Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Квантовые версии векторной двойственности и экспоненциального закона в рамках безматричного подхода, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 133–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:32:27

УДК 517.983+517.986

А. Я. Хелемский

Квантовые версии векторной двойственности и экспоненциального закона в рамках безматричного подхода

В статье показано, какой вид принимают некоторые принципиальные конструкции и результаты квантового функционального анализа (т.е. теории операторных пространств) в рамках подхода, использующего векторы с операторными коэффициентами вместо матриц. Речь идет о “безматричном” квантовании пространств, находящихся в отношении векторной двойственности. После описания основной конструкции установлены, в рамках “безматричного” подхода, квантовая версия экспоненциального закона и квантовая версия закона сопряженной ассоциативности, связывающего функторы операторов с функторами тензорного произведения. В конце работы в качестве важного конкретного примера рассмотрено “безматричное” квантование алгебры операторов в гильбертовом пространстве и его основные свойства.

Библиография: 15 названий.

Настоящая статья посвящена некоторым вопросам квантового функционального анализа – области математики, изучающей так называемые операторные, или квантовые, пространства, алгебры и модули (ср. памятную лекцию Эффроса [1]). Речь идет об алгебраических объектах, наделенных дополнительной структурой, более богатой, чем обычная норма. В подавляющем большинстве работ (особо выделим монографии [2]–[4], по которым уже можно учиться) эта структура задается путем одновременного введения нормы в каждое из пространств матриц всех размерностей с коэффициентами из данного объекта.

Есть, однако, и другой путь. Вместо последовательности норм в пространствах матриц можно рассмотреть одну норму, но в более сложном пространстве, чем матричные. Это пространство состоит, говоря неформально, из векторов исходного линейного пространства с коэффициентами из какой-либо достаточно богатой операторной алгебры. Подобная замена скаляров операторами, на этот раз в качестве коэффициентов при наших векторах, вполне соответствует общей философии “квантовой”, или некоммутативной математики.

Тот факт, что оба подхода, матричный (координатный) и “операторный” (бескоординатный), дают по существу одни и те же результаты, известен.

Это хорошо понимал, судя по его неопубликованным запискам, Барри Джонсон. Об этом же сказано в книге Пиззе [5], в которой, несмотря на явное преобладание матричного подхода, есть несколько красивых выходов в “бескоординатную” теорию (ср. дальнейшие ссылки в основном тексте статьи). Наконец,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00982).

равнозначность обоих подходов, в виде теорем об эквивалентности различного рода категорий, показана в работах [6], [7]; ср. также результаты о реализации операторных бимодулей в [8], [9].

И все же, какую конкретную форму приобретают основные конструкции и результаты квантового функционального анализа именно в рамках бескоординатного подхода, без оглядки на матрицы? И что появляется нового? Похоже на то, что систематического изложения теории с указанных позиций еще не предлагалось.

В этой статье мы хотим показать, какой вид принимают некоторые принципиальные конструкции и результаты квантового функционального анализа в рамках подхода, использующего векторы с операторными коэффициентами вместо матриц. Речь пойдет о квантовании пространств, находящихся в отношении двойственности – как скалярной, так и векторной – и, в частности, о квантовании пространств полностью ограниченных операторов между квантовыми пространствами. После рассказа об основной конструкции будут установлены квантовая версия экспоненциального закона классического функционального анализа и квантовая версия закона сопряженной ассоциативности, связывающего функторы операторов с функторами тензорного произведения.

§ 1. Предварительные определения и сведения

Ради краткости, говоря “оператор”, мы будем всегда подразумевать линейный оператор, а говоря “биооператор” – билинейный оператор. Аналогичный смысл мы придадим словам “функционал” и “бифункционал”.

Если E и F – нормированные пространства, то мы, как обычно, обозначаем через $\mathcal{B}(E, F)$ пространство всех ограниченных, а через $\mathcal{K}(E, F)$ – пространство всех компактных операторов из E в F , и пишем $\mathcal{B}(E)$ вместо $\mathcal{B}(E, E)$ и $\mathcal{K}(E)$ вместо $\mathcal{K}(E, E)$. Если G – еще одно нормированное пространство, то мы обозначаем через $\mathcal{B}(E \times F, G)$ пространство всех ограниченных биооператоров из $E \times F$ в G . Все эти пространства рассмотрены с (би)операторной нормой.

Для гильбертова тензорного произведения гильбертовых пространств, равно как и для гильбертова тензорного произведения действующих в них операторов, мы будем употреблять знак $\dot{\otimes}$.

Выберем какое-либо сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, обозначим его через L и зафиксируем его на протяжении всей статьи. Тожественный оператор в L мы обозначим через $\mathbf{1}$. Для операторных алгебр $\mathcal{B}(L)$ и $\mathcal{K}(L)$ примем краткие обозначения $\mathcal{B}$ и $\mathcal{K}$. Далее, зафиксируем – опять-таки, “навсегда” – какой-либо изометрический (равносильно, унитарный) изоморфизм $\iota: L \rightarrow L \dot{\otimes} L$ и положим $\varsigma := \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L) \rightarrow \mathcal{B}: a \mapsto \iota^* a \iota$. Разумеется, ς – изометрический *-изоморфизм операторных алгебр. Для действующего в L оператора $\varsigma(a \dot{\otimes} b)$, $a, b \in \mathcal{B}$, мы условимся употреблять краткое обозначение $a \diamond b$. (Это “бубновое” умножение по своим свойствам напоминает тензорное, но в отличие от последнего не выводит за пределы $\mathcal{B}$.)

В рассматриваемом контексте возникает некоторый унитарный оператор периода 2, действующий в L . Он вводится с помощью унитарного оператора переброса (“flip”) $\nabla: L \dot{\otimes} L \rightarrow L \dot{\otimes} L$, корректно определенного правилом $\xi \otimes \eta \mapsto \eta \otimes \xi$,

$\xi, \eta \in L$. А именно, таков, как легко видеть, $\triangle := \iota^* \nabla \iota$ (он же и $\varsigma(\nabla)$). Обратим внимание на очевидное равенство

$$b \diamond a = \triangle(a \diamond b) \triangle. \quad (1)$$

Пусть X – (пока произвольный) унитарный бимодуль над алгеброй $\mathcal{B}$. Носителем элемента $u \in X$ мы назовем любой (подразумевается: ортогональный) проектор $P \in \mathcal{B}$ такой, что $P \cdot u \cdot P = u$. Разумеется, если $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей, то всякий носитель элемента $u \in X$ является и носителем элемента $\varphi(u) \in Y$.

Заметим также, что наш X наряду с заданной $\mathcal{B}$ -бимодульной структурой обладает еще двумя. Первая вводится с помощью равенств $a \cdot_1 u := (a \diamond \mathbf{1}) \cdot u$ и $u \cdot_1 a := u \cdot (a \diamond \mathbf{1})$, а вторая – с помощью равенств $a \cdot_2 u := (\mathbf{1} \diamond a) \cdot u$ и $u \cdot_2 a := u \cdot (\mathbf{1} \diamond a)$. Все нужные свойства легко проверяются.

Пусть $\|\cdot\|$ – заданная в X норма. Мы будем говорить, что эта норма удовлетворяет *первой аксиоме Руана*, или *аксиоме (RI)*, если для любых $a \in \mathcal{B}$ и $u \in X$ выполнено $\|a \cdot u\|, \|u \cdot a\| \leq \|a\| \|u\|$. (В терминологии теории банаховых алгебр это означает, что X является сжимающим нормированным $\mathcal{B}$ -бимодулем.) Прежде чем двигаться дальше, отметим очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть норма в X удовлетворяет аксиоме (RI), $x \in X$, a – изометрический, b – коизометрический операторы в L . Тогда

$$\|a \cdot x\| = \|x \cdot b\| = \|x\|.$$

Далее, мы будем говорить, что норма в X удовлетворяет *второй аксиоме Руана*, или *аксиоме (RII)*, если для любых $u, v \in X$, обладающих ортогональными носителями, выполнено $\|u + v\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$.

Выделим для удобства будущих ссылок три простых утверждения. Во всех трех мы предполагаем, что норма в X удовлетворяет аксиомам Руана относительно внешних умножений, обозначенных “ $\cdot$ ”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Эта же норма удовлетворяет аксиомам Руана и относительно внешних умножений “ $\cdot_1$ ” и “ $\cdot_2$ ”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть E – нормированное пространство. Тогда в пространстве $\mathcal{B}(E, X)$ корректно определена структура $\mathcal{B}$ -бимодуля с операциями $[a \cdot \varphi](u) := a \cdot \varphi(u)$ и $[\varphi \cdot a](u) := \varphi(u) \cdot a$, $a \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathcal{B}(E, X)$, $u \in X$. При этом операторная норма в $\mathcal{B}(E, X)$ также удовлетворяет аксиомам Руана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Y – еще один $\mathcal{B}$ -бимодуль и $\varphi: Y \rightarrow X$ – инъективный морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей. Тогда Y , снабженный нормой $\|v\| := \|\varphi(v)\|$, также удовлетворяет аксиомам Руана.

Мы переходим к основным понятиям квантового функционального анализа. Для линейного пространства E алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{K} \otimes E$ мы будем называть *размножением E* и кратко обозначать $\mathcal{K}E$. (Его удобно мыслить как “пространство формальных линейных комбинаций векторов из E с соответствующими операторными коэффициентами”.) Кроме того, его элементарные тензоры мы будем обозначать через ax вместо $a \otimes x$, $a \in \mathcal{K}$, $x \in E$.

Пространство $\mathcal{H}E$ мы будем рассматривать как бимодуль над $\mathcal{B}$ относительно внешних умножений, корректно определенных равенствами $a \cdot bx = (ab)x$ и $bx \cdot a = (ba)x$, $a \in \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{H}$, $x \in E$.

Квантовая норма в E – это по определению норма в $\mathcal{B}$ -бимодуле $\mathcal{H}E$, удовлетворяющая обоим аксиомам Руана. Пространство, снабженное квантовой нормой, называется *квантовым нормированным пространством* или просто *квантовым пространством*.

Квантовое нормированное пространство становится “классическим” нормированным пространством, если для $x \in E$ положить $\|x\| := \|px\|$, где p – произвольный одномерный проектор из $\mathcal{B}$. Из аксиомы (RI) легко следует, что это действительно норма, не зависящая от выбора p . (На самом деле, мы могли бы вместо px взять ax , где a – любой компактный оператор нормы 1, но этот факт нам не понадобится.) Полученный объект называется *подлежащим нормированным пространством* исходного квантового и иногда, во избежание путаницы, обозначается $\square E$. Само же исходное квантовое нормированное пространство E мы будем называть *квантованием* своего подлежащего пространства $\square E$, а его квантовую норму – *квантованием* нормы в $\square E$. Подчеркнем, что одно и то же нормированное пространство имеет, вообще говоря, много весьма несхожих квантований. Однако простейшее нормированное пространство – комплексная плоскость – обладает, как легко следует из аксиом Руана, единственным квантованием. А именно, норма в $\mathcal{H}\mathbb{C} = \mathcal{H}$, являющаяся квантованием нормы в $\mathbb{C}$, – это обычная операторная норма.

Везде далее, говоря о (просто) норме элемента квантового пространства E , мы будем иметь в виду норму этого элемента в $\square E$.

