой стороны, теорема 2 ниже показывает, что в каждом классе H_Ω^k существует функция $f \in H_\Omega^k$, для которой сразу для всех $B \in \mathfrak{B}_m$ выполняется

$$\omega_{k(B)}(f; \delta) \gg \omega_{k(B)}(\delta), \quad \delta \in [0, \pi]^m$$

(здесь и далее соотношение $\alpha \gg \beta$ означает существование постоянной $c > 0$, зависящей только от размерности m тора $\mathbf{T}^m$ и, возможно, от $|k|$ (см. (3)), для которой выполняется неравенство $\alpha \geq c\beta$).

Кроме прямоугольных сумм Фурье $S_N(f)$, мы будем для каждого $B \in \mathfrak{B}_m$ рассматривать суммы

$$S_{N,B}(f; x) = \pi^{-|B|} \int_{\mathbf{T}^m(B)} f(x - u) \prod_{j \in B} D_{N_j}(u_j) du \quad (5)$$

(где интегрирование ведется по многообразию $\mathbf{T}^m(B) = \{u \in \mathbf{T}^m : u_j = 0, j \notin B\}$, $D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ — ядра Дирихле; очевидно, при $B = \{1, \dots, m\}$ имеем $S_{N,B}(f) = S_N(f)$), а также “угловые” частичные суммы

$$S_{N,B}^*(f) = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} (-1)^{|B'|-1} S_{N,B'}(f). \quad (6)$$

Индукцией по $|B|$ нетрудно доказать формулу, обратную к (6):

$$S_{N,B}(f) = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} (-1)^{|B'|-1} S_{N,B'}^*(f), \quad (7)$$

откуда, в частности, при $B = \{1, \dots, m\}$ имеем

$$S_N(f) = \sum_{B \in \mathfrak{B}_m} (-1)^{|B|-1} S_{N,B}^*(f). \quad (8)$$

Из (5) и (6) без труда получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|S_{N,B}(f)\| &\ll \|f\| \prod_{j \in B} \log(N_j + 2), \\ \|S_{N,B}^*(f)\| &\ll \|f\| \prod_{j \in B} \log(N_j + 2), \end{aligned} \quad N \in \mathbb{Z}_+^m, \quad (9)$$

а также следующие соотношения, выражающие проекторные свойства операторов $S_{N,B}$ и $S_{N,B}^*$:

$$c_\nu(S_{N,B}(f)) = \begin{cases} c_\nu(f), & \text{если } \forall j \in B \quad |\nu_j| \leq N_j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (10)$$

$$c_\nu(S_{N,B}^*(f)) = \begin{cases} c_\nu(f), & \text{если } \exists j \in B \quad |\nu_j| \leq N_j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (11)$$

$\nu \in \mathbb{Z}^m.$

Положим

$$\mathfrak{V}_{N,B} = \left\{ f \in C(\mathbf{T}^m) : \int_{\mathbf{T}^m} f(x) e^{-i(\nu, x)} dx = 0 \text{ для всех } \nu \right. \\ \left. \text{таких, что } \forall j \in B \quad |\nu_j| > N_j \right\}, \quad N \in \mathbb{Z}_+^m, \quad B \in \mathfrak{B}_m.$$

Ввиду (11) оператор $S_{N,B}^*$ является проектором на подпространство $\mathfrak{Y}_{N,B}$. Величина

$$Y_{N,B}(f) = \inf \{ \|f - g\| : g \in \mathfrak{Y}_{N,B} \}, \quad N \in \mathbb{Z}_+^m, \quad B \in \mathfrak{B}_m,$$

называется *наилучшим приближением “углом” функции f по переменным x_j , $j \in B$* (см. [5]). Пусть $f \in C(\mathbf{T}^m)$. Найдем $g \in \mathfrak{Y}_{N,B}$ так, чтобы выполнялось $\|f - g\| \leq 2Y_{N,B}$. Обычными рассуждениями, как при доказательстве неравенства Лебега в одномерном случае, используя (11), неравенство Джексона для наилучшего приближения “углом” [5] и вторую из оценок (9), получаем

$$\begin{aligned} \|f - S_{N,B}^*(f)\| &\leq \|f - g\| + \|S_{N,B}^*(g - f)\| \\ &\ll \omega_{k(B)}(f; \delta^N) \prod_{j \in B} \log(N_j + 2), \end{aligned} \quad (12)$$

$N = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $B \in \mathfrak{B}_m$, где мы обозначили

$$\delta^N = \left(\frac{\pi}{N_1 + 1}, \dots, \frac{\pi}{N_m + 1} \right) \in [0, \pi]^m. \quad (13)$$

Отсюда ввиду (7) вытекает

$$\|f - S_{N,B}(f)\| \ll \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \omega_{k(B')}(f; \delta^N) \prod_{j \in B'} \log(N_j + 2), \quad (14)$$

$N \in \mathbb{Z}_+^m$, $B \in \mathfrak{B}_m$, а из (8) имеем

$$\|f - S_N(f)\| \ll \sum_{B \in \mathfrak{B}_m} \omega_{k(B)}(f; \delta^N) \prod_{j \in B} \log(N_j + 2), \quad (15)$$

$N \in \mathbb{Z}_+^m$. В случае классов H_Ω при $m = 2$ оценка (15) получена другим способом Л. В. Жижиашвили [6], а при $m = 1$ приходим к классическому неравенству А. Лебега $\|f - S_n(f)\| \leq c\omega(f, 1/(n+1)) \log(n+2)$.

Основные результаты работы касаются точности оценок (14) и (15).

ТЕОРЕМА 1. *В каждом классе H_Ω^k существует функция $f \in H_\Omega^k$ такая, что какова бы ни была последовательность $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_+^m$, существует точка $x \in \mathbf{T}^m$, в которой для всех $B \in \mathfrak{B}_m$ выполняется*

$$\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - S_{N^{(\gamma)}, B}(f; x)|}{\sum_{B' \in \mathfrak{B}_m, B' \subset B} \omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2)} \geq C(m, |k|), \quad (16)$$

где $\delta^{N^{(\gamma)}}$ определяется по формуле (13), $C(m, |k|)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая только от m и $|k|$. В частности, при $B = \{1, \dots, m\}$ получаем

$$\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - S_{N^{(\gamma)}}(f; x)|}{\sum_{B' \in \mathfrak{B}_m} \omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2)} \geq C(m, |k|). \quad (17)$$

Доказательство теоремы 1 приводится в § 3 настоящей работы.

СЛЕДСТВИЕ. В каждом классе H_Ω^k существует функция $f \in H_\Omega^k$, для которой при всех $B \in \mathfrak{B}_m$ справедливо соотношение

$$\|f - S_{N,B}(f)\| \gg \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \omega_{k(B')}(\delta^N) \prod_{j \in B'} \log(N_j + 2), \quad N \in \mathbb{Z}_+^m, \quad (18)$$

в частности,

$$\|f - S_N(f)\| \gg \sum_{B' \in \mathfrak{B}_m} \omega_{k(B')}(\delta^N) \prod_{j \in B'} \log(N_j + 2), \quad N \in \mathbb{Z}_+^m. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для функции f , о которой идет речь в теореме 1, не выполняется (18), то существует последовательность $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_+^m$, для которой

$$\|f - S_{N^{(\gamma)},B}(f)\| \leq \gamma^{-1} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2),$$

и, следовательно, в противоречие с теоремой, невозможно найти точку $x \in \mathbf{T}^m$ так, чтобы было справедливо (16). Таким образом, (18) выполняется для той же функции f , что и (16). Следствие доказано.

