Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Душистова, О разбиении отрезка $[0, 1]$, порожденном последовательностями Броко, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 67–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:08:20

УДК 511.216

А. А. Душистова

О разбиении отрезка $[0, 1]$, порожденном последовательностями Броко

Пусть $p_{i,n}$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, — длины интервалов между соседними точками последовательности Броко F_n . Получена асимптотическая формула для величины $\sigma(F_n) = \sum_{i=1}^{N(n)} p_{i,n}^\beta$, улучшающая ранее известные оценки.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Основные определения и формулировки

В настоящей работе рассматривается разбиение отрезка $[0, 1]$ точками последовательностей Броко. Последовательности Броко F_n , $n = 1, 2, \dots$, определяются по индукции следующим образом. При $n = 1$ положим

$$F_1 = \{0, 1\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Пусть $n \geq 1$ и для всех $k \leq n$ множества F_k определены. Определим F_{n+1} . Рассмотрим дроби из F_n , упорядоченные по возрастанию:

$$0 = x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{N(n),n} = 1, \quad N(n) = 2^{n-1}. \quad (1)$$

Тогда

$$F_{n+1} = F_n \cup Q_{n+1},$$

где Q_{n+1} — множество медиант соседних дробей в F_n , т.е.

$$Q_{n+1} = \{x_{i,n} \oplus x_{i-1,n}, i = 1, \dots, N(n)\},$$

где

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Элементы Q_n известны как дроби Броко порядка n . Последовательности Броко (еще их называют последовательностями Штерна–Броко) появились в [1], [2]. Основные свойства последовательностей Броко можно найти в [3]. В последнее время к ним вновь проявился интерес с точки зрения эргодической теории чисел и теории динамических систем (см., например, [4] и библиографию оттуда). Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ точками из F_n , т.е. точками вида (1), $p_{i,n} = x_{i,n} - x_{i-1,n}$, $i = 1, \dots, N(n)$, — длины интервалов $[x_{i-1,n}, x_{i,n}]$. Для фиксированного β положим

$$\sigma(F_n) = \sum_{i=1}^{N(n)} p_{i,n}^\beta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00518-а).

В работе [5] Н. Г. Мошевитин и А. Жиглявский рассматривали поведение $\sigma(F_n)$ при n стремящемся к бесконечности. Там было доказано следующее асимптотическое равенство.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\beta > 1$

$$\sigma_\beta(F_n) = \frac{2}{n^\beta} \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + O\left(\frac{\log n}{n^{(\beta+1)(2\beta-1)/(2\beta)}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\zeta(s)$ – ζ -функция Римана.

Основным результатом настоящей работы является доказательство более точного результата:

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\beta > 1$ в случае, если 2β целое, выполнено

$$\sigma_\beta(F_n) = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + \sum_{0 \leq k < \beta-2} C_k^* \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{\log n}{n^{3\beta-2}}\right),$$

в противном случае

$$\sigma_\beta(F_n) = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + \sum_{0 \leq k < \beta-2} C_k^* \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{3\beta-2}}\right),$$

где $C_k(\beta)$, $1 \leq k \leq 2\beta-2$, $C_k^*(\beta)$, $0 \leq k \leq \beta-2$, – некоторые положительные константы, зависящие от β .

При $\beta \in (1, 1.5]$ оценка в теореме 2 имеет вид

$$\sigma_\beta(F_n) = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + O\left(\frac{\log n}{n^{3\beta-2}}\right).$$

Здесь остаточный член лучше, чем в теореме 1, поскольку при $1 < \beta \leq 1.5$ выполнено $3\beta-2 > (\beta+1)(2\beta-1)/(2\beta)$. При $\beta > 1.5$ теорема 2 дает дополнительные члены в асимптотике.

Отметим, что история вопроса и обзор близких результатов имеются во введении упомянутой ранее работы [5].