Если F – подпространство в квантовом пространстве E , то оно само является квантовым пространством относительно квантовой нормы, определенной равенством $\|u\| := \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes i)(u)\|$, где $i: F \rightarrow E$ – естественное вложение. (Это частный случай предложения 4.) В такой ситуации мы будем говорить о соответствующем *квантовом подпространстве*.

Укажем весьма общий класс примеров квантовых пространств. Пусть нормированное пространство E задано в явном виде как нормированное подпространство в $\mathcal{B}(H)$, где H – некоторое гильбертово пространство, и $j_E: E \rightarrow \mathcal{B}(H)$ – естественное вложение. Рассмотрим оператор $\hat{j}_E: \mathcal{H}E \rightarrow \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$, ассоциированный с биооператором $\mathcal{H} \times E \rightarrow \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H): (a, x) \mapsto a \dot{\otimes} x$. Этот оператор, как легко видеть, инъективен и, таким образом, позволяет отождествить $\mathcal{H}E$ с подпространством в $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$. (Он же является копродолжением на $\mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$ оператора $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes j_E: \mathcal{H}E \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{B}(H)$.) Тогда, задав в $\mathcal{H}E$ норму, индуцированную этим оператором, мы, как легко видеть, получим квантовую норму в E . Эта квантовая норма, а также соответствующие квантовое пространство и квантование называются *конкретными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ныне знаменитая теорема Руана, или, вернее, ее надлежащая “бескоординатная” версия, утверждает, что любое (“абстрактное”) квантовое пространство совпадает, с точностью до определяемого нами чуть ниже полностью изометрического изоморфизма, с некоторым конкретным. Но круг вопросов, связанный с этой теоремой, в настоящей статье не рассматривается.

Вернемся к общим квантовым пространствам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть d_n , $n = 1, 2, \dots$, – аппроксимативная единица в $\mathcal{K}$. Тогда $\|d_n \cdot u\|, \|u \cdot d_n\| \rightarrow \|u\|$, $n \rightarrow \infty$, для любого $u \in \mathcal{K}E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соображения линейности позволяют ограничиться случаем $u = ax$, $a \in \mathcal{K}$, $x \in E$. Как известно, a представим как произведение bc двух других компактных операторов. Тогда $ax - d_n \cdot ax = (b - d_n b) \cdot cx$ и $ax - ax \cdot d_n = bx \cdot (c - cd_n)$. Поэтому аксиома (RI) влечет

$$\|ax - d_n \cdot ax\|, \|ax - ax \cdot d_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Дальше ясно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого элементарного тензора в $\mathcal{K}E$ выполнена оценка $\|ax\| \leq \|a\| \|x\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_k , $k = 1, 2, \dots$, – ортонормированный базис в L , p_k – проектор на $\text{span}\{e_k\}$ и $P_n := \sum_{k=1}^n p_k$. В силу $ax \cdot P_n = (aP_n)x = a \cdot P_n x$ из предыдущего предложения и аксиомы (RI) следует, что

$$\|ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a \cdot P_n x\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a\| \|P_n x\|.$$

Но $P_n x = \sum_{k=1}^n p_k x$, а элементы $p_k x$ обладают попарно ортогональными носителями, а именно p_k . Поэтому из аксиомы (RII) очевидным образом следует, что $\|P_n x\| = \max\{\|p_k x\| : k = 1, \dots, n\}$. Но каждое из чисел $\|p_k x\|$ есть $\|x\|$. Дальше ясно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле, как нетрудно показать (используя разложение компактных операторов в ряд Шмидта), выполнено точное равенство $\|ax\| = \|a\| \|x\|$. Но этот факт нам не понадобится.

Укажем важную для дальнейшего общую конструкцию.

Сперва рассмотрим “вторичное размножение” $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$ линейного пространства E и оператор $\varsigma_E: \mathcal{K}[\mathcal{K}E] \rightarrow \mathcal{K}E$, ассоциированный с 3-линейным оператором $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times E \rightarrow \mathcal{K}E: (a, b, x) \mapsto (a \diamond b)x$. Таким образом, этот оператор корректно определен правилом $a[bx] \mapsto (a \diamond b)x$. Он же, очевидно, является биограничением на соответствующие пространства оператора $\varsigma \otimes 1_E: [\mathcal{B}(L \dot{\otimes} L)] \otimes E \rightarrow \mathcal{B} \otimes E$. Легко проверить, что ς_E – инъективный морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей относительно внешних умножений в $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$ (как в размножении пространства $\mathcal{K}E$) и внешних умножений “ $\cdot_1$ ” в $\mathcal{K}E$ (см. выше).

Если наше E – квантовое пространство, то для $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}E]$ мы положим $\|u\| := \|\varsigma_E(u)\|$. Объединяя только что сделанное наблюдение с предложениями 2 и 4, мы видим, что это равенство определяет норму в $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$, удовлетворяющую обоим аксиомам Руана. Далее, если e – вектор в L нормы 1, $p \in \mathcal{K}$ – проектор на $\text{span}\{e\}$ и оператор $\rho: L \rightarrow L \dot{\otimes} L$ действует по правилу $\xi \mapsto e \otimes \xi$, то, как легко видеть, $\rho \rho^* = p \dot{\otimes} a$ для всех $a \in \mathcal{B}$. Поэтому для элементарного тензора в $\mathcal{K}E$, скажем ax , выполнено равенство

$$\varsigma_E(p[ax]) = (\varsigma(p \dot{\otimes} a))x = [\iota^*(p \dot{\otimes} a)\iota]x = (\iota^* \rho \rho^* \iota)x = (\iota^* \rho) \cdot (ax) \cdot (\rho^* \iota).$$

Отсюда по линейности $\varsigma_E(pu) = (\iota^* \rho) \cdot u \cdot (\rho^* \iota)$ для любого $u \in \mathcal{K}E$. Поскольку оператор $\iota^* \rho$ изометрический, а $\rho^* \iota$ коизометрический, предложение 1 дает

$\|pu\| = \|\varsigma_E(pu)\| = \|u\|$. Этим показано, что построенная норма в $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$ является квантованием исходной нормы в $\mathcal{K}E$ (равносильно, квантовой нормы в E). Такую квантовую норму в $\mathcal{K}E$ мы будем (рискуя навлечь праведный гнев физиков) называть *вторичным квантованием квантовой нормы в E* .

Забыв на время о бимодульной структуре в $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$, можно заметить, что это пространство – оно же $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes E$ – обладает некоей внутренней симметрией, доставляемой “оператором рокировки” $\mathcal{U}_E: \mathcal{K}[\mathcal{K}E] \rightarrow \mathcal{K}[\mathcal{K}E]$, корректно определенным равенством $\mathcal{U}_E(a[bx]) = b[ax]$, $a, b \in \mathcal{K}$. Этот же оператор может быть определен и с помощью оператора $\nabla: L \dot{\otimes} L \rightarrow L \dot{\otimes} L$, определенного выше. А именно, если положить $\tilde{\mathcal{U}}: \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L) \rightarrow \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L): a \mapsto \nabla a \nabla$, $a \in L \dot{\otimes} L$, то $\mathcal{U}_E$, как легко видеть, есть сужение оператора $\tilde{\mathcal{U}} \otimes \mathbf{1}_E: \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L) \otimes E \rightarrow \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L) \otimes E$ на его инвариантное подпространство $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если E – квантовое пространство, то оператор $\mathcal{U}_E$ является изометрическим изоморфизмом относительно вторичного квантования квантовой нормы в E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним об обсуждавшемся выше операторе $\Delta: L \rightarrow L$. В силу (1) для любых $a, b \in \mathcal{K}$, $x \in E$ выполнено равенство

$$\varsigma_E(\mathcal{U}_E(a[bx])) = \varsigma_E(b[ax]) = (b \diamond a)x = [\Delta(a \diamond b)\Delta]x = \Delta \cdot \varsigma_E(a[bx]) \cdot \Delta.$$

Отсюда по линейности $\varsigma_E(\mathcal{U}_E(u)) = \Delta \cdot \varsigma_E(u) \cdot \Delta$ для всех $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}E]$. В силу предложения 1 это влечет $\|\varsigma_E(\mathcal{U}_E(u))\| = \|\varsigma_E(u)\|$. Далее ясно.

Пусть теперь $\varphi: E \rightarrow F$ – оператор между двумя линейными пространствами. Морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей $\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \varphi: \mathcal{K}E \rightarrow \mathcal{K}F$ мы будем называть *размножением* этого оператора и кратко обозначать φ_{∞} . Если E и F – квантовые пространства, то оператор φ называется *полностью ограниченным*, если его размножение – ограниченный (в “классическом” смысле) оператор. Операторная норма $\|\varphi_{\infty}\|$ обозначается также $\|\varphi\|_{cb}$ и называется *полностью ограниченной* нормой (исходного) оператора φ . Как легко видеть, множество $\mathcal{CB}(E, F)$, состоящее из полностью ограниченных операторов между E и F , является нормированным пространством относительно поточечных операций и нормы $\|\varphi\|_{cb}$.

Разумеется, если φ полностью ограничен, то он ограничен и как оператор между соответствующими подлежащими пространствами (т.е. между $\square E$ и $\square F$), и при этом $\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_{cb}$. (Важно, что обратное, вообще говоря, неверно; ср. [10].) Таким образом, пространство $\mathcal{CB}(E, F)$ является линейным подпространством в $\mathcal{B}(E, F)$ (вообще говоря, не замкнутым относительно операторной нормы).

Оператор между двумя квантовыми пространствами называется *полностью изометрическим* (соответственно *полностью коизометрическим*), если его размножение – изометрический (соответственно коизометрический) оператор, и *полностью изометрическим изоморфизмом*, если его размножение – изометрический изоморфизм.

Приведем важный для дальнейшего пример.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть E – квантовое пространство, $\mathcal{K}E$ и $\mathcal{K}[\mathcal{K}E]$ – квантовые пространства, полученные с помощью его вторичного и “третичного” (в очевидном смысле) квантования. Тогда $\varsigma_E: \mathcal{K}[\mathcal{K}E] \rightarrow \mathcal{K}E$ – полностью изометрический оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цепочку операторов

$$L \xrightarrow{\iota} L \dot{\otimes} L \xrightarrow{\iota \dot{\otimes} 1} L \dot{\otimes} L \dot{\otimes} L \xrightarrow{1 \dot{\otimes} \iota^*} L \dot{\otimes} L \xrightarrow{\iota^*} L$$

и обозначим их композицию через $I: L \rightarrow L$. Ясно, что I – изометрический изоморфизм и при этом, как легко проверить, $I((a \dot{\diamond} b) \dot{\diamond} c)I^* = a \dot{\diamond} (b \dot{\diamond} c)$ для всех $a, b, c \in \mathcal{B}$.

А теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{K}[\mathcal{K}E]) & \xrightarrow{(\varsigma_E)_\infty} & \mathcal{K}[\mathcal{K}E] \\ \varsigma_E \varsigma_{\mathcal{K}E} \downarrow & & \downarrow \varsigma_E \\ \mathcal{K}E & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{K}E \end{array},$$

в которой λ переводит элемент u в $I \cdot u \cdot I^*$. Взяв элементарный тензор $a(b[cx]) \in \mathcal{K}(\mathcal{K}[\mathcal{K}E])$ и “пойдя вниз”, мы, очевидно, получим элемент $((a \dot{\diamond} b) \dot{\diamond} c)x$, а “пойдя вправо и вниз”, мы, очевидно, получим $(a \dot{\diamond} (b \dot{\diamond} c))x$. Отсюда немедленно следует, что наша диаграмма коммутативна. Но в силу предложения 1 λ – изометрический изоморфизм, а в силу определения вторичного квантования вертикальные стрелки изображают изометрические операторы. Это означает, что $(\varsigma_E)_\infty$ – также изометрический оператор. Дальше ясно.