Отметим, что для классов H_Ω при $m = 2$ существование функции $f \in H_\Omega$, для которой выполняется (19) при $\min\{N_1, N_2\} \rightarrow \infty$, доказал Г.Г. Павлиашвили [8].

ТЕОРЕМА 2. В каждом классе H_Ω^k существует функция $f \in H_\Omega^k$, для которой при всех $B \in \mathfrak{B}_m$ справедливо

$$\omega_{k(B)}(f; \delta) \gg \omega_{k(B)}(\delta), \quad \delta \in [0, \pi]^m. \quad (20)$$

Доказательство теоремы 2 содержится в §3. Оно основано на том факте, что функция f , которая будет построена при доказательстве теоремы 1, одновременно удовлетворяет соотношениям типа (16) и (18) для “угловых” сумм $S_{N,B}^*$. Точнее, существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для любой последовательности $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_+^m$, у которой для бесконечного числа членов выполняется неравенство $\min\{N_j^{(\gamma)} : 1 \leq j \leq m\} > N_0$, существует точка $x \in \mathbf{T}^m$, в которой для всех $B \in \mathfrak{B}_m$

$$\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - S_{N^{(\gamma)},B}^*(f; x)|}{\omega_{k(B)}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B} \log(N_j^{(\gamma)} + 2)} \geq C_1(m, |k|) > 0, \quad (21)$$

а также для всех $N \in \mathbb{Z}_+^m$, у которых $\min\{N_j : 1 \leq j \leq m\} > N_0$, выполняется соотношение

$$\|f - S_{N,B}^*(f)\| \gg \omega_{k(B)}(\delta^N) \prod_{j \in B} \log(N_j + 2), \quad (22)$$

$N \in \mathbb{Z}_+^m$, $B \in \mathfrak{B}_m$.

§ 2. Свойства функций F_{np} и их сумм

В этом параграфе мы получим некоторые оценки, которые понадобятся в § 3 при доказательстве основных результатов работы.

ЛЕММА 1. *При всех $p = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2p$, $n \geq 7$ справедливо неравенство*

$$|F_{np}^{(k)}(t)| \leq (2p+2)^k n^{5k} \min\{\pi+1, \pi/(5n^4|t|), n^5|t|\}, \quad (23)$$

$$0 < |t| \leq \pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуются следующие элементарные неравенства:

$$\left| \sum_{\nu=s}^r \frac{\sin \nu t}{\nu} \right| \leq \pi + 1, \quad 1 \leq s < r < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

$$\left| \sum_{\nu=s}^r a_\nu e^{i\nu t} \right| \leq \frac{\pi}{|t|} \max\{a_s, a_r\}, \quad 1 \leq s < r < \infty, \quad (25)$$

$0 < |t| \leq \pi$ ($\{a_\nu\}$ — произвольная монотонная последовательность действительных чисел),

$$|(\sin^r t)^{(s)}| \leq r^s |t|, \quad 0 \leq s < r, \quad r \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Первые два из этих неравенств хорошо известны, а третье легко доказывается с помощью комбинаторных соображений.

Из (24) выводим, что $|F_{np}(t)| \leq \pi + 1$, $t \in \mathbb{R}$, и так как ввиду (2) F_{np} есть тригонометрический полином степени $(2p+2)n^5$, то в силу неравенства Бернштейна

$$|F_{np}^{(k)}(t)| \leq (2p+2)^k n^{5k} (\pi + 1). \quad (27)$$

Применяя формулу Лейбница, получим из (2)

$$F_{np}^{(k)}(t) = \sum_{\mu=0}^k C_k^\mu (\sin^{2p+1}(n^5 t))^{(\mu)} \sum_{\nu=(n+1)^5 - n^5}^{n^5} \nu^{-1} (\sin \nu t)^{(k-\mu)}. \quad (28)$$

Ввиду (25), учитывая, что $(n+1)^5 - n^5 \geq 5n^4$, имеем

$$\left| \sum_{\nu=(n+1)^5 - n^5}^{n^5} \nu^{-1} (\sin \nu t)^{(k-\mu)} \right| \leq \begin{cases} \pi/(5n^4|t|) & \text{при } \mu = k, \\ n^{5(k-\mu-1)} \pi/|t| & \text{при } 0 \leq \mu < k, \end{cases}$$

$0 < |t| \leq \pi$, а в силу неравенства Бернштейна

$$|(\sin^{2p+1}(n^5 t))^{(\mu)}| \leq (2p+1)^\mu n^{5\mu}. \quad (29)$$

Поэтому из (28) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 |F_{np}^{(k)}(t)| &\leq (2p+1)^k n^{5k} \frac{\pi}{5n^4|t|} + \sum_{\mu=0}^{k-1} C_k^\mu (2p+1)^\mu n^{5\mu} n^{5(k-\mu-1)} \frac{\pi}{|t|} \\
 &= n^{5k-4} \frac{\pi}{5|t|} \left(\frac{5}{n} (2p+2)^k + \left(1 - \frac{5}{n}\right) (2p+1)^k \right) \\
 &\leq (2p+2)^k n^{5k-4} \frac{\pi}{5|t|}, \quad 0 < |t| \leq \pi.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Еще раз оценивая сумму в правой части (28), но теперь используя при $\mu = k$ неравенство (29), а при $\mu < k$ – вытекающее из (26) неравенство

$$|(\sin^{2p+1}(n^5 t))^{(\mu)}| \leq (2p+1)^\mu n^{5\mu+5} |t|,$$

получим

$$\begin{aligned}
 |F_{np}^{(k)}(t)| &\leq (2p+1)^k n^{5k} \sum_{\nu=(n+1)^5 - n^5}^{n^5} |t| \\
 &\quad + \sum_{\mu=0}^{k-1} C_k^\mu (2p+1)^\mu n^{5\mu+5} |t| \sum_{\nu=(n+1)^5 - n^5}^{n^5} \nu^{k-\mu-1} \\
 &\leq n^{5k+5} |t| \sum_{\mu=0}^k C_k^\mu (2p+1)^\mu \\
 &= (2p+2)^k n^{5k+5} |t|.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Из (27), (30) и (31) вытекает (23). Лемма доказана.

По аналогии с рассуждениями из [2] введем множество Q всевозможных конечных или бесконечных последовательностей $\bar{q} = \{q_s\}_{s=1}^l$, $q_s \in \mathbb{Z}$, $l = l(\bar{q}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющих условиям

$$|q_1| \geq 7, \quad |q_{s+1}| \geq |q_s|^7, \quad s = 1, 2, \dots \tag{32}$$

Положим

$$\sigma(\bar{q}, r) = \sum_{s=1}^r q_s^{-1}, \quad r = 1, \dots, l(\bar{q}), \quad \sigma(\bar{q}) = \sigma(\bar{q}, l(\bar{q})).$$

Для конечных отрезков $q_1, \dots, q_r$ последовательности $\bar{q} \in Q$ будем использовать обозначение $(\bar{q}, r)$. Введем еще множества Q_n конечных последовательностей $\bar{q} \in Q$, у которых последний член q_l по абсолютной величине равен n , $n \geq 7$. Нетрудно показать, что справедлива грубая оценка

$$\text{card } Q_n < n^{1/2}, \quad n \geq 7. \tag{33}$$

Рассмотрим функции

$$g_{np}(t) = \sum_{\bar{q} \in Q_n} F_{np}(t - \sigma(\bar{q})), \quad n \geq 7, \quad p = 0, 1, \dots \tag{34}$$

ЛЕММА 2. При всех $p = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2p$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=7}^{\infty} n^{-5k} |g_{np}^{(k)}(t)| \leq 7(2p+2)^k, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (35) для точек $t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Пусть такая точка t^* зафиксирована. Построим по ней последовательность $\bar{q}^* \in Q$, определяемую условиями

$$\begin{aligned} |t^* - (q_1^*)^{-1}| &= \min\{|t^* - q^{-1}| : |q| \geq 7\}, \\ |t^* - \sigma(\bar{q}^*, s+1)| &= \min\{|t^* - \sigma(\bar{q}^*, s) - q^{-1}| : |q| \geq |q_s^*|^7\}, \quad s \geq 1; \end{aligned} \quad (36)$$

построение обрывается на номере $s = l(q^*)$, для которого $t^* = \sigma(\bar{q}^*, s)$, или же продолжается неограниченно. В последнем случае $l(q^*) = \infty$.