§ 2. Некоторые обозначения и формулировка вспомогательного результата

Хорошо известно, что для дробей Брокера порядка n сумма неполных частных в представлении в виде цепной дроби равна n , т.е.

$$Q_n = \left\{ \frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_t], \quad a_t \geq 2, \quad a_1 + \dots + a_t = n \right\}.$$

Пусть A – множество всех целых векторов $a = (a_1, \dots, a_t)$, $t \geq 1$, $a_j \geq 1$, $j = 1, \dots, t-1$, и $a_t \geq 2$.

Пусть

$$A_n = \{a = (a_1, \dots, a_t) \in A \mid a_1 + \dots + a_t = n\}.$$

Каждому $a = (a_1, \dots, a_t) \in A$ сопоставим цепную дробь $[0; a_1, \dots, a_t]$ (так как целая часть всегда равна нулю, для краткости будем ее обозначать $[a_1, \dots, a_t]$) и

соответствующий континуант $\langle a_1, \dots, a_t \rangle$, пустой континуант равен 1, -1 -й континуант равен 0. По построению для любого $n > 1$ любая дробь из $F_n \setminus (F_1 \cup Q_n)$ имеет двух соседей, принадлежащих Q_n , а любая дробь $p/q \in Q_n$ имеет двух соседей p_-/q_- и p_+/q_+ в $F_n \setminus Q_n$.

ЛЕММА 1. *Для любого $a \in A_n$ соответствующая дробь $p/q \in Q_n$ со знаменателем, равным континуанту $q = \langle a_1, \dots, a_t \rangle$, имеет двух соседей в F_n со знаменателями, равными континуантам*

$$q_- = \langle a_1, \dots, a_{t-1} \rangle, \quad q_+ = \langle a_1, \dots, a_t - 1 \rangle.$$

Аналогично, любая дробь $p/q \in F_{n-1} \setminus F_1$ со знаменателем $\langle a_1, \dots, a_t \rangle$ имеет двух соседей в F_n со знаменателями, равными континуантам

$$\langle a_1, \dots, a_t, n - (a_1 + \dots + a_t) \rangle, \quad \langle a_1, \dots, a_t - 1, 1, n - (a_1 + \dots + a_t) \rangle.$$

Лемма доказывается индукцией по n (см. [5]).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующий вспомогательный результат, который может иметь самостоятельный интерес.

Рассмотрим сумму

$$\sigma_\beta(n) = \sum_{(a_1, \dots, a_t) \in A_n} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_t \rangle^{2\beta}}$$

с фиксированным $\beta > 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $\beta > 1$, если 2β целое, выполнено*

$$\sigma_\beta(n) = \frac{1}{n^{2\beta}} \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + 2 \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right)^2 \right) + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{\log n}{n^{4\beta-2}}\right),$$

в противном случае

$$\sigma_\beta(n) = \frac{1}{n^{2\beta}} \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + 2 \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right)^2 \right) + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{4\beta-2}}\right),$$

где C'_k – некоторые эффективные константы, зависящие от β .

На самом деле для доказательства теоремы 2 достаточно главного члена в асимптотике теоремы 3. Этот главный член будет получен далее в лемме 9. Отметим, что лемма 9 представляет собой ослабленный вариант теоремы 3 и фактически используется для доказательства теоремы 3 во всей полноте.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Приступим к доказательству теоремы 3. Для этого будем использовать разбиение суммы σ с множеством суммирования A_n на суммы с меньшими множествами суммирования.