Наконец, пусть E, F и G – три линейных пространства, а $\mathcal{R}: E \times F \rightarrow G$ – биооператор. Слабым разложением последнего называется биооператор $\mathcal{R}_w: \mathcal{K}E \times \mathcal{K}F \rightarrow \mathcal{K}G$, ассоциированный с 4-линейным оператором $\mathcal{K} \times E \times \mathcal{K} \times F \rightarrow \mathcal{K}G$: $(a, x, b, y) \mapsto (a \dot{\diamond} b)\mathcal{R}(x, y)$. Таким образом, $\mathcal{R}_w$ однозначно определен равенством $\mathcal{R}_w(ax, by) = (a \dot{\diamond} b)\mathcal{R}(x, y)$. Если речь идет о квантовых пространствах, то наш биооператор называется *слабо полностью ограниченным*, если его слабое разложение – ограниченный (опять-таки в классическом смысле) биооператор. (Ср. “матричное” определение в [2; с. 126].) Биооператорная норма $\|\mathcal{R}_w\|$ обозначается также $\|\mathcal{R}\|_{wcb}$ и называется *слабо полностью ограниченной нормой* (исходного) оператора φ . Как легко видеть, множество слабо полностью ограниченных операторов из $E \times F$ в G , обозначаемое через $\mathcal{WB}(E \times F, G)$, является нормированным пространством относительно поточечных операций и нормы $\|\mathcal{R}\|_{wcb}$.

(Есть еще и сильно полностью ограниченные биооператоры, но они в этой статье не рассматриваются; см. [10].)

Если $\mathcal{R}$ слабо полностью ограничен, то он ограничен и как биооператор между соответствующими подлежащими пространствами и при этом $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{R}\|_{wcb}$. (Это сразу следует из того очевидного наблюдения, что “бубновый квадрат” одномерного проектора сам является одномерным проектором.) Таким образом, пространство $\mathcal{WB}(E \times F, G)$ является (вообще говоря, не замкнутым) подпространством в $\mathcal{B}(E \times F, G)$.

Важный факт, используемый в дальнейшем, состоит в том, что обсуждаемый класс биоператоров допускает линеаризацию с помощью надлежащей “квантовой” версии проективного тензорного произведения нормированных пространств. Точный смысл сказанного таков.

Если E и F – квантовые пространства, то в алгебраическом тензорном произведении $E \otimes F$ существует однозначно определенная квантовая норма, обозначаемая нами через $\|\cdot\|_4$ и обладающая следующим свойством. Пусть $E \otimes_4 F$ – это пространство $E \otimes F$, рассмотренное с нормой $\|\cdot\|_4$, G – квантовое пространство. Тогда отображение, сопоставляющее каждому слабо полностью ограниченному биоператору $\mathcal{R}: E \times F \rightarrow G$ ассоциированный с ним оператор $R: E \otimes F \rightarrow G$ (однозначно определенный правилом $R(x \otimes y) = \mathcal{R}(x, y)$), есть изометрический изоморфизм между нормированными пространствами $\mathcal{WB}(E \times F, G)$ и $\mathcal{CB}(E \otimes_4 F, G)$.

(Явная конструкция квантовой нормы $\|\cdot\|_4$, описанная в [10], нам не понадобится.)

Введенную квантовую норму мы называем *четырёхименной* квантовой нормой, а квантовое пространство $E \otimes_4 F$ – *четырёхименным тензорным произведением* квантовых пространств E и F . (“Матричные” прототипы этих понятий были открыты четырьмя математиками: Эффросом и Руаном [11] и, независимо и одновременно, Блечером и Полсенем [12].)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нормированные пространства, фигурирующие в этой статье, вообще говоря, не предполагаются полными. Мы лишь отметим, что существует содержательное понятие квантового банахова пространства и упомянутое выше четырёхименное тензорное произведение имеет свой банахов аналог. Последний строится с помощью надлежащей квантовой версии классической конструкции пополнения нормированного пространства. Но здесь мы касаться этих вопросов не будем.

§ 2. Квантование пространств, находящихся в отношении векторной двойственности

Пусть снова E , F и G – линейные пространства, $\mathcal{R}: E \times F \rightarrow G$ – биоператор. Как обычно, последний порождает линейные операторы $\mathcal{R}^F: F \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$ и ${}^E\mathcal{R}: E \rightarrow \mathcal{L}(F, G)$, где $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ – символ пространства всех линейных операторов. Напомним, что $\mathcal{R}^F$ переводит $y \in F$ в оператор $\mathcal{R}^y: x \mapsto \mathcal{R}(x, y)$, а ${}^E\mathcal{R}$ переводит $x \in E$ в оператор ${}^E\mathcal{R}^x: y \mapsto \mathcal{R}(x, y)$. (Если операторы $\mathcal{R}^F$ и ${}^E\mathcal{R}$ инъективны, то исходный биоператор часто называют векторной двойственностью.) Соответственно, для слабого разложения нашего биоператора возникают операторы $\mathcal{R}_w^{\mathcal{KF}}: \mathcal{KF} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{KE}, \mathcal{KG}): v \mapsto \mathcal{R}_w^v: u \mapsto \mathcal{R}_w(u, v)$ и ${}^E\mathcal{R}_w^{\mathcal{KE}}: \mathcal{KE} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{KF}, \mathcal{KG}): u \mapsto {}^E\mathcal{R}_w^u: v \mapsto \mathcal{R}_w(u, v)$. Мы видим, в частности, что $\mathcal{R}_w^{by}(ax) = {}^E\mathcal{R}_w^{ax}(by) = (a \diamond b)\mathcal{R}(x, y)$. (Можно доказать, что если $\mathcal{R}$ – векторная двойственность, то таков же и $\mathcal{R}_w$, но нам это не понадобится.)

ТЕОРЕМА 1. Пусть E и G – квантовые пространства, F – линейное пространство, а $\mathcal{R}: E \times F \rightarrow G$ – векторная двойственность. Пусть, далее, $\mathcal{R}$ таков, что для любого $y \in F$ оператор $\mathcal{R}^y: E \rightarrow G$ полностью ограничен.

Тогда F обладает квантовой нормой, корректно определенной равенством

$$\|v\| := \sup\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{H}E, \|u\| \leq 1\}. \quad (2)$$

При этом (обычная) норма вектора $y \in \square F$ есть $\|\mathcal{R}^y\|_{cb}$.

Мы докажем эту теорему в расширенной формулировке, доставляющей несколько эквивалентных способов введения указанного квантования, а также “симметричное” утверждение о возможности квантования первого аргумента биооператора $\mathcal{R}$. Для этого надо ввести еще несколько операторов, порожденных исходным биооператором.

Наряду с $\mathcal{R}^y$ и ${}'\mathcal{R}^x$ рассмотрим их разложения

$$\mathcal{R}_\infty^y : \mathcal{H}E \rightarrow \mathcal{H}G \quad \text{и} \quad {}'\mathcal{R}_\infty^x : \mathcal{H}F \rightarrow \mathcal{H}G.$$

Для $v \in \mathcal{H}F$ и $u \in \mathcal{H}E$ положим

$$\tilde{\mathcal{R}}^v : E \rightarrow \mathcal{H}G : x \mapsto {}'\mathcal{R}_\infty^x(v) \quad \text{и} \quad {}'\tilde{\mathcal{R}}^u : F \rightarrow \mathcal{H}G : y \mapsto \mathcal{R}_\infty^y(u).$$

В частности, с учетом равенств $\mathcal{R}^y(x) = \mathcal{R}(x, y) = {}'\mathcal{R}^x(y)$ для соответствующих элементарных тензоров имеют место формулы

$$[\tilde{\mathcal{R}}^{by}](x) = b[\mathcal{R}^y(x)] \quad \text{и} \quad [{}'\tilde{\mathcal{R}}^{ax}](y) = a[{}'\mathcal{R}^x(y)]. \quad (3)$$

Далее, разложения $\tilde{\mathcal{R}}_\infty^v : \mathcal{H}E \rightarrow \mathcal{H}[\mathcal{H}G]$ и ${}'\tilde{\mathcal{R}}_\infty^u : \mathcal{H}F \rightarrow \mathcal{H}[\mathcal{H}G]$ только что введенных операторов удовлетворяют равенствам

$$\tilde{\mathcal{R}}_\infty^{by}(u) = \mathcal{U}_G b[\mathcal{R}_\infty^y(u)] \quad \text{и} \quad {}'\tilde{\mathcal{R}}_\infty^{ax}(v) = \mathcal{U}_G a[{}'\mathcal{R}_\infty^x(v)], \quad (4)$$

где $\mathcal{U}_G$ – оператор рокировки из § 1. Оба равенства легко проверяются на элементарных тензорах соответственно в $\mathcal{H}E$ и $\mathcal{H}F$. Отсюда с учетом равенств $\mathcal{R}_w^v(u) = \mathcal{R}_w(u, v) = {}'\mathcal{R}_w^u(v)$, а также (3) вытекают формулы

$$\mathcal{R}_w^v(u) = \varsigma_G(\tilde{\mathcal{R}}_\infty^v(u)) \quad \text{и} \quad {}'\mathcal{R}_w^u(v) = \varsigma_G \mathcal{U}_G({}'\tilde{\mathcal{R}}_\infty^u(v)), \quad (5)$$

которые также легко проверяются на элементарных тензорах. Наконец, введем в рассмотрение операторы

$$\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{H}F} : \mathcal{H}F \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{H}G) : v \mapsto \tilde{\mathcal{R}}^v \quad \text{и} \quad {}'\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{H}E} : \mathcal{H}E \rightarrow \mathcal{L}(F, \mathcal{H}G) : u \mapsto {}'\tilde{\mathcal{R}}^u.$$

ТЕОРЕМА 1'. Пусть для E, F, G и $\mathcal{R}$ выполнены условия теоремы 1. Тогда

- (i) оператор $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{H}F}$ принимает значения в $\mathcal{CB}(E, \mathcal{H}G)$, где квантовая норма в $\mathcal{H}G$ понимается в смысле вторичного квантования;
- (ii) оператор $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{H}E}$ принимает значения в $\mathcal{B}(\mathcal{H}E, \mathcal{H}G)$;
- (iii) для всех $v \in \mathcal{H}F$ числовое множество $\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{H}E, \|u\| \leq 1\}$ ограничено;
- (iv) (главное) равенство

$$\|v\| := \sup\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{H}E, \|u\| \leq 1\}$$

задает в F квантовую норму, и эта же квантовая норма удовлетворяет равенствам

$$\|v\| = \|\tilde{\mathcal{R}}^v\|_{cb} = \|\mathcal{R}_w^v\|; \quad (6)$$

- (v) норма вектора $y \in \square F$ есть $\|\mathcal{R}^y\|_{cb}$;
- (vi) биооператор $\mathcal{R}$ слабо полностью ограничен относительно исходной квантовой нормы в E и построенной квантовой нормы в F ; более того, $\|\mathcal{R}\|_{wcb}=1$.