Пусть $\bar{q} \in Q_n$ и $\bar{q} \neq (\bar{q}^*, l(\bar{q}))$, т.е. $\bar{q}$ не является отрезком последовательности $\bar{q}^*$. Покажем, что в этом случае

$$|t^* - \sigma(\bar{q})| \geq \frac{1}{3n^2}. \quad (37)$$

Если $\bar{q}^*$ есть отрезок $\bar{q}$, т.е. $\bar{q}^* = (\bar{q}, l)$, где $l = l(\bar{q}^*) < l(\bar{q})$, то $\bar{q}^*$ — обязательно конечная последовательность, так что $t^* = \sigma(\bar{q}^*, l) = \sigma(\bar{q}, l)$. Тогда ввиду (32)

$$|t^* - \sigma(\bar{q})| = \left| \sum_{s=l+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right| \geq |q_{l+1}^{-1}| - \sum_{j=1}^{\infty} |q_{l+1}^{-1}|^{7^j} \geq \frac{1}{2} |q_{l+1}^{-1}| \geq \frac{1}{2n}.$$

Если же $\bar{q}^*$ и $\bar{q}$ не являются отрезками друг друга, то найдем первый номер r , для которого $q_r^* \neq q_r$. Имеем

$$\begin{aligned} |t^* - \sigma(\bar{q})| &= \left| t^* - \sigma(\bar{q}^*, r) + (q_r^*)^{-1} - q_r^{-1} - \sum_{s=r+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right| \\ &\geq |(q_r^*)^{-1} - q_r^{-1}| - |t^* - \sigma(\bar{q}^*, r)| - \left| \sum_{s=r+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right|. \end{aligned}$$

Ввиду (36)

$$|t^* - \sigma(\bar{q}^*, r)| \leq |t^* - \sigma(\bar{q}, r)| \leq |t^* - \sigma(\bar{q})| + \left| \sum_{s=r+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right|,$$

так что

$$|t^* - \sigma(\bar{q})| \geq |(q_r^*)^{-1} - q_r^{-1}| - |t^* - \sigma(\bar{q})| - 2 \left| \sum_{s=r+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right|,$$

откуда

$$\begin{aligned}
|t^* - \sigma(\bar{q})| &\geq \frac{1}{2} |(q_r^*)^{-1} - q_r^{-1}| - \left| \sum_{s=r+1}^{l(\bar{q})} q_s^{-1} \right| \\
&\geq \frac{1}{2} (|q_r^{-1}| - (|q_r| + 1)^{-1}) - \sum_{j=1}^{\infty} |q_r^{-1}|^{7^j} \\
&\geq \frac{1}{3} q_r^{-2} \geq \frac{1}{3n^2},
\end{aligned}$$

и тем самым (37) доказано.

Из (37), (23) и (33) вытекает

$$n^{-5k} \sum_{\substack{\bar{q} \in Q_n \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, l(\bar{q}))}} |F_{np}^{(k)}(t^* - \sigma(\bar{q}))| \leq \frac{3\pi}{5} (2p+2)^k n^{-3/2}. \quad (38)$$

Теперь оценим слагаемые, соответствующие всевозможным отрезкам последовательности $\bar{q}^*$. Обозначим через s_0 наименьшее s , для которого $|t^* - \sigma(\bar{q}^*, s)| \geq 3|q_s^*|^{-7}$. Если такие s не существуют, то положим $s_0 = l(\bar{q}^*) + 1$ при $l(\bar{q}^*) < \infty$ и $s_0 = \infty$ при $l(\bar{q}^*) = \infty$. В силу (23) имеем

$$|F_{|q_s^*|,p}^{(k)}(t^* - \sigma(\bar{q}^*, s))| \leq \begin{cases} 3(2p+2)^k |q_s^*|^{5k-2}, & s < s_0, \\ (\pi+1)(2p+2)^k |q_s^*|^{5k}, & s = s_0. \end{cases} \quad (39)$$

Для $s > s_0$ имеем, учитывая, что ввиду (36) $|q_{j+1}^*| \geq |q_j^*|^7$, $j = 1, \dots, l(\bar{q}^*)$,

$$\begin{aligned}
|t^* - \sigma(\bar{q}^*, s)| &\geq |t^* - \sigma(\bar{q}^*, s_0)| - \sum_{s=s_0+1}^{l(\bar{q}^*)} |q_s^*|^{-1} \\
&\geq 3|q_{s_0}^*|^{-7} - \sum_{j=1}^{\infty} |q_{s_0}^*|^{-7^j} \geq |q_{s_0}^*|^{-7} \geq |q_s^*|^{-1},
\end{aligned}$$

откуда ввиду (23)

$$|F_{|q_s^*|,p}^{(k)}(t^* - \sigma(\bar{q}^*, s))| \leq \frac{\pi}{5} (2p+2)^k |q_s^*|^{5k-3}, \quad s > s_0. \quad (40)$$

С помощью (38), (39) и (40) ввиду (34) получим

$$\begin{aligned}
\sum_{n=7}^{\infty} n^{-5k} |g_{np}^{(k)}(t)| &\leq \sum_{n=7}^{\infty} n^{-5k} \sum_{\substack{\bar{q} \in Q \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, l(\bar{q}))}} |F_{np}^{(k)}(t^* - \sigma(\bar{q}))| \\
&\quad + \sum_{s=1}^{l(\bar{q}^*)} |q_s^*|^{-5k} |F_{|q_s^*|,p}^{(k)}(t^* - \sigma(\bar{q}^*, s))| \\
&\leq (2p+2)^k \left(\frac{3\pi}{5} \sum_{n=7}^{\infty} n^{-3/2} + \pi + 1 + 3 \sum_{s=1}^{l(\bar{q}^*)} |q_s^*|^{-2} \right) \\
&\leq 7(2p+2)^k.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $S_N(f)$ обозначает частичную сумму порядка $N = 0, 1, \dots$ ряда Фурье функции f .

ЛЕММА 3. При всех $p = 0, 1, \dots, n \geq 7$ справедливы неравенства

$$|S_N(F_{np}, t)| \leq \frac{(2p+2)\pi}{5n^4|t|}, \quad 0 < |t| \leq \pi, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (41)$$

$$|S_N(F_{np}, t)| \leq \begin{cases} 4 \log \frac{n}{5}, & 2n^5 - (n+1)^5 < N < (n+1)^5, \\ 4 \frac{N+1}{n^5 - N}, & 0 \leq N \leq 2n^5 - (n+1)^5, \end{cases} \quad (42)$$

$t \in \mathbb{R}, u$

$$S_N(F_{np}, t) \geq 2^{-p-2} \log \frac{n}{7}, \quad n^5 \leq N < (n+1)^5, \quad (43)$$

$$|t| \leq \frac{\pi}{3n^5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sin^{2p+1} t &= \sum_{s=0}^p A_{ps} \sin(2s+1)t, \\ A_{ps} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2p+1} t \sin(2s+1)t dt, \end{aligned}$$

откуда ввиду (2)

$$F_{np}(t) = \sum_{s=0}^p A_{ps} \sum_{\nu=(n+1)^5-n^5}^{n^5} (2\nu)^{-1} [\cos((2s+1)n^5-\nu)t - \cos((2s+1)n^5+\nu)t]. \quad (44)$$

Используя (25) и неравенства $(n+1)^5 - n^5 \geq 5n^4$, $|A_{ps}| < 2$, как при доказательстве леммы 1, получим для любого $N = 0, 1, \dots$

$$|S_N(F_{np}, t)| \leq \sum_{s=0}^p |A_{ps}| \frac{\pi}{5n^4|t|} \leq \frac{(2p+2)\pi}{5n^4|t|},$$

и (41) доказано.

