Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Керимов, З. С. Алиев, Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 65–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:38:44

УДК 517.927.25

Н. Б. Керимов, З. С. Алиев

Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии

В работе рассматривается граничная задача

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' &= \lambda y(x), & 0 < x < l, \\ y(0) = y'(0) = y''(l) &= 0, & (a\lambda + b)y(l) = (c\lambda + d)Ty(l), \end{aligned}$$

где λ – спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ – строго положительная и абсолютно непрерывная функция на $[0, l]$, a, b, c, d – действительные постоянные, удовлетворяющие условию $bc - ad > 0$. Изучаются осцилляционные свойства собственных функций и выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Исследуются базисные свойства в $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций.

Библиография: 20 названий.

Рассмотрим краевую задачу

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \quad x \in (0, l), \quad (0.1)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = 0, \quad (0.2)$$

$$(a\lambda + b)y(l) = (c\lambda + d)Ty(l), \quad (0.3)$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – строго положительная и абсолютно непрерывная функция на промежутке $[0, l]$, $Ty \equiv y''' - qy'$ и a, b, c, d – действительные постоянные. Задачи такого типа встречаются в механике. Если в граничном условии $b = c = 0$, $d = 1$, то краевая задача (0.1)–(0.3) возникает при описании поперечных колебаний маятника, образованного из вертикально расположенного однородного стержня с заземленным верхним концом и с грузом на нижнем конце, масса которого равна $-a$; при этом учитываются упругие реакции не только на прогиб, но и на растяжение [1] (см. также [2]). Более полные сведения о физическом смысле задач подобного типа можно найти в [3].

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие

$$\sigma = bc - ad > 0. \quad (0.4)$$

Настоящая работа посвящена исследованию базисных свойств в пространствах $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3).

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах (см., например, [1], [4]–[12]). В [8]–[12] исследованы

базисность в различных функциональных пространствах системы собственных функций спектральной задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в одном из граничных условий.

Для изучения свойств базисности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3) в пространствах $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, нам необходимо привлечение осцилляционных свойств собственных функций этой задачи.

§ 1. Некоторые вспомогательные факты

Введем краевые условия (см. [13; § 1])

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(l) \cos \gamma + y''(l) \sin \gamma = 0, \quad (0.2')$$

$$y(l) \cos \delta - Ty(l) \sin \delta = 0, \quad (0.3')$$

где $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$.

Наряду с краевой задачей (0.1)–(0.3) рассмотрим краевую задачу (0.1), (0.2'), (0.3'). Задача (0.1), (0.2'), (0.3') в более общей постановке рассмотрена в [13]. В работе [13] исследуются осцилляционные свойства собственных функций и их производных, отвечающих положительным собственным значениям. Полученные в [13] результаты основаны на лемме 2.1 из [13], которая справедлива только при положительных значениях спектрального параметра. Предложенный нами метод исследования осцилляционных свойств позволяет получить соответствующие результаты также и для неположительных значений спектрального параметра.

Как и в [13], для изучения осцилляционных свойств собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3) будем использовать преобразование типа Прюфера следующего вида:

$$\begin{cases} y(x) = r(x) \sin \psi(x) \cos \theta(x), \\ y'(x) = r(x) \cos \psi(x) \sin \varphi(x), \\ y''(x) = r(x) \cos \psi(x) \cos \varphi(x), \\ Ty(x) = r(x) \sin \psi(x) \sin \theta(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

Уравнение (0.1) допускает эквивалентную формулировку в матричной форме:

$$U' = MU, \quad (1.2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ Ty \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $w(x) = \operatorname{ctg} \psi(x)$ и применяя преобразование (1.1) к (1.2), получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций r, w, θ, φ следующего вида:

$$r' = [\sin 2\psi \sin(\theta + \varphi) + (q + 1) \cos^2 \psi \sin 2\varphi + \lambda \sin^2 \psi \sin 2\theta] \frac{r}{2}, \quad (1.3a)$$

$$w' = -w^2 \cos \theta \sin \varphi + \frac{1}{2}(q+1)w \sin 2\varphi + \sin \theta \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} w \sin 2\theta, \quad (1.3b)$$

$$\theta' = -w \sin \varphi \sin \theta + \lambda \cos^2 \theta, \quad (1.3c)$$

$$\varphi' = \cos^2 \varphi - q \sin^2 \varphi - \frac{1}{w} \sin \theta \sin \varphi. \quad (1.3d)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА 1.1 (см. [13; § 2, лемма 2.1]). Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение уравнения (0.1) при $\lambda > 0$. Если y, y', y'', Ty неотрицательны при $x = a$ и не все равны нулю одновременно, то они положительны при $x > a$. Если же $y, -y', y'', -Ty$ неотрицательны при $x = a$ и не все равны нулю одновременно, то они положительны при $x < a$.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [13; § 3, теорема 3.1]). Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$. Тогда якобиан $J[y] = r^3 \sin \psi \cos \psi$ преобразования (1.1) отличен от нуля при $x \in (0, l)$.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [13; § 3, теорема 3.3]). Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$, $\theta(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ – соответствующие функции из (1.1). Тогда $\theta(0, \lambda) = -\pi/2$, $\varphi(0, \lambda) = 0$.

ТЕОРЕМА 1.3 (см. [13; § 4, теорема 4.2]). Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda > 0$ и $\theta(x, \lambda)$ – соответствующая функция из (1.1). Тогда $\theta(l, \lambda)$ является непрерывной и строго возрастающей функцией от λ .

Следующая теорема является частным случаем основного результата работы [13].

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [13; § 5, теоремы 5.4 и 5.5]). Собственные значения краевой задачи (0.1), (0.2'), (0.3'), $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$, образуют бесконечно возрастающую последовательность $\{\lambda_n(\gamma, \delta)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $0 < \lambda_1(\gamma, \delta) < \lambda_2(\gamma, \delta) < \dots < \lambda_n(\gamma, \delta) < \dots$, при этом

$$\theta(l, \lambda_n(\gamma, \delta)) = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \delta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Кроме того, собственная функция $v_n^{(\gamma, \delta)}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n(\gamma, \delta)$, имеет $n-1$ простых нулей в интервале $(0, l)$.

§ 2. О существовании и единственности решения задачи (0.1)–(0.2)

ТЕОРЕМА 2.1. При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение $y(x, \lambda)$ задачи (0.1)–(0.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, 4}$, решения уравнения (0.1), нормированные при $x = 0$ условиями Коши

$$\varphi_k^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{ks}, \quad s = \overline{1, 3}, \quad T\varphi_k(0, \lambda) = \delta_{k4}, \quad (2.1)$$

где δ_{ks} – символ Кронекера. С учетом выражения $Ty = y''' - qy'$ фундаментальная система решений $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, 4}$, определяемая согласно (2.1), описывается более простой системой начальных условий

$$\begin{aligned}\varphi_k^{(s-1)}(0, \lambda) &= \delta_{ks}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad s = \overline{1, 4}, \\ \varphi_2^{(s-1)}(0, \lambda) &= \delta_{2s}, \quad s = \overline{1, 2, 3}, \quad \varphi_2^{(3)}(0, \lambda) = q(0).\end{aligned}$$

Функцию $y(x, \lambda)$ будем искать в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^4 C_k \varphi_k(x, \lambda), \quad (2.2)$$

где C_k , $k = \overline{1, 4}$, – некоторые постоянные.