“Симметричная часть”. Аналогичное утверждение о квантовании первого аргумента нашего биооператора также имеет место. Более подробно, если E, F, G и $\mathcal{R}$ таковы, что для любого $x \in E$ оператор $\mathcal{R}^x: F \rightarrow G$ полностью ограничен, то сказанное в п. (i) верно после замены $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}F}$ на $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}E}$, сказанное в п. (ii) верно после замены $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}$ на $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}E}$ и сказанное в п. (iii) верно после замены $v \in \mathcal{K}F$ на $u \in \mathcal{K}E$ и $\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{K}E, \|u\| \leq 1\}$ на $\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : v \in \mathcal{K}F, \|v\| \leq 1\}$. Далее, (iv) остается в силе после замены равенства (2) на

$$\|u\| := \sup\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : v \in \mathcal{K}E, \|v\| \leq 1\} \quad (2')$$

и (6) на

$$\|u\| = \|\tilde{\mathcal{R}}^u\|_{cb} = \|\mathcal{R}_w^u\|. \quad (6')$$

Пункт (v) принимает вид “норма вектора $x \in \square E$ есть $\|\mathcal{R}^x\|_{cb}$ ”, и, наконец, (vi) остается в силе после замены E на F и F на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва покажем, что для любого $v \in \mathcal{K}F$ оператор $\tilde{\mathcal{R}}^v$ полностью ограничен, а для этого по линейности достаточно показать, что таков $\tilde{\mathcal{R}}^{by}$ для всех $by \in \mathcal{K}F$. Объединяя первое из равенств (4) с предложением 6, а также с условиями теоремы, мы получаем, что $\|\tilde{\mathcal{R}}_\infty^{by}(u)\| = \|b[\mathcal{R}_\infty^y(u)]\| \leq \|b\| \|\mathcal{R}^y\|_{cb} \|u\|$. Отсюда следует (i).

Далее, первое из равенств (5) вместе с определением вторичного квантования влечет $\|\mathcal{R}_w^v(u)\| = \|\tilde{\mathcal{R}}_\infty^v(u)\|$ для всех $u \in \mathcal{K}E$. Поэтому из (i) следует (ii) и, вдобавок, равенство $\|\mathcal{R}_w^v\| = \|\tilde{\mathcal{R}}^v\|_{cb}$. В свою очередь, из (ii) очевидным образом следует (iii) вместе с равенством $\|\mathcal{R}_w^v\| = \sup\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{K}E, \|u\| \leq 1\}$.

Итак, число $\|v\|$ корректно определено и, в частности, оно является нормой оператора $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}(v)$. Отсюда с учетом линейности отображения $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}$ следует, что функция $v \mapsto \|v\|$ является преднормой в $\mathcal{K}F$.

Покажем, что это норма. Пусть $v \neq 0$. Тогда, как хорошо известно (см., например, [13]), v имеет вид $\sum_{k=1}^n b_k y_k$, где система b_k линейно независима, а $y_1 \neq 0$. Согласно условию существует $x \in E$ такой, что $\mathcal{R}(x, y_1) \neq 0$. Возьмем любой $a \in \mathcal{K}$, $a \neq 0$. Тогда оператор $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}(v) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G)$ переводит ax в $\mathcal{R}_w(ax, v) = \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_w(ax, b_k y_k) = \sum_{k=1}^n (a \diamond b_k) \mathcal{R}(x, y_k)$. Но система операторов $a \diamond b_k$ очевидным образом линейно независима вместе с системой b_k , а $\mathcal{R}(x, y_1) \neq 0$. Поэтому (см. там же) $\mathcal{R}_w(ax, v) \neq 0$, а значит, и $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}(v) \neq 0$. Отсюда, разумеется, вытекает, что $\|v\| \neq 0$.

Теперь напомним, что $\mathcal{B}$ -бимодуль $\mathcal{K}G$, обладая аксиомами Руана относительно исходных внешних умножений “ $\cdot$ ”, обладает теми же аксиомами и относительно внешних умножений “ $\cdot_2$ ” (предложение 2). Отсюда в силу предложения 3 теми же аксиомами обладает и $\mathcal{B}$ -бимодуль $\mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G)$ относительно соответствующих индуцированных операций. Далее, имеют место равенства $\mathcal{R}_w(u, c \cdot v) = c \cdot_2 \mathcal{R}_w(u, v)$ и $\mathcal{R}_w(u, v \cdot c) = \mathcal{R}_w(u, v) \cdot_2 c$, $c \in \mathcal{B}$, очевидным образом проверяемые на элементарных тензорах в $\mathcal{K}F$ и $\mathcal{K}E$. Из них немедленно следует, что оператор $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}: \mathcal{K}F \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G)$ является морфизмом

$\mathcal{B}$ -бимодулей относительно стандартных операций в $\mathcal{K}F$ и только что упомянутых операций в $\mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G)$. Отсюда согласно предложению 4 вытекает, что построенная норма в $\mathcal{K}F$ является квантовой нормой в F . Отсюда следует (iv).

Возьмем $y \in F$ и одномерный проектор $p \in \mathcal{K}$. Тогда $\|py\| = \|\tilde{\mathcal{R}}^{py}\|_{cb} = \|\tilde{\mathcal{R}}^{py}\|$. В силу первого из равенств (4) и предложения 7 для любого $u \in \mathcal{K}E$ норма $\tilde{\mathcal{R}}^{py}(u)$ есть норма элементарного тензора $p[\mathcal{R}_\infty^y(u)] \in \mathcal{K}[\mathcal{K}G]$, где, как мы помним, $\mathcal{R}_\infty^y(u) \in \mathcal{K}G$. Поскольку норма в $\mathcal{K}[\mathcal{K}G]$ – это квантование нормы в $\mathcal{K}G$, мы получаем, что $\|py\| = \|\mathcal{R}_\infty^y\|$. В силу определения нормы в $\square F$ отсюда следует (v).

Наконец, из определения квантовой нормы в $\mathcal{K}F$ с помощью формулы (2) немедленно следует (vi).

Этим завершено доказательство части теоремы, касающейся построения квантовой нормы во втором аргументе биооператора $\mathcal{R}$. Ее часть, касающаяся первого аргумента, доказывается таким же, с точностью до очевидных модификаций, рассуждением. (Можно также, если угодно, применить уже установленную “половину” к биооператору $\mathcal{R}^{op}: F \times E: (y, x) \mapsto \mathcal{R}(x, y)$.)

Отметим, что в условиях теоремы имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{CB}(E, \mathcal{K}G) & \\ \tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}F} \nearrow & \downarrow J_F & \\ \mathcal{K}F & & \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G) \\ \mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F} \searrow & & \end{array}, \quad (\text{D1})$$

в которой теми же символами $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}F}$ и $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}$ обозначены коограничения введенных выше операторов, а J_F – изометрический оператор, переводящий $\varphi: E \rightarrow \mathcal{K}G$ в $\psi: \mathcal{K}E \rightarrow \mathcal{K}G: u \mapsto \varsigma_G \varphi_\infty(u)$. Действительно, из определения вторичного квантования пространства G следует, что для $\varphi \in \mathcal{CB}(E, \mathcal{K}G)$ и $u \in \mathcal{K}E$ выполнено $\|[J_F \varphi]u\| = \|\varphi_\infty(u)\|$. Отсюда сразу вытекает, что J_F корректно определен и является изометрическим оператором. Коммутативность диаграммы обеспечена первым из равенств (5).

§ 3. Квантование пространств операторов, квантовый экспоненциальный закон и квантовая сопряженная ассоциативность

Особенно важны два специальных случая описанного квантования: когда $G = \mathbb{C}$ и когда $F = \mathcal{CB}(E, G)$. Первому из них мы посвятим следующий параграф, а пока займемся вторым.

Пусть E и G – квантовые пространства. Рассмотрим “биооператор означивания” $\mathcal{E}: E \times \mathcal{CB}(E, G) \rightarrow G: (x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$ и его слабое размножение $\mathcal{E}_w: \mathcal{K}E \times \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)] \rightarrow \mathcal{K}G$, которое в данной ситуации, очевидно, однозначно определено правилом $(ax, b\varphi) \mapsto (a \diamond b)\varphi(x)$. Ясно, что при $F := \mathcal{CB}(E, G)$ и $\mathcal{R} := \mathcal{E}$ условия теоремы 1 (они же и условия первой “половины” теоремы 1') выполнены.

При этом для $\Phi \in \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)]$ операторы $\mathcal{R}_w^v$ приобретают вид $\mathcal{E}_w^\Phi: \mathcal{K}E \rightarrow \mathcal{K}G: u \mapsto \mathcal{E}_w(u, \Phi)$, а операторы $\tilde{\mathcal{R}}^v$ – вид $\tilde{\mathcal{E}}^\Phi: E \rightarrow \mathcal{K}G: x \mapsto {}'\mathcal{E}_\infty^x(\Phi)$, где ${}'\mathcal{E}^x: \varphi \mapsto \varphi(x)$; в частности, $\tilde{\mathcal{R}}^{b\varphi}: E \rightarrow \mathcal{K}G$ переводит x в $b\varphi(x)$.

Ясно, что п. (v) теоремы 1' применительно к $\mathcal{CB}(E, G)$ означает, что полученное квантовое пространство есть квантование нормированного пространства $(\mathcal{CB}(E, G), \|\cdot\|_{cb})$. Это квантование, а также соответствующую квантовую норму мы будем называть *стандартными*. Таким образом, для $\Phi \in \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)]$ выполнено

$$\|\Phi\| := \sup\{\|\mathcal{E}_w(u, \Phi)\| : u \in \mathcal{K}E, \|u\| \leq 1\} \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\|\Phi\| := \|\tilde{\mathcal{E}}^\Phi\|_{cb} = \|\mathcal{E}_w^\Phi\| \quad (8)$$

(первое из равенств (8) по существу содержится у Пизье; ср. его “вложение $\mathcal{K} \otimes_\alpha CB(E, F) \subset CB(E, \mathcal{K} \otimes_{\min} F)$ ” в [5; с. 41]).

Примем краткие обозначения $\alpha_{E,G}$ и $\beta_{E,G}$ для операторов $\mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)] \rightarrow \mathcal{CB}(E, \mathcal{K}G): \Phi \mapsto \tilde{\mathcal{E}}^\Phi$ и $\mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G): \Phi \mapsto \mathcal{E}_w^\Phi$. Равенства (7)–(8) означают, что это изометрические изоморфизмы. Оба оператора, разумеется, являются специализациями для случая $\mathcal{R} := \mathcal{E}$ операторов $\tilde{\mathcal{R}}^{\mathcal{K}F}$ и $\mathcal{R}_w^{\mathcal{K}F}$, фигурирующих в теореме 1'. В частности, $\beta_{E,G} = J_{\mathcal{CB}(E,G)} \alpha_{E,G}$ (ср. диаграмму (D1)).

