Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Неравенства для критических значений полиномов, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 63–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:46:11

УДК 512.62+517.54

В. Н. Дубинин

Неравенства для критических значений полиномов

Получены неравенства для значений алгебраических полиномов P степени $n \geq 2$ в точках, где производная P' обращается в нуль. В частности, решена одна из задач Смейла: для полиномов вида $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$ установлено наибольшее значение величины $\min\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\}$, зависящее от модуля коэффициента c_1 . Доказательство этого результата основано на диссимметризации некоторой вещественнозначной функции, заданной на римановой поверхности аналитической функции, обратной экстремальному полиному $P^*(z) = z^n - z$.

Библиография: 10 названий.

Введение и формулировка основного результата

Всюду в дальнейшем P означает алгебраический полином степени n , $n \geq 2$. Точка ζ называется критической точкой полинома P , если $P'(\zeta) = 0$. Под критическим значением полинома P понимается величина $P(\zeta)$, где ζ – критическая точка P . Несмотря на простоту этих понятий имеется много нерешенных проблем, связанных с критическими точками и критическими значениями полиномов (см., например, монографии [1]–[3]). В работе [4] в связи с изучением сходимости метода Ньютона вычисления корней полиномов Смейл установил неравенства для критических значений и поставил вопрос о точности этих оценок [4; с. 9, 11, 31–33]. В частности, для полиномов $P(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z$, $c_1 \neq 0$, Смейл доказал существование критической точки ζ , удовлетворяющей неравенству

$$|P(\zeta)| \left| \frac{c_n}{c_1^n} \right|^{1/(n-1)} \leq \left(2^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \right)^{1/(n-1)} \leq 4 \quad (1)$$

(см. [4; доказательство теоремы 1, с. 9–11]). В настоящей работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Если $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$, то справедливо неравенство*

$$\min\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \leq (n-1) \left| \frac{c_1}{n} \right|^{n/(n-1)}. \quad (2)$$

Равенство в (2) достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1 z$, где c_1 – произвольное комплексное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00099) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-013).

Таким образом, мы улучшаем оценку (1) с заменой правых частей на $(n-1) \times (1/n)^{n/(n-1)}$, и наша оценка точная. Заметим, что левая часть неравенства (2) неоднократно встречается в работе [4].

Пусть теперь P – произвольный полином со старшим коэффициентом c_n , и пусть z – произвольное комплексное число. Тогда полином

$$Q := \frac{1}{c_n}(P(\cdot + z) - P(z))$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Отсюда следует существование критической точки ζ (т.е. $P'(\zeta) = 0$) такой, что

$$|P(\zeta) - P(z)| \leq (n-1)|c_n|^{1/(1-n)} \left| \frac{P'(z)}{n} \right|^{n/(n-1)}. \quad (3)$$

Далее, обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, все нули полинома P , и пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, – нули его производной (пронумерованные с учетом кратности). Полагая в (3) $z = z_j$, $1 \leq j \leq n$, получаем следующее неравенство между средними геометрическими:

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |\zeta - z_\mu|} \leq \sqrt[n]{n-1} \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |z_j - \zeta_\nu|},$$

справедливое для некоторой критической точки ζ и любых корней z_j , $j = 1, \dots, n$. В частности, если один из корней (пусть z_n) равен нулю, то имеем точное неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |\zeta - z_\mu|} \leq \frac{(n-1)^{1/n}}{n^{1/(n-1)}} \sqrt[n-1]{\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z^n + c_1 z$. Возвращаясь к прежней нормировке полинома $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$, сравним неравенство (2) с гипотезой Смейла “о среднем значении” [4; с. 33]. Неравенство (2) дает

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} |P(\zeta_\nu)| \leq |c_1| \frac{n-1}{n} \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |\zeta_\nu|},$$

в то время как указанная гипотеза гласит

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right| \leq |c_1| \frac{n-1}{n} \quad (4)$$

с равенством для того же полинома $P(z) = z^n + c_1 z$, $c_1 \neq 0$. Выписанные неравенства суть близкие, но независимые соотношения. Предположение (4) доказано различными методами в ряде частных случаев (см. [3; гл. 7], [5]). Доказательство теоремы 1 основано на применении диссимметризации [6]. Ранее диссимметризацию в оценках для полиномов использовали в работе [7].