Из (2.1), (2.2) и краевых условий (0.2) следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и

$$C_3 \varphi_3''(l, \lambda) + C_4 \varphi_4''(l, \lambda) = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно показать справедливость неравенства

$$|\varphi_3''(l, \lambda)| + |\varphi_4''(l, \lambda)| > 0. \quad (2.3)$$

Из леммы 1.1 следует, что $\varphi_k''(l, \lambda) > 0$, $k = \overline{1, 4}$, при $\lambda > 0$. Следовательно, имеет место (2.3) при $\lambda > 0$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$. Если для этих значений λ не выполняется (2.3), то функции $\varphi_3(x, \lambda)$ и $\varphi_4(x, \lambda)$ являются решениями задачи (0.1)–(0.2). Определим функцию $v(x, \lambda)$:

$$v(x, \lambda) = \varphi_4(l, \lambda) \varphi_3(x, \lambda) - \varphi_3(l, \lambda) \varphi_4(x, \lambda).$$

Так как $v(l, \lambda) = 0$, то функция $v(x, \lambda)$ является собственной функцией задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $\gamma = \pi/2$, $\delta = 0$, соответствующей собственному значению $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.3). Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 видно, что, не нарушая общности, решение $y(x, \lambda)$ задачи (0.1)–(0.2) для каждого фиксированного $x \in [0, l]$ можно считать целой функцией от λ вида

$$y(x, \lambda) = \varphi_4''(l, \lambda) \varphi_3(x, \lambda) - \varphi_3''(l, \lambda) \varphi_4(x, \lambda).$$

Действительно, так как функции $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, 4}$, и их производные для каждого фиксированного $x \in [0, l]$ являются целыми функциями от λ (см. [14; гл. I, § 2, п. 1]), то $y(x, \lambda)$ для каждого фиксированного $x \in [0, l]$ также является целой функцией от λ .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) при $\lambda \leq 0$. Тогда якобиан $J[y] = r^3 \sin \psi \cos \psi$ преобразования (1.1) отличен от нуля при $x \in (0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы 2.2 неверно. Пусть $x_1 \in (0, l)$ – ближайшая к нулю точка, в которой $\sin \psi(x_1, \lambda) \cos \psi(x_1, \lambda) = 0$, откуда следует, что хотя бы один из указанных сомножителей равен нулю. В случае $\sin \psi(x_1, \lambda) = 0$ и $\lambda < 0$ имеем $y(x_1, \lambda) = Ty(x_1, \lambda) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что функция $y(x, \lambda) > 0$ при $x \in (0, x_1)$. Так как $y(0, \lambda) = 0$, то существует точка $\xi_0 \in (0, x_1)$ такая, что $y'(\xi_0, \lambda) = 0$. Из (0.1) получаем, что $(Ty(x, \lambda))' < 0$ при $x \in (0, x_1)$ и, следовательно, $Ty(x, \lambda) > 0$ при $x \in (0, x_1)$. Определим угол $\delta_0 \in (0, \pi/2)$ из равенства $\delta_0 = \arctg(y(\xi_0, \lambda)/Ty(\xi_0, \lambda))$. Тогда функция $y(x, \lambda)$ является решением задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $l = \xi_0$, $\gamma = 0$, $\delta = \delta_0$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda < 0$.

В случае $\sin \psi(x_1, 0) = 0$ в силу (0.1) имеем $Ty(x, 0) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$. Умножая это тождество на функцию $y(x, 0)$ и интегрируя от 0 до l , а также учитывая краевые условия (0.2), получаем

$$\int_0^l [y''^2(x, 0) + qy'^2(x, 0)] dx = 0. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что $y'(x, 0) \equiv 0$, $x \in [0, l]$. Следовательно, $y(x, 0) \equiv 0$, $x \in [0, l]$, что противоречит нетривиальности решения.

В случае $\cos \psi(x_1, \lambda) = 0$, $\lambda < 0$, имеем $y'(x_1, \lambda) = y''(x_1, \lambda) = 0$, причем $Ty(x_1, \lambda) \neq 0$. Действительно, если $Ty(x_1, \lambda) = 0$, то $y(x, \lambda)$ является собственной функцией задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $l = x_1$, $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$, что противоречит условию $\lambda < 0$. С учетом выражения $Ty(x, \lambda) = y'''(x, \lambda) - qy'(x, \lambda)$ имеем $y'''(x_1, \lambda) \neq 0$. Так как $y'(0, \lambda) = 0$, то существует ближайшая к x_1 точка $\eta_0 \in (0, x_1)$ такая, что $y'''(\eta_0, \lambda) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $y'(x, \lambda) > 0$, $y''(x, \lambda) < 0$ при $x \in [\eta_0, x_1]$; тогда $y'''(x_1, \lambda) > 0$. При этом имеем

$$\begin{aligned} Ty(\eta_0, \lambda) &= y'''(\eta_0, \lambda) - q(\eta_0)y'(\eta_0, \lambda) = -q(\eta_0)y'(\eta_0, \lambda) < 0, \\ Ty(x_1, \lambda) &= y'''(x_1, \lambda) - q(x_1)y'(x_1, \lambda) = y'''(x_1, \lambda) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, существует точка $\mu_0 \in (\eta_0, x_1)$ такая, что $Ty(\mu_0, \lambda) = 0$. Определим угол $\gamma_0 \in (0, \pi/2)$ из равенства $\gamma_0 = -\arctg(y''(\mu_0, \lambda)/y'(\mu_0, \lambda))$. Тогда функция $y(x, \lambda)$ является решением задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $l = \mu_0$, $\gamma = \gamma_0$, $\delta = \pi/2$, что противоречит условию $\lambda < 0$.

В случае $\cos \psi(x_1, 0) = 0$ в силу (0.1) имеем $Ty(x, 0) \equiv \text{const} \neq 0$, так как в противном случае, т.е. если $Ty(x, 0) \equiv 0$, приходим к противоречию (см. случай $\sin \psi(x_1, 0) = 0$). Далее, повторяя вышеприведенные рассуждения, имеем $Ty(\eta_0, 0) < 0$, $Ty(x_1, 0) > 0$, что противоречит равенству $Ty(x, 0) \equiv \text{const}$.

Теорема 2.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Не нарушая общности, функцию ψ можно выбрать таким образом, чтобы $\psi(x, \lambda) \in (0, \pi/2)$ либо $\psi(x, \lambda) \in (\pi/2, \pi)$ при $x \in (0, l)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

§ 3. Основные свойства решения задачи (0.1)–(0.2)

Пусть $y(x, \lambda)$ – нетривиальное решение задачи (0.1)–(0.2) и $\theta(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$ – соответствующие функции из (1.1). Не нарушая общности, начальные значения этих функций можно определить следующим образом:

$$\theta(0, \lambda) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \sin \psi(0, \lambda), \quad \varphi(0, \lambda) = 0. \quad (3.1)$$

Действительно, если $\lambda > 0$, то в силу [13; теорема 3.2] имеем $\sin \psi(0, \lambda) \neq 0$. При этом справедливость (3.1) следует из теоремы 1.2. Если $\psi(0, \lambda) = 0$ при $\lambda < 0$, то на основании (1.1) и (0.2) имеем $y(0, \lambda) = y'(0, \lambda) = Ty(0, \lambda) = 0$, откуда следует, что $y''(0, \lambda) \neq 0$. Тогда в силу (1.1) имеем

$$\operatorname{tg} \theta(0, \lambda) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T y(x, \lambda)}{y(x, \lambda)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda y(x, \lambda)}{y'(x, \lambda)} = \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x, \lambda)}{y''(x, \lambda)} = 0.$$

Заметим, что $\sin \psi(0, \lambda) \neq 0$ при $\lambda = 0$ (см. доказательство теоремы 2.2). В случае $\sin \psi(0, \lambda) \neq 0$, $\lambda \leq 0$, доказательство (3.1) проводится по схеме доказательства теоремы 3.3 из [13].