При $N < (n+1)^5$ имеем из (44)

$$S_N(F_{np}, t) = A_{p0} \sum_{\nu=\max\{(n+1)^5-n^5, n^5-N\}}^{n^5} \frac{\cos(n^5-\nu)t}{2\nu}. \quad (45)$$

Учитывая, что $|A_{p0}| < 2$, при $2n^5 - (n+1)^5 < N < (n+1)^5$ имеем отсюда $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|S_N(F_{np}, t)| \leq 4 \sum_{\nu=5n^4}^{n^5} \nu^{-1} \leq 4 \log \frac{n}{5},$$

а при $0 \leq N \leq 2n^5 - (n+1)^5$

$$|S_N(F_{np}, t)| \leq 4 \sum_{\nu=n^5-N}^{n^5} \nu^{-1} \leq 4 \log \frac{n^5+1}{n^5-N} \leq 4 \frac{N+1}{n^5-N}.$$

Тем самым (42) доказано.

Имеем

$$A_{p0} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+2} t \, dt = 2 \frac{(2p+1)!!}{(2p+2)!!} > 2^{-p}.$$

Поэтому при $|t| \leq \pi/(3n^5)$, $n^5 \leq N < (n+1)^5$, $n \geq 7$, получаем из (45), что

$$S_N(F_{np}, t) \geq 2^{-p-2} \sum_{\nu=(n+1)^5-n^5}^{n^5} \nu^{-1} \geq 2^{-p-2} \log \frac{n}{7},$$

так что справедливо (43). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. При всех p , $N = 0, 1, \dots$, $n \geq 7$ справедливо неравенство

$$|S_N(g_{np}, 0)| \leq \frac{4}{5} (p+1) \pi n^{-5/2}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (34)

$$S_N(g_{np}, 0) = \sum_{\bar{q} \in Q_n} S_N(F_{np}, -\sigma(\bar{q})).$$

Из (32) имеем

$$|\sigma(\bar{q})| \geq |q_1^{-1}| - \sum_{j=1}^{\infty} |q_1|^{-7j} \geq \frac{1}{2} |q_1|^{-1} \geq \frac{1}{2n}.$$

Поэтому из (41) и (33) вытекает

$$|S_N(g_{np}, 0)| \leq \sum_{\bar{q} \in Q_n} \frac{(2p+2)\pi}{5n^4 |\sigma(\bar{q})|} \leq \frac{4}{5} (p+1) \pi n^{-5/2}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\bar{q}^* \in Q$, $N, p = 0, 1, \dots$, $n \geq 2^{2p+12}$.

А) Если $n \notin \bar{q}^*$, $N \in \mathbb{Z}_+^m$ или $n \in \bar{q}^*$, $N \leq 2n^{5/7}$, то

$$|S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*))| \leq n^{-5/4}. \quad (47)$$

Б) Если $n \in \bar{q}^*$ и $n^5 \leq N < (n+1)^5$, то

$$2^{-p-5} \log(N+2) \leq S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*)) \leq \frac{4}{5} \log(N+2). \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \notin \bar{q}^*$ и $\bar{q} \in Q_n$. Найдем первый номер s , для которого $q_s \neq q_s^*$. Ввиду (32) имеем

$$\left| \sum_{j=s+1}^{l(\bar{q})} g_j^{-1} \right| \leq 2|q_s|^{-7}, \quad \left| \sum_{j=s+1}^{l(\bar{q}^*)} (g_j^*)^{-1} \right| \leq 2|q_s^*|^{-7},$$

откуда

$$\begin{aligned} |\sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q})| &\geq |q_s^{-1} - (q_s^*)^{-1}| - 2|q_s|^{-7} - 2|q_s^*|^{-7} \\ &\geq |q_s|^{-1} - (|q_s| + 1)^{-1} - 2|q_s|^{-7} - 2(|q_s| + 1)^{-7} \\ &\geq \frac{1}{2}|q_s|^{-2} \geq \frac{1}{2}n^{-2}. \end{aligned}$$

Точно так же, как при доказательстве леммы 4, используя (33), (34) и (41), получим

$$|S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*))| \leq \sum_{\bar{q} \in Q_n} |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}))| \leq \frac{4}{5}(p+1)\pi n^{-3/2} < n^{-5/4}.$$

Пусть теперь $n \in \bar{q}^*$ и $n = q_r^*$. Те же самые рассуждения показывают, что

$$\sum_{\substack{\bar{q} \in Q_n \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, r)}} |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}))| \leq \frac{4}{5}(p+1)\pi n^{-3/2}. \quad (49)$$

Если $N \leq 2n^{5/7}$, то, используя (49), вторую из оценок (42) и условие $n \geq 2^{2p+12}$, получим

$$\begin{aligned} |S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*))| &\leq |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}, r))| + \sum_{\substack{\bar{q} \in Q_n \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, r)}} |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}))| \\ &\leq 4\frac{N+1}{n^5 - N} + \frac{4}{5}(p+1)\pi n^{-3/2} < n^{-5/4}, \end{aligned}$$

и в случае А) лемма доказана.

Далее, при $q_r^* = n$ имеем ввиду (32)

$$|\sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}^*, r)| = \left| \sum_{j=r+1}^{l(\bar{q}^*)} (q_j^*)^{-1} \right| \leq 2|q_r^*|^{-7} = \frac{2}{n^7} < \frac{\pi}{3}n^{-5}.$$

Поэтому в случае Б), используя (49), (43), первую из оценок (42) и учитывая условия $n \geq 2^{2p+12}$, $n^5 \leq N < (n+1)^5$, получим

$$\begin{aligned} S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*)) &\geq S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}^*, r)) - \sum_{\substack{\bar{q} \in Q_n \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, r)}} |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}))| \\ &\geq 2^{-p-2} \log \frac{n}{7} - \frac{4}{5}(p+1)\pi n^{-3/2} \geq 2^{-p-5} \log(N+2), \\ S_N(g_{np}, \sigma(\bar{q}^*)) &\leq |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}^*, r))| + \sum_{\substack{\bar{q} \in Q_n \\ \bar{q} \neq (\bar{q}^*, r)}} |S_N(F_{np}, \sigma(\bar{q}^*) - \sigma(\bar{q}))| \\ &\leq 4 \log \frac{n}{5} + \frac{4}{5}(p+1)\pi n^{-3/2} \leq \frac{4}{5} \log(N+2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Нам понадобятся следующие обозначения. Для любого $B \in \mathfrak{B}_m$ положим

$$\mathbb{N}^m(B) = \{M = (M_1, \dots, M_m) \in \mathbb{N}^m : M_j = 1 \text{ при } j \notin B, M_j \geq 7 \text{ при } j \in B\}, \quad (50)$$

$$\mathbf{I}_\pi^m(B) = \{\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in [0, \pi]^m : \delta_j = \pi \text{ при } j \notin B\}. \quad (51)$$

