Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Козырев, Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 1, 103–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:27:46

УДК 517+517.58+517.968+519.17

С. В. Козырев

Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов

Исследуется спектральная теория псевдодифференциальных операторов на ультраметрических пространствах общего вида при помощи анализа ультраметрических всплесков. Строятся базисы ультраметрических всплесков на ультраметрических пространствах аналитического типа, доказывается, что базисы ультраметрических всплесков состоят из собственных векторов для введенных ультраметрических псевдодифференциальных операторов, и вычисляются соответствующие собственные значения. Вводится обобщение оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования для ультраметрических пространств общего вида.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Введение

В настоящей работе исследуется спектральная теория псевдодифференциальных операторов на ультраметрических пространствах достаточно общего вида, которые не обязательно обладают структурой группы. Для этого вводятся новые базисы всплесков на ультраметрических пространствах.

p -адические псевдодифференциальные операторы изучались в различных работах, см. [1]–[10]. p -адические всплески были введены в [7] и обобщены на семейство абелевых локально компактных групп в [11]. Также в работе [7] рассматривалось некоторое отображение p -адических чисел на положительные (p -адическая замена переменной) и было показано, что это отображение переводит p -адические всплески во всплески Хаара на положительной полупрямой.

Теория p -адических псевдодифференциальных операторов и всплесков связана с анализом Фурье–Уолша на двоичном модифицированном отрезке (либо полупрямой) [12], [13]. Отображением типа рассмотренного в [7] двоичный модифицированный отрезок (или полупрямую) можно перевести в абелеву локально компактную группу с естественной ультраметрикой, при этом преобразование Фурье–Уолша перейдет в преобразование Фурье на группе. Двоичные производные на отрезке, рассмотренные в [13], при этом перейдут в псевдодифференциальные операторы, аналогичные оператору Владимирова p -адического дробного дифференцирования, а изучаемые в анализе Фурье–Уолша базисы из

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-04002-ННАО-а и 05-01-00884-а), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6705.2006.1), программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” и DFG Project 436 RUS 113/809/0-1.

собственных векторов для оператора двоичной производной перейдут в аналог p -адических всплесков (где $p = 2$).

Можно также считать, что отображение из [7] переводит модифицированную p -ичную полупрямую в поле p -адических чисел. При этом преобразование Фурье–Уолша в p -адическое преобразование Фурье не перейдет, но p -ичная производная перейдет в точности в оператор Владимирова, а собственные векторы для p -ичной производной – в p -адические всплески.

Изложение теории систем Хаара, систем Фурье–Уолша и всплесков можно найти также в [14].

Ультратметрические псевдодифференциальные операторы и всплески на общих ультратметрических пространствах вводились в [15], [16]. В настоящей работе, по сравнению с [15], [16], рассматривается более общий случай, когда псевдодифференциальные операторы в $L^2(X, \nu)$ определяются формулой

$$Tf(x) = \int T(\sup(x, y))(f(x) - f(y)) d\nu(y),$$

где ν есть произвольная (счетно-аддитивная положительная) мера. Также вводятся всплески в $L^2(X, \nu)$ и показывается их связь со спектральной теорией ультратметрических псевдодифференциальных операторов. В [15], [16] аналогичные результаты были получены для частного случая однородной меры μ на ультратметрических пространствах. Однородная мера μ в групповом случае переходит в меру Хаара и, в общем случае, вводится условием, что для каждого шара меры его максимальных подшаров равны.

В настоящей работе мы показываем, что все основные результаты анализа p -адических псевдодифференциальных операторов допускают обобщение на случай ультратметрических пространств аналитического типа. Пространства аналитического типа – это широкий класс ультратметрических пространств, связанный с направленными деревьями. Здесь направление есть частичный порядок, для которого любая пара элементов имеет единственную верхнюю грань. Имеет место двойственность между ультратметрическими пространствами аналитического типа и направленными деревьями определенного вида.

Мы вводим базисы ультратметрических всплесков на ультратметрических пространствах аналитического типа, доказываем, что базисы ультратметрических всплесков состоят из собственных векторов для введенных ультратметрических псевдодифференциальных операторов и вычисляем соответствующие собственные значения. Следовательно, для введенного класса ультратметрических пространств анализ всплесков выглядит эффективной заменой анализа Фурье.

Также мы вводим обобщение оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования, действующее на функции на произвольном ультратметрическом пространстве аналитического типа.

Двойственность между ультратметрическими пространствами и направленными деревьями изучалась Леминым [17], см. также [18]. В p -адическом случае такая двойственность связана с конструкцией Брюа–Титса [19], [20]. Построение ультратметрических пространств при помощи деревьев обсуждалась разными авторами, см., например, [21]–[23]. В настоящей работе обсуждается

вариант такой конструкции, когда ультраметрика вводится уже на вершинах дерева и проводится пополнение множества вершин.

Представляется интересным использование развиваемых в настоящей работе общих методов ультраметрического анализа для исследования и обобщения результатов p -адической математической физики и приложений p -адического анализа [24]–[31], [18].

Настоящая работа устроена следующим образом.

В §§ 2–5 мы строим семейство ультраметрических пространств аналитического типа и обсуждаем двойственность между такими пространствами и направленными деревьями.

В § 6 мы вводим ортонормированные базисы ультраметрических всплесков в пространствах квадратично интегрируемых функций на ультраметрических пространствах аналитического типа.

В § 7 мы вводим псевдодифференциальные операторы, действующие на комплекснозначных функциях на ультраметрических пространствах аналитического типа, доказываем, что эти операторы диагональны в базисах ультраметрических всплесков, и вычисляем соответствующие собственные значения.

В § 8 мы строим и исследуем аналог оператора Владимирова на рассматриваемых ультраметрических пространствах.

Автор благодарен А. Ю. Хренникову, И. В. Воловичу и В. С. Владимирову за плодотворные обсуждения и важные замечания.

§ 2. Направленное дерево $\mathcal{T}(X)$ шаров

Мы рассматриваем ультраметрическое пространство X , т.е. метрическое пространство с метрикой $d(x, y)$, удовлетворяющей сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq \max(d(y, z), d(x, z)) \quad \forall x, y, z.$$

В настоящем параграфе мы по ультраметрическому пространству X строим направленное дерево $\mathcal{T}(X)$ шаров в пространстве X . Введем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ультраметрическое пространство X имеет аналитический тип, если оно полно и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) множество всех шаров в X ненулевого диаметра не более чем счетно;
- 2) для любой убывающей последовательности шаров $\{D^{(k)}\}$, $D^{(k)} \supset D^{(k+1)}$, диаметры шаров стремятся к нулю;
- 3) каждый шар есть конечное объединение максимальных подшаров.

В частности, множество максимальных подшаров в шаре из свойства 3) может быть пустым.

Из свойства 2) следует условие:

для любых двух шаров I, J в X ненулевого диаметра и любой последовательности шаров $\{D^{(k)}\}$, для которой $I \subset D^{(k)} \subset J$ для всех k , последовательность $\{D^{(k)}\}$ конечна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Ультраметрическое пространство аналитического типа локально компактно.*

Здесь имеется в виду топология, соответствующая ультраметрике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что пространство X аналитического типа локально компактно (т.е. любой шар в X компактен), рассмотрим (бесконечную) последовательность $\{x_k\}$, лежащую в шаре D в X . Тогда, если шар не минимален (т.е. не состоит из одной точки), он содержит подшар D' , содержащий бесконечную подпоследовательность в $\{x_k\}$. Повторяя эту процедуру, мы получим убывающую последовательность шаров с диаметрами, стремящимися к нулю, причем каждый подшар содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_k\}$. Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ имеет предельную точку в D . Поскольку топология в X имеет счетную базу, отсюда следует локальная компактность.