В настоящей работе рассматриваются также неравенства для средних геометрических значений $|P(\zeta_\nu)|$, $\nu = 1, \dots, n-1$, при некоторых ограничениях на нули полинома P .

§ 1. Доказательство теоремы 1

Введем следующие обозначения: $P^*(z) = z^n - z$, $\mathcal{P}^*$ – аналитическая функция, обратная функции $w = P^*(z)$, $\mathcal{R}^*$ – риманова поверхность функции $\mathcal{P}^*$ [8; т. 1, гл. 10].

Далее рассматриваем функцию $\mathcal{P}^*$ как однозначную функцию, заданную на $\mathcal{R}^*$. Под проекцией точки $W^* \in \mathcal{R}^*$ понимается точка $P^*(\mathcal{P}^*(W^*)) \in \overline{\mathbb{C}}_w$.

Для описания римановой поверхности $\mathcal{R}^*$ найдем образ угла $G := \{z : 0 < \arg z < \pi/(n-1)\}$ при отображении полиномом P^* . По формуле Кристоффеля–Шварца интеграл

$$w = \frac{n}{n-1} \int_0^\xi \xi^{1/(n-1)-1} \left(\xi - \frac{1}{n} \right) d\xi = \xi^{n/(n-1)} - \xi^{1/(n-1)}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \xi > 0$ на область, ограниченную (в положительном направлении) лучом $\arg w = \pi + \pi/(n-1)$ от $w = \infty$ до $w = 0$, отрезком $[0, \alpha_n]$ и лучом с началом в точке α_n , проходящим через точку $w = 0$, где $\alpha_n := -(1/n)^{1/(n-1)}(n-1)/n$. Степенная функция $\xi = z^{n-1}$ переводит угол G в верхнюю полуплоскость. Таким образом, полином P^* конформно и однолистно отображает G на указанную выше область, при этом имеет место следующее соответствие точек: $\infty \mapsto \infty$, $0 \mapsto 0$, $(1/n)^{1/(n-1)} \mapsto \alpha_n$. Используя этот факт и принцип симметрии Римана–Шварца, легко заключаем, что риманову поверхность $\mathcal{R}^*$ можно разбить на следующие простые листы (далее – листы). Один из листов, обозначим его через L_1^* , представляет собой плоскость с разрезами вдоль лучей $|w| \geq |\alpha_n|$, $\arg w = \pi + 2\pi(k-2)/(n-1)$, $k = 2, \dots, n$. Другие листы – L_k^* , $k = 2, \dots, n$, суть плоскости, каждая из которых разрезана по лучу соответственно $|w| \geq |\alpha_n|$, $\arg w = \pi + 2\pi(k-2)/(n-1)$, $k = 2, \dots, n$ (здесь и ниже, если это не вызовет недоразумений, мы отождествляем в тексте прямую, луч, лист и т.д. на римановой поверхности с соответствующей проекцией). Поверхность $\mathcal{R}^*$ получается приклеиванием листов L_k^* , $k = 2, \dots, n$, к листу L_1^* по совпадающему разрезу “крест-накрест”.