Указанная конструкция квантования позволяет говорить о “функторах полностью ограниченных операторов”, определенных на категории квантовых пространств (с полностью ограниченными операторами в качестве морфизмов) и принимающих значения в той же категории. Мы не будем в этой статье останавливаться на деталях соответствующих определений, а только приведем утверждение, лежащее в их основе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть E, F и G – квантовые пространства, $\varphi: F \rightarrow G$ – полностью ограниченный оператор. Тогда отображения

$$\begin{aligned} \mathcal{CB}(E, \varphi): \mathcal{CB}(E, F) &\rightarrow \mathcal{CB}(E, G): \psi \mapsto \varphi\psi, \\ \mathcal{CB}(\varphi, E): \mathcal{CB}(G, E) &\rightarrow \mathcal{CB}(F, E): \psi \mapsto \varphi\psi \end{aligned}$$

сами суть полностью ограниченные относительно стандартного квантования операторы. Если же, вдобавок, φ – полностью изометрический (соответственно полностью коизометрический) оператор, то таков же $\mathcal{CB}(E, \varphi)$ (соответственно $\mathcal{CB}(\varphi, E)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $(\varphi\psi)_\infty = \varphi_\infty\psi_\infty$, и как следствие композиция двух полностью ограниченных операторов сама есть полностью ограниченный оператор. Поэтому указанные отображения корректно определены и, разумеется, линейны. Это позволяет говорить об их разложениях. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, F)] & \xrightarrow{\mathcal{CB}(E, \varphi)_\infty} & \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)] \\ \beta_{E,F} \downarrow & & \downarrow \beta_{E,G} \\ \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}F) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathcal{K}E, \varphi_\infty)} & \mathcal{B}(\mathcal{K}E, \mathcal{K}G) \end{array},$$

в которой, помимо уже известных нам операторов, $\mathcal{B}(\mathcal{H}E, \varphi_\infty)$ – это ограниченный оператор, получающийся как результат применения к φ_∞ “классического” функтора операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H}E, \cdot)$ (см., например, [13; предложение 2.5.1]).

Простая проверка на элементарных тензорах показывает, что наша диаграмма коммутативна. Но ее вертикальные стрелки изображают изометрические операторы. Поэтому поскольку $\mathcal{B}(\mathcal{H}E, \varphi_\infty)$ ограничен (см. там же), то таков же и $\mathcal{CB}(E, \varphi)_\infty$. Если же, вдобавок, φ_∞ – изометрический оператор, то, очевидно, этим же свойством обладает и $\mathcal{B}(\mathcal{H}E, \varphi_\infty)$, а значит, таков же и $\mathcal{CB}(E, \varphi)_\infty$.

Этим доказаны утверждения, касающиеся $\mathcal{CB}(E, \varphi)$; аналогичным рассуждением устанавливаются утверждения о $\mathcal{CB}(\varphi, E)$.

В качестве приложения отметим полезное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть E и G – квантовые пространства. Тогда $\alpha_{E,G}$ – (не только изометрический, но и) полностью изометрический оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}[\mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)]] & \xrightarrow{\alpha_\infty} & \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, \mathcal{H}G)] \\
 \downarrow \varsigma' & & \downarrow \alpha_1 \\
 \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)] & & \mathcal{CB}(E, \mathcal{K}[\mathcal{H}G]) \\
 \searrow \alpha & & \swarrow \gamma \\
 & \mathcal{CB}(E, \mathcal{H}G) &
 \end{array}$$

в которой $\alpha := \alpha_{E,G}$, $\alpha_1 := \alpha_{E, \mathcal{H}G}$, $\varsigma' := \varsigma_{\mathcal{CB}(E,G)}$, $\gamma := \mathcal{CB}(E, \varsigma_G)$ и $\alpha_\infty := (\alpha_{E,G})_\infty$. Она, как легко проверить на элементарных тензорах, коммутативна. Но нам уже известно, что из перечисленных операторов три первых – изометрические. Что же касается γ , то, объединяя предложения 8 и 9, мы видим, что это тоже изометрический (и даже полностью изометрический) оператор. Значит, изометрическим является и α_∞ . Дальше ясно.

Теперь напомним об общематематическом “экспоненциальном законе”

$$(X^Y)^Z = X^{Y \times Z} = (X^Z)^Y$$

(X, Y, Z – множества), связывающем функции двух переменных с функциями одного переменного со значениями в множестве функций от другого переменного. Как хорошо известно, в классическом функциональном анализе этот закон принимает следующую специальную форму. Пусть E, F, G – нормированные пространства, $\mathcal{B}(E \times F, G)$ – пространство всех ограниченных биоператоров из $E \times F$ в G , снабженное биоператорной нормой. Тогда корректно определена диаграмма

$$\mathcal{B}(F, \mathcal{B}(E, G)) \xleftarrow{I_F} \mathcal{B}(E \times F, G) \xrightarrow{I_E} \mathcal{B}(E, \mathcal{B}(F, G)), \quad (D2)$$

где I_F и I_E – изометрические изоморфизмы нормированных пространств, переводящие (в обозначениях предыдущего параграфа) биоператор $\mathcal{R}$ в операторы соответственно $\mathcal{R}^F$ и $\mathcal{R}^E$. Наша очередная цель – рассмотреть квантовую версию этого экспоненциального закона.

Ранее был введен оператор означивания $\mathcal{E}$, заданный на $E \times \mathcal{CB}(E, G)$. Обозначим тем же символом $\mathcal{E}$ его продолжение на $E \times \mathcal{B}(E, G)$, действующее по тому же правилу $(x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$; это не вызовет путаницы. В дальнейших рассуждениях нам пригодится формула

$$\mathcal{E}_w(u, \mathcal{R}_\infty^F(v)) = \mathcal{R}_w(u, v), \quad (9)$$

имеющая место для всех $\mathcal{R} \in \mathcal{B}(E \times F, G)$, $u \in \mathcal{H}E$, $v \in \mathcal{H}F$. Действительно, для элементарных тензоров в соответствующих пространствах выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_w(ax, \mathcal{R}_\infty^F(by)) &= \mathcal{E}_w(ax, b[\mathcal{R}^F(y)]) = \mathcal{E}_w(ax, b\mathcal{R}^y) \\ &= (a \diamond b)\mathcal{E}(x, \mathcal{R}^y) = (a \diamond b)\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}_w(ax, by), \end{aligned}$$

и общий случай немедленно следует из (би)линейности рассматриваемых отображений.

Итак, пусть E , F и G – квантовые пространства.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют изометрические изоморфизмы (нормированных пространств) I_F и I_E , участвующие в корректно определенной диаграмме*

$$\mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G)) \xleftarrow{I_F} \mathcal{WB}(E \times F, G) \xrightarrow{I_E} \mathcal{CB}(E, \mathcal{CB}(F, G)) \quad (D3)$$

и действующие по тем же правилам, что и операторы диаграммы (D2).

Более подробно:

- (i) для любого $\mathcal{R} \in \mathcal{WB}(E \times F, G)$ и $y \in F$ оператор $\mathcal{R}^y: E \rightarrow G$ полностью ограничен;
- (ii) оператор $\mathcal{R}^F: F \rightarrow \mathcal{CB}(E, G): y \mapsto \mathcal{R}^y$, корректно определенный в силу (i), полностью ограничен относительно стандартной квантовой нормы в $\mathcal{CB}(E, G)$;
- (iii) оператор $I_F: \mathcal{WB}(E \times F, G) \rightarrow \mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G))$, корректно определенный в силу (ii), является изометрическим изоморфизмом.

Аналогичное утверждение об операторах $I_{\mathcal{R}^x}$, $I_{\mathcal{R}^F}$ и I_E также имеет место.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем одномерный проектор $p \in \mathcal{H}$, $y \in F$ и $u \in \mathcal{H}E$. Объединяя первые равенства из (4) и (5), мы видим, что

$$\varsigma_G \mathcal{U}_G(p[\mathcal{R}_\infty^y(u)]) = \varsigma_G \tilde{\mathcal{R}}_\infty^{py}(u) = \mathcal{R}_w^{py}(u) = \mathcal{R}_w(u, py).$$

Поэтому определение вторичного квантования в терминах ς_G вместе с предложением 7 дает

$$\|\mathcal{R}_\infty^y(u)\| = \|p\mathcal{R}_\infty^y(u)\| = \|\mathcal{R}_w(u, py)\| \leq \|\mathcal{R}\|_{wcb}\|u\|\|py\| = \|\mathcal{R}\|_{wcb}\|y\|\|u\|.$$

Отсюда следует (i). Теперь мы вправе говорить об операторе $\mathcal{R}^F$ из п. (ii) и его разложении $\mathcal{R}_\infty^F: \mathcal{H}F \rightarrow \mathcal{H}[\mathcal{CB}(E, G)]$. Согласно равенству (6) для $v \in \mathcal{H}F$

выполнено $\|\mathcal{R}_\infty^F(v)\| = \sup\{\|\mathcal{E}_w(u, \mathcal{R}_\infty^F(v))\| : u \in \mathcal{H}E, \|u\| \leq 1\}$. Пользуясь формулой (9), мы видим, что $\|\mathcal{R}_\infty^F(v)\| = \sup\{\|\mathcal{R}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{H}E, \|u\| \leq 1\}$. Отсюда $\mathcal{R}_\infty^F$ – ограниченный оператор с нормой, равной $\|\mathcal{R}_w\|$. Это, разумеется, дает (ii), а также равенство $\|\mathcal{R}^F\|_{cb} = \|\mathcal{R}\|_{wcb}$.

Итак, $I_F: \mathcal{WB}(E \times F, G) \rightarrow \mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G))$ корректно определен и к тому же является изометрическим оператором. Чтобы завершить доказательство п. (iii), мы покажем, что этот оператор сюръективен.

Возьмем $\mathcal{S} \in \mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G))$ и положим $\mathcal{R}: E \times F \rightarrow G: (x, y) \mapsto [\mathcal{S}(y)](x)$.

Очевидно, $\mathcal{R}$ ограничен и $\mathcal{R}^F = \mathcal{S}$. Поэтому наша задача – убедиться в том, что $\mathcal{R}$ слабо полностью ограничен. Но из той же формулы (9) следует, что $\|\mathcal{R}_w(u, v)\| = \|\mathcal{E}_w(u, \mathcal{S}_\infty(v))\|$. Далее, мы знаем, что $\|\mathcal{E}\|_{wcb} = 1$: это специальный случай теоремы 1', (vi), когда исходный биооператор задан как биооператор означивания. Отсюда $\|\mathcal{R}_w(u, v)\| \leq \|u\| \|\mathcal{S}_\infty(v)\| \leq \|\mathcal{S}\|_\infty \|u\| \|v\|$. Тем самым, $\mathcal{R} \in \mathcal{WB}(E \times F, G)$.

Часть теоремы, относящаяся к оператору I_F , полностью доказана. “Симметричное” утверждение об I_E доказывается аналогичным рассуждением.

Теперь напомним о существовании “четырёхименного” тензорного произведения квантовых пространств, осуществляющего линейаризацию слабо полностью ограниченных биооператоров (см. конец § 1). Следующее утверждение представляет собой квантовую версию так называемого “закона сопряженной ассоциативности” классического функционального анализа (см., например, [13; § 2.7]).