Следующее предложение дает пример борелевской (т.е. все шары измеримы) σ -аддитивной меры на X , называемой *однородной мерой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *На ультраметрическом пространстве X аналитического типа рассмотрим меру μ , положительную для некоторого шара ненулевого диаметра и определенную для каждого шара I по следующему правилу: меры всех шаров I_j , являющихся максимальными подшарами в I , равны.*

Тогда мера μ является положительной, борелевской (т.е. каждый шар измерим), σ -аддитивной и имеет счетный или конечный базис, состоящий из шаров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что рассмотренное условие определяет меру μ с точностью до умножения на число.

σ -аддитивность следует из локальной компактности X (так же как и для меры Лебега) [32]. Конечный или счетный базис для μ задается (не более чем счетным) множеством шаров в X . Это завершает доказательство предложения.

Введем стандартные определения частично упорядоченного и направленного множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Частично упорядоченным множеством называется множество с заданным на нем частично определенным бинарным отношением сравнения, т.е. для каждой пары (x, y) элементов которого элементы x, y либо не сравнимы, либо $x > y$, либо $x < y$, причем:*

- 1) элемент не может быть больше или меньше самого себя;
- 2) если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$ (транзитивность).

Если любые два элемента частично упорядоченного множества сравнимы, то такое множество называется *вполне упорядоченным*.

Точной верхней гранью $\sup S$ подмножества S в частично упорядоченном множестве называется минимальный элемент, больший или равный всем элементам подмножества. Если любое конечное подмножество имеет единственную точную верхнюю грань, то частично упорядоченное множество называют *направленным* (а частичный порядок – *направлением*).

Далее мы будем использовать термин *верхняя грань* (опускать для краткости слово *точный*).

Напомним определения из теории графов.

Граф есть пара множеств (G, E) (множество вершин, множество ребер), каждое из которых мы будем считать не более чем счетным. При этом каждое ребро $i \in E$ есть пара вершин $I_0, I_1 \in G$ (начало и конец ребра), мы рассматриваем только такие ребра, для которых конец отличен от начала. В этом случае мы говорим, что I_0, I_1 соединены ребром, или являются соседними.

Путем в графе называем последовательность ребер такую, что конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. *Длиной* пути называется число ребер в этом пути. Граф называется *связным*, если для любых двух вершин I, J существует конечный путь с началом в I и концом в J . *Расстоянием* между вершинами графа называем длину соединяющего их кратчайшего пути. *Цикл* в графе есть конечный путь, для которого начальная вершина совпадает с конечной. *Дерево* есть связный граф без циклов. Мы будем рассматривать только такие пути в деревьях, которые не имеют самопересечений.

Рассмотрим произвольное дерево $\mathcal{T}$ (конечное или бесконечное) такое, что количество ребер, входящих в каждую вершину, конечно. Мы рассматриваем деревья с частичным порядком, удовлетворяющим следующему свойству.

СВОЙСТВО 1. В любом конечном пути существует ровно одна максимальная вершина.

В частности, вершины, соединенные ребром, сравнимы.

Индексом ветвления r_I вершины I в таком дереве с частичным порядком будем называть число убывающих ребер, выходящих из I (ребро убывает, если его конец меньше начала). Индекс ветвления вершины I эквивалентно может быть определен как число максимальных вершин, меньших I .

ЛЕММА 5. *Частичный порядок в дереве, удовлетворяющий свойству 1, является направлением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если выполняется свойство 1, то для любого конечного множества вершин существует единственная верхняя грань. Достаточно доказать это для случая двух вершин, поскольку если для любых двух вершин A, B существует единственная верхняя грань $\sup(A, B)$ и мы выбираем произвольную вершину C , то

$$\sup(A, B, C) = \sup(C, \sup(A, B)).$$

Следовательно, если существует единственная верхняя грань для любой пары вершин, то $\sup(A, B, C)$ существует и единственна. Аналогично можно поступить для произвольного конечного числа вершин.

Из свойства 1 следует, что для максимальной вершины C на пути AB пути AC и CB представляют собой вполне упорядоченные множества.

Для вершин A, B рассмотрим путь, соединяющий эти вершины, и докажем, что (единственная) максимальная вершина C на этом пути есть верхняя грань для A, B и эта верхняя грань единственна.

Пусть D есть некоторая вершина такая, что $D > A, D > B$. Рассмотрим путь, соединяющий A и D . На этом пути по свойству 1 есть максимальная вершина, большая A и D . Поскольку $D > A$, эта максимальная вершина совпадает с D . Аналогично, D есть максимальная вершина на пути, соединяющем B и D . Более того, пути AD и BD вполне упорядочены.

Рассмотрим теперь пути AB, AD, BD . Поскольку мы рассматриваем дерево, существует единственная вершина E , принадлежащая всем трем путям. Для вершины E выполнены неравенства

$$E > A, \quad E > B, \quad E < D.$$

Следовательно, $E = C$. Это доказывает, что C есть единственная верхняя грань для A и B . Это завершает доказательство леммы.

Для ультраметрического пространства X рассмотрим множество $\mathcal{T}(X)$, содержащее шары ненулевого диаметра в пространстве X , и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра (напомним, что диаметр множества есть верхняя грань расстояния между элементами этого множества).

На множестве $\mathcal{T}(X)$ существует естественный частичный порядок: $I > J$ для $I, J \in \mathcal{T}(X)$, если соответствующие шары упорядочены по вложению. Поскольку для любых двух шаров в ультраметрическом пространстве существует единственный минимальный шар, содержащий эти два шара (т.е. верхняя грань этих шаров), то такой частичный порядок будет направлением.

Множество $\mathcal{T}(X)$ имеет структуру графа, определенную следующим образом: вершины графа есть шары из $\mathcal{T}(X)$, две вершины I и J соединены ребром, если соответствующие шары вложены друг в друга и между I и J нет других элементов из $\mathcal{T}(X)$ (т.е. один из шаров есть максимальный подшар в другом). В p -адическом случае, когда X есть Q_p , соответствующий граф $\mathcal{T}(X)$ есть дерево Брюа–Титса.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X есть ультраметрическое пространство аналитического типа. Тогда множество $\mathcal{T}(X)$, содержащее шары ненулевого диаметра в пространстве X , и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра, есть направленное дерево, причем направление удовлетворяет свойству 1.

Индекс ветвления в дереве $\mathcal{T}(X)$ может принимать конечные значения, не равные 1, причем максимальная вершина (если она есть) имеет индекс ветвления ≥ 2 . Шары ненулевого диаметра в X соответствуют вершинам

индекса ветвления ≥ 2 в $\mathcal{T}(X)$, и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра, отвечают вершинам с индексом ветвления 0 в $\mathcal{T}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что граф $\mathcal{T}(X)$ будет деревом с конечным индексом ветвления. Из свойств 1), 3) ультраметрического пространства X аналитического типа следует, что $\mathcal{T}(X)$ имеет не более чем счетное число вершин и все индексы ветвления конечны.

Поскольку $\mathcal{T}(X)$ есть направленное множество, по свойству 2) ультраметрического пространства аналитического типа граф $\mathcal{T}(X)$ является связным.

Предположим, что в графе $\mathcal{T}(X)$ имеется цикл. Выберем минимальный элемент I цикла и рассмотрим шары J, K в X , лежащие в цикле, причем $I \subset J, I \subset K$. Из ультраметричности пространства X имеем: для любых трех шаров I, J, K в X таких, что $I \subset J, I \subset K$, шары J и K будут сравнимы – либо $J \subset K$, либо $K \subset J$. Следовательно, цикл не существует и граф $\mathcal{T}(X)$ является деревом.