На множестве $\mathcal{R}_0^* := \{W^* \in \mathcal{R}^* : \mathcal{P}^*(W^*) \neq 0, \mathcal{P}^*(W^*) \neq \infty\}$ определим вещественнозначную функцию ω^* по формуле

$$\omega^*(W^*) = \log |\mathcal{P}^*(W^*)|.$$

Функция ω^* обладает следующей симметрией. На листе L_1^* она симметрична относительно прямых $\{w = \rho \exp(\pi i + \pi i j/(n-1)) : -\infty < \rho < +\infty\}$, $j = 1, \dots, 2n-2$ (т.е. в точках, симметричных относительно этих прямых, она принимает одинаковые значения). На каждом листе L_k^* она симметрична относительно прямой $\{w = \rho \exp(\pi i + 2\pi i(k-2)/(n-1)) : -\infty < \rho < +\infty\}$, $k = 2, \dots, n$. Кроме того, если лист $L_{k'}^*$ получается из листа $L_{k''}^*$ поворотом φ вокруг начала, $\varphi : L_{k''}^* \rightarrow L_{k'}^*$, $k', k'' \geq 2$, то $\omega^* \equiv \omega^* \circ \varphi$ на листе $L_{k''}^*$.

Рассмотрим теперь произвольный полином $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$. В случае $c_1 = 0$ теорема 1 очевидна. В других случаях можно считать $c_1 = 1$. Иначе рассмотрим полином $c^{-n} P(cz) = z^n + \dots + c^{-n+1} c_1 z$, где $c = c_1^{1/(n-1)}$. Неравенство (2) для этого полинома совпадает с таким неравенством для исходного полинома P . Можно считать также, что все критические точки полинома P

суть нули первого порядка его производной P' , а критические значения полинома P имеют разные аргументы. Случаи, не попадающие под это ограничение, могут быть рассмотрены предельным переходом. Предположим, что для данного полинома P теорема 1 неверна. Тогда существует константа t , $0 < t < 1$, такая, что

$$\min\{|S(\zeta)| : S'(\zeta) = 0\} > (n-1)(1/n)^{n/(n-1)} = |\alpha_n|, \quad (5)$$

где $S(z) = tP(z) = tz^n + \dots + tz$. Обозначим через $\mathcal{R}$ риманову поверхность функции $\mathcal{S}$, обратной к полиному $w = S(z)$. Кривые на поверхности $\mathcal{R}$, однолистно лежащие над лучами вида $\arg w = \text{const}$, $|w| \geq \lambda$, и соединяющие точки ветвления $\mathcal{R}$ с бесконечно удаленной точкой, разбивают поверхность $\mathcal{R}$ на n листов. Пронумеруем эти листы следующим образом. Обозначим через L_1 лист, содержащий прообраз точки $z = 0$ при отображении функцией $\mathcal{S}$. Далее, в любом порядке следуют листы $L_2, \dots, L_m$, $m \leq n$, приклеенные к L_1 (т.е. листы, имеющие с L_1 общие берега разреза). Затем номера получают (в любом порядке) все листы, приклеенные к L_2 (если такие существуют и если они до этого не получили номер). Потом следуют все листы, приклеенные к L_3 (если такие существуют и если они до этого не получили номер), и т.д. и, наконец, последний лист L_n . Ввиду связности $\mathcal{R}$ каждый лист получит некоторый номер. Заметим, что для любого листа L_k , $k > 1$, существует один и только один приклеенный к нему лист $L_{k'}$ с номером $k' < k$, поскольку риманова поверхность $\mathcal{R}$ имеет род нуль, а следовательно, не имеет нестягиваемых в точку циклов.

Дальнейшее доказательство теоремы 1 состоит в построении вещественнозначной функции ω , заданной на $\mathcal{R}_0 := \{W \in \mathcal{R} : \mathcal{S}(W) \neq 0, \mathcal{S}(W) \neq \infty\}$, которую можно трактовать как диссимметризацию функции ω^* . Ввиду симметрии функции ω^* на листе L_1^* ее можно доопределить по непрерывности на плоскость с выколотыми точками $w = 0$ и $w = \infty$ и затем применить к ней диссимметризацию [6; § 6]. Суть этой диссимметризации сводится к следующему. Пусть $l_2, \dots, l_m$ — лучи, выходящие из начала и проходящие через разрезы листа L_1 , и пусть $l_k^* = \{w : \arg w = \pi + 2\pi(k-2)/(n-1)\}$, $k = 2, \dots, m$, — лучи, проходящие через разрезы листа L_1^* . Тогда существуют открытые углы P_j , $j = 1, \dots, N$, с вершинами в начале и повороты вокруг начала λ_j , $j = 1, \dots, N$, удовлетворяющие условиям