ТЕОРЕМА 3. *Для тех же E, F, G существуют полностью изометрические изоморфизмы $\mathcal{I}_F$ и $\mathcal{I}_E$, участвующие в диаграмме*

$$\mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G)) \xleftarrow{\mathcal{I}_F} \mathcal{CB}(E \otimes_4 F, G) \xrightarrow{\mathcal{I}_E} \mathcal{CB}(E, \mathcal{CB}(F, G)) \quad (\text{D4})$$

и однозначно определенные равенствами

$$([\mathcal{I}_F(\varphi)]y)(x) = \varphi(x \otimes y) = ([\mathcal{I}_E(\varphi)]x)(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $i: \mathcal{WB}(E \times F, G) \rightarrow \mathcal{CB}(E \otimes_4 F, G)$ отображение, сопоставляющее биооператору его линейаризацию (ассоциированный линейный оператор); как упоминалось в конце § 1, это изометрический изоморфизм нормированных пространств. Положим $\mathcal{I}_F := I_F i^{-1}$. Тогда из предыдущей теоремы очевидным образом следует, что это изометрический (пока просто изометрический) изоморфизм, однозначно определенный на элементарных тензорах в $E \otimes F$ первым из указанных выше равенств. Это, разумеется, верно для всех троек квантовых пространств. Поэтому оператор $\mathcal{I}_{F, \mathcal{H}G}$, определяемый дословно как $\mathcal{I}_F$, но с $\mathcal{H}G$ в роли G , – также (изометрический) изоморфизм.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{KCB}(F, \mathcal{CB}(E, G)) & \xleftarrow{(\mathcal{I}_F)_\infty} & \mathcal{KCB}(E \otimes_4 F, G) \\
 \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\
 \mathcal{CB}(F, \mathcal{K}[\mathcal{CB}(E, G)]) & & \\
 \gamma \downarrow & & \\
 \mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, \mathcal{K}G)) & \xleftarrow{\mathcal{I}_{F, \mathcal{K}G}} & \mathcal{CB}(E \otimes_4 F, \mathcal{K}G)
 \end{array} ,$$

в которой $\alpha_1 := \alpha_{F, \mathcal{CB}(E, G)}$, $\alpha_2 := \alpha_{E \otimes_4 F, G}$, а $\gamma = \mathcal{CB}(F, \alpha_{E, G})$ (см. предложение 9). На основании предложения 10 все операторы $\alpha(\cdot, \cdot)$ являются полностью изометрическими. Отсюда в силу предложения 9 следует, что таков же и γ . Наконец, как уже отмечалось, $\mathcal{I}_{F, \mathcal{K}G}$ – также изометрический оператор. Но наша диаграмма, очевидно, коммутативна. Отсюда сразу следует, что и $(\mathcal{I}_F)_\infty$ – изометрический оператор, а значит, поскольку это биекция, – изометрический изоморфизм.

Итак, $\mathcal{I}_F$ – полностью изометрический изоморфизм; то, что таков же и $\mathcal{I}_E$, доказывается аналогичным рассуждением.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как и в случае сопряженной ассоциативности классического функционального анализа, за доказанной теоремой скрывается естественная эквивалентность возникающих трехместных функторов, которые переводят тройку объектов (E, F, G) соответственно в $\mathcal{CB}(F, \mathcal{CB}(E, G))$, $\mathcal{CB}(E \otimes_4 F, G)$ и $\mathcal{CB}(E, \mathcal{CB}(F, G))$.

§ 4. Квантовое сопряженное и квантовое предсопряженное пространства. Пример: квантовое пространство ядерных операторов

В этом параграфе мы сосредоточимся на случае, когда задана обычная (т.е. не векторная, а скалярная) двойственность $\mathcal{D}: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$. В силу естественного отождествления $\mathcal{K}\mathbb{C}$ с $\mathcal{K}$ соответствующее слабое размножение может быть рассмотрено как биоператор $\mathcal{D}_w: \mathcal{K}E \times \mathcal{K}F \rightarrow \mathcal{K}$, однозначно определенный правилом $(ax, by) \mapsto \mathcal{D}(x, y)a \diamond b$; отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{D}_w^{\mathcal{K}F}: \mathcal{K}F \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K}E, \mathcal{K})$ переводит by в оператор $ax \mapsto \mathcal{D}(x, y)a \diamond b$. Что же касается $\tilde{\mathcal{D}}^{\mathcal{K}F}: \mathcal{K}F \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{K})$, то он переводит by в оператор $x \mapsto \mathcal{D}(x, y)b$; обратим внимание на то, что этот оператор одномерен.

Принципиально важный для дальнейшего факт состоит в том, что для функционалов обычная ограниченность влечет полную.

Если H – гильбертово пространство, а ξ, η – его векторы, то через $\xi \circ \eta: H \rightarrow H$ мы обозначим одномерный оператор, переводящий ζ в $\langle \zeta, \eta \rangle \xi$. Выделим очевидные равенства

$$(\xi \circ \eta)(\xi' \circ \eta') = \langle \xi', \eta \rangle (\xi \circ \eta') \quad \text{и} \quad a(\xi \circ \eta) = a(\xi) \circ \eta, \quad (10)$$

где $\xi, \xi', \eta, \eta' \in H$, $a \in \mathcal{B}(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ – ограниченный функционал, заданный на квантовом пространстве. Тогда f (автоматически) полностью ограничен и $\|f\|_{cb} = \|f\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f_\infty: \mathcal{K}E \rightarrow \mathcal{K}\mathbb{C} = \mathcal{K}$ и возьмем $u \in \mathcal{K}E$. В силу свойств операторной нормы

$$\|f_\infty(u)\| = \sup\{|\langle f_\infty(u)\xi, \eta \rangle|, \xi, \eta \in L, \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1\}.$$

Произвольно выберем вектор $e \in L$, $\|e\| = 1$, и возьмем проектор $p = e \circ e$ на его линейную оболочку. Используя формулы (10), а также то, что f_∞ – морфизм $\mathcal{B}$ -бимодулей (см. § 1), мы видим, что

$$\begin{aligned} \langle [f_\infty(u)](\xi), \eta \rangle p &= \langle [f_\infty(u)](\xi), \eta \rangle (e \circ e) = (e \circ \eta)([f_\infty(u)](\xi) \circ e) \\ &= (e \circ \eta)f_\infty(u)(\xi \circ e) = f_\infty[(e \circ \eta) \cdot u \cdot (\xi \circ e)]. \end{aligned}$$

Поэтому $|\langle [f_\infty(u)](\xi), \eta \rangle| = \|f_\infty[(e \circ \eta) \cdot u \cdot (\xi \circ e)]\|$.

Теперь заметим, что $(e \circ \eta) \cdot u \cdot (\xi \circ e)$ – это элементарный тензор вида $px_{\xi, \eta}$ для некоторого $x_{\xi, \eta} \in E$. (Такое равенство очевидно, когда u – сам элементарный тензор, а значит, верно и для всех u .) При этом из аксиомы (RI), а также известных (и очевидных) равенств $\|e \circ \eta\| = \|e\| \|\eta\|$, $\|\xi \circ e\| = \|e\| \|\xi\|$ следует, что при $\|\xi\|, \|\eta\| \leq 1$ выполнено $\|x_{\xi, \eta}\| \leq \|u\|$. Поэтому при тех же ξ, η

$$|\langle [f_\infty(u)](\xi), \eta \rangle| = \|f_\infty(px_{\xi, \eta})\| = \|f(x_{\xi, \eta})p\| = |f(x_{\xi, \eta})| \leq \|f\| \|x_{\xi, \eta}\| \leq \|f\| \|u\|.$$

Переходя к соответствующей верхней грани, мы видим, что $\|f_\infty\| \leq \|f\|$. Дальше ясно.

В свете сказанного теорема 1' при $G := \mathbb{C}$ приобретает несколько более прозрачный вид, который мы сейчас приведем. Везде далее пространство $\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathbb{C}$ рассмотрено с конкретным квантованием, или, что то же самое, со вторичным квантованием комплексной плоскости; см. § 1.

ТЕОРЕМА 1''. Пусть E – квантовое пространство, F – линейное пространство, а $\mathcal{D}: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ – двойственность. Пусть, далее, для любого $y \in F$ функционал $\mathcal{D}^y: E \rightarrow \mathbb{C}: x \mapsto \mathcal{D}(x, y)$ ограничен. Тогда F обладает квантовой нормой, корректно определенной равенством

$$\|v\| := \sup\{\|\mathcal{D}_w(u, v)\| : u \in \mathcal{K}E, \|u\| \leq 1\}, \quad (11)$$

и для этой же квантовой нормы имеют смысл и справедливы равенства

$$\|v\| = \|\tilde{\mathcal{D}}^v\|_{cb} = \|\mathcal{D}_w^v\|.$$

При этом (обычная) норма вектора $y \in \square F$ есть $\|\mathcal{D}^y\|$. Наконец, бифункционал $\mathcal{D}$ слабо полностью ограничен относительно исходной квантовой нормы в E и построенной квантовой нормы в F ; более того, $\|\mathcal{D}\|_{wcb} = 1$.

“Симметричная часть”. Если E, F, G и $\mathcal{D}$ таковы, что для любого $x \in E$ функционал $\mathcal{D}^x: F \rightarrow \mathbb{C}$ ограничен, то E обладает квантовой нормой

$$\|u\| := \sup\{\|\mathcal{D}_w(u, v)\| : v \in \mathcal{K}F, \|v\| \leq 1\}, \quad (11')$$

причем $\|u\| = \|\tilde{\mathcal{D}}^u\|_{cb} = \|\mathcal{D}_w^u\|$, и для $x \in \square E$ выполнено $\|x\| = \|\mathcal{D}^x\|$. Далее, относительно исходной квантовой нормы в F и построенной квантовой нормы в E выполнено $\|\mathcal{D}\|_{wcb} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предыдущее предложение гарантирует выполнение условий теоремы 1' при $G := \mathbb{C}$ и $\mathcal{K} := \mathcal{D}$. Далее ясно.

О квантовом пространстве F (соответственно E) из теоремы 1'' мы будем говорить, что оно порождено заданным квантовым пространством E (соответственно F) и двойственностью $\mathcal{D}$. Если ясно, о каких квантовом пространстве или двойственности идет речь, упоминание о них будет опускаться.

Наиболее важен, конечно, случай, когда наша двойственность – это каноническая двойственность между нормированным пространством E и его сопряженным E^* . Ясно, что в этом случае выполнены условия теоремы 1'' как в ее первой “половине” – о квантовании второго аргумента, теперь E^* , так и во второй – о квантовании E . (Заметим только, что последнее верно не “задаром”, а вследствие изометричности канонического вложения E в E^{**} .)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – нормированное пространство, снабженное квантованием. Тогда пространство E^* , рассмотренное с квантованием, порожденным канонической двойственностью, называется *квантовым сопряженным пространством к E* .

Аналогичным образом, если квантованием снабжено E^* , определяется *квантовое предсопряженное пространство к E^** .

Разумеется, квантование сопряженного пространства – это частный случай стандартного квантования пространства $\mathcal{CB}(E, G)$ при $G := \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. “Безматричное” определение квантового сопряженного пространства впервые упомянуто в работе Пизье [5; с. 40]. Оно дано в терминах (с точностью до обозначений) оператора $\hat{\mathcal{D}}^{\mathcal{K}E^*} : \mathcal{K}E^* \rightarrow \mathcal{CB}(E, \mathcal{K})$, совпадающего также с $\alpha_{E,G}$ из § 3 для $G := \mathbb{C}$. Этот оператор можно считать разновидностью хорошо известного оператора Гротендика (см., например, [13; предложение 2.7.2, теорема 2.7.7]). Образ оператора $\hat{\mathcal{D}}^{\mathcal{K}E^*} = \alpha_{E,\mathbb{C}}$ состоит, как легко видеть, из всех ограниченных конечномерных операторов между E и $\mathcal{K}$.