Далее, легко видеть, что индекс ветвления дерева $\mathcal{T}(X)$ не может быть равен единице ни для какой вершины и что для максимальной вершины (если она существует) индекс ветвления не может быть равен нулю (если X содержит хотя бы две точки). Более того, шары ненулевого диаметра в X отвечают вершинам индекса ветвления ≥ 2 в $\mathcal{T}(X)$ и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра, отвечают вершинам индекса ветвления 0 в $\mathcal{T}(X)$.

Докажем, что направление в $\mathcal{T}(X)$ удовлетворяет свойству 1. Пусть $I \in \mathcal{T}(X)$, $J \in \mathcal{T}(X)$ и $K = \sup(I, J)$. Рассмотрим пути IJ, IK, JK и вершину

$$L = IJ \cap IK \cap JK.$$

Тогда $L \geq I, L \geq J$ и $L \leq K$, откуда следует, что $L = K$, т.е. верхняя грань K лежит на пути IJ . Более того, легко видеть, что пути IK и JK вполне упорядочены, откуда следует свойство 1. Это завершает доказательство теоремы.

Эта теорема показывает, что дерево шаров в ультраметрическом пространстве аналитического типа является направленным деревом с определенными свойствами. Это подсказывает следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Направленное дерево $\mathcal{T}$ называется *деревом аналитического типа*, если:

- 1) направление удовлетворяет свойству 1;
- 2) индекс ветвления в дереве $\mathcal{T}$ может принимать конечные значения, не равные 1, причем максимальная вершина (если она есть) имеет индекс ветвления ≥ 2 .

Рассмотрим множество $X \cup \mathcal{T}(X)$, где мы отождествляем шары нулевого диаметра из $\mathcal{T}(X)$ и соответствующие точки из X . Мы называем $\mathcal{T}(X)$ *деревом шаров* в ультраметрическом пространстве X , а $X \cup \mathcal{T}(X)$ – *расширенным деревом шаров*. Можно сказать, что $X \cup \mathcal{T}(X)$ есть множество всех шаров в X , нулевого и ненулевого диаметра.

Введем структуру направленного множества на $X \cup \mathcal{T}(X)$. На дереве шаров $\mathcal{T}(X)$ эта структура уже описана, и отношения порядка с точками из X вводятся следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Любые две точки ультраметрического пространства X не сравнимы. Отношения порядка между точками X и вершинами дерева $\mathcal{T}(X)$ (т.е. шарами в X) вводятся следующим образом: если $x \in X$ и $I \in \mathcal{T}(X)$, то $x \leq I$ тогда и только тогда, когда $x \in I$.

ЛЕММА 9. Введенный определением 8 частичный порядок в $X \cup \mathcal{T}(X)$ является направлением. Это направление описывается следующим образом: верхняя грань

$$\sup(x, y) = I$$

точек $x, y \in X$ есть минимальный шар I , содержащий эти точки.

Аналогично, для $J \in \mathcal{T}(X)$ и $x \in X$ верхняя грань

$$\sup(x, J) = I$$

есть минимальный шар I , содержащий шар J и точку x .

Эта конструкция расширяет определение верхней грани вершин дерева $\mathcal{T}(X)$, поскольку $I = \sup(J, K)$ соответствует минимальному I , содержащему пары J и K .

Введем структуру ультраметрического пространства на расширенном дереве $X \cup \mathcal{T}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для I, J в $X \cup \mathcal{T}(X)$, где $I \neq J$, расстояние $d(I, J)$ вводится как диаметр шара $K \in X \cup \mathcal{T}(X)$, $K = \sup(I, J)$, и для I в $X \cup \mathcal{T}(X)$ расстояние $d(I, I)$ полагается равным нулю: $d(I, I) = 0$.

Нетрудно проверить, что введенное расстояние есть ультраметрика. В частности, дерево шаров $\mathcal{T}(X)$ является (в общем случае неполным) ультраметрическим пространством.

Более того, мера ν на ультраметрическом пространстве X порождает меру (которую мы также обозначаем ν) на расширенном дереве шаров $X \cup \mathcal{T}(X)$: меру $I \in \mathcal{T}(X)$ мы полагаем равной мере соответствующего шара в X .

§ 3. Направленные деревья и ультраметрика

В § 2 было показано, как по ультраметрическому пространству аналитического типа X построить направленное дерево шаров $\mathcal{T}(X)$. В настоящем параграфе мы покажем, что на направленном дереве $\mathcal{T}$ с направлением, удовлетворяющим свойству 1, можно ввести ультраметрику, и дадим характеристику таких ультраметрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Два пути в дереве $\mathcal{T}$ назовем *эквивалентными*, если они совпадают, начиная с некоторой вершины (соответственно они оба либо бесконечны, либо кончаются в одной вершине). Путь из класса эквивалентности x , начинающийся в вершине A , будем обозначать Ax .

Следующая теорема описывает взаимно однозначное соответствие между направлениями на дереве $\mathcal{T}$, удовлетворяющими свойству 1, и классами эквивалентности путей в $\mathcal{T}$. Это дает возможность описать конструктивно направления, удовлетворяющие свойству 1.

ТЕОРЕМА 12. *Фиксируем x – некий класс эквивалентности путей в дереве $\mathcal{T}$. Введем следующий частичный порядок на дереве $\mathcal{T}$: $A < B$, где A, B – вершины дерева $\mathcal{T}$, если существует путь из класса эквивалентности x такой, что A, B лежат на этом пути и $A < B$ в смысле порядка на пути (любой путь есть вполне упорядоченное множество в естественном смысле: вершина тем меньше, чем ближе к началу).*

Данный частичный порядок удовлетворяет свойству 1 и является направлением на $\mathcal{T}$.

Обратно, любое направление на дереве $\mathcal{T}$, удовлетворяющее свойству 1, вводится таким образом (т.е. для любого такого направления существует класс эквивалентности x путей, задающий данное направление).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершины A, B соединены ребром. Тогда, поскольку в дереве $\mathcal{T}$ нет циклов, либо $B \in Ax$, либо $A \in Bx$, и вершины A, B сравнимы.

Пусть теперь A, B – произвольные вершины. Рассмотрим пути Ax, Bx . Эти пути и путь AB пересекаются в единственной вершине C . По построению $C > A, C > B$ и C есть единственная максимальная вершина на пути AB . Таким образом, введенный частичный порядок удовлетворяет свойству 1 и по лемме 5 есть направление.

Обратно, пусть на дереве $\mathcal{T}$ задано направление, удовлетворяющее свойству 1. Выберем вершину A и рассмотрим соседние (соединенные с A ребрами) вершины. Среди этих вершин (A и соседних) по свойству 1 есть единственная максимальная вершина A_1 . Опять рассмотрим соседние к A_1 (включая саму A_1) и выберем максимальную вершину A_2 . Повторяя процедуру, получим возрастающий путь $AA_1A_2 \dots$ (который может быть конечен либо бесконечен).

Стартуя с вершины B , аналогичным способом получим возрастающий путь $BB_1B_2 \dots$. Поскольку по свойству 1 на пути AB есть единственная максимальная вершина $C = \sup(A, B)$, то

$$AB \subset AA_1A_2 \dots \cup BB_1B_2 \dots$$

и пути $AA_1A_2 \dots, BB_1B_2 \dots$ совпадают, начиная с C . Следовательно, эти пути лежат в одном классе эквивалентности.

Это завершает доказательство теоремы 12.

Следующая теорема описывает семейство ультраметрик на направленных деревьях. Мы называем две метрики на одном пространстве *эквивалентными*, если они определяют одинаковые наборы шаров.