$$P_j \cap P_{j'} = \emptyset, \quad \lambda_j(P_j) \cap \lambda_{j'}(P_{j'}) = \emptyset, \quad j \neq j', \quad j, j' = 1, \dots, N,$$

$$\bigcup_{j=1}^N \overline{P_j} = \overline{\mathbb{C}_w}, \quad \bigcup_{j=1}^N \lambda_j(l_k^* \cap \overline{P_j}) = l_k, \quad k = 2, \dots, m,$$

и функция

$$\omega(w) \equiv \text{Dis } \omega^*(w) := \omega^*(\lambda_j^{-1}(w)), \quad w \in \lambda_j(\overline{P_j}), \quad j = 1, \dots, N,$$

однозначно определена на $\overline{\mathbb{C}_w}$. Функцию ω называют результатом диссимметризации функции ω^* (см. об этом подробнее в [6; § 6]). Мы рассматриваем функцию ω как заданную на множестве $L_1 \cap \mathcal{R}_0$. Более точно, суперпозиция

отображения, обратного проектированию с поверхности $\mathcal{R}^*$, и функции ω^* , доопределенная по непрерывности на $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$, диссимметризуется, и затем рассматривается суперпозиция проекции с поверхности $\mathcal{R}$ и результата диссимметризации. Эта суперпозиция и есть функция ω на $L_1 \cap \mathcal{R}_0$. Значения функции ω на остальных листах определяются по формуле

$$\omega = \omega^* \circ \varphi_k \quad \text{на } L_k, \quad k = 2, \dots, n,$$

где отображение $\varphi_k: L_k \rightarrow L_k^*$ является поворотом (точнее, проектированием, поворотом вокруг начала и затем поднятием), определенным следующим образом. Для листов L_k , $2 \leq k \leq m$, φ_k есть поворот, переводящий луч l_k в луч l_k^* , $k = 2, \dots, m$. Далее, если лист L_k , $k > m$, приклеен к листу $L_{k'}$, $1 < k' < k$, то прообразы разрезов листов L_k^* и $L_{k'}^*$ при поворотах φ_k и $\varphi_{k'}$ имеют одинаковую проекцию. Поскольку для таких k указанный лист $L_{k'}$ только один, то отображение φ_k определено однозначно, $k = m+1, \dots, n$. Функцию ω можно доопределить по непрерывности на поверхность $\mathcal{R}_0$. Действительно, ввиду симметрии ω^* и свойств диссимметризации функция ω непрерывно продолжается на замыкание каждого листа L_k (относительно $\mathcal{R}_0$), $k = 1, \dots, n$. Далее, вновь ввиду симметрии и условия (5) значения ω на “верхних” и “нижних” берегах разрезов, по которым лист L_1 приклеен к листам $L_2, \dots, L_m$, совпадают. Следовательно, функция ω непрерывно продолжима на множество $(\bigcup_{k=1}^m \bar{L}_k) \cap \mathcal{R}_0$. Наконец, если какой-либо лист L_k , $k > m$, приклеен к листу $L_{k'}$, $1 < k' < k$, то ввиду $(n-1)$ -кратной симметрии функции ω^* и по построению функции ω значения ω на “верхних” и “нижних” берегах разрезов, по которым осуществляется склейка листов L_k и $L_{k'}$, совпадают. Поэтому функция ω непрерывно продолжима на $(\bar{L}_k \cup \bar{L}_{k'}) \cap \mathcal{R}_0$ и, следовательно, на всю поверхность $\mathcal{R}_0$. Далее под ω понимается результат указанного продолжения на $\mathcal{R}_0$.