Если $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_m$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $G \in \mathbb{N}^m(B_1)$, $H \in \mathbb{N}^m(B_2)$, то пусть

$$G \circ H = \{M \in \mathbb{N}^m(B_1 \cup B_2) : M_j = G_j \text{ при } j \in B_1, M_j = H_j \text{ при } j \in B_2\}. \quad (52)$$

При тех же условиях на B_1, B_2 для $\delta^1 \in \mathbf{I}_\pi^m(B_1)$, $\delta^2 \in \mathbf{I}_\pi^m(B_2)$ положим

$$\delta^1 \circ \delta^2 = \{\delta \in \mathbf{I}_\pi^m(B_1 \cup B_2) : \delta_j = \delta_j^1 \text{ при } j \in B_1, \delta_j = \delta_j^2 \text{ при } j \in B_2\}. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что фиксированы вектор-функция $k: \mathfrak{B}_m \rightarrow \mathbb{Z}_+^m$ и набор мажорант смешанных модулей гладкости $\Omega = \{\omega_{k(B)} : B \in \mathfrak{B}_m\}$, удовлетворяющих условиям, описанным в § 1. Определим функцию

$$f(x) = \sum_{B \in \mathfrak{B}_m} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B)} \alpha_{BM} \prod_{j \in B} g_{M_j, p}(x_j), \quad (54)$$

$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{T}^m$, $M = (M_1, \dots, M_m)$, где

$$\alpha_{BM} = a_B \omega_{k(B)}(\pi M_1^{-5}, \dots, \pi M_m^{-5}), \quad (55)$$

$$a_B = 2^{-|k(B)| - (p+m+10)(|B|+|k|)}, \quad (56)$$

$$p = \max_{1 \leq j \leq m} k_j(\{1, \dots, m\}), \quad (57)$$

а функции $g_{np}(t)$ определены по формуле (34).

В силу леммы 2 кратные ряды в правой части (54) сходятся абсолютно и ограничено. Поэтому $f(x)$ есть некоторая ограниченная функция на $\mathbf{T}^m$. Ниже мы покажем, что функция $f(x)$ принадлежит классу H_Ω^k и удовлетворяет соотношению (16).

Прежде всего получим оценку смешанных модулей гладкости функции f .

Пусть $B \in \mathfrak{B}_m$, $h = (h_1, \dots, h_m) \in [-\pi, \pi]^m$, $\delta_j = |h_j|$, $k_j = k_j(B)$, $j = 1, \dots, m$. Найдем такие $N_j \in \mathbb{N}$, что

$$\pi(N_j + 1)^{-5} < \delta_j \leq \pi N_j^{-5}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (58)$$

Имеем из (54)

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k(B)} f(x) &= \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \supset B}} \Delta_h^{k(B)} \left(\sum_{M \in \mathbb{N}^m(B')} \alpha_{B'M} \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j) \right) \\ &= \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \supset B}} \sum_{G \in \mathbb{N}^m(B' \setminus B)} \left(\prod_{\gamma \in B' \setminus B} g_{G_\gamma, p}(x_\gamma) \right) \\ &\quad \times \Delta_h^{k(B)} \left(\sum_{H \in \mathbb{N}^m(B)} \alpha_{B', G \circ H} \prod_{\nu \in B} g_{H_\nu, p}(x_\nu) \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Пусть $B = \{\nu_1, \dots, \nu_s\}$. Для упрощения следующей выкладки положим $H'_j = H_{\nu_j}$, $h'_j = h_{\nu_j}$, $k'_j = k_{\nu_j}$. Имеем, используя (52),

$$\begin{aligned} & \Delta_h^{k(B)} \left(\sum_{H \in \mathbb{N}^m(B)} \alpha_{B', G \circ H} \prod_{\nu \in B} g_{H_\nu, p}(x_\nu) \right) \\ &= \Delta_{\nu_1, h'_1}^{k'_1} \left(\sum_{H'_1=7}^{\infty} g_{H'_1, p}(x_{\nu_1}) \cdot \Delta_{\nu_2, h'_2}^{k'_2} \left(\sum_{H'_2=7}^{\infty} g_{H'_2, p}(x_{\nu_2}) \times \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots \times \Delta_{\nu_s, h'_s}^{k'_s} \left(\sum_{H'_s=7}^{\infty} \alpha_{B', G \circ H} g_{H'_s, p}(x_{\nu_s}) \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Разбивая каждую бесконечную сумму по H'_j на конечную сумму в пределах от 7 до N_{ν_j} и остаток, раскрывая в получившемся выражении скобки и применяя в каждом слагаемом последовательно справа налево формулы

$$\Delta_{\nu_j, h'_j}^{k'_j} \left(\sum_{H'_j=7}^{N_{\nu_j}} g_{H'_j, p}(x_{\nu_j}) \cdot C_{H'_j} \right) = (h'_j)^{k'_j} \sum_{H'_j=7}^{N_{\nu_j}} g_{H'_j, p}^{(k'_j)}(\xi_{\nu_j}) \cdot C_{H'_j}, \quad \xi_{\nu_j} \in T$$

(см. [9, с. 22]) и

$$\Delta_{\nu_j, h'_j}^{k'_j} \left(\sum_{H'_j=N_{\nu_j}+1}^{\infty} g_{H'_j, p}(x_{\nu_j}) \cdot C_{H'_j} \right) = \sum_{H'_j=N_{\nu_j}+1}^{\infty} \Delta_{\nu_j, h'_j}^{k'_j} g_{H'_j, p}(x_{\nu_j}) \cdot C_{H'_j},$$

где $C_{H'_j}$ — коэффициенты, не зависящие от x_{ν_j} , получим

$$\begin{aligned} & \Delta_h^{k(B)} \left(\sum_{H \in \mathbb{N}^m(B)} \alpha_{B', G \circ H} \prod_{\nu \in B} g_{H_\nu, p}(x_\nu) \right) \\ &= \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B}} \sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}^m(B'') \\ Q_j \leq N_j, j \in B''}} \left(\prod_{\mu \in B''} h_\mu^{k_\mu} g_{Q_\mu, p}^{(k_\mu)}(\xi_{B'', \mu}) \right) \\ & \quad \times \sum_{\substack{R \in \mathbb{N}^m(B \setminus B'') \\ R_j > N_j, j \in B \setminus B''}} \alpha_{B', G \circ Q \circ R} \prod_{\eta \in B \setminus B''} \Delta_{\eta, h_\eta}^{k_\eta} g_{R_\eta, p}(x_\eta), \end{aligned} \quad (60)$$

где $\xi_{B'', \mu} \in T$ не зависит от Q_μ .

Положим

$$\begin{aligned} \delta_j^1 &= \begin{cases} \delta_j, & j \in B'', \\ \pi, & j \notin B'', \end{cases} & \delta_j^2 &= \begin{cases} \delta_j, & j \in B \setminus B'', \\ \pi, & j \notin B \setminus B'', \end{cases} \\ q_j &= \begin{cases} \pi Q_j^{-5}, & j \in B'', \\ \pi, & j \notin B'', \end{cases} & r_j &= \begin{cases} \pi R_j^{-5}, & j \in B \setminus B'', \\ \pi, & j \notin B \setminus B'', \end{cases} \end{aligned}$$

так что $\delta^1 = (\delta_1^1, \dots, \delta_m^1)$, $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbf{I}_\pi^m(B'')$, $\delta^2 = (\delta_1^2, \dots, \delta_m^2)$, $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbf{I}_\pi^m(B \setminus B'')$. Используя (55), (58), (53) и свойства 3) и 4) функций $\omega_{k(B)}$, получим

$$|\alpha_{B', G \circ Q \circ R}| \leq a_{B'} \omega_{k(B)}(q \circ r) \leq a_{B'} \omega_{k(B)}(q \circ \delta^2). \quad (61)$$