ТЕОРЕМА 13. *Если $F(I)$ есть положительная возрастающая функция на направленном дереве $\mathcal{T}$, то формула*

$$d(A, B) = F(\sup(A, B)) \quad \forall A, B \in \mathcal{T}, \quad A \neq B, \quad d(A, A) = 0, \quad (1)$$

определяет на дереве $\mathcal{T}$ ультраметрику, т.е. эта функция неотрицательна, равна нулю только для $A = B$, симметрична по отношению к перестановке A и B и удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$d(A, B) \leq \max(d(A, C), d(B, C)) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{T}.$$

Более того, все ультраметрики, определенные таким образом, эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что $d(A, B)$ есть ультраметрика, достаточно доказать, что $d(A, B)$ удовлетворяет сильному неравенству треугольника (остальные условия, необходимые для ультраметричности, очевидны).

Рассмотрим вершины A, B, C . Пусть $I = \sup(A, B)$, $J = \sup(B, C)$, $K = \sup(A, C)$.

Поскольку вершины I и K обе больше вершины A , то они сравнимы, иначе бы в дереве существовал цикл из двух различных путей

$$AI \sup(I, K), \quad AK \sup(I, K)$$

(мы обозначаем через XYZ путь с началом в X и концом в Z , проходящий через Y). Аналогично, сравнимы вершины I и J , а также вершины J и K . Следовательно, $\{I, J, K\}$ есть упорядоченное множество.

Возможны два варианта: либо $I = J = K$, либо среди этих вершин есть несовпадающие. Если $I = J = K$, то вследствие (1)

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C),$$

т.е. выполнено сильное неравенство треугольника.

Примем, что $I > J$, т.е. $\sup(A, B) > \sup(B, C)$. Тогда $\sup(A, C) = \sup(A, B)$, т.е. $I = K$. Это означает, что согласно (1)

$$d(A, B) = d(A, C) > d(B, C),$$

т.е. выполнено сильное неравенство треугольника.

Аналогично, при прочих выборах порядка на множестве $\{I, J, K\}$ мы опять получим сильное неравенство треугольника.

Поскольку структура множества шаров, определенная таким образом, зависит только от направления на дереве и не зависит от функции F , ультраметрики, соответствующие различным F , будут эквивалентны. Это завершает доказательство теоремы 13.

Введем теперь пример ультраметрики вида, описанного в теореме 13. Такую ультраметрику на $\mathcal{T}$ мы будем называть *стандартной*.

Сопоставим ребру дерева индекс ветвления наибольшей из вершин ребра (это определение корректно, поскольку две вершины, соединенные ребром, всегда сравнимы). Ребро называется *возрастающим*, если конец ребра больше начала, и *убывающим* в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Рассмотрим направленное дерево $\mathcal{T}$ с направлением, удовлетворяющим свойству 1. Пусть, более того, все индексы ветвления вершин дерева конечны и не равны 1, максимальная вершина либо не существует, либо имеет индекс ветвления ≥ 2 . Выберем произвольную вершину R дерева (эту вершину мы будем называть корнем дерева).

Пусть $A, B, A \neq B$, – вершины дерева $\mathcal{T}$, $I = \sup(A, B)$, R есть корень дерева $\mathcal{T}$. Определим расстояние $d(A, B)$ между вершинами дерева как произведение индексов ветвления ребер вдоль конечного направленного пути RI ,

$$RI = I_0 \dots I_N, \quad I_0 = R, \quad I_N = I,$$

в степенях ± 1 , причем индексы ветвления возрастающих ребер $I_j I_{j+1}$ входят в произведение в степени $+1$, а индексы ветвления убывающих ребер входят в степень -1 :

$$d(A, B) = \prod_{j=0}^{N-1} p_{I_j I_{j+1}}^{\varepsilon_{I_j I_{j+1}}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = 1$ для $I_j < I_{j+1}$, $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = -1$ для $I_j > I_{j+1}$.

Если вершины A, B совпадают, то расстояние между ними положим равным нулю.

По теореме 13 введенное расстояние будет ультраметрикой. В дальнейшем обозначение $d(\cdot, \cdot)$ для определенности будет пониматься как ультраметрика, определенная формулой (2).

§ 4. Пополнение направленных деревьев

В настоящем параграфе мы рассматриваем пополнения направленных деревьев (с направлением, удовлетворяющим свойству 1 и описываемым теоремой 12) относительно ультраметрики, определенной теоремой 13. Данная конструкция является аналогом конструкции вещественных (и p -адических) чисел по рациональным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Для направленного дерева $\mathcal{T}$ рассмотрим множество $\tilde{X}(\mathcal{T})$, являющееся пополнением $\mathcal{T}$ по ультраметрике, заданной теоремой 13. Пространство $\tilde{X}(\mathcal{T})$ будем называть *пополненным деревом, отвечающим дереву $\mathcal{T}$* .

Также введем множество $X(\mathcal{T}) = \tilde{X}(\mathcal{T}) \setminus (\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_{\min})$ (где $\mathcal{T}_{\min}$ есть множество минимальных вершин в $\mathcal{T}$), т.е. $X(\mathcal{T})$ есть $\tilde{X}(\mathcal{T})$, из которого выкинуты все вершины дерева $\mathcal{T}$, кроме минимальных. Пространство $X(\mathcal{T})$ мы будем называть *ультраметрическим пространством, связанным с направленным деревом $\mathcal{T}$* .

Множества $\tilde{X}(\mathcal{T})$ и $X(\mathcal{T})$ являются полными ультраметрическими пространствами.

Здесь мы понимаем вычитание дерева из его пополнения следующим образом: вершина A дерева очевидным образом отождествляется с классом эквивалентности последовательностей вершин, совпадающих с A , начиная с некоторого элемента.

Определение пространства $X(\mathcal{T})$ эквивалентно, см. следующий параграф, стандартному определению абсолюта дерева (точнее, определению абсолюта с выколотовой точкой, отвечающей возрастающему пути).

Назовем *бесконечно продолженным* путь в направленном дереве $\mathcal{T}$ с описанным в § 2 направлением, который либо бесконечен, либо заканчивается в вершине с индексом ветвления 0, либо заканчивается в максимальной вершине в $\mathcal{T}$ (если такая вершина существует).

ЛЕММА 16. *Множество $\tilde{X}(\mathcal{T})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности путей в $\mathcal{T}$, содержащих убывающие пути. Множество $X(\mathcal{T})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности путей в $\mathcal{T}$, содержащих убывающие бесконечно продолженные пути.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убывающему пути в дереве $\mathcal{T}$ можно сопоставить бесконечную последовательность вершин в дереве следующим образом: если путь бесконечен, то последовательность выберем как последовательность вершин пути; если путь конечен, то последовательность выберем как последовательность вершин пути, дополненную бесконечной последовательностью, состоящей из конечной вершины пути.

Применяя данную конструкцию к классу эквивалентности, содержащему убывающий путь, получим набор эквивалентных фундаментальных последовательностей в смысле ультраметрики (1). Таким образом, множество классов эквивалентности, содержащих убывающие пути, есть подмножество в $\tilde{X}(\mathcal{T})$.

В свою очередь, из (1) нетрудно видеть, что любой класс эквивалентности фундаментальных относительно метрики (1) последовательностей в $\mathcal{T}$ содержит последовательность, определенную убывающим путем. Следовательно, множество $\tilde{X}(\mathcal{T})$ изоморфно множеству классов эквивалентности убывающих путей.

Аналогично, класс эквивалентности бесконечно продолженных убывающих путей отвечает некоторой точке $X(\mathcal{T})$, и в любом классе эквивалентности последовательностей точек дерева, отвечающем точке $X(\mathcal{T})$, содержится последовательность, отвечающая бесконечно продолженному убывающему пути. Это завершает доказательство леммы 16.

Введенное пополненное дерево $\tilde{X}(\mathcal{T})$ совпадает с $X \cup \mathcal{T}(X)$, где $X = X(\mathcal{T})$. Это показывает наличие двойственности между ультраметрическими пространствами аналитического типа и направленными деревьями с конечным индексом ветвления $\neq 1$, направлением, удовлетворяющим свойству 1, и с максимальной вершиной (если она существует), имеющей индекс ветвления ≥ 2 . Руководствуясь этим, будем называть такие направленные деревья *деревьями аналитического типа*.