Завершает доказательство сравнение интегралов Дирихле функций ω^* , ω и подходящей гармонической функции. Для открытых множеств B на плоскости либо на поверхностях $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_0^*$ и достаточно гладких функций v на B введем обозначение

$$I(v, B) := \int_B |\nabla v|^2 d\sigma.$$

Интеграл Дирихле $I(v, B)$ определен на B и равен конечному числу либо бесконечности [8; т. 2, гл. 7, п. 46]. Пусть число $s > 0$ достаточно мало, и пусть $\mathcal{R}_s$ означает множество всех точек поверхности $\mathcal{R}$, за исключением точек W на листе L_1 , для проекций которых выполняется неравенство $|\text{пр } W| \leq s$, а также за исключением тех точек $W \in \mathcal{R}$, для проекций которых $|\text{пр } W| \geq 1/s$. Аналогично определяется множество $\mathcal{R}_s^*$. Так как при диссимметризации и поворотах φ_k интеграл Дирихле не меняется, то

$$I(\omega^*, \mathcal{R}_s^*) = \sum_{k=1}^n I(\omega^*, L_k^* \cap \mathcal{R}_s^*) = \sum_{k=1}^n I(\omega, L_k \cap \mathcal{R}_s) = I(\omega, \mathcal{R}_s). \quad (6)$$

С другой стороны, из разложений полинома P^* в окрестности нуля и в окрестности точки $z = \infty$ видно, что существует функция $s_1 = s_1(s) > 0$ такая, что $s_1 \leq |\mathcal{P}^*(W^*)| \leq s_1^{-1/n}$ на $\mathcal{R}_s^*$ и в то же время $\lim_{s \rightarrow 0} s_1/s = 1$. Учитывая

конформную инвариантность интеграла Дирихле, имеем

$$\begin{aligned} I(\omega^*, \mathcal{R}_s^*) &\leq I(\log |z|, \{z : s_1 < |z| < s_1^{-1/n}\}) \\ &= 2\pi \int_{s_1}^{s_1^{-1/n}} \frac{1}{r} dr = -2\pi \log s^{1+1/n} + o(1), \quad s \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, из разложений полинома S вытекает существование функции $s_2 = s_2(s)$ такой, что множество $\mathcal{S}(\mathcal{R}_s)$ содержит кольцо $s_2/t < |z| < (s_2 t)^{-1/n}$ и в то же время $\lim_{s \rightarrow 0} s_2/s = 1$. Подберем функции $a = a(s)$ и $b = b(s)$ из условий

$$\begin{aligned} a \log \left(\frac{s_2}{t} \right) + b &= \max \left\{ \omega \circ \mathcal{S}^{-1}(z) : |z| = \frac{s_2}{t} \right\} = \log s + o(1), \\ a \log (s_2 t)^{-1/n} + b &= \min \{ \omega \circ \mathcal{S}^{-1}(z) : |z| = (s_2 t)^{-1/n} \} = \log s^{-1/n} + o(1), \end{aligned}$$

$s \rightarrow 0$. По принципу Дирихле

$$\begin{aligned} I(\omega, \mathcal{R}_s) &\geq I \left(\omega \circ \mathcal{S}^{-1}, \left\{ z : \frac{s_2}{t} < |z| < (s_2 t)^{-1/n} \right\} \right) \\ &\geq I \left(a \log |z| + b, \left\{ z : \frac{s_2}{t} < |z| < (s_2 t)^{-1/n} \right\} \right) \\ &= -2\pi \frac{(\log s^{1+1/n} + o(1))^2}{\log(s_2^{1+1/n} t^{1/n-1})}, \quad s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее соотношение с (6) и (7), приходим к противоречию: $t \geq 1$. Следовательно, имеет место неравенство (2). Случай равенства в (2) проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

В связи с приведенным доказательством возникает вопрос об использовании симметрии поверхности $\mathcal{R}^*$ для получения оценки (4). Соображения, близкие к доказательству теоремы 1.2 работы [7], но с заменой оценки внутреннего радиуса плоской симметричной области на оценку внутреннего радиуса симметричной области на $\mathcal{R}^*$ (подобно применению диссимметризации из настоящего параграфа), приводят к неравенству