Теперь, используя (4), (35), (61), нетрудно прийти к оценке

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{R \in \mathbb{N}^m(B \setminus B'') \\ R_j > N_j, j \in B \setminus B''}} \alpha_{B', G \circ Q \circ R} \prod_{\eta \in B \setminus B''} \Delta_{\eta, h_\eta}^{k_\eta} g_{R_\eta, p}(x_\eta) \right| \\ & \leq \sum_{\substack{R \in \mathbb{N}^m(B \setminus B'') \\ R_j > N_j, j \in B \setminus B''}} a_{B'} \omega_{k(B)}(q \circ \delta^2) \prod_{\eta \in B \setminus B''} \sum_{\varkappa=0}^{k_\mu} C_{k_\eta}^\varkappa |g_{R_\eta, p}(x_\eta + \varkappa h_\eta)| \\ & \leq 7^{|B \setminus B''|} a_{B'} \omega_{k(B)}(q \circ \delta^2) \prod_{\eta \in B \setminus B''} 2^{k_\eta}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из свойства 5) функций $\omega_{k(B)}$ ввиду (58) вытекает

$$\begin{aligned} \omega_{k(B)}(q \circ \delta^2) \prod_{\mu \in B''} \delta_\mu^{k_\mu} & \leq 2^{|k(B)|} \omega_{k(B)}(\delta) \prod_{\mu \in B''} q_\mu^{k_\mu} \\ & \leq (2\pi)^{|k(B)|} \omega_{k(B)}(\delta) \prod_{\mu \in B''} Q_\mu^{-5k_\mu}. \end{aligned} \quad (63)$$

Применяя лемму 2 и учитывая формулы (56), (59), (60), (62) и (63), получим

$$\begin{aligned} \omega_{k(B)}(f, \delta) & \leq \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \supset B}} \sum_{G \in \mathbb{N}^m(B' \setminus B)} \left(\prod_{\gamma \in B' \setminus B} g_{G_\gamma, p}(x_\gamma) \right) \\ & \times \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B}} \sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}^m(B'') \\ Q_j \leq N_j, j \in B''}} 7^{|B|} (4\pi)^{|k(B)|} \omega_{k(B)}(\delta) a_{B'} \\ & \times \prod_{\mu \in B''} (Q_\mu^{-5k_\mu} g_{Q_\mu, p}^{(k_\mu)}(\xi_{B''}, \mu)) \\ & \leq 7^m 14^{|B|} (4\pi(2p+2))^{|k(B)|} \left(\sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \supset B}} a_{B'} \right) \omega_{k(B)}(\delta) \leq \omega_{k(B)}(\delta). \end{aligned}$$

Из полученной оценки и свойств 1)–5) мажорант $\omega_{k(B)}(\delta)$, в частности, вытекает непрерывность f . Таким образом, $f \in H_\Omega^k$.

Пусть $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_+^m$ – произвольная последовательность. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, без ограничения общности можем считать,

что $\{1, \dots, m\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, где B_1, B_2, B_3 имеют пустые попарные пересечения, причем

$$N_j^{(1)} > N_0 := 2^{2^{(p+7)(|k|+2m)}},$$

$$N_j^{(\gamma+1)} \geq \max\{(N_j^{(\gamma)})^7, (2p+2)N_j^{(\gamma)}\}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \quad j \in B_1, \quad (64)$$

$$N_j^{(\gamma)} = N_j^{(1)} > N_0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \quad j \in B_2, \quad (65)$$

$$N_j^{(\gamma)} = N_j^{(1)} \leq N_0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \quad j \in B_3. \quad (66)$$

Выпуская из рассмотрения конечное число последовательностей, для которых $B_3 = \{1, \dots, m\}$ (что можно сделать без ограничения общности), будем считать, что $B_0 := B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$. Положим

$$\nu_j^{(\gamma)} = \begin{cases} [(N_j^{(\gamma)})^{1/5}], & j \in B_0, \\ 1, & j \in B_3, \end{cases} \quad (67)$$

$$\nu^{(\gamma)} = (\nu_1^{(\gamma)}, \dots, \nu_m^{(\gamma)}), \quad \gamma \in \mathbb{N};$$

$$\mu_j^{(\gamma)} = \begin{cases} [(N_j^{(\gamma)} / (2p+2))^{1/5}] + 1, & j \in B_0, \\ 1, & j \in B_3, \end{cases} \quad (68)$$

$\mu^{(\gamma)} = (\mu_1^{(\gamma)}, \dots, \mu_m^{(\gamma)})$, $\gamma \in \mathbb{N}$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Тогда ввиду (64)

$$\overline{\nu}_j := \{\nu_j^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^{\infty} \in Q, \quad j \in B_1, \quad (69)$$

$$\nu_j^{(\gamma)} < \mu_j^{(\gamma+1)} < \nu_j^{(\gamma+1)}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, \quad j \in B_1. \quad (70)$$

Положим еще

$$\overline{\nu}_j := \{\nu_j^{(1)}\}, \quad j \in B_2. \quad (71)$$

Определим точку $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{T}^m$ формулой

$$x_j = \begin{cases} \sigma(\overline{\nu}_j), & j \in B_0 = B_1 \cup B_2, \\ 0, & j \in B_3, \end{cases} \quad (72)$$

и покажем, что в этой точке выполняются соотношения (16)–(18).

Ввиду (54) и (5) имеем

$$\begin{aligned} & S_{N^{(\gamma)}, B}(f; x) - f(x) \\ &= \sum_{B' \in \mathfrak{B}_m} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B')} \alpha_{B'M} \left(\prod_{j \in B' \setminus B} g_{M_j, p}(x_j) \right) \\ & \quad \times \left(\prod_{j \in B \cap B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - \prod_{j \in B \cap B'} g_{M_j, p}(x_j) \right) \\ &= \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B')} \alpha'_{B'M} \left(\prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j) \right), \quad (73) \end{aligned}$$

где (см. (52))

$$\alpha'_{B'M} = \alpha_{B'M} + \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \cap B = \emptyset}} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \alpha_{B' \cup B'', M \circ H} \prod_{j \in B''} g_{H_j, p}(x_j).$$

Применяя последовательно (55), свойство 4) функций $\omega_k(B)$, лемму 2 и (56), получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \cap B = \emptyset}} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \alpha_{B' \cup B'', M \circ H} \prod_{j \in B''} g_{H_j, p}(x_j) \right| \\ & \leq \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \cap B = \emptyset}} 2^{|k(B' \cup B'')| - |k(B')|} (a_{B' \cup B''} / a_{B'}) \alpha_{B'M} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \prod_{j \in B''} |g_{H_j, p}(x_j)| \\ & \leq \alpha_{B'M} \left(\sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \cap B = \emptyset}} 7^{|B''|} 2^{|k(B' \cup B'')| - |k(B')|} (a_{B' \cup B''} / a_{B'}) \right) \leq 2^{-4} \alpha_{B'M}, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 - 2^{-4}) \alpha_{B'M} \leq \alpha'_{B'M} \leq (1 + 2^{-4}) \alpha_{B'M}. \quad (74)$$

Учитывая, что $g_{np}(t)$ есть тригонометрический полином степени $(2p+2)n^5$, выводим из (73) ввиду (68)

$$\begin{aligned} & S_{N(\gamma), B}(f; x) - f(x) \\ & = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \sum_{\substack{B'' \subset B \setminus B' \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B' \\ H_j < \mu_j^{(\gamma)}, j \in B''}} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B')} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \alpha'_{B' \cup B'', M \circ H} \\ & \quad \times \left(\prod_{j \in B''} g_{H_j, p}(x_j) \right) \left(\prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j) \right) \\ & = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B') \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B'}} \alpha''_{B'M} \left(\prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j) \right), \quad (75) \end{aligned}$$