Там, где это не вызовет путаницы, мы будем обозначать бифункционал канонической двойственности между пространством и его сопряженным через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а его слабое разномножение – через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть E^* снабжено квантованием. Тогда его квантовое предсопряженное пространство E совпадает с соответствующим квантовым подпространством квантового сопряженного к E^* пространства E^{**} . Более точно, каноническое вложение $i : E \rightarrow E^{**}$ есть полностью изометрический оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $u \in \mathcal{K}E$ и $v \in \mathcal{K}E^*$. С учетом формулы (1) из § 1 простая проверка на элементарных тензорах показывает, что $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \Delta \langle\langle v, i_\infty(u) \rangle\rangle \Delta$. Отсюда в силу предложения 1 $\|\langle\langle u, v \rangle\rangle\| = \|\langle\langle v, i_\infty(u) \rangle\rangle\|$. Но согласно второй части предыдущего определения

$$\|i_\infty(u)\| = \sup\{\|\langle\langle v, i_\infty(u) \rangle\rangle\| : v \in \mathcal{K}E^*, \|v\| \leq 1\},$$

в то время как первая часть дает

$$\|u\| = \sup\{\|\langle u, v \rangle\| : v \in \mathcal{H}E^*, \|v\| \leq 1\}.$$

Дальше ясно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если E – квантовое пространство, E^* – его квантовое сопряженное, а E^{**} – его квантовое второе сопряженное (т.е. квантовое сопряженное к E^*), то каноническое вложение $i: E \rightarrow E^{**}$ также является полностью изометрическим оператором. Однако этот факт гораздо глубже предыдущего предложения, и он опирается на трудно доказываемое равенство $\|u\| = \sup\{\|\varphi_\infty(u)\|; \varphi \in \mathcal{CB}(E, \mathcal{H}), \|\varphi\|_{cb} \leq 1\}, u \in E$. (Оно же играет главную роль в доказательстве теоремы Руана, упомянутой в замечании 1.)

Далее, при тех же E и E^* мы можем рассмотреть E как квантовое предсопряженное пространство к E^* . Нетрудно показать, опираясь на только что указанное свойство канонического вложения, что мы получим не что иное, как исходное квантовое пространство. Однако доказательство приведенного выше равенства для $\|u\|$ и его следствий выходит за пределы настоящей статьи.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть, напротив, первоначально задано квантование пространства E^* , в E рассмотрена структура квантового предсопряженного пространства и, наконец, E^* рассмотрено как квантовое сопряженное к этому последнему. Получим ли мы исходную структуру квантового пространства в E^* ? Оказывается, не всегда (хотя в большинстве известных примеров это действительно так). Более того, как показал Ле Мерди [14] (в рамках “матричного” подхода), некоторые сопряженные банаховы пространства можно проквантовать так, что получившееся квантовое пространство не является квантовым сопряженным ни к какому квантовому пространству.

Чем оборачивается определение квантовой нормы, порожденной двойственностью, при рассмотрении наиболее известных пространств, встречающихся в анализе? В этой статье мы ограничимся лишь одним важным примером. Речь пойдет о пространстве ядерных операторов (называемых также операторами следового класса), действующих в некотором гильбертовом пространстве H ; обозначим его через $\mathcal{N}(H)$. Оно снабжено так называемой ядерной нормой $\|y\|_{\mathcal{N}} := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|\}$, где нижняя грань взята по всевозможным представлениям y в виде суммы абсолютно сходящегося ряда одномерных операторов z_n (см., например, [13; § 2.7]).

Желая проквантовать пространство $\mathcal{N}(H)$, мы рассмотрим наряду с ним пространство $\mathcal{K}(H)$, на этот раз с обычной операторной нормой. Оба пространства связаны двойственностью $\mathcal{T}: \mathcal{K}(H) \times \mathcal{N}(H) \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \mapsto \text{tr}(xy)$, где $\text{tr}(\cdot)$ – операторный след. Как известно, эта двойственность позволяет реализовать $\mathcal{N}(H)$ как сопряженное нормированное пространство к $\mathcal{K}(H)$. Точный смысл сказанного, в обозначениях § 2, состоит в том, что оператор $\mathcal{T}^{\mathcal{N}(H)}: \mathcal{N}(H) \rightarrow \mathcal{K}(H)^*$ является изометрическим изоморфизмом. (Это теорема Шэттена–фон Нейманна; см., например, [15; теорема 3.4.4].) Таким образом, для $\mathcal{T}$ и любого квантования пространства $\mathcal{K}(H)$ условия теоремы 1'', касающиеся второго аргумента, выполнены. В частности, в силу этой теоремы возникает квантование пространства $\mathcal{N}(H)$, порожденное нашей двойственностью и конкретным квантованием пространства $\mathcal{K}(H)$. Это квантование мы

будем называть *стандартным*. (Его можно рассматривать как специальный случай стандартного квантования пространства $\mathcal{CB}(E, G)$ при $E = \mathcal{K}(H)$ и $G = \mathbb{C}$.) Подчеркнем, что это квантование не имеет ничего общего с *конкретным* квантованием $\mathcal{N}(H)$ как (незамкнутого) нормированного подпространства в $\mathcal{B}(H)$.

Введенное квантование позволяет отождествить $\mathcal{N}(H)$ с $\mathcal{K}(H)^*$ не только как нормированные, но и как квантовые пространства. Действительно, простая проверка на элементарных тензорах показывает, что для всех $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$ и $v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$ выполнено $\mathcal{T}_w(u, v) = \langle\langle u, \mathcal{T}_\infty^{\mathcal{N}(H)}(v) \rangle\rangle$. Отсюда в силу определений норм элементов v и $\mathcal{T}_\infty^{\mathcal{N}(H)}(v) \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)^*]$ как соответствующей верхней грани мы видим, что $\mathcal{T}_\infty^{\mathcal{N}(H)}$ – изометрический оператор. Следовательно, $\mathcal{T}^{\mathcal{N}(H)}$ с учетом его биективности – полностью изометрический изоморфизм.

Поскольку $\langle x, \mathcal{T}^{\mathcal{N}(H)}(y) \rangle = \mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}^x(y)$, из теоремы Шэттена-фон Нейманна сразу следует, что условия теоремы 1'', касающиеся первого аргумента, выполнены для $\mathcal{T}$ и любого квантования пространства $\mathcal{N}(H)$. Поэтому мы вправе говорить о квантовой норме в $\mathcal{K}(H)$, составляющей предмет приведенной ниже теоремы.

На протяжении оставшейся части статьи $\{K\}$ – это направленное по включению множество $\{K\}$ всевозможных конечномерных подпространств в H , а P_K для каждого $K \in \{K\}$ – это действующий в H проектор на H_K .

ТЕОРЕМА 4. *Квантовая норма в $\mathcal{K}(H)$, порожденная двойственностью $\mathcal{T}$ и стандартной квантовой нормой в $\mathcal{N}(H)$, совпадает с исходной (равносильно, конкретной) квантовой нормой в этом пространстве.*

Разумеется, эта теорема представляет собой специальный случай общего факта, упомянутого в замечании 6 (переход от E к E^* и “назад”). Но мы ее получим с помощью сравнительно элементарных средств теории операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конкретную квантовую норму в пространствах $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L)$, равно как и стандартную квантовую норму в $\mathcal{N}(H)$, мы будем по-прежнему обозначать через $\|\cdot\|$, а рассматриваемую новую квантовую норму в $\mathcal{K}(H)$ – через $\|\cdot\|_1$.

Возьмем $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$. В силу $\|\mathcal{T}\|_{wcb} = 1$ (см. теорему 1'') для всех $v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$, $\|v\| \leq 1$, выполнено $\|\mathcal{T}_w(u, v)\| \leq \|u\|$. Отсюда, поскольку

$$\|u\|_1 = \sup\{\|\mathcal{T}_w(u, v)\| : v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)], \|v\| \leq 1\} \quad (12)$$

(см. “симметричную часть” той же теоремы), мы видим, что $\|u\|_1 \leq \|u\|$. Чтобы установить обратное неравенство, возьмем указанное выше направленное множество $\{K\}$. Как следует из равенства (11), достаточно предъявить направленность $v_K \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$, $K \in \{K\}$, такую, что $\|v_K\| \leq 1$ для всех K и $\lim_K \|\mathcal{T}_w(u, v_K)\| = \|u\|$. Этим мы и займемся.

Для каждого $K \in \{K\}$ зафиксируем произвольный частично изометрический оператор $S_K: H \rightarrow L$ с начальным проектором P_K и положим

$$\sigma_K: \mathcal{K}(H) \rightarrow \mathcal{K}: x \mapsto S_K x S_K^*.$$

В каждом $K \in \{K\}$ произвольно выберем ортонормированный базис $g_1, \dots, g_n$ и положим для краткости $g_{ij} := g_i \circ g_j$. (Этот оператор, будучи одномерным,

принадлежит обоим пространствам $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{N}(H)$.) Наконец, в $\mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$ рассмотрим направленность

$$v_K := \sum_{i,j=1}^n [\sigma_K(g_{ij})] g_{ji}.$$

Мы видим, что для любых $a \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{K}(H)$ выполнено

$$\mathcal{T}_w(ax, v_K) = \sum_{i,j=1}^n \text{tr}(xg_{ij}) a \diamond \sigma_K(g_{ji}) = a \diamond \sigma_K \left[\sum_{i,j=1}^n \text{tr}(xg_{ij})(g_{ji}) \right].$$

Теперь напомним, что для всех $\xi, \eta \in H$ след одномерного оператора $\xi \circ \eta$ есть в точности $\langle \xi, \eta \rangle$. Вместе с формулами (10), касающимися одномерных операторов, это дает

$$\text{tr}(xg_{ij})(g_{ji}) = \text{tr}(x(g_i \circ g_j)g_j \circ g_i) = \langle x(g_i), g_j \rangle g_j \circ g_i = (g_j \circ g_j)(x(g_i) \circ g_i) = g_{jj}xg_{ii}.$$

Отсюда для любых $a \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{K}(H)$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_w(ax, v_K) &= \sum_{i,j=1}^n \text{tr}(xg_{ij}) a \diamond \sigma_K(g_{ji}) = a \diamond \sigma_K \left[\sum_{i,j=1}^n \text{tr}(xg_{ij})(g_{ji}) \right] \\ &= a \diamond \sigma_K \left[\sum_{i,j=1}^n g_{jj}xg_{ii} \right] = a \diamond \sigma_K \left[\left(\sum_{i=1}^n g_{ii} \right) x \left(\sum_{j=1}^n g_{jj} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ясно, что $\sum_{i=1}^n g_{ii}$ — это не что иное, как P_K . Это означает, что $S_K \sum_{i=1}^n g_{ii} = S_K$ и $\sum_{j=1}^n g_{jj} S_K^* = S_K^*$. В объединении с предыдущей цепочкой равенств это означает, что компактный оператор $\mathcal{T}_w(ax, v_K)$ совпадает с $a \diamond \sigma_K(x)$ или, что то же самое, с $\varsigma((\sigma_K)_\infty(ax))$, где, как мы помним, $(\sigma_K)_\infty(ax) \in \mathcal{K}[\mathcal{K}]$. Следовательно, с учетом линейности соответствующих отображений для каждого $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$ выполнено $\mathcal{T}_w(u, v_K) = \varsigma((\sigma_K)_\infty(u))$. Но $\varsigma: \mathcal{B}(L \otimes L) \rightarrow \mathcal{B}$ — изометрический изоморфизм. Поэтому

$$\|\mathcal{T}_w(u, v_K)\| = \|(\sigma_K)_\infty(u)\|. \quad (13)$$

А теперь напомним, что $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{K}$ взяты с конкретными квантовыми нормами, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)] & \xrightarrow{(\sigma_K)_\infty} & \mathcal{K}[\mathcal{K}] \\ \hat{j}_{\mathcal{K}(H)} \downarrow & & \downarrow \hat{j}_{\mathcal{K}} \\ \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H) & \xrightarrow{\rho_K} & \mathcal{B}(L \dot{\otimes} L) \end{array} ,$$

в которой $\hat{j}_{(\cdot)}$ — естественные вложения из § 1, а ρ_K переводит оператор u в композицию $(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K^*)$. Эта диаграмма, как легко проверить на элементарных тензорах, коммутативна. Поэтому для каждого $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$ при его отождествлении с оператором $j_{\mathcal{K}(H)}(u)$ выполнено

$$\|(\sigma_K)_\infty(u)\| = \|(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K^*)\|.$$

Следовательно, с учетом равенства (13)

$$\|\mathcal{T}_w(u, v_K)\| = \|(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K^*)\|. \quad (14)$$

Это равенство вместе с (11) из теоремы 1'' и тем, что $\|\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K\| = \|\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K^*\| = 1$, влечет $\|v_K\| \leq 1$ для всех K .