Вершине $I \in \mathcal{T}$ соответствует шар I в ультраметрическом пространстве $\tilde{X}(\mathcal{T})$, являющийся минимальным шаром, содержащим все вершины, меньшие I . Аналогично, шаром I в пространстве $X(\mathcal{T})$ назовем результат вычи-

тания из $I \subset \tilde{X}(\mathcal{T})$ соответствующих вершин $\mathcal{T}$. Шар I содержит p_I максимальных подшаров, где p_I есть индекс ветвления вершины I .

Определим однородную меру μ на пространстве $X(\mathcal{T})$, которая для случая дерева Брюа–Титса сведется к мере Хаара на p -адических числах. Чтобы определить меру μ , достаточно определить эту меру на шарах I . Определим диаметр $d_I = \text{diam}(I)$ шара как верхнюю грань расстояния $d(x, y)$ между точками x и y в шаре I .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Однородная мера μ на $X(\mathcal{T})$ шара I ненулевого диаметра равна его диаметру $\mu(I) = \text{diam}(I)$ в ультраметрике (2). Для шара нулевого диаметра I , отвечающего минимальной вершине I , мера $\mu(I)$ определяется как $p_{I+1}^{-1}\mu(I+1)$. Здесь $I+1$ есть минимальная вершина, большая I , p_{I+1} и $\mu(I+1)$ суть соответственно индекс ветвления и мера шара (с ненулевым диаметром), соответствующие этой вершине.

Поскольку неминимальный шар I содержит p_I максимальных подшаров, которые по определению ультраметрики и меры имеют меру $p_I^{-1}\mu(I)$, то мера μ аддитивна.

ЛЕММА 18. Эквивалентно, однородная мера μ задается следующими условиями:

- 1) для шара R , отвечающего корню дерева $\mathcal{T}$, $\mu(R) = 1$;
- 2) для каждого неминимального шара I выполнено условие: меры максимальных подшаров в I равны.

Однородная мера на ультраметрическом пространстве аналитического типа будет положительной, борелевской (т.е. все шары будут измеримы), счетно-аддитивной и будет иметь счетный либо конечный базис. Эти свойства (кроме счетной аддитивности) непосредственно следуют из определения. Счетная аддитивность доказывается так же, как и для меры Лебега на прямой, и следует из локальной компактности ультраметрического пространства аналитического типа.

Мы обозначаем $L^2(X, \mu)$ сепарабельное гильбертово пространство комплекснозначных квадратично интегрируемых (по отношению к введенной мере) функций на пространстве $X(\mathcal{T})$. Поскольку пространство $X(\mathcal{T})$ (в общем случае) не является группой, не существует преобразования Фурье в $L^2(X, \mu)$. Тем не менее, там можно ввести всплеск-преобразование.

Обсудим представление элементов пространства $X(\mathcal{T})$ и пополненного дерева, аналогичное разложению вещественных чисел в десятичные дроби (и p -адических чисел в ряды по степеням p).

Для каждой вершины I дерева мы имеем p_I убывающих ребер, выходящих из вершины, $0 \leq p_I < \infty$. Занумеруем все убывающие ребра числами $x_I = 0, \dots, p_I - 1$ произвольным образом. Мы рассматриваем x_I как функцию от x из шара I , где x_I есть номер ребра, выходящего из вершины I , на убывающем пути из I в x .

Рассмотрим точку $x \in X(\mathcal{T})$. Рассмотрим убывающий (бесконечный либо конечный) путь $\sup(R, x)$, имеющий последовательность (убывающих) ребер $\{x_L\}$. Пусть γ есть число (возрастающих) ребер в конечном пути $R \sup(R, x)$.

Мы сопоставляем точке x последовательность номеров ребер (бесконечную для бесконечного пути и конечную для конечного пути)

$$x_{-\gamma} x_{-\gamma+1} \dots x_{-1}, x_0 \dots \quad (3)$$

Элементы в вышеприведенной последовательности есть элементы последовательности $\{x_L\}$, расположенные в порядке убывания.

Аналогично, вершине $I \in \mathcal{T}$ сопоставляется конечная последовательность $\{x_L\}$ номеров ребер в пути $\sup(R, I)I$:

$$x_{-\gamma} x_{-\gamma+1} \dots x_{-1}, x_0 \dots x_\beta, \quad (4)$$

где γ есть число (возрастающих) ребер в конечном пути $R \sup(R, I)$ и x_β есть номер убывающего ребра, входящего в I .

Легко видеть, что последовательности (3) являются пределами последовательностей (4), соответствующих убывающим I , в норме (2). Данная конструкция есть аналог представления p -адического числа в виде ряда

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i, \quad x_i = 0, \dots, p-1$$

(данный ряд есть аналог последовательности (3)), и такие ряды суть пределы в p -адической норме от конечных сумм вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\beta} x_i p^i, \quad x_i = 0, \dots, p-1$$

(аналогов последовательностей (4)).

§ 5. Связь со стандартным определением абсолюта

Рассмотрим направленное дерево $\mathcal{T}$ аналитического типа. Воспроизведем для сравнения более стандартное определение абсолюта направленного дерева.

Выберем класс эквивалентности ∞ путей в $\mathcal{T}$. Направление на множестве вершин дерева определим следующим образом: $J > I$, если J принадлежит пути $I\infty$. Тогда ∞ будет классом эквивалентности возрастающих бесконечно продолженных путей в $\mathcal{T}$.

Абсолютом дерева $\mathcal{T}$ мы будем называть множество $\hat{X}(\mathcal{T})$ классов эквивалентности бесконечно продолженных путей. Также рассмотрим пространство $X(\mathcal{T})$ классов эквивалентности бесконечно продолженных путей, содержащих убывающие бесконечно продолженные пути. Таким образом, $\hat{X}(\mathcal{T}) = X(\mathcal{T}) \cup \infty$.

Фиксируем некоторую вершину R дерева $\mathcal{T}$ (будем называть эту вершину корнем дерева).

Для точек x, y абсолюта существует единственный путь xy в дереве $\mathcal{T}$. Здесь мы обозначаем через xy следующее множество: в классе эквивалентности x выбираем представитель Ix (путь к точке абсолюта x , начинающийся в вершине I), аналогично выбираем Iy и рассматриваем объединение $Ix \cup Iy$. Тогда мы определяем xy как пересечение всех таких объединений:

$$xy = \bigcap_I (Ix \cup Iy).$$

Множество xy мы будем называть *путем между двумя точками абсолюта*.

Для трех таких путей xy, xz, yz , отвечающих попарно различным точкам абсолюта x, y, z , существует единственная вершина I дерева $\mathcal{T}$, лежащая на всех трех путях.

Точку пересечения трех путей $xy, x\infty, y\infty$ мы будем называть верхней гранью точек x, y пространства $X(\mathcal{T})$ и обозначать $\sup(x, y)$:

$$\sup(x, y) = xy \cap x\infty \cap y\infty. \quad (5)$$

Определение ультраметрики 14 примет следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $x, y \in X(\mathcal{T})$, $I = \sup(x, y)$ и R есть корень дерева. Определим расстояние $d(x, y)$ между точками $X(\mathcal{T})$ как произведение индексов ветвления ребер вдоль конечного направленного пути RI ,

$$RI = I_0 \dots I_N, \quad I_0 = R, \quad I_N = I,$$

в степенях ± 1 , причем индексы ветвления возрастающих ребер $I_j I_{j+1}$ входят в произведение в степени $+1$, а индексы ветвления убывающих ребер входят в степени -1 :

$$d(x, y) = \prod_{j=0}^{N-1} p_{I_j I_{j+1}}^{\varepsilon_{I_j I_{j+1}}}, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = 1$ для $I_j < I_{j+1}$, $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = -1$ для $I_j > I_{j+1}$.