где

$$\alpha''_{B'M} = \alpha'_{B'M} + \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B \setminus B'}} \sum_{\substack{H \in \mathbb{N}^m(B'') \\ H_j < \mu_j^{(\gamma)}, j \in B''}} \alpha'_{B' \cup B'', M \circ H} \prod_{j \in B''} g_{H_j, p}(x_j).$$

Точно так же, как выше для $\alpha'_{B'M}$, с использованием (74), получим оценку

$$(1 - 2^{-3} - 2^{-8}) \alpha_{B'M} \leq \alpha''_{B'M} \leq (1 + 2^{-4})^2 \alpha_{B'M}. \quad (76)$$

Применяя (76), (55), (68), свойство 3) функций $\omega_{k(B)}$, лемму 2 и (56), получим

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B') \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B'}} \alpha''_{B'M} \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j) \right| \\
& \leq (1 + 2^{-4})^2 \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} 7^{|B'|} \alpha_{B', \mu^{(\gamma)}} \\
& = (1 + 2^{-4})^2 \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} 7^{|B'|} \left(\sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B \cap B_3}} 7^{|B''|} (a_{B' \cup B''} / a_{B'}) \right) \alpha_{B', \mu^{(\gamma)}} \\
& \leq (1 + 2^{-4})^3 \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} 7^{|B'|} \alpha_{B', \mu^{(\gamma)}}. \tag{77}
\end{aligned}$$

Используя тот же прием, что при получении оценки (73), имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B') \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B'}} \alpha''_{B'M} \prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) \\
& = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B') \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B'}} \alpha'''_{B'M} \prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j), \tag{78}
\end{aligned}$$

где

$$\alpha'''_{B'M} = \alpha''_{B'M} + \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B \setminus B_0}} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \alpha''_{B' \cup B'', M \circ H} \prod_{j \in B''} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{H_j, p}; x_j).$$

Учитывая, что $B \setminus B_0 \subset B_3$, так что ввиду (72) $x_j = 0$, $j \in B'' \subset B \setminus B_0$, используя монотонность $\omega_{k(B)}$, благодаря чему $\alpha_{B' \cup B'', M \circ H} \leq \alpha_{B' \cup B'', M}$, и применяя лемму 4, соотношения (76), (55) и (56), получим

$$\begin{aligned}
& \alpha'''_{B'M} \geq (1 - 2^{-3} - 2^{-8}) \alpha_{B'M} \\
& \quad - \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B \setminus B_0}} (1 + 2^{-4})^2 \alpha_{B' \cup B'', M} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B'')} \prod_{j \in B''} \left(\frac{4}{5} (p+1) \pi H_j^{4/5} \right) \\
& \geq \alpha_{B'M} \left(1 - 2^{-3} - 2^{-8} - (1 + 2^{-4})^2 \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B \setminus B_0}} \left(\frac{4\pi}{3} (p+1) \right)^{|B''|} \frac{a_{B' \cup B''}}{a_{B'}} \right) \\
& \geq 2^{-1} \alpha_{B'M}. \tag{79}
\end{aligned}$$

Фиксируя $B' \subset B \cap B_0$ и применяя лемму 5 (что возможно ввиду (64)), причем используя нижнюю оценку (48) только в слагаемом, у которого $M_j = \nu_j^{(\gamma)}$, $j \in B'$,

а в остальных слагаемых ввиду (64) и (70) – оценку (47) и верхнюю оценку (48), получим (см. (67))

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B') \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B'}} \alpha_{B'M} \prod_{j \in B'} S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) \\
& \geq \alpha_{B', \nu^{(\gamma)}} \prod_{j \in B'} (2^{-p-5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2)) \\
& \quad - \alpha_{B', \mu^{(\gamma)}} \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B'}} \left(\prod_{j \in B''} \sum_{M_j = \mu_j^{(\gamma)}}^{\infty} M_j^{-5/4} \right) \prod_{j \in B' \setminus B''} \frac{4}{5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& \geq 2^{-|B'|(p+5)} \alpha_{B', \nu^{(\gamma)}} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& \quad - \alpha_{B', \mu^{(\gamma)}} \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B'}} 5^{|B''|} \prod_{j \in B' \setminus B''} \frac{4}{5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2). \tag{80}
\end{aligned}$$

В силу свойства 5) функций $\omega_{k(B)}$, учитывая (55), (67) и (68), нетрудно получить

$$\alpha_{B', \mu^{(\gamma)}} \geq (4p+4)^{|k(B')|} \alpha_{B', \nu^{(\gamma)}}. \tag{81}$$

Используя (75), (77)–(81) и, после преобразований, (64), будем иметь

$$\begin{aligned}
& S_{N^{(\gamma)}, B}(f; x) - f(x) \\
& \geq \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \alpha_{B', \nu^{(\gamma)}} \left(2^{-1-|B'|(p+5)} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \right. \\
& \quad - 2^{-1} (4p+4)^{|k(B')|} \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B'}} 5^{|B''|} \prod_{j \in B' \setminus B''} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& \quad \left. - 2^{-1} 7^{1+|B'|} (4p+4)^{|k(B')|} \right) \\
& = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \alpha_{B', \nu^{(\gamma)}} \left(2^{-1} \sum_{\substack{B'' \in \mathfrak{B}_m \\ B'' \subset B'}} \left(\prod_{j \in B' \setminus B''} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \right) \right. \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-|B'|(p+5)}}{2^{|B'|} - 1} \prod_{j \in B''} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) - (4p+4)^{|k(B')|} 5^{|B''|} \right) \\
& \quad \left. - 2^{-1} 7^{1+|B'|} (4p+4)^{|k(B')|} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \geq \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \alpha_{B', \nu(\gamma)} \left(2^{-1-|B'| (p+6)} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \right. \\
& \quad \left. - 2^{-1} 7^{1+|B'|} (4p+4)^{k(B')|} \right) \\
& \geq 2^{-1-m(p+7)} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \alpha_{B', \nu(\gamma)} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2). \tag{82}
\end{aligned}$$

С другой стороны, сравнивая (13), (55) и (67), ввиду свойства 3) функций $\omega_{k(B)}$ имеем

$$\omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \leq \frac{\alpha_{B', \nu(\gamma)}}{a_{B'}}, \quad B' \subset B_0. \tag{83}$$

Поэтому, используя еще свойство 4) функций $\omega_{k(B)}$, (64), (66) и (56), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& = \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \sum_{B'' \subset B \setminus B_0} \omega_{k(B' \cup B'')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B' \cup B''} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& \leq \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \left(\sum_{B'' \subset B \setminus B_0} 2^{|k(B' \cup B'')| - |k(B')|} (\log(N_0 + 2))^{|B''|} \right) \\
& \quad \times \omega_{k(B')}(\delta^{N^{(\gamma)}}) \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \\
& \leq \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B \cap B_0}} \frac{2^{|k|+m} (\log(N_0 + 2))^m}{2^{|k(B')|} a_{B'}} \alpha_{B', \nu(\gamma)} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2). \tag{84}
\end{aligned}$$

Сравнивая (82) и (84), убеждаемся в справедливости (16). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего покажем, что для функции f , определенной формулой (54) для любой последовательности $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+^m$, у которой для бесконечного числа членов выполняется неравенство $\min_{1 \leq j \leq m} N_j^{(\gamma)} > N_0$ (N_0 определяется как в (64)), существует точка $x \in \mathbf{T}^m$, в которой для всех $B \in \mathfrak{B}_m$ справедливо (21). Как при доказательстве теоремы 1, переходим к подпоследовательности и определяем множества B_1 и B_2 , для которых выполняется (64) и (65). В силу нашего ограничения на последовательности $\{N^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^{\infty}$ мы можем считать теперь, что $B_1 \cup B_2 = \{1, \dots, m\}$. Определим $\nu^{(\gamma)}$, $\mu^{(\gamma)}$, $\bar{\nu}_j$, x формулами (67)–(69), (71), (72), учитывая, что теперь $B_3 = \emptyset$.