Пусть r и w – некоторые натуральные числа, удовлетворяющие условиям $r \geq 1$ и $1 \leq w \leq n$. Тогда $A_n = A_{n,1}^{(1)} \sqcup A_{n,2}^{(1)}$, где

$$A_{n,1}^{(1)} = \{a = (a_1, \dots, a_t) \in A_n \mid \langle a_1, \dots, a_t \rangle < n^r\},$$

$$A_{n,2}^{(1)} = A_n \setminus A_{n,1}^{(1)} = \{a \in A_n \mid \langle a_1, \dots, a_t \rangle \geq n^r\}.$$

Затем разобьем $A_{n,1}^{(1)}$ на

$$A_{n,1}^{(2)} = \left\{ a \in A_{n,1}^{(1)} \mid \max_{1 \leq j \leq t} a_j > n - w \right\}$$

и

$$A_{n,2}^{(2)} = A_{n,1}^{(1)} \setminus A_{n,1}^{(2)} = \left\{ a \in A_{n,1}^{(1)} \mid \max_{1 \leq j \leq t} a_j \leq n - w \right\}.$$

Таким образом, все $a \in A_{n,1}^{(2)}$ имеют по крайней мере одно очень большое неполное частное; с другой стороны, все a_j для $a \in A_{n,2}^{(2)}$ относительно малы.

Итак, $A_n = A_{n,1}^{(2)} \sqcup A_{n,2}^{(2)} \sqcup A_{n,2}^{(1)}$.

Для подмножества $A_{n,i}^{(j)}$ из A определим

$$\Sigma_{n,i}^{(j)} = \sum_{a \in A_{n,i}^{(j)}} \frac{1}{q^{2\beta}}.$$

Таким образом, $\sigma_\beta(n) = \Sigma_{n,2}^{(1)} + \Sigma_{n,1}^{(2)} + \Sigma_{n,2}^{(2)}$. Оценим эти суммы по отдельности.

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 2$, $a = (a_1, \dots, a_t) \in A_n$. Имеем $q = q_+ + q_- \leq nq_-$, $q_- \leq q_+ \leq a_t q_-$,

$$\sum_{a \in A_n} \left(\frac{1}{qq_-} + \frac{1}{qq_+} \right) = 1.$$

Доказательство этой леммы приведено в работе [5].

ЛЕММА 3. Для любого $n \geq 1$ выполнено

$$\Sigma_{n,2}^{(1)} \leq 2^{\beta-1} \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}. \quad (2)$$

(Лемма 3 аналогична [5; лемма 3].)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q(a) = \langle a_1, \dots, a_t \rangle \geq n^r$ для всех a из $A_{n,2}^{(1)}$, то, используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,2}^{(1)} &\leq \sum_{A_{n,2}^{(1)}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} \leq \max_{A_{n,2}^{(1)}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta-1}} \sum_{A_{n,2}^{(1)}} \frac{1}{qq_+} \leq \max_{A_{n,2}^{(1)}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta-1}} \sum_{A_{n,2}^{(1)}} \left(\frac{1}{qq_+} + \frac{1}{qq_-} \right) \\ &\leq \max_{A_{n,2}^{(1)}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta-1}} \leq \frac{2^{\beta-1}}{q^{2(\beta-1)}} \leq \frac{2^{\beta-1}}{n^{2r(\beta-1)}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для всякого $a \in A_{n,1}^{(1)}$, $n \geq 2$, имеем

$$t \leq Kr \log n, \quad K = \left(\log \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $a \in A_{n,1}^{(1)}$ справедливо

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^t \leq \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r, \quad t \left(\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \leq r \log n.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При $n \rightarrow \infty$ имеем следующую оценку для $\Sigma_{n,2}^{(2)}$:

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} \ll \frac{n \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}}. \quad (3)$$

Отметим, что лемма 5 может быть несколько уточнена, но это не повлияет на основной результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 для всех $a \in A_{n,1}^{(1)}$ выполнено $t \leq Kr \log n$. Так как $n = a_1 + \dots + a_t \leq t \max a_j$, то $\max a_j \geq n/(Kr \log n)$.