Пусть $\psi(0, \lambda) = 0$ при $\lambda < 0$. Используя (1.1), с помощью трехкратного применения правила Лопиталя находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda) \sin \varphi(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x, \lambda) T y(x, \lambda)}{y^2(x, \lambda)} \cos^2 \theta(x, \lambda) = \frac{2\lambda}{3}.$$

Учитывая это соотношение, из (1.3c) получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta'(x, \lambda) = \frac{\lambda}{3}. \quad (1.3c')$$

Очевидно, что собственные значения $\mu_n = \lambda_n(\pi/2, 0)$ и $\nu_n = \lambda_n(\pi/2, \pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$, краевой задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $\gamma = \pi/2$, $\delta = 0$ и $\gamma = \pi/2$, $\delta = \pi/2$ являются нулями целых функций $y(l, \lambda)$ и $Ty(l, \lambda)$ соответственно. Заметим, что функция $Ty(l, \lambda)/y(l, \lambda)$ определена для значений $\lambda \in D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mu_{n-1}, \mu_n)$, где $\mu_0 = -\infty$.

ЛЕММА 3.1. *Функция $Ty(l, \lambda)/y(l, \lambda)$ в каждом интервале (μ_{n-1}, μ_n) , $n \in \mathbb{N}$, является строго возрастающей функцией λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (0.1) имеем

$$(Ty(x, \mu))' y(x, \lambda) - (Ty(x, \lambda))' y(x, \mu) = (\mu - \lambda) y(x, \mu) y(x, \lambda).$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до l (используя формулу интегрирования по частям) и учитывая (0.2), получаем

$$y(l, \lambda) Ty(l, \mu) - y(l, \mu) Ty(l, \lambda) = (\mu - \lambda) \int_0^l y(x, \mu) y(x, \lambda) dx. \quad (3.2)$$

При $\lambda, \mu \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$, $\lambda \neq \mu$, имеем

$$\frac{Ty(l, \mu)}{y(l, \mu)} - \frac{Ty(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} = (\mu - \lambda) \frac{1}{y(l, \mu) y(l, \lambda)} \int_0^l y(x, \mu) y(x, \lambda) dx. \quad (3.3)$$

Делением обеих частей (3.3) на $\mu - \lambda$ и последующим предельным переходом при $\mu \rightarrow \lambda$ получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{T y(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} \right) = \frac{1}{y^2(l, \lambda)} \int_0^l y^2(x, \lambda) dx > 0.$$

Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{T y(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} = -\infty. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\int_0^l y^2(x, \lambda) dx = 1.$$

Как доказано в [15; гл. IV, § 2, п. 5, неравенство (20)], имеет место неравенство

$$y^2(l, \lambda) \leq c_0 \sqrt{\int_0^l q(x) y'^2(x, \lambda) dx} + c_1, \quad (3.5)$$

где c_0 и c_1 – положительные постоянные, зависящие только от функции $q(x)$.

Умножая обе части (0.1) на функцию $y(x, \lambda)$ и интегрируя полученное равенство по x в пределах от 0 до l , получаем

$$y(l, \lambda) T y(l, \lambda) + \int_0^l y''^2(x, \lambda) dx + \int_0^l q(x) y'^2(x, \lambda) dx = \lambda. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} y(l, \lambda) T y(l, \lambda) = -\infty. \quad (3.7)$$

В силу леммы 3.1 отношение $T y(l, \lambda)/y(l, \lambda)$ имеет конечный или бесконечный предел при $\lambda \rightarrow -\infty$. Предположим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{T y(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} = -a_0, \quad (3.8)$$

где a_0 – некоторая постоянная. Из леммы 3.1 и равенства (3.7) следует, что $0 < a_0 < \infty$. Учитывая (3.8), из (3.7) получаем $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} y^2(l, \lambda) = +\infty$. Следовательно, в силу (3.5) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_0^l q(x) y'^2(x, \lambda) dx = +\infty. \quad (3.9)$$

На основании леммы 3.1 и равенства (3.8) при достаточно больших по модулю отрицательных значениях λ справедливо неравенство $|T y(l, \lambda)/y(l, \lambda)| \leq a_0$.

Отсюда с учетом (3.9) и (3.6) при тех же значениях λ получим

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx - |y(l, \lambda)Ty(l, \lambda)| \geq \int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx - a_0y^2(l, \lambda) \\ &\geq \int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx - a_0c_0\sqrt{\int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx} - a_0c_1 \\ &\geq \sqrt{\int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx} \left(\sqrt{\int_0^l q(x)y'^2(x, \lambda) dx} - a_0c_0 \right) - a_0c_1, \end{aligned}$$

что противоречит (3.9). Лемма 3.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из теоремы 1.4 и лемм 3.1, 3.2 следует, что если $\lambda \leq 0$, то $Ty(l, \lambda)/y(l, \lambda) < 0$.

ЛЕММА 3.3. Если $\lambda \leq 0$, то $\theta(l, \lambda) \in (-\pi/2, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = 0$. Из (0.1) следует, что $Ty(x, 0) \equiv \text{const}$, $x \in [0, l]$. В силу замечания 3.1 $y(l, 0)Ty(l, 0) < 0$ и, следовательно, $Ty(x, 0) \equiv \text{const} \neq 0$, $x \in [0, l]$. Таким образом, $\theta(x, 0) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при $x \in [0, l]$. В силу (1.1) справедливо равенство

$$\text{sgn}(y(l, 0)Ty(l, 0)) = \text{sgn}(\sin \theta(l, 0) \cos \theta(l, 0)),$$

откуда следует, что

$$\theta(l, 0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (3.10)$$

Пусть $\lambda < 0$. В силу (1.3с) функция $\theta(x, \lambda)$, строго убывая, принимает значения $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда на основании (3.1), (1.3с) и (1.3с') имеем

$$\theta(x, \lambda) < 0, \quad x \in (0, l). \quad (3.11)$$

Пусть $\theta(l, \lambda) \in [-(m_0 + 1)\pi, -m_0\pi]$, где $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $y(l, \lambda)Ty(l, \lambda) < 0$, то, учитывая (3.11), имеем

$$\theta(l, \lambda) \in \left(-m_0\pi - \frac{\pi}{2}, -m_0\pi\right). \quad (3.12)$$

Если $m_0 = 0$, то $\theta(l, \lambda) \in (-\pi/2, 0)$. Предположим, что $m_0 \geq 1$. Так как $\theta(l, \lambda)$ является непрерывной функцией $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, то в силу (3.10) и (3.12) существует точка $\lambda_0 \in (\lambda, 0)$ такая, что $\theta(l, \lambda_0) \in (-\pi, -\pi/2)$. В силу (1.1) имеем $y(l, \lambda_0)Ty(l, \lambda_0) > 0$, что противоречит замечанию 3.1. Следовательно, в рассматриваемом случае $\theta(l, \lambda) \in (-\pi/2, 0)$. Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Если $\lambda \leq 0$, то $y(x, \lambda) \neq 0$ при $x \in (0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы неверно, и пусть x_1 – ближайшая к нулю точка из $(0, l)$, в которой $y(x_1, \lambda) = 0$.

Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Пусть $\sin \psi(0, \lambda) \neq 0$. Так как функция $\theta(x, \lambda)$, строго убывающая, принимает значение $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то в силу леммы 3.3 имеет место неравенство

$$-\frac{\pi}{2} < \theta(x, \lambda) < 0, \quad x \in (0, x_1), \quad (3.13)$$

либо неравенство

$$-\pi < \theta(x, \lambda) < -\frac{\pi}{2}, \quad x \in (0, x_1). \quad (3.14)$$

В случае (3.13) в силу теоремы 2.2 из (1.1) следует, что $\theta(x_1, \lambda) = -\pi/2$. Если $y'(x_1, \lambda) = 0$, то функция $y(x, \lambda)$ является решением краевой задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $l = x_1$, $\gamma = \delta = 0$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda < 0$. Следовательно, $y'(x_1, \lambda) \neq 0$. Отсюда и из (1.1) имеем $\sin \varphi(x_1, \lambda) \neq 0$. Тогда в силу теоремы 2.2 из (1.3с) следует, что $\theta'(x_1, \lambda) \neq 0$, а так как $\theta(x_1, \lambda) = -\pi/2$, то $\theta'(x_1, \lambda) < 0$. Далее, в силу леммы 3.3 существует точка $x_2 \in (x_1, l)$, ближайшая к x_1 , такая, что $\theta(x_2, \lambda) = -\pi/2$. Таким образом, $y(x_1, \lambda) = y(x_2, \lambda) = 0$. Тогда $y'(\xi, \lambda) = 0$ в некоторой точке $\xi \in (x_1, x_2)$. Заметим, что $\theta(x, \lambda) \in (-\pi, -\pi/2)$ при $x \in (x_1, x_2)$. Отсюда и из (1.1) имеем

$$y(x, \lambda)Ty(x, \lambda) = r^2(x, \lambda) \sin^2 \psi(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda) > 0, \quad (3.15)$$

где $0 < x_1 < x < x_2 < l$. Определим угол δ_1 из равенства

$$\delta_1 = \arctg \frac{y(\xi, \lambda)}{Ty(\xi, \lambda)};$$

в силу (3.15) $\delta_1 \in (0, \pi/2)$. Тогда функция $y(x, \lambda)$ является нетривиальным решением краевой задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $l = \xi$, $\gamma = 0$, $\delta = \delta_1$, что в силу теоремы 1.4 противоречит условию $\lambda < 0$.

Пусть имеет место (3.14). Поскольку $y(0, \lambda) = y(x_1, \lambda) = 0$, то в некоторой точке $\xi \in (0, x_1)$ имеет место равенство $y'(\xi, \lambda) = 0$. Кроме того, соотношение (3.15) будет удовлетворяться при $x \in (0, x_1)$. Доказательство утверждения $y(x, \lambda) \neq 0$, $0 < x < l$, проводится точно так же, как и в предыдущем случае.

Случай $\sin \psi(0, \lambda) = 0$ рассматривается аналогичным образом.

Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда справедливы соотношения $\theta(0, 0) = -\pi/2$, $\theta(l, 0) \in (-\pi/2, 0)$, $Ty(x, 0) \equiv c_0 \neq 0$, $0 \leq x \leq l$, $\theta(x, 0) \in (-\pi, 0)$, $x \in (0, l)$. Доказательство в этом случае проводится точно так же, как и выше. Доказательство леммы 3.4 завершено.

Обозначим через $m(\lambda)$ количество нулей функции $y(x, \lambda)$ в интервале $(0, l)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$, то $m(\lambda) = n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda \leq 0$ из леммы 3.4 следует, что $m(\lambda) = 0$.

Пусть $\lambda > 0$ и $\theta(x, \lambda)$ – соответствующая функция из преобразования (1.1). В силу (3.1) имеет место равенство $\theta(0, \lambda) = -\pi/2$. На основании (1.4) имеем $\theta(l, \mu_n) = (2n - 1)\pi/2$. Известно (см. [13; § 5, теоремы 5.1 и 5.2]), что если

$\lambda > 0$, то функция $\theta(x, \lambda)$, строго возрастающая, принимает значения $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Из этих рассуждений и теоремы 1.3 следует, что $\theta(x, \lambda) \in (-\pi/2, \pi/2)$ при $\lambda \in (0, \mu_1)$, $\theta(x, \lambda) \in (-\pi/2, (2n-1)\pi/2)$ при $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \geq 2$. Отсюда получаем справедливость утверждения теоремы 3.1 при $\lambda > 0$. Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Основные свойства собственных значений краевой задачи (0.1)–(0.3)

ЛЕММА 4.1. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) вещественны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что собственными значениями задачи (0.1)–(0.3) являются корни уравнения

$$(a\lambda + b)y(l, \lambda) - (c\lambda + d)Ty(l, \lambda) = 0. \quad (4.1)$$

Если λ – невещественное собственное значение задачи (0.1)–(0.3), то $\bar{\lambda}$ также будет собственным значением этой задачи, поскольку коэффициенты $q(x)$, a , b , c , d вещественны. При этом $y(x, \bar{\lambda}) = \overline{y(x, \lambda)}$, так что если соотношение (4.1) имеет место для λ , то оно также будет справедливым и для $\bar{\lambda}$.

Полагая $\mu = \bar{\lambda}$ в (3.2), получаем

$$\overline{Ty(l, \lambda)}y(l, \lambda) - Ty(l, \lambda)\overline{y(l, \lambda)} = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_0^l |y(x, \lambda)|^2 dx. \quad (4.2)$$

Условие (0.3) перепишем в виде

$$Ty(l, \lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} y(l, \lambda).$$

Учитывая это соотношение, в силу (4.2) имеем

$$\frac{(\bar{\lambda} - \lambda)(ad - bc)}{|c\lambda + d|^2} |y(l, \lambda)|^2 = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_0^l |y(x, \lambda)|^2 dx.$$

Поскольку $\bar{\lambda} \neq \lambda$, то отсюда следует равенство

$$\frac{-\sigma}{|c\lambda + d|^2} |y(l, \lambda)|^2 = \int_0^l |y(x, \lambda)|^2 dx.$$

Последнее равенство противоречит условиям $\sigma > 0$, $\int_0^l |y(x, \lambda)|^2 dx > 0$. Следовательно, λ должно быть вещественным. Лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 4.2. *Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки. Все собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) простые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные значения краевой задачи (0.1)–(0.3) являются нулями целой функции, стоящей в левой части уравнения (4.1). Эта функция, как показано выше, не обращается в нуль при не вещественных λ . Следовательно, она не равна нулю тождественно. Поэтому ее нули образуют не более чем счетное множество, не имеющее конечной предельной точки.