Если $x = y$, то расстояние $d(x, y)$ положим равным нулю.

Суммируем результаты, полученные в нескольких последних параграфах, в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 20. Рассмотрим дерево $\mathcal{T}$ аналитического типа, т.е. направленное дерево со следующими свойствами:

- 1) число ребер, входящих в любую вершину, конечно;
- 2) индекс ветвления любой вершины $\neq 1$;
- 3) максимальная вершина (если она существует) имеет индекс ветвления ≥ 2 ;
- 4) направление в дереве определяется при помощи конструкции теоремы 12 некоторой точкой абсолюта (т.е. классом эквивалентности бесконечно продолженных путей), называемой бесконечной точкой и обозначаемой ∞ , следующим образом: $I > J$, если I лежит на пути $J\infty$.

Пусть $F(I)$ есть возрастающая положительная функция на направленном дереве $\mathcal{T}$. Тогда метрика на пространстве $X(\mathcal{T})$, определенная формулой (1), делает $X(\mathcal{T})$ ультраметрическим пространством аналитического типа.

СЛЕДСТВИЕ 21. Если в условиях теоремы 20 в каждую вершину дерева $\mathcal{T}$ входят как минимум три ребра, то в пространстве $X(\mathcal{T})$ внутри каждого шара существует подшар меньшего диаметра и каждый шар лежит в шаре большего диаметра.

§ 6. Ультраметрические всплески

Пусть ν есть положительная борелевская (т.е. все шары измеримы) σ -аддитивная мера со счетным либо конечным базисом в ультраметрическом пространстве X аналитического типа, $L^2(X, \nu)$ есть гильбертово пространство квадратично интегрируемых по мере ν функций на ультраметрическом пространстве X . В настоящем параграфе будут введены ортонормированные базисы ультраметрических всплесков в гильбертовом пространстве $L^2(X, \nu)$.

Обозначим через V_I пространство функций на X , порождаемое характеристическими функциями максимальных подшаров в шаре ненулевого радиуса I . Соответственно, V_I^0 есть подпространство коразмерности 1 в V_I функций с нулевым средним по мере ν .

ЛЕММА 22. Пространства V_I^0 для различных I ортогональны в $L^2(X, \nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если I, J не сравнимы, то соответствующие пространства V_I^0, V_J^0 состоят из функций с непересекающимися носителями и, следовательно, ортогональны.

Если $I > J$, то функции из V_I^0 постоянны на носителе функций из V_J^0 . Поскольку V_J^0 состоит из функций с нулевым средним, пространства V_I^0, V_J^0 будут ортогональны. Это завершает доказательство леммы.

В пространстве V_I^0 введем некоторый ортонормированный базис $\{\psi_{Ij}\}$, где число векторов в базисе очевидным образом меньше или равно $p_I - 1$. Следующая теорема показывает, что объединение базисов $\{\psi_{Ij}\}$ в пространствах V_I^0 по всем неминимальным I дает ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

ТЕОРЕМА 23. 1) Пусть мера $\nu(X)$ ультраметрического пространства X аналитического типа бесконечна. Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}\}$, где I пробегает множество всех неминимальных вершин в дереве $\mathcal{T}$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

2) Пусть мера $\nu(X)$ ультраметрического пространства X аналитического типа конечна и равна A . Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}, A^{-1/2}\}$, где I пробегает множество всех неминимальных вершин в дереве $\mathcal{T}$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

Введенный в данной теореме базис мы будем называть *базисом ультраметрических всплесков* (соответствующим образом нормированную константу мы также будем называть всплеском).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 22 описанные в условии теоремы наборы функций ортонормальны.

Для доказательства полноты используем равенство Парсеваля. Так как множество индикаторов (характеристических функций) шаров I полно в $L^2(X, \nu)$, для доказательства полноты достаточно доказать равенство Парсеваля только для индикаторов $\chi_I(x)$.

Рассмотрим характеристическую функцию χ_I шара I , для которого $\nu(I) > 0$ (и, следовательно, $\chi_I \neq 0$ в пространстве $L^2(X, \nu)$). Разложим характеристическую функцию $\chi_I(x)$ по всплескам. Для этого достаточно воспользоваться всплесками ψ_{Jj} с $J > I$.

Обозначим через P_V ортогональный проектор на V в $L^2(X, \nu)$. Тогда

$$P_{V_J^0} = P_{V_J} - P_{\chi_J}.$$

Рассмотрим вектор

$$\tilde{\chi}_I = \sum_{J \in \mathcal{J}} P_{V_J^0} \chi_I = \sum_{J > I} (P_{V_J} - P_{\chi_J}) \chi_I = \sum_{J > I} (P_{\chi_{J-1, I}} - P_{\chi_J}) \chi_I,$$

где $(J-1, I)$ есть (единственным образом определенная) максимальная вершина, меньшая J и большая I (т.е. максимальный подшар в J , содержащий шар I). Вышеприведенный вектор представлен в виде ряда по ортогональным векторам. Вычислим квадрат длины $\tilde{\chi}_I$:

$$\|\tilde{\chi}_I\|^2 = \sum_{J > I} \|(P_{\chi_{J-1, I}} - P_{\chi_J}) \chi_I\|^2.$$

Поскольку для $J \geq I$

$$P_{\chi_J} \chi_I = \frac{\nu(I)}{\nu(J)} \chi_J$$

(это выражение корректно, так как $\nu(J) > 0$ для $J \geq I$), мы получим

$$\begin{aligned} \|(P_{\chi_{J-1, I}} - P_{\chi_J}) \chi_I\|^2 &= \left\| \frac{\nu(I)}{\nu(J-1, I)} \chi_{J-1, I} - \frac{\nu(I)}{\nu(J)} \chi_J \right\|^2 \\ &= \left(\frac{\nu(I)}{\nu(J-1, I)} - \frac{\nu(I)}{\nu(J)} \right)^2 \nu(J-1, I) + \left(\frac{\nu(I)}{\nu(J)} \right)^2 (\nu(J) - \nu(J-1, I)) \\ &= \nu^2(I) \left[\frac{1}{\nu(J-1, I)} - \frac{1}{\nu(J)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\|\tilde{\chi}_I\|^2 = \nu^2(I) \sum_{J > I} \left[\frac{1}{\nu(J-1, I)} - \frac{1}{\nu(J)} \right] = \nu^2(I) \lim_{J \rightarrow \infty, J > I} \left[\frac{1}{\nu(I)} - \frac{1}{\nu(J)} \right], \quad (7)$$

где предел в правой части есть предел выражения в квадратных скобках для последовательности возрастающих J , начинающейся с I .

В случае 1) из (7) следует равенство Парсеваля для χ_I .

В случае 2) мы получим для (7)

$$\nu^2(I) \left[\frac{1}{\nu(I)} - \frac{1}{A} \right]. \quad (8)$$

В этом случае, поскольку для проверки равенства Парсеваля мы должны прибавить к выражению (8) член, соответствующий вкладу нормированной константы:

$$\frac{\nu^2(J)}{A},$$

мы опять получаем равенство Парсеваля, что завершает доказательство теоремы 23.

Важным примером ультраметрических всплесков являются всплески в пространстве $L^2(X, \mu)$ с однородной мерой μ (т.е. мерой, определяемой условием равенства мер максимальных подшаров в каждом шаре). Такие всплески определяются как функции $\psi_{Ij}(x)$ (где I есть вершина дерева и $j = 1, \dots, p_I - 1$), заданные формулами

$$\psi_{Ij}(x) = \frac{e^{2\pi i j x_I p_I^{-1}} \chi_I(x)}{\sqrt{\mu(I)}}. \quad (9)$$

Здесь x_I есть номер убывающего ребра в нумерации ребер, описанной в § 4, где x_I есть функция от x , рассматриваемого как убывающий путь, начинающийся в вершине I дерева $\mathcal{T}$.