Пусть $a \in A_{n,2}^{(2)}$ и j таковы, что $a_j = \max\{a_1, \dots, a_t\}$. Так как $a_j \leq n - w$, то для суммы остальных a_j имеем $\sum_{i \neq j} a_j > w$ и, аналогично рассуждению, проведенному выше, $\max_{i \neq j} a_j \geq w/(Kr \log n)$. Таким образом, получаем, что для всех $a \in A_{n,2}^{(2)}$ существуют два различных неполных частных a_k и a_l , $k \neq l$, таких, что

$$a_k \geq \frac{w}{Kr \log n}, \quad a_l \geq \frac{w}{Kr \log n}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} \leq \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k, l, k \neq l : a_k, a_l \geq w/(Kr \log n)}} \frac{1}{q^{2\beta}}.$$

С помощью известной формулы для континуантов (см. [3]) получим

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_t \rangle &= a_i \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \\ &\times \left(1 + \frac{1}{a_i} [a_{i-1}, \dots, a_1] + \frac{1}{a_i} [a_{i+1}, \dots, a_t] \right) \\ &= a_i \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \left(1 + \frac{1}{a_i} [a_{i-1}, \dots, a_1] \right) \\ &\times \left(1 + [a_{i+1}, \dots, a_t] \frac{1}{a_i + [a_{i-1}, \dots, a_1]} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда

$$q(a) \geq a_k a_l \langle a_1, \dots, a_{\min(k,l)-1} \rangle \langle a_{\min(k,l)+1}, \dots, a_{\max(k,l)-1} \rangle \langle a_{\max(k,l)+1}, \dots, a_t \rangle.$$

Заметим, что при фиксированном X элементы множества

$$\{a \in A_n \mid \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r, \exists k, l, k \neq l : a_k, a_l \geq X\}$$

имеют вид

$$(a_1, \dots, a_{\min(k,l)-1}, T, a_{\min(k,l)+1}, \dots, a_{\max(k,l)-1}, P, a_{\max(k,l)+1}, \dots, a_t),$$

где $T, P \geq X$, длины

$$(a_1, \dots, a_{\min(k,l)-1}), (a_{\min(k,l)+1}, \dots, a_{\max(k,l)-1}), (a_{\max(k,l)+1}, \dots, a_t)$$

не фиксированы, а сумма

$$a_1 + \dots + a_{l-1} + a_{l+1} + \dots + a_{k-1} + a_{k+1} + \dots + a_t = n - T - P.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_{\min(k,l)-1} &= u, \\ a_{\min(k,l)+1} + \dots + a_{\max(k,l)-1} &= v, \\ a_{\max(k,l)+1} + \dots + a_t &= s, \\ u + v + s &= n - T - P. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,2}^{(2)} &\leq \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k, l, k \neq l: a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{(a_k a_l \langle a_1, \dots, a_{\min(k,l)-1} \rangle)^{2\beta}} \\ &\quad \times \frac{1}{(\langle a_{\min(k,l)+1}, \dots, a_{\max(k,l)-1} \rangle \langle a_{\max(k,l)+1}, \dots, a_t \rangle)^{2\beta}} \\ &\leq \sum_{\substack{a_k + a_l \leq n \\ a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{(a_k a_l)^{2\beta}} S_n(a_k, a_l), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_n(a_k, a_l) &= \sum_{u+v+s=n-a_k-a_l} \sum_{a_1+\dots+a_{\min(k,l)-1}=u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{\min(k,l)-1} \rangle^{2\beta}} \\ &\quad \times \sum_{a_{\min(k,l)+1}+\dots+a_{\max(k,l)-1}=v} \frac{1}{\langle a_{\min(k,l)+1}, \dots, a_{\max(k,l)-1} \rangle^{2\beta}} \\ &\quad \times \sum_{a_{\max(k,l)+1}+\dots+a_t=s} \frac{1}{\langle a_{\max(k,l)+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Оценим $S_n(a_k, a_l)$. Так как данная сумма может быть оценена сверху как произведение трех независимых сумм вида

$$\sum_{x_1+\dots+x_r \leq \infty} \frac{1}{\langle x_1, \dots, x_r \rangle^{2\beta}},$$