Докажем, что уравнение (4.1) имеет только простые корни. Действительно, если $\lambda = \lambda^*$ является кратным корнем уравнения (4.1), то имеют место равенства

$$(a\lambda^* + b)y(l, \lambda^*) - (c\lambda^* + d)Ty(l, \lambda^*) = 0, \quad (4.3)$$

$$ay(l, \lambda^*) + (a\lambda^* + b)\frac{\partial}{\partial \lambda} y(l, \lambda^*) - cTy(l, \lambda^*) - (c\lambda^* + d)\frac{\partial}{\partial \lambda} Ty(l, \lambda^*) = 0. \quad (4.4)$$

Делением обеих частей (3.2) на $\mu - \lambda$ ($\mu \neq \lambda$) и последующим предельным переходом (при $\mu \rightarrow \lambda$) получим

$$y(l, \lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} Ty(l, \lambda) - Ty(l, \lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} y(l, \lambda) = \int_0^l y^2(x, \lambda) dx. \quad (4.5)$$

Положим $\lambda = \lambda^*$ в равенстве (4.5), тогда

$$y(l, \lambda^*)\frac{\partial}{\partial \lambda} Ty(l, \lambda^*) - Ty(l, \lambda^*)\frac{\partial}{\partial \lambda} y(l, \lambda^*) = \int_0^l y^2(x, \lambda^*) dx. \quad (4.6)$$

Поскольку $\sigma \neq 0$, то $(a\lambda^* + b)^2 + (c\lambda^* + d)^2 \neq 0$. Допустим, что $c\lambda^* + d \neq 0$. Тогда из (4.3) и (4.4) соответственно следует

$$\begin{aligned} Ty(l, \lambda^*) &= \frac{a\lambda^* + b}{c\lambda^* + d} y(l, \lambda^*), \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} Ty(l, \lambda^*) &= \frac{a\lambda^* + b}{c\lambda^* + d} \frac{\partial}{\partial \lambda} y(l, \lambda^*) - \frac{\sigma}{(c\lambda^* + d)} y(l, \lambda^*). \end{aligned}$$

Используя последние два равенства и (4.6), получаем

$$-\frac{\sigma}{(c\lambda^* + d)^2} y^2(l, \lambda^*) = \int_0^l y^2(x, \lambda^*) dx,$$

что невозможно в силу условия (0.4).

Случай $a\lambda^* + b \neq 0$ рассматривается аналогично. Лемма 4.2 доказана.

§ 5. Осцилляционные свойства собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

При $c \neq 0$ определим число N из неравенства $\mu_{N-1} < -d/c \leq \mu_N$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ краевой задачи (0.1)–(0.3). Соответствующие им собственные функции обладают следующими осцилляционными свойствами:*

- (а) если $c = 0$, то собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n , имеет ровно $n - 1$ простых нулей в интервале $(0, l)$;
- (б) если $c \neq 0$, то собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n , при $n \leq N$ имеет ровно $n - 1$ простых нулей, а при $n > N$ – ровно $n - 2$ простых нулей в интервале $(0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 $\Phi(\lambda) = Ty(l, \lambda)/y(l, \lambda)$ является непрерывной строго возрастающей функцией в интервале (μ_{n-1}, μ_n) , $n \in \mathbb{N}$. Учитывая также равенства $y(l, \mu_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu_{n-1}+0} \Phi(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \mu_n-0} \Phi(\lambda) = +\infty.$$

Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ каждое значение из $(-\infty, +\infty)$ принимает только в единственной точке интервала (μ_{n-1}, μ_n) , $n \in \mathbb{N}$. Для функции $F(\lambda) = (a\lambda + b)/(c\lambda + d)$ имеем $F'(\lambda) = -\sigma/(c\lambda + d)^2$. Так как $\sigma > 0$, то при $c = 0$ функция $F(\lambda)$ строго убывает в интервале $(-\infty, +\infty)$; при $c \neq 0$ функция $F(\lambda)$ строго убывает в каждом из интервалов $(-\infty, -d/c)$ и $(-d/c, +\infty)$, при этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow -d/c-0} F(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -d/c+0} F(\lambda) = +\infty.$$

Пусть либо $c = 0$, либо $c \neq 0$ и $-d/c \notin (\mu_{n-1}, \mu_n]$. Из вышеизложенного следует, что в интервале (μ_{n-1}, μ_n) найдется единственное значение $\lambda = \lambda_n^*$, для которого

$$\Phi(\lambda) = F(\lambda), \quad (5.1)$$

т.е. выполняется (0.3). Следовательно, λ_n^* есть собственное значение краевой задачи (0.1)–(0.3) и $y(x, \lambda_n^*)$ – соответствующая собственная функция. Из теоремы 3.1 следует, что $m(\lambda_n^*) = n - 1$. Нетрудно заметить, что если $c = 0$ или $c \neq 0$, $n < N$, то λ_n^* является n -м собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3). Отсюда получаем справедливость утверждения (а) и справедливость части утверждения (б), относящейся к случаю $n < N$.

Пусть $c \neq 0$ и $-d/c \in (\mu_{N-1}, \mu_N)$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что в каждом из интервалов $(\mu_{N-1}, -d/c)$ и $(-d/c, \mu_N)$ найдется единственное значение (соответственно λ_N и λ_{N+1}), для которого выполняется (5.1). В силу теоремы 3.1 имеем $m(\lambda_N) = m(\lambda_{N+1}) = N - 1$.

Случай $c \neq 0$ и $-d/c = \mu_N$ рассматривается совершенно аналогично, при этом используется тот факт, что μ_N также является собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3). В этом случае $\lambda_N \in (\mu_{N-1}, \mu_N)$, $\lambda_{N+1} = \mu_N$. На основании теоремы 3.1 имеем $m(\lambda_N) = m(\lambda_{N+1}) = N - 1$.

Заметим, что при $c \neq 0$ и $n > N$ единственное решение λ_n^* уравнения (5.1) в полуинтервале $(\mu_{n-1}, \mu_n]$ является $(n + 1)$ -м собственным значением краевой задачи (0.1)–(0.3), т.е. $\lambda_n^* = \lambda_{n+1}$. Так как $m(\lambda_n^*) = n - 1$, то $m(\lambda_{n+1}) = n - 1 = (n + 1) - 2$. Таким образом, получаем справедливость утверждения (б).

Теорема 5.1 доказана.

ЛЕММА 5.1. Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\mu_{n-2} < \nu_{n-1} < \lambda_n < \mu_{n-1}, \quad \text{если } c \neq 0 \text{ и } \frac{a}{c} \geq 0, \quad (5.2)$$

$$\mu_{n-2} < \lambda_n < \nu_{n-1} < \mu_{n-1}, \quad \text{если } c \neq 0 \text{ и } \frac{a}{c} < 0, \quad (5.3)$$

$$\mu_{n-1} < \lambda_n < \nu_n < \mu_n, \quad \text{если } c = 0. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что собственными значениями краевой задачи (0.1), (0.2), (0.3') при $\delta = \pi/2$ являются корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$. Совершенно аналогичным образом доказывается (см. доказательство теоремы 5.1), что это уравнение в каждом интервале (μ_{n-1}, μ_n) , $n \in \mathbb{N}$, имеет единственное решение $\nu_n = \lambda_n(\pi/2, \pi/2)$. Следовательно, имеем

$$\mu_{n-1} < \nu_n < \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

При достаточно больших λ справедливы неравенства

$$\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} < 0, \quad \text{если } \frac{a}{c} < 0, \quad \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} > 0, \quad \text{если } \frac{a}{c} \geq 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{Ty(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} &< 0, & \text{если } \mu_{n-1} < \lambda < \nu_{n-1}, \\ \frac{Ty(l, \lambda)}{y(l, \lambda)} &> 0, & \text{если } \nu_n < \lambda < \mu_n. \end{aligned}$$

Справедливость соотношений (5.2) и (5.3) следует из последних четырех неравенств.