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right| \leq |c_1| \frac{n-1}{n} 4^{1-1/(n-1)}. \quad (8)$$

Эта оценка несколько лучше результата в [7], где вместо множителя $(n-1)/n$ стоит единица. Поскольку доказательство заведомо неточного неравенства (8) не несет новых идей по сравнению с доказательствами теоремы 1 нашей статьи и теоремы 1.2 из работы [7], то мы его опускаем. Получение на этом пути точной оценки представляется трудной задачей.

§ 2. Неравенства для средних геометрических

Приведенные ниже точные оценки средних геометрических модулей критических значений полезны при изучении свойств таких значений в зависимости от расположения нулей исходного полинома. Доказательства этих оценок значительно проще, чем доказательство неравенства (2), хотя в литературе они, по-видимому, не встречались либо присутствовали в скрытой форме.

ТЕОРЕМА 2. Если все нули полинома $P(z) = z^n + \dots + c_0$ лежат в единичном круге $|z| \leq 1$, то для критических точек этого полинома ζ_k , $k = 1, \dots, n-1$ (пронумерованных с учетом кратности), справедливо неравенство

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \leq 1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n + c_0$, $|c_0| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, нули полинома P , также пронумерованные с учетом их кратности. Сравнивая разложения

$$P(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - z_\mu) \quad \text{и} \quad P'(z) = n \prod_{\mu=1}^{n-1} (z - \zeta_\mu)$$

и используя равенство

$$P'(z_\nu) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} (z_\nu - z_\mu),$$

приходим к следующим соотношениям:

$$n^n \prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = \prod_{\nu=1}^n |P'(z_\nu)| = \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\nu - z_\mu|. \quad (9)$$

Осталось исследовать на максимум величину

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\mu - z_\nu|$$

при всевозможных значениях z_μ , $|z_\mu| \leq 1$, $\mu = 1, \dots, n$. Из принципа максимума модуля для аналитических функций вытекает, что этот максимум достигается в случае $|z_\mu| = 1$, $k = 1, \dots, n$. Классическое неравенство Шура [9] показывает, что наибольшее значение реализуется в случае n -кратно симметричной системы точек $\{z_\mu\}_{\mu=1}^n$ и равно n^n (см. также [10; теорема 2]). Это ведет к требуемому неравенству. Непосредственно убеждаемся, что равенство достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_0$, где c_0 – комплексное число с $|c_0| = 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если все нули полинома $P(z) = z^n + \dots + c_0$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то существует критическая точка ζ (т.е. $P'(\zeta) = 0$) такая, что

$$|P(\zeta)| \leq 1.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z^n + c_0$, где $|c_0| = 1$.

Для сравнения приведем следующий результат, вытекающий из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если все критические точки полинома $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то существует критическая точка ζ такая, что

$$|P(\zeta)| \leq n-1.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = z^n + nz$.

Из доказательства теоремы 2 видно, что если все нули z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, полинома $P(z) = z^n + \dots + c_0$ лежат в круге $|z| \leq 1$, то справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{\mu=1}^n |P'(z_\mu)|} \leq n$$

с равенством в случае $P(z) = z^n + c_0$, $|c_0| = 1$. В частности, существует такой нуль z , что

$$|P'(z)| \leq n.$$

Последнее утверждение, а также следствие 1 были предложены автору Бл. Сендовым как ослабленные варианты известных гипотез.