Отметим, что определение всплеска зависит от нумерации ребер дерева (но носители всплесков не зависят от этой нумерации). Поскольку введенные формулой (9) всплески являются частным случаем базиса, рассмотренного в теореме 23, мы будем использовать то же обозначение. Следующая лемма показывает, что функции (9) действительно являются ультраметрическими всплесками в смысле определения настоящего параграфа.

ЛЕММА 24. *Набор $\{\psi_{Ij}\}$ является ортонормированной системой функций в $L^2(X, \mu)$. Всплеск ψ_{Ij} ортогонален характеристической функции χ_J для $J \geq I$ или I , не сравнимого с J .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что интеграл от любого всплеска ψ_{Ij} равен нулю. Отсюда сразу следует второе утверждение леммы, поскольку характеристическая функция χ_J для $J \geq I$ или I , не сравнимого с J , есть константа (или даже нуль) на носителе всплеска ψ_{Ij} .

Отсюда следует, что $\langle \psi_{Ij}, \psi_{I'j'} \rangle$ может быть отлично от нуля только для $I = I'$, иначе один из всплесков будет константой на носителе другого. Для $I = I'$ получим для скалярного произведения

$$\langle \psi_{Ij}, \psi_{Ij'} \rangle = \frac{1}{\mu(I)} \int e^{2\pi i (j' - j) x_I p_I^{-1}} \chi_I(x) d\mu(x) = \delta_{jj'}. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\langle \psi_{Ij}, \psi_{I'j'} \rangle = \delta_{II'} \delta_{jj'},$$

т.е. векторы ψ_{Ij} ортонормальны, что завершает доказательство леммы.

§ 7. Ультраметрические ПДО

В настоящем параграфе мы изучаем ультраметрический псевдодифференциальный оператор (или ПДО) вида

$$Tf(x) = \int_X T(\sup(x, y))(f(x) - f(y)) d\nu(y). \quad (11)$$

Здесь X есть ультраметрическое пространство аналитического типа, ν есть положительная борелевская счетно-аддитивная мера со счетным или конечным базисом, $T(I)$ есть комплекснозначная функция на дереве $\mathcal{T}(X)$. Таким образом, структура оператора определяется направлением на множестве $X \cup \mathcal{T}(X)$.

ТЕОРЕМА 25. Пусть $T(I)$ есть комплекснозначная функция на направленном дереве $\mathcal{T}$. Тогда функция

$$T(x, y) = T(\sup(x, y)) \quad (12)$$

симметрична и локально постоянна по y при фиксированном x (вне любой окрестности x) и для произвольного фиксированного x выполнено следующее условие:

$$T(x, y) = \text{const}, \quad \text{если} \quad d(x, y) = \text{const}. \quad (13)$$

Обратно, для любой такой функции $T(x, y)$ существует такая функция $T(I)$ на направленном дереве $\mathcal{T}$, что функция $T(x, y)$ определяется (12).

Это соответствие задается формулой

$$T(x, y) = T(\sup(x, y)) = \sum_I T(I) \delta_{\text{diam}(I), d(x, y)} \chi_I(x), \quad (14)$$

здесь $\text{diam}(I)$ есть диаметр шара I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция (12) удовлетворяет (13). Обратно, стартуя с $T(x, y)$, удовлетворяющей (13), и определяя $T(I)$ как значение $T(x, y)$ для $x \in I$, $y \in I$, $d(x, y) = \text{diam}(I)$, получим (12).

Формула (14) дает описание такой процедуры. Это завершает доказательство теоремы 25.

ТЕОРЕМА 26. Пусть X есть ультраметрическое пространство аналитического типа, ν есть положительная борелевская счетно-аддитивная мера со счетным или конечным базисом, $T(I)$ есть комплекснозначная функция на дереве $\mathcal{T}(X)$. Пусть следующий ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{J > R} T(J)(\nu(J) - \nu(J - 1, R)). \quad (15)$$

Тогда оператор (11)

$$Tf(x) = \int_X T(\sup(x, y))(f(x) - f(y)) d\nu(y)$$

имеет плотную область определения в $L^2(X, \nu)$ и диагонален в базисе ультраметрических всплесков из теоремы 23

$$T\psi_{Ij}(x) = \lambda_I \psi_{Ij}(x) \quad (16)$$

с собственными значениями вида

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \sum_{J>I} T(J)(\nu(J) - \nu(J-1, I)). \quad (17)$$

Оператор T самосопряжен, если функция $T(I)$ вещественнозначна, и положителен, если эта функция неотрицательна.

Здесь $(J-1, I)$ есть максимальная вершина, меньшая J и большая I (т.е. $(J-1, I)$ есть максимальный подшар в J , содержащий шар I).

Кроме того, оператор T уничтожает константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие оператора на всплеск ψ_{Ij} :

$$T\psi_{Ij}(x) = \int T(\sup(x, y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y)) d\nu(y).$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть x лежит вне шара I . Тогда

$$T\psi_{Ij}(x) = -T(\sup(x, I)) \int \psi_{Ij}(y) d\nu(y) = 0$$

(как обычно, мы не указываем область интегрирования, если интегрирование производится по всему пространству X).

2) Пусть $x \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} T\psi_{Ij}(x) &= \left(\int_{d(x,y)>\text{diam}(I)} + \int_{d(x,y)=\text{diam}(I)} + \int_{d(x,y)<\text{diam}(I)} \right) T(\sup(x, y)) \\ &\quad \times (\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y)) d\nu(y) \\ &= \left(\int_{d(x,y)>\text{diam}(I)} + \int_{d(x,y)=\text{diam}(I)} \right) T(\sup(x, y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y)) d\nu(y) \\ &= \psi_{Ij}(x) \int_{d(x,y)>\text{diam}(I)} T(\sup(x, y)) d\nu(y) \\ &\quad + \int_{d(x,y)=\text{diam}(I)} T(\sup(x, y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y)) d\nu(y) \\ &= \psi_{Ij}(x) \int_{d(I,y)>\text{diam}(I)} T(\sup(I, y)) d\nu(y) + T(I)\nu(I)\psi_{Ij}(x). \end{aligned}$$

Для доказательства последнего равенства вычислим для $\psi \in V_I^0$ интеграл

$$\begin{aligned}
 & \int_{d(x,y)=\text{diam}(I)} T(\sup(x,y))(\psi(x) - \psi(y)) d\nu(y) \\
 &= T(I) \int_{d(x,y)=\text{diam}(I)} (\psi(x) - \psi(y)) d\nu(y) \\
 &= T(I) \sum_{j=0}^{p_I-1} \chi_{I_j}(x) \left[\int_{I \setminus I_j} (\psi(x) - \psi(y)) d\nu(y) \right] \\
 &= T(I) \sum_{j=0}^{p_I-1} \chi_{I_j}(x) \left[\psi(x)(\nu(I) - \nu(I_j)) - \int_{I \setminus I_j} \psi(y) d\nu(y) \right] \\
 &= T(I) \sum_{j=0}^{p_I-1} \chi_{I_j}(x) \left[\psi(x)(\nu(I) - \nu(I_j)) + \int_{I_j} \psi(y) d\nu(y) \right] = T(I)\nu(I)\psi(x),
 \end{aligned}$$

здесь I_j – максимальные подшары в I .