Исходя из (54) и используя (6) или (11), нетрудно получить, что для любого $B \in \mathfrak{B}_m$,

$$\begin{aligned}
& S_{N(\gamma), B}^*(f; x) - f(x) \\
&= (-1)^{|B|+1} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \supset B}} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B')} \alpha_{B', M} \left(\prod_{j \in B' \setminus B} g_{M_j, p}(x_j) \right) \\
&\quad \times \prod_{j \in B} (S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - g_{M_j, p}(x_j)) \\
&= (-1)^{|B|+1} \sum_{M \in \mathbb{N}^m(B)} \alpha'_{B, M} \prod_{j \in B} (S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - g_{M_j, p}(x_j)), \quad (85)
\end{aligned}$$

где

$$\alpha'_{B, M} = \alpha_{B, M} + \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \cap B = \emptyset}} \sum_{H \in \mathbb{N}^m(B')} \alpha_{B \cup B', M \circ H} \prod_{j \in B'} g_{M_j, p}(x_j),$$

так что, как и выше в (74), имеем

$$(1 - 2^{-4})\alpha_{B, M} \leq \alpha'_{B, M} \leq (1 + 2^{-4})\alpha_{B, M}. \quad (86)$$

Используя тот факт, что $g_{np}(t)$ есть тригонометрический полином степени $(2p+2)n^5$, и учитывая (68), выводим из (85), что

$$S_{N(\gamma), B}^*(f; x) - f(x) = (-1)^{|B|+1} \sum_{\substack{M \in \mathbb{N}^m(B) \\ M_j \geq \mu_j^{(\gamma)}, j \in B}} \alpha'_{B, M} \prod_{j \in B} (S_{N_j^{(\gamma)}}(g_{M_j, p}; x_j) - g_{M_j, p}(x_j)).$$

Теперь, учитывая (86), применим лемму 5 точно так же, как при доказательстве (80), и затем применим лемму 2 и получим

$$\begin{aligned}
& |S_{N(\gamma), B}^*(f; x) - f(x)| \\
&\geq (1 - 2^{-4})\alpha_{B, \nu(\gamma)} \prod_{j \in B} (2^{-p-5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) - |g_{\nu_j^{(\gamma)}, p}(x_j)|) \\
&\quad - (1 + 2^{-4})\alpha_{B, \mu(\gamma)} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \left(\prod_{j \in B'} \left(\sum_{M_j = \mu_j^{(\gamma)}}^{\infty} M_j^{-5/4} + \sum_{M_j = \mu_j^{(\gamma)}}^{\infty} |g_{M_j, p}(x_j)| \right) \right) \\
&\quad \times \prod_{j \in B \setminus B'} \left(\frac{4}{5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) + |g_{\nu_j^{(\gamma)}, p}(x_j)| \right) \\
&\geq (1 - 2^{-4})\alpha_{B, \nu(\gamma)} \prod_{j \in B} (2^{-p-5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) - 7) \\
&\quad - (1 + 2^{-4})\alpha_{B, \mu(\gamma)} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} 12^{|B'|} \prod_{j \in B \setminus B'} \left(\frac{4}{5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) + 7 \right). \quad (87)
\end{aligned}$$

Из (64) вытекает, что

$$\begin{aligned} 2^{-p-5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) - 7 &\geq 2^{-p-6} \log(N_j^{(\gamma)} + 2), \\ \frac{4}{5} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) + 7 &\leq \log(N_j^{(\gamma)} + 2). \end{aligned} \quad (88)$$

Используя (88), а также (81) и (64) как при доказательстве (82), получим из (87)

$$\begin{aligned} |S_{N^{(\gamma)}, B}^*(f; x) - f(x)| &\geq \alpha_{B, \nu^{(\gamma)}} \sum_{\substack{B' \in \mathfrak{B}_m \\ B' \subset B}} \left(\prod_{j \in B \setminus B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \right) \\ &\quad \times \left((2^{|B|} - 1)^{-1} 2^{-1-|B|(p+6)} \prod_{j \in B'} \log(N_j^{(\gamma)} + 2) \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot 2^{-1} (4p+4)^{|k(B)|} 12^{|B'|} \right) \\ &\geq 2^{-1-m(p+7)} \alpha_{B, \nu^{(\gamma)}} \prod_{j \in B} \log(N_j^{(\gamma)} + 2), \end{aligned}$$

откуда ввиду (83) вытекает (21).

Рассуждая как в §1 при доказательстве следствия из теоремы 1, получаем, что для всех $N \in \mathbb{Z}_+^m$, у которых

$$\min\{N_j : 1 \leq j \leq m\} > N_0, \quad (89)$$

выполняется (22). Справедливо также (12), так как $f \in H_\Omega^k$. Отсюда получаем

$$\omega_{k(B)}(f; \delta^N) \gg \omega_{k(B)}(\delta^N) \quad (90)$$

для всех $B \in \mathfrak{B}_m$ и любых $N \in \mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяющих (89).

Для завершения доказательства теоремы 2 зафиксируем $B \in \mathfrak{B}_m$ и возьмем любое $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in [0, \pi]^m$. Если при некотором $j \in B$ имеем $\delta_j = 0$, то в силу свойства 2) набора Ω получим $\omega_{k(B)}(\delta) = 0$ и (20) справедливо. Пусть $\delta_j > 0$, $j \in B$. Если $\delta_j \leq \pi/N_0$, то найдем N_j из условия

$$\frac{\pi}{N_j + 1} < \delta_j \leq \frac{\pi}{N_j};$$

если же $\delta_j > \pi/N_0$ или $j \notin B$, то положим $N_j = N_0$. Таким образом, для всех j имеем $N_j \geq N_0$, так что выполняется (89). Используя монотонность модуля гладкости $\omega_{k(B)}(f; \delta)$ по переменным δ_j , $j \in B$, соотношение (90) и затем свойство 5) набора Ω , получим ввиду определения $N = (N_1, \dots, N_m)$

$$\begin{aligned} \omega_{k(B)}(f; \delta) &\geq \omega_{k(B)}(f; \delta^N) \gg \omega_{k(B)}(\delta^N) \\ &\geq 2^{-|k(B)|} \left(\prod_{j \in B} \left(\frac{\pi}{(N_j + 1)\delta_j} \right)^{k_j(B)} \right) \omega_{k(B)}(\delta) \\ &\geq (2(N_0 + 1))^{-|k(B)|} \omega_{k(B)}(\delta), \end{aligned}$$

откуда вытекает (20). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Menchoff D. E.* Sur les sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1944. Т. 15 (57). №3. С. 385–432.
2. *Осколков К. И.* Подпоследовательности сумм Фурье функций с заданным модулем непрерывности // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). №3(7). С. 447–469.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
4. *Давыдов О. В.* О приближении индивидуальных функций прямоугольными суммами Фурье // ДАН. 1992. Т. 327. №3. С. 295–298.
5. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углом” // Труды МИАН. 1972. Т. 117. С. 256–291.
6. *Жижиашвили Л. В.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1969.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
8. *Павлиашвили Г. Г.* О приближении функций многих переменных суммами Фурье // Сообщения АН ГССР. 1989. Т. 134. №3, часть II. С. 29–32.
9. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию
27.09.1995