то для $S_n(a_k, a_l)$ верно

$$\begin{aligned} S_n(a_k, a_l) &\leq \left(\sum_{x_1+\dots+x_r \leq \infty} \frac{1}{\langle x_1, \dots, x_r \rangle^{2\beta}} \right)^3 \\ &\leq \left(1 + 2 \sum_{\substack{x_1+\dots+x_r \leq \infty \\ x_r \geq 2}} \frac{1}{\langle x_1, \dots, x_r \rangle^{2\beta}} \right)^3 = \left(1 + 2 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right)^3. \end{aligned}$$

Тогда для суммы $\Sigma_{n,2}^{(2)}$ справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\substack{a_k + a_l \leq n \\ a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{(a_k a_l)^{2\beta}} \ll \left(n - 2 \frac{w}{K \log n} \right) \left(\frac{K^{4\beta} \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}} \right),$$

где $n - 2w/(K \log n)$ – число слагаемых в данной сумме, а $(K^{4\beta} \log^{4\beta} n)/w^{4\beta}$ – оценка сверху для $1/(a_k a_l)^{2\beta}$. Таким образом, получим

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} \ll \left(n - 2 \frac{w}{K \log n} \right) \left(\frac{\log^{4\beta} n}{w^{4\beta}} \right) = O\left(\frac{n \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}} \right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6 (о множествах).

При $w < n/2$

$$Q = \{a \in A_n \mid \exists j : a_j > n - w\} = \bigsqcup_{X=n-w}^n \bigsqcup_{u+v=n-X} P(u, v, X),$$

где

$$P(u, v, X) = \{a \in A \mid a = (a_1, \dots, a_t, X, a'_1, \dots, a'_{t'}), \\ a_1 + \dots + a_t = u, \quad a'_1 + \dots + a'_{t'} = v\},$$

а знак $\bigsqcup$ означает прямое объединение, т.е. объединение таких множеств, что $P(u, v, X)$ и $P(u', v', X')$ не пересекаются при $(u, v, X) \neq (u', v', X')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in Q$, тогда существует неполное частное $a_j = Y > n - w$. Следовательно, этот элемент принадлежит множеству $P(a_1 + \dots + a_{j-1}, a_{j+1} + \dots + a_t, Y)$. Обратно, если $a \in \bigsqcup_{X=w}^n \bigsqcup_{u+v=n-X} P(u, v, X)$, то $a \in A_n$ и существует неполное частное $a_i > n - w$.

Докажем, что элемент из Q не может принадлежать сразу нескольким множествам $P(u, v, X)$. Пусть это не так и существует $a \in Q$ такой, что $a \in P(u, v, X)$ и $a \in P(u^*, v^*, X^*)$. Значит, он может быть представлен как

$$a = (a_1, \dots, a_{i-1}, X, a_{i+1}, \dots, a_t), \\ a_1 + \dots + a_{i-1} = u, \quad a_{i+1} + \dots + a_t = v, \quad u + v = n - X,$$

и

$$a = (a_1^*, \dots, a_{j-1}^*, X^*, a_{j+1}^*, \dots, a_t^*), \\ a_1^* + \dots + a_{j-1}^* = u^*, \quad a_{j+1}^* + \dots + a_t^* = v^*, \quad u^* + v^* = n - X^*.$$

Пусть $i \neq j$. Тогда в a существуют два неполных частных, больших $n/2$. Отсюда $\sum a_i > n$, что противоречит условию $a \in Q$.

Следовательно, $i = j$, т.е. $X = X^*$, и, очевидно, $(u, v) = (u^*, v^*)$, т.е. множества $P(u, v, X)$ и $P(u^*, v^*, X^*)$ совпадают. Лемма доказана.