Неравенство (5.4) доказывается аналогичным образом.

§ 6. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

ТЕОРЕМА 6.1. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sqrt[4]{\lambda_n} = \begin{cases} \left(n - \frac{3}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } c = 0, \\ \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } c \neq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\sqrt[4]{\mu_n} = \left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.2)$$

$$\sqrt[4]{\nu_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.3)$$

$$y_n(x) = \begin{cases} \sin\left(n - \frac{3}{4}\right) \frac{\pi}{l} x - \cos\left(n - \frac{3}{4}\right) \frac{\pi}{l} x \\ \quad + e^{-(n-3/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } c = 0, \\ \sin\left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{l} x - \cos\left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{l} x + (-1)^n e^{(n-3/2)\pi(x-l)/l} \\ \quad + e^{-(n-3/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{если } c \neq 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$v_n^{(\pi/2, 0)}(x) = \sin\left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} x - \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} x + e^{-(n+1/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.5)$$

$$v_n^{(\pi/2, \pi/2)}(x) = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x \\ + (-1)^{n+1} e^{(n-1/2)\pi(x-l)/l} + e^{-(n-1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.6)$$

причем соотношения (6.4)–(6.6) выполняются равномерно по $x \in [0, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнении (0.1) положим $\lambda = \rho^4$. Известно (см. [14; гл. II, § 4, п. 5, теорема 1]), что во всякой области T комплексной ρ -плоскости уравнение (0.1) имеет четыре линейно независимых решения $z_k(x, \rho)$, $k = \overline{1, 4}$, регулярных относительно ρ (при достаточно большом ρ) и удовлетворяющих соотношениям

$$z_k^{(s)}(x, \rho) = (\rho \omega_k)^s e^{\rho \omega_k x} \left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], \quad k = \overline{1, 4}, \quad s = \overline{0, 3}, \quad (6.7)$$

где ω_k , $k = \overline{1, 4}$, – различные корни четвертой степени из 1.

Обозначим

$$\rho_n = \sqrt[4]{\lambda_n}, \quad \tau_n = \sqrt[4]{\mu_n}, \quad \chi_n = \sqrt[4]{\nu_n}.$$

Краевые условия (0.2'), (0.3') при $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$ являются усиленно регулярными (см. [14; гл. II, § 4, п. 8]). Известно (см. [14; гл. II, § 4, п. 9, формулы (45.а) и (45.б)]), что для достаточно больших номеров k справедливы формулы

$$\tau_{k+m_0} = \left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (6.8)$$

$$\chi_{k+m_1} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (6.9)$$

где m_0 и m_1 – некоторые фиксированные целые числа. Из (6.8), (6.9) и (5.5) следует, что $m_0 = m_1 - 1$.

Используя соотношение (6.7) и принимая во внимание краевые условия (0.2)–(0.3), для достаточно больших номеров k получаем

$$\rho_{k+m_2} = \left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при } c = 0, \quad (6.10)$$

$$\rho_{k+m_3} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при } c \neq 0, \quad (6.11)$$

где m_2 и m_3 – некоторые фиксированные целые числа. Из (5.2)–(5.4) и (6.8)–(6.11) следует, что $m_2 = m_1$ и $m_3 = m_1 + 1$.

Таким образом, мы показали, что для достаточно больших номеров k имеют место формулы

$$\tau_{k+m_1-1} = \left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (6.12)$$

$$\rho_{k+m_1+1} = \begin{cases} \left(k + \frac{5}{4}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) & \text{при } c = 0, \\ \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) & \text{при } c \neq 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Далее, принимая во внимание (6.7), (6.9), (6.12), (6.13), получаем следующие асимптотические формулы (см. [14; гл. II, § 4, п. 10]):

$$y_{k+m_1+1}(x) = \begin{cases} \sin\left(k + \frac{5}{4}\right) \frac{\pi x}{l} - \cos\left(k + \frac{5}{4}\right) \frac{\pi x}{l} \\ \quad + e^{-(k+5/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right) & \text{при } c = 0, \\ \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} + (-1)^k e^{(k+1/2)\pi(x-l)/l} \\ \quad + e^{-(k+1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right) & \text{при } c \neq 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$v_{k+m_1-1}^{(\pi/2,0)}(x) = \sin\left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi x}{l} - \cos\left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi x}{l} + e^{-(k+1/4)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} (v_{k+m_1}^{(\pi/2,\pi/2)}(x))^{(s)} &= \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right)^s \left\{ \sin\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi}{2} s\right] \right. \\ &\quad - \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi}{2} s\right] + (-1)^k e^{(k+1/2)\pi(x-l)/l} \\ &\quad \left. + (-1)^s e^{-(k+1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\}, \quad s = \overline{0,3}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Для завершения доказательства теоремы найдем значение m_1 . Пусть $k = 2m$, где m – достаточно большое фиксированное целое число. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} v_{2m+m_1}^{(\pi/2,\pi/2)}(x) &= \sin\left(2m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} - \cos\left(2m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} \\ &\quad + e^{(2m+1/2)\pi(x-l)/l} + e^{-(2m+1/2)\pi x/l} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta = \left(2m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad x \in [0, l],$$

тогда

$$x = \frac{\beta l}{(2m + 1/2)\pi}, \quad \beta \in \left[0, \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

Положим

$$g(\beta) = v_{2m+m_1}^{(\pi/2, \pi/2)} \left(\frac{\beta l}{(2m+1/2)\pi} \right), \quad (6.17)$$

тогда

$$g(\beta) = \sin \beta - \cos \beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (6.18)$$

Принимая во внимание (6.16), имеем

$$g'(\beta) = \cos \beta + \sin \beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} - e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad (6.19)$$

$$g''(\beta) = -\sin \beta + \cos \beta + e^{\beta-(2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (6.20)$$

Пусть $\beta \in [2\pi p, 2\pi(p+1)]$, $p = 1, 2, \dots, m-1$. Зафиксируем число p . Положим $\alpha = \beta - 2\pi p$, отсюда $\beta = \alpha + 2\pi p$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Обозначим

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g(\alpha + 2\pi p) \\ &= \sin \alpha - \cos \alpha + e^{\alpha+2\pi p-(2m+1/2)\pi} + e^{-(\alpha+2\pi p)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Из (6.21) и (6.19) следует, что

$$f'(\alpha) = \cos \alpha + \sin \alpha + e^{\alpha+2\pi p-(2m+1/2)\pi} - e^{-(\alpha+2\pi p)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (6.22)$$

Принимая во внимание (6.21) и (6.22), убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} f(0) &< 0, & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &> 0, & f(\pi) &> 0, & f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &< 0, & f(2\pi) &< 0, \\ f'(\alpha) &> 0, & \alpha &\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), & f(\alpha) &> 0, & \alpha &\in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ f'(\alpha) &< 0, & \alpha &\in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), & f(\alpha) &< 0, & \alpha &\in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $f(\alpha)$ имеет в точности два нуля на отрезке $[0, 2\pi]$ и, следовательно, функция $g(\beta)$ имеет в точности $2m - 2$ нулей на отрезке $[2\pi, 2m\pi]$.

Пусть теперь $\beta \in (2m\pi, 2m\pi + \pi/2)$. В силу (6.18) и (6.19) имеем $g(2m\pi) < 0$, $g(2m\pi + \pi/2) > 0$, $g'(\beta) > 0$. Следовательно, функция $g(\beta)$ имеет в точности один ноль в интервале $(2m\pi, 2m\pi + \pi/2)$.