Следующая теорема присутствует в скрытой форме в работе [5; с. 444], где обсуждается ее частный случай, а доказательство приводится в несколько усложненном виде (ср. также [3; с. 218–219]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$, и пусть все нули этого полинома лежат в круге $|z| \leq 1$. Тогда

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \leq (n-1) \left| \frac{c_1^2}{n^n} \right|^{1/(n-1)}.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z^n + c_1 z$, где $|c_1| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, нули полинома P , и пусть $z_n = 0$. Равенство (9) дает

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = n^{-n} \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |z_\nu - z_\mu| = n^{-n} \left(\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^2 \right) \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu|. \quad (10)$$

Как и при доказательстве теоремы 2,

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu| \leq (n-1)^{n-1}.$$

Осталось заметить, что $\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu| = |c_1|$. Случай равенства проверяется прямым вычислением. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3 [5; с. 444]. Если все нули полинома $P(z) = z^n + \dots + c_1 z$, отличные от $z = 0$, имеют одинаковый модуль, то для критических точек ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, выполняется неравенство

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right|} \leq |c_1| \frac{n-1}{n}. \quad (11)$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1 z$, где c_1 – произвольное комплексное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через t общий модуль нулей полинома P , отличных от $z = 0$. Применяя теорему 3 к полиному $P_t(z) := P(tz)/t^n = z^n + \dots + (c_1/t^{n-1})z$ и учитывая равенство $|c_1| = t^{n-1}$, получаем

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| P_t\left(\frac{\zeta_\nu}{t}\right) \right|} \leq (n-1)n^{-n/(n-1)}.$$

С другой стороны,

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| P_t\left(\frac{\zeta_\nu}{t}\right) \right|} = \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{t^n} \right|} = \frac{1}{t^{n-1}n^{1/(n-1)}} \sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right|}.$$

Отсюда вытекает неравенство (11) с легко проверяемым случаем равенства.

Ввиду (11) можно было бы выдвинуть более сильную, чем (4), гипотезу. Однако имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ζ_ν , $\nu = 1, \dots, n-1$, – критические точки полинома $P(z) = z^n + \dots + c_1z$, и пусть все нули этого полинома, отличные от $z = 0$, расположены на $n-1$ лучах, выходящих из точки $z = 0$ под равными углами величины $2\pi/(n-1)$ так, что каждый луч содержит один и только один нуль. Тогда

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)|} \geq (n-1) \left| \frac{c_1}{n} \right|^{n/(n-1)}.$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1z$, где c_1 – произвольное комплексное число, отличное от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим, как и выше, через z_μ , $\mu = 1, \dots, n-1$, нули полинома P , отличные от $z = 0$. Из равенства (10) следует, что

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} |P(\zeta_\nu)| = n^{-n} |c_1|^n \left(\prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^{2-n} \right) \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu|.$$

Осталось применить неравенство (11) из работы [10], согласно которому

$$\prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n-1} |z_\nu - z_\mu| \geq (n-1)^{n-1} \prod_{\mu=1}^{n-1} |z_\mu|^{n-2}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. В условиях теоремы 4 справедливо неравенство

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{P(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu} \right|} \geq |c_1|^{\frac{n-1}{n}}$$

с равенством для полиномов $P(z) = z^n + c_1z$, $c_1 \neq 0$.

Автор выражает благодарность рецензенту и всем участникам семинара А. А. Гончара за полезные замечания и советы по поводу приведенных доказательств.

Список литературы

- [1] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci. Publ., Singapore, 1994.
- [2] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [4] S. Smale, “The fundamental theorem of algebra and complexity theory”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **4**:1 (1981), 1–36.
- [5] D. Tischler, “Critical points and values of complex polynomials”, *J. Complexity*, **5**:4 (1989), 438–456.
- [6] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76.
- [7] A. F. Beardon, D. Minda, T. W. Ng, “Smale’s mean value conjecture and the hyperbolic metric”, *Math. Ann.*, **322**:4 (2002), 623–632.
- [8] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 1, 2, ИЛ, М., 1962.
- [9] I. Schur, “Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten”, *Math. Z.*, **1**:4 (1918), 377–402.
- [10] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Записки научн. сем. ПОМИ*, **237** (1997), 56–73.

В. Н. Дубинин (V. N. Dubinin)

Институт прикладной математики ДВО РАН,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

10.11.2005