ЛЕММА 7 (о коэффициенте при главном члене). Пусть $w < n/2$. Тогда для суммы

$$R_0 = \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}}$$

справедлива асимптотика

$$R_0 = \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} = C_0 + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}}\right),$$

где

$$C_0 = \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + 2\left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)}\right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &= \sum_{X=n-w}^n \sum_{u+v=n-X} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{j-1}=u \\ a_{j+1}+\dots+a_t=v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &= \sum_{u+v \leq w} \sum_{a_1+\dots+a_{j-1}=u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_{j+1}+\dots+a_t=v \\ a_t \geq 2}} \frac{1}{\langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Разобьем сумму на две части, выделяя слагаемое Σ_1 с $u = 1$. Заменяя сумму при $u > 1$ на удвоенную сумму Σ_2 по множеству с последним неполным частным, большим или равным двум, т.е. по множеству A_n , получаем

$$R_0 = \Sigma_1 + 2\Sigma_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{v \leq w-1} \sum_{\substack{a_{j+1}+\dots+a_t=v \\ a_t \geq 2}} \frac{1}{\langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} = \sum_{v \leq w-1} \sigma_\beta(v), \\ \Sigma_2 &= \sum_{u+v \leq w} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{j-1}=u \\ a_{j-1} \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_{j+1}+\dots+a_t=v \\ a_t \geq 2}} \frac{1}{\langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &= \sum_{u+v \leq w} \sigma_\beta(u) \sigma_\beta(v). \end{aligned}$$

Для Σ_1 , проводя вычисления, как в [5; доказательство леммы 7], получим

$$\Sigma_1 = \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-2}}\right).$$

Выведем асимптотику для Σ_2 :

$$\Sigma_2 \leq \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k \leq \infty \\ a_k \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_k \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_l \leq \infty \\ a_l \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_l \rangle^{2\beta}} = \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)}\right)^2.$$

С другой стороны,

$$\Sigma_2 \geq \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k \leq w/2 \\ a_k \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_k \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_l \leq w/2 \\ a_l \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_l \rangle^{2\beta}},$$

так как все такие слагаемые есть в Σ_2 . Итак,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\geq \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k \leq \infty \\ a_k \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_k \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_l \leq \infty \\ a_l \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_l \rangle^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-2}}\right) \\ &= \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)}\right)^2 + O\left(\frac{1}{w^{2(\beta-1)}}\right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\Sigma_2 = \left(\frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)}\right)^2 + O\left(\frac{1}{w^{2(\beta-1)}}\right).$$

Таким образом,

$$R_0 = C_0 + O\left(\frac{1}{w^{2(\beta-1)}}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. При $w \leq n/2 - 2$

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{w}{n^{2\beta+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что при $w \leq n/2 - 2$ у любого элемента множества $A_{n,1}^{(2)}$ существует ровно одно неполное частное, большее, чем $n - w$. Справедливо

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) < n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} - \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}}.$$

Последняя сумма оценивается по лемме 3:

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} = O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right).$$

Получим оценку для оставшейся суммы. Пусть $a_i = n + O(w)$. Воспользовавшись формулами для континуантов (4), получим

$$\begin{aligned} q(a) &= (a_i + [a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]) \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \\ &= n \left(1 + \frac{w}{n} \theta\right) \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle, \end{aligned}$$

где $\theta = \theta(w, n)$, $|\theta| \leq 1$. Тогда, рассматривая $1/q(a)^{2\beta}$ как функцию аргумента a_i и разлагая ее в ряд Тейлора по аргументу $w\theta/n$, получаем

$$\frac{1}{q(a)^{2\beta}} = \frac{1}{n^{2\beta} \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \left(1 + O\left(\frac{w}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} &= \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{n^{2\beta} \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \left(1 + O\left(\frac{w}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \left(1 + O\left(\frac{w}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 7 о коэффициенте при главном члене

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} &= \frac{1}{n^{2\beta}} \left(C_0 + O\left(\frac{1}{w^{2(\beta-1)}}\right) \right) \left(1 + O\left(\frac{w}{n}\right) \right) \\ &= \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{w}{n^{2\beta+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой более слабый вариант теоремы 3, который в дальнейшем будет использоваться в доказательстве более точной оценки.