Рассмотрим функцию $g(\beta)$ в интервале $(0, 2\pi)$. Из (6.18) следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2}\right) &> 0, & g(\pi) &> 0, & g\left(\frac{3\pi}{2}\right) &< 0, & g(2\pi) &< 0, \\ g(\beta) &> 0, & \beta &\in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & g'(\beta) &< 0, & \beta &\in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), & g(\beta) &< 0, & \beta &\in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $g(\beta)$ имеет в точности один нуль в промежутке $[\pi/2, 2\pi)$. И наконец, рассмотрим функцию $g(\beta)$ в интервале $(0, \pi/2)$. В случае $\beta \in [\pi/4, \pi/2)$ в силу (6.18) имеем

$$g(\beta) = \sqrt{2} \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\beta - (2m+1/2)\pi} + e^{-\beta} + O\left(\frac{1}{m}\right) > 0.$$

Далее, в силу (0.2) имеем $g(0) = g'(0) = 0$. Из (6.20) следует, что $g''(\beta) > 0$ при $\beta \in [0, \pi/4]$. Следовательно, $g(\beta) > 0$ при $\beta \in (0, \pi/4)$. Таким образом, функция $g(\beta)$ не имеет нулей в интервале $(0, \pi/2)$.

В силу приведенных рассуждений получим, что функция $g(\beta)$ имеет в точности $2m$ нулей в интервале $(0, (2m + 1/2)\pi)$. Следовательно, в силу (6.17) функция $v_{2m+m_1}^{(\pi/2, \pi/2)}(x)$ имеет в точности $2m$ нулей в интервале $(0, l)$. Тогда на основании теоремы 1.4 функция $v_{2m+m_1}^{(\pi/2, \pi/2)}(x)$ соответствует собственному значению ν_{2m+1} краевой задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $\gamma = \delta = \pi/2$. Отсюда следует, что $m_1 = 1$.

Полагая $m_1 = 1$ в формулах (6.9), (6.12)–(6.16), получаем справедливость утверждения теоремы 6.1.

Теорема 6.1 доказана.

§ 7. О минимальности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является минимальной в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать существование системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$.

В силу (3.2) для любых различных натуральных n и k имеем

$$y_k(l)Ty_n(l) - y_n(l)Ty_k(l) = (\lambda_n - \lambda_k)(y_n, y_k), \quad (7.1)$$

где

$$(y_n, y_k) = \int_0^l y_n(x)y_k(x) dx.$$

Учитывая (0.3), из (7.1) получаем

$$(y_n, y_k) = -\frac{1}{\sigma} m_n m_k, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad n \neq k, \quad (7.2)$$

где $m_n = ay_n(l) - cTy_n(l)$.

Докажем, что $m_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. При доказательстве теоремы 5.1 была установлена справедливость следующих утверждений:

- (i) в случае $c = 0$ $\lambda_n \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ при $n = 1, 2, \dots$;

- (ii) в случае $c \neq 0$ $\lambda_n \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$ при $n = 1, 2, \dots, N$, $\lambda_{N+1} \in (\mu_{N-1}, \mu_N)$, если $\mu_N \neq -d/c$, $\lambda_{N+1} = \mu_N$, если $\mu_N = -d/c$, $\lambda_n \in (\mu_{n-2}, \mu_{n-1})$ при $n = N+2, N+3, \dots$, где N – натуральное число, которое определяется из неравенства $\mu_{N-1} < -d/c \leq \mu_N$.

Отсюда следует, что в случае $c = 0$ $y_n(l) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а в случае $c \neq 0$ $y_n(l) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N} \setminus \{N+1\}$, $y_{N+1}(l) \neq 0$, если $\mu_N \neq -d/c$, $y_{N+1}(l) = 0$, $Ty_{N+1}(l) \neq 0$, если $\mu_N = -d/c$.

В случае $c = 0$ в силу (0.4) имеем $a \neq 0$, откуда $m_n = ay_n(l) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай $c \neq 0$. В силу условий (0.3) и (0.4) получим

$$m_n = cy_n(l) \left[\frac{a}{c} - \frac{Ty_n(l)}{y_n(l)} \right] = cy_n(l) \left[\frac{a}{c} - \frac{a\lambda_n + b}{c\lambda_n + d} \right] \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{N+1\},$$

$$m_{N+1} = \begin{cases} cy_{N+1} \left[\frac{a}{c} - \frac{a\lambda_{N+1} + b}{c\lambda_{N+1} + d} \right] \neq 0, & \mu_N \neq -\frac{d}{c}, \\ cTy_{N+1}(l) \neq 0, & \mu_N = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Элементы системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, определим следующим образом:

$$u_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \left[y_n(x) - \frac{m_n}{m_r} y_r(x) \right], \quad (7.3)$$

где $\delta_n = \|y_n\|_2^2 + m_n^2/\sigma$, $\|\cdot\|_p$ означает норму в пространстве $L_p(0, 1)$. На основании (7.2) легко убедиться в справедливости равенства

$$(y_n, y_k) = \delta_{nk},$$

где δ_{nk} – символ Кронекера. Теорема 7.1 доказана.

ЛЕММА 7.1. Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$u_n(x) = \frac{1}{l} y_n(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (7.4)$$

где $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, – система, являющаяся биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу асимптотических формул (6.4) справедливы соотношения

$$\|y_n\|_2^2 = l + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad y_n(l) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{при } c = 0, \\ 2(-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{при } c \neq 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

На основании (0.3), (6.1) и (7.5) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$m_n = -\frac{\sigma}{c\lambda_n + d} y_n(l) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7.6)$$

Принимая во внимание (7.5) и (7.6), из формулы (7.3) получаем представление (7.4). Лемма 7.1 доказана.

§ 8. Базисность в $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, образует базис в пространстве $L_p(0, l)$, $1 < p < \infty$, причем в $L_2(0, l)$ этот базис является безусловным базисом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что краевые условия (0.2'), (0.3') при $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$ являются усиленно регулярными. Тогда на основании работы [16] (см. также [17]) система собственных функций $\{v_n^{(\gamma, \delta)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (0.1), (0.2'), (0.3') при $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$ образует базис в пространстве $L_p(0, l)$, $1 < p < +\infty$, причем в $L_2(0, l)$ этот базис является безусловным.

Пусть $c = 0$. Сравним систему $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, с системой $\{v_n^{(\pi/2, 0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу (6.4) и (6.5) для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|y_{n+1}(x) - v_n^{(\pi/2, 0)}(x)\|_2 \leq \text{const} \cdot \frac{1}{n}. \quad (8.1)$$

Из неравенства (8.1) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{r-1} \|y_n(x) - v_n^{(\pi/2, 0)}(x)\|_2^2 + \sum_{n=r}^{+\infty} \|y_{n+1}(x) - v_n^{(\pi/2, 0)}(x)\|_2^2$$

(при $r = 1$ первая сумма отсутствует). Таким образом, система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, квадратично близка к системе $\{v_n^{(\pi/2, 0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу теоремы 7.1 эта система минимальна в пространстве $L_2(0, l)$. Следовательно, система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является безусловным базисом в $L_2(0, l)$ (см. [18; гл. IX, § 9, п. 8]).