Мы доказали, что

$$T\psi_{I_j}(x) = \lambda_I \psi_{I_j}(x),$$

где

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \int_{d(I,y)>\text{diam}(I)} T(\sup(I,y)) d\nu(y).$$

Для $J > I$

$$\int_{d(I,y)=\text{diam}(J)} d\nu(y) = \nu(J) - \nu(J-1, I).$$

Поскольку любые два возрастающих пути в направленном дереве совпадают, начиная с некоторой вершины, условие (15) обеспечивает сходимость интеграла

$$\int_{d(I,y)>\text{diam}(I)} T(\sup(I,y)) d\nu(y).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \sum_{J>I} T(J)(\nu(J) - \nu(J-1, I)).$$

Проверка того, что оператор T уничтожает константы, выполняется непосредственно. Это завершает доказательство теоремы 26.

§ 8. Аналог оператора Владимирова

Введем ультраметрический ПДО $T^{(\alpha)}$, выбирая коэффициенты $T(I)$ следующим образом:

$$T(I) = \mu^{-1-\alpha}(I).$$

Так определенное интегральное ядро по теореме 25 будет удовлетворять

$$T(x,y) = (d(x,y))^{-1-\alpha},$$

где $d(x, y)$ есть ультраметрическое расстояние, т.е.

$$T^{(\alpha)}f(x) = \int \frac{f(x) - f(y)}{(d(x, y))^{1+\alpha}} d\mu(y)$$

и мера μ есть однородная мера на ультраметрическом пространстве аналитического типа. Это показывает, что введенный ультраметрический ПДО есть аналог оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования.

По теореме 26 если $\alpha > 0$, то оператор $T^{(\alpha)}$ есть положительный оператор с плотной областью определения, диагональный в базисе всплесков, и собственные значения оператора $T^{(\alpha)}$ в базисе всплесков $\{\Psi_{I_j}\}$ равны

$$\lambda_I = \mu^{-\alpha}(I) + \sum_{J>I} \mu^{-\alpha}(J)(1 - p_J^{-1}). \quad (18)$$

Отметим, что для $\alpha = 1$ выражение для собственных значений (для немаксимальной вершины I) принимает особенно простую форму:

$$\begin{aligned} \lambda_I &= \mu^{-1}(I) + \sum_{J>I} \mu^{-1}(J)(1 - p_J^{-1}) = \mu^{-1}(I) + \sum_{J>I} (\mu^{-1}(J) - \mu^{-1}(J+1)) \\ &= \mu^{-1}(I) + \mu^{-1}(I+1), \end{aligned}$$

где вершина $J+1$ есть наименьшая вершина, большая вершины J (т.е. для соответствующих шаров $J+1 \supset J$ и J есть максимальный подшар в $J+1$).

Список литературы

- [1] В. С. Владимирова, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p*-адический анализ и математическая физика, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, Ye. I. Zelenov, *p-Adic analysis and mathematical physics*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] В. С. Владимирова, “О спектре некоторых псевдо-дифференциальных операторов над полем p -адических чисел”, *Алгебра и анализ*, **2**:6 (1990), 107–124; англ. пер.: V. S. Vladimirov, “On the spectrum of some pseudodifferential operators over the field of p -adic numbers”, *Leningrad Math. J.*, **2**:6 (1991), 1261–1278.
- [3] А. Ю. Хренников, “Фундаментальные решения над полем p -адических чисел”, *Алгебра и анализ*, **4**:3 (1992), 248–266; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, “Fundamental solutions over the field of p -adic numbers”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:3 (1993), 613–628.
- [4] S. Albeverio, W. Karwowski, “A random walk on p -adic numbers”, *Stochastic Process–Physics and Geometry II* (Proc. Locarno, 1991), eds. S. Albeverio, U. Cattaneo, D. Merlini, World Scientific, Singapore, 1995, 61–74.
- [5] A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*, Dekker, New York, 2001.
- [6] А. Н. Кочубей, “Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p -адическими квадратичными формами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 103–124; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Fundamental solutions of pseudodifferential equations, related to p -adic quadratic forms”, *Izv. Math.*, **62**:6 (1998), 1169–1188.

- [7] С. В. Козырев, “Анализ всплесков как p -адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “Wavelet analysis as p -adic spectral analysis”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 367–376; [arXiv:math-ph/0012019](#).
- [8] С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “ p -Adic pseudodifferential operators and p -adic wavelets”, *Theoret. and Math. Phys.*, **138**:3 (2004), 322–332; [arXiv:math-ph/0303045](#).
- [9] С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы: методы и приложения”, *Избранные вопросы p -адической математической физики и анализа*, К 80-летию со дня рождения акад. В. С. Владимирова, Тр. МИАН, **245**, М., Наука, 2004, 154–165; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “ p -Adic pseudo-differential operators: methods and applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **245**:2 (2004), 143–153.
- [10] S. V. Kozyrev, V. Al. Osipov, V. A. Avetisov, “Nondegenerate ultrametric diffusion”, *J. Math. Phys.*, **46**:6 (2005); [arXiv:cond-mat/0403440](#).
- [11] J. J. Benedetto, R. L. Benedetto, “A wavelet theory for local fields and related groups”, *J. Geom. Anal.*, **14**:3 (2004), 423–456.
- [12] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, М., Наука, 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl., **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [13] Б. И. Голубов, “О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60; англ. пер.: B. I. Golubov, “A modified strong dyadic integral and derivative”, *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 507–529.
- [14] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [15] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, “Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах и ультраметрические всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 133–148; англ. пер.: S. V. Kozyrev, A. Yu. Khrennikov, “Pseudodifferential operators on ultrametric spaces and ultrametric wavelets”, *Izv. Math.*, **69**:5 (2005), 989–1003; [arXiv:math-ph/0412062](#).
- [16] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, “Wavelets on ultrametric spaces”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **19** (2005), 61–76.
- [17] A. J. Lemin, “The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like and real graduated lattices LAT”, *Algebra Universalis*, **50**:1 (2003), 35–49.
- [18] A. Khrennikov, *Classical and quantum mental models and Freud’s theory of unconscious mind*, Växjö Univ. Press, Växjö, 2002.
- [19] F. Bruhat, J. Tits, “Groupes réductifs sur un corps local”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **41** (1972), 5–251.
- [20] F. Bruhat, J. Tits, “Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **60** (1984), 197–376.
- [21] J. P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [22] J. M. Cohen, F. Colonna, D. Singman, “Distributions and measures on the boundary of a tree”, *J. Math. Anal. Appl.*, **293** (2004), 89–107.
- [23] F. Choucroun, “Arbres, espaces ultramétriques et bases de structure uniforme”, *Geom. Dedicata*, **53** (1994), 69–74.
- [24] I. V. Volovich, “ p -Adic string”, *Classical Quantum Gravity*, **4**:4 (1987), 83–87.
- [25] I. Ya. Aref’eva, B. Dragovic, P. Frampton, I. V. Volovich, “Wave function of the universe and p -adic gravity”, *Modern Phys. Lett. A*, **6** (1991), 4341–4358.

- [26] А. Ю. Хренников, *Неархимедов анализ и его приложения*, Наука, Физматлит, М., 2003.
- [27] A. Khrennikov, “ p -Adic discrete dynamical systems and their applications in physics and cognitive sciences”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 45–70.
- [28] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, *p -Adic deterministic and random dynamics*, Math. Appl., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [29] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, “Application of p -adic analysis to models of spontaneous breaking of the replica symmetry”, *J. Phys. A*, **32**:50 (1999), 8785–8791; [arXiv: cond-mat/9904360](#).
- [30] G. Parisi, N. Sourlas, “ p -Adic numbers and replica symmetry breaking”, *European Phys. J. B*, **14**:3 (2000), 535–542; [arXiv: cond-mat/9906095](#).
- [31] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, “ p -Adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes”, *J. Phys. A*, **35**:2 (2002), 177–189; [arXiv: cond-mat/0106506](#).
- [32] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., Наука, 1989.

С. В. Козырев (S. V. Kozyrev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kozyrev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

24.10.2005