Далее, $\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K$ – частично изометрический оператор с начальным проектором $\mathbf{1} \dot{\otimes} P_K$. Отсюда ясно, что

$$\|(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} S_K^*)\| = \|(\mathbf{1} \dot{\otimes} P_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} P_K)\|. \quad (15)$$

Но, как хорошо известно, P_K , $K \in \{K\}$, – ограниченная аппроксимативная единица в $\mathcal{K}(H)$. Отсюда очевидным образом вытекает, что

$$\lim_K \|(\mathbf{1} \dot{\otimes} P_K)u(\mathbf{1} \dot{\otimes} P_K)\| = \|u\|$$

для всех $u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$. Вместе с равенствами (14) и (15) это дает

$$\lim_K \|\mathcal{T}_w(u, v_K)\| = \|u\|.$$

Дальше ясно.

Перейдем ко второй классической двойственности с участием пространства $\mathcal{N}(H)$, а именно, $\mathcal{T}: \mathcal{N}(H) \times \mathcal{B}(H): (y, x) \mapsto \text{tr}(yx)$. На основании второй теоремы Шэттена–фон Нейманна она порождает изометрический изоморфизм $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mathcal{B}(H)}: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{N}(H)^*$, позволяющий отождествлять $\mathcal{B}(H)$ с сопряженным нормированным пространством к $\mathcal{N}(H)$. Покажем, что и в этом случае происходит отождествление соответствующих квантовых пространств.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{B}(H)$ рассмотрено как конкретное квантовое пространство, а $\mathcal{N}(H)^*$ – как квантовое сопряженное к стандартному квантовому пространству $\mathcal{N}(H)$. Тогда $\widetilde{\mathcal{T}}^{\mathcal{B}(H)}$ – полностью изометрический изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва сделаем несколько предварительных наблюдений. Положим для каждого K (см. выше) $R_K^1: \mathcal{N}(H) \rightarrow \mathcal{N}(H): y \mapsto yP_K$ и $R_K^2: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H): x \mapsto P_Kx$ и рассмотрим для всех $v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$, $u \in \mathcal{K}[\mathcal{B}(H)]$ элементы $v(\mathbf{1} \otimes P_K) := (R_K^1)_\infty(v) \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$ и $(\mathbf{1} \otimes P_K)u := (R_K^2)_\infty(u) \in \mathcal{K}[\mathcal{B}(H)]$. (Они же, при интерпретации v , u и $\mathbf{1} \otimes P_K$ как операторов, действующих в $L \dot{\otimes} H$, суть просто операторные композиции.) Таким образом, для элементарных тензоров введенные элементы имеют вид $(by)(\mathbf{1} \otimes P_K) = b[yP_K]$ и $(\mathbf{1} \otimes P_K)(ax) = a[P_Kx]$, $b, a \in \mathcal{K}$, $y \in \mathcal{N}(H)$, $x \in \mathcal{B}(H)$. Выделим равенства

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}}_w(v(\mathbf{1} \otimes P_K), u) &= \widetilde{\mathcal{T}}_w(v, (\mathbf{1} \otimes P_K)u), \\ \|\widetilde{\mathcal{T}}_w(u, v)\| &= \|\mathcal{T}_w(v, u)\|, \quad v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)], \quad u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Первое равенство легко проверяется на элементарных тензорах, а второе следует из формулы $\widetilde{\mathcal{T}}_w(v, u) = \Delta \mathcal{T}_w(u, v) \Delta$, которая также, с учетом равенства (1), легко проверяется на элементарных тензорах.

Теперь покажем, что для тех же v и u

$$\widetilde{\mathcal{T}}_w(v, u) = \lim_K \widetilde{\mathcal{T}}_w(v(\mathbf{1} \otimes P_K), u). \quad (17)$$

Сперва рассмотрим случай $v = by$ и $u = ax$. Тогда утверждение сводится к доказательству равенства $\mathrm{tr}(yx)b \diamond a = \lim_K \mathrm{tr}(yP_K x)b \diamond a$. Но направленность P_K является (неограниченной) аппроксимативной единицей в $\mathcal{N}(H)$. (Это хорошо известный факт, легко следующий из приведенного в начале раздела определения ядерной нормы.) Кроме того, следовый функционал на $\mathcal{N}(H)$ ограничен. В объединении оба факта дают то, что $\mathrm{tr}(yP_K x) = \mathrm{tr}(xyP_K)$ стремится к $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$. Тем самым равенства (16) справедливы для элементарных тензоров, а значит, и для их сумм, т.е. в полной общности.

Далее, как мы знаем, $\|\mathcal{T}\|_{wcb} = 1$, а $\|(\mathbf{1} \otimes P_K)u\|$, $u \in \mathcal{K}[\mathcal{B}(H)]$, – это норма соответствующего оператора в $L \dot{\otimes} H$. Объединяя эти факты с равенством $\|\widetilde{\mathcal{T}}_w(u(\mathbf{1} \otimes P_K), v)\| = \|\mathcal{T}_w((\mathbf{1} \otimes P_K)v, u)\|$ – прямым следствием формул (16), а также с равенством (17), мы получаем, что для всех v и u справедлива оценка

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_w(v, u)\| \leq \|v\| \|u\|; \quad (18)$$

иными словами, $\widetilde{\mathcal{T}}$ (а не только $\mathcal{T}$) – слабо полностью ограниченный биооператор и $\|\widetilde{\mathcal{T}}\|_{wcb} \leq 1$.

Перейдем к основной части доказательства. Зафиксируем $u \in \mathcal{K}[\mathcal{B}(H)]$ и положим $\Phi := \widetilde{\mathcal{T}}_\infty^{\mathcal{B}(H)}(u)$. Простая проверка на элементарных тензорах показывает, что

$$\langle v, \Phi \rangle = \widetilde{\mathcal{T}}_w(v, u) \quad (19)$$

для всех $v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$. Отсюда в силу оценки (17) и определения квантового сопряженного пространства мы получаем, что $\|\Phi\| \leq \|u\|$. Осталось установить обратное неравенство.

Обратим внимание на очевидное соотношение

$$\mathcal{T}_w(u', v(\mathbf{1} \otimes P_K)) = \mathcal{T}_w((\mathbf{1} \otimes P_K)u', v), \quad u' \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)], \quad v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$$

(ср. первое из равенств (16)). Из него вытекает, что

$$\|v(\mathbf{1} \otimes P_K)\| \leq \sup\{\|\mathcal{T}_w((\mathbf{1} \otimes P_K)u', v)\| : u' \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)], \|u'\| \leq 1\}.$$

Поскольку $\mathcal{K}(H)$ – конкретное квантовое пространство, $\|(\mathbf{1} \otimes P_K)u'\| \leq \|u'\|$. Отсюда наша верхняя грань не превосходит $\sup\{\|\mathcal{T}_w(u', v)\| : u' \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)], \|u'\| \leq 1\}$, т.е. $\|v\|$. Это означает, что $\|v(\mathbf{1} \otimes P_K)\| \leq \|v\|$ для всех $v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)]$ и K . Как следствие этого факта, определения нормы в $\mathcal{K}[\mathcal{B}(H)]^*$ и формулы (19) имеем

$$\|\Phi\| \geq \sup\{\|\widetilde{\mathcal{T}}_w(v(\mathbf{1} \otimes P_K), u)\| : v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)], \|v\| \leq 1\}.$$

Из равенств (16) следует, что последняя верхняя грань равна

$$\sup\{\|\mathcal{T}_w((\mathbf{1} \otimes P_K)u, v)\| : v \in \mathcal{K}[\mathcal{N}(H)], \|v\| \leq 1\}.$$

Но согласно теореме 4 это число есть норма элемента $(1 \otimes P_K)u \in \mathcal{K}[\mathcal{K}(H)]$, или, что то же самое, норма оператора $(1 \dot{\otimes} P_K)u \in \mathcal{B}(L \dot{\otimes} H)$.

Итак, $\|\Phi\| \geq \|(1 \dot{\otimes} P_K)u\|$ для всех K . Но, как известно, норма операторов $(1 \dot{\otimes} P_K)u$ и u есть верхняя грань чисел соответственно $|\langle [(1 \otimes P_K)u]\xi, \eta \rangle|$ и $|\langle u\xi, \eta \rangle|$ по всем ξ, η из единичного шара пространства $L \dot{\otimes} H$ и к тому же $\xi = \lim_K (1 \otimes P_K)\xi$ для всех $\xi \in L \dot{\otimes} H$. (Последнее легко следует из очевидного равенства $\zeta = \lim_K P_K \zeta$ для всех $\zeta \in H$.) Это означает, конечно, что

$$\sup_K \|(1 \dot{\otimes} P_K)u\| \geq \|u\|.$$

Дальше ясно.

Список литературы

- [1] E. G. Effros, “Advances in quantized functional analysis”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1, 2 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 906–916.
- [2] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator spaces*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **23**, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [3] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [4] D. P. Blecher, C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules – an operator space approach*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [5] G. Pisier, *Introduction to operator space theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [6] C. Webster, *Matrix compact sets and operator approximation properties*, [arXiv:math.FA/9804093](https://arxiv.org/abs/math.FA/9804093).
- [7] C.-K. Ng, *From operator spaces to topological bimodules*, preprint.
- [8] B. Magajna, “The minimal operator module of a Banach module”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **42:1** (1999), 191–208.
- [9] C. Pop, *Bimodules normés représentables sur les espaces hilbertiens*, [arXiv:math.OA/9807054](https://arxiv.org/abs/math.OA/9807054).
- [10] A. Ya. Helemskii, “Tensor products in quantum functional analysis: non-coordinate approach”, *Topological Algebras and Applications* 2005, Amer. Math. Soc., Providence, RI (to appear).
- [11] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, “A new approach to operator spaces”, *Canad. Math. Bull.*, **34** (1991), 329–337.
- [12] D. P. Blecher, V. I. Paulsen, “Tensor products of operator spaces”, *J. Funct. Anal.*, **99** (1991), 262–292.
- [13] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004.
- [14] C. Le Merdy, “On the duality of operator spaces”, *Canad. Math. Bull.*, **38:3** (1995), 334–346.
- [15] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*. I, Springer-Verlag, New York, 1979.

А. Я. Хелемский (A. Ya. Helemskii)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexander@helemskii.mccme.ru

Поступила в редакцию
 10.11.2005 и 12.07.2006