Случай $c \neq 0$ рассматривается аналогично. В этом случае система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, сравнивается с системой $\{v_n^{(\pi/2, \pi/2)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Положим $\tilde{v}_n^{(\gamma, \delta)}(x) = v_n^{(\gamma, \delta)}(x) \|v_n^{(\gamma, \delta)}(x)\|_2^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку краевая задача (0.1), (0.2'), (0.3') при $\gamma, \delta \in [0, \pi/2]$ является самосопряженной, то в силу (6.5) и (6.6) системы $\{\tilde{v}_n^{(\pi/2, 0)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{v}_n^{(\pi/2, \pi/2)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются равномерно ограниченными ортонормированными базисами пространства $L_2(0, l)$.

Используя (6.4) и (7.4), нетрудно проверить, что при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq r$ справедливы соотношения

$$y_n(x) = l^{1/2} \tilde{v}_n(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad u_n(x) = l^{-1/2} \tilde{v}_n(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.2)$$

где

$$\tilde{v}_n(x) = \begin{cases} \tilde{v}_n^{(\pi/2, 0)}(x) & \text{при } c = 0 \text{ и } 1 \leq n \leq r-1, \\ \tilde{v}_{n-1}^{(\pi/2, 0)}(x) & \text{при } c = 0 \text{ и } n \geq r+1, \\ \tilde{v}_n^{(\pi/2, \pi/2)}(x) & \text{при } c \neq 0 \text{ и } 1 \leq n \leq r-1, \\ \tilde{v}_{n-1}^{(\pi/2, \pi/2)}(x) & \text{при } c \neq 0 \text{ и } n \geq r+1. \end{cases} \quad (8.3)$$

Заметим, что на основании (8.3) система $\{\tilde{v}_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, образует равномерно ограниченный ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, l)$.

Зафиксируем $p \in (1, 2)$. Так как система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является базисом в $L_2(0, l)$, то эта система полна в $L_p(0, l)$. Известно [19; гл. I, § 4, теорема 6], что для базисности в $L_p(0, l)$ системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, необходимо и достаточно существования постоянной $M_p > 0$, обеспечивающей справедливость неравенства

$$\left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, u_n) y_n \right\|_p \leq M_p \|f\|_p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.4)$$

для произвольной функции $f(x)$ из $L_p(0, l)$.

В силу (8.2) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, u_n) y_n \right\|_p &\leq \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, \tilde{v}_n) \tilde{v}_n \right\|_p + \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, \tilde{v}_n) O\left(\frac{1}{n}\right) \right\|_p \\ &+ \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tilde{v}_n \right\|_p + \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) O\left(\frac{1}{n}\right) \right\|_p. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Поскольку система $\{\tilde{v}_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является ортонормированной и образует базис в пространстве $L_p(0, l)$, то опять же в силу теоремы 6 из [19; гл. I, § 4] имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, \tilde{v}_n) \tilde{v}_n \right\|_p \leq \text{const} \cdot \|f\|_p, \quad (8.6)$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0, l)$.

В силу теоремы Ф. Рисса [20; гл. XII, § 2, теорема 2.8] для произвольной функции $f(x) \in L_p(0, l)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k (f, \tilde{v}_n) O\left(\frac{1}{n}\right) \right\|_p &\leq \text{const} \cdot \left(\sum_{n=1, n \neq r}^k |(f, \tilde{v}_n)|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1, n \neq r}^k \frac{1}{n^p} \right)^{1/p} \\ &\leq \text{const} \cdot \|f\|_p, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $q = p/(p-1)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tilde{v}_n \right\|_p &\leq \text{const} \cdot \left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tilde{v}_n \right\|_2 \\ &\leq \text{const} \cdot \left(\sum_{n=1, n \neq r}^k \left| \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \text{const} \cdot \|f\|_1 \left(\sum_{n=1, n \neq r}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \leq \text{const} \cdot \|f\|_p, \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\left\| \sum_{n=1, n \neq r}^k \left(f, O\left(\frac{1}{n}\right)\right) O\left(\frac{1}{n}\right) \right\|_p \leq \text{const} \cdot \|f\|_1 \left(\sum_{n=1, n \neq r}^k \frac{1}{n^2} \right) \leq \text{const} \cdot \|f\|_p. \quad (8.9)$$

Неравенство (8.4) является следствием неравенств (8.5)–(8.9). Таким образом, базисность системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, в пространстве $L_p(0, l)$ при $1 < p < 2$ доказана.

Пусть $2 < p < \infty$. Так как система $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является базисом в $L_q(0, l)$, то в силу следствия 2 из [19; гл. I, § 4] система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, является базисом в пространстве $L_p(0, l)$. Следовательно, система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, полна в пространстве $L_q(0, l)$. Далее, с помощью вышеприведенных рассуждений аналогично доказывается базисность в $L_q(0, l)$ системы $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, что равносильно базисности системы $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, $n \neq r$, в $L_p(0, l)$. Теорема 8.1 доказана.

Список литературы

- [1] С. В. Мелешко, Ю. В. Покорный, “Об одной вибрационной краевой задаче”, *Дифференц. уравнения*, **23**:8 (1987), 1466–1467.
- [2] G. H. Handelman, J. B. Keller, “Small vibrations of a slightly stiff pendulum”, *Proc. 4th U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, vol. 1 (Univ. California, Berkeley, CA, 1962), Amer. Soc. Mech. Engrs., New York, 1962, 195–202.
- [3] M. Roseau, *Vibrations in mechanical systems. Analytical methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] C. T. Fulton, “Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions”, *Math. Z.*, **133**:4 (1973), 301–312.
- [5] H. J. Ahn, “Vibrations of a pendulum consisting of a bob suspended from a wire”, *Quart. Appl. Math.*, **39**:1 (1981), 109–117.
- [6] А. А. Шкалик, “Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 190–229.
- [7] M. R. Racheva, “Bounds for the principal eigenvalue of a nonhomogenous bar with a tip mass”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **54**:11 (2001), 23–26.
- [8] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “О спектральной задаче из теории парабологиперболического уравнения теплопроводности”, *Докл. РАН*, **352**:4 (1997), 451–454.
- [9] Н. Ю. Капустин, “Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Дифференц. уравнения*, **35**:8 (1999), 1024–1027.
- [10] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии”, *Дифференц. уравнения*, **36**:10 (2000), 1357–1360.
- [11] Н. Ю. Капустин, Е. И. Моисеев, “Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Докл. РАН*, **385**:1 (2002), 20–24.
- [12] Н. Б. Керимов, В. С. Мирзоев, “О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 1041–1045.
- [13] D. O. Banks, G. J. Kurowski, “A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces”, *J. Differential Equations*, **24**:1 (1977), 57–74.
- [14] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Физматлит, М., 1969.
- [15] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. I, Гостехиздат, М., Л., 1951.

- [16] Н. Е. Benzinger, “The L^p behavior of eigenfunction expansion”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 333–344.
- [17] А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский, “Эквивалентность в $L_p(0, 1)$ системы $e^{i2\pi kx}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и системы собственных функций обыкновенного функционально-дифференциального оператора”, *Матем. заметки*, **49**:1 (1991), 47–55.
- [18] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, ГИФМЛ, М., 1958.
- [19] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [20] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. II, Мир, М., 1965.

Н. Б. Керимов (N. B. Kerimov)

Институт математики и механики

НАН Азербайджанской Республики, г. Баку

E-mail: nazimkerimov@yahoo.com

Поступила в редакцию

01.11.2005 и 31.05.2006

З. С. Алиев (Z. S. Aliev)

Бакинский государственный университет

E-mail: z_aliyev@mail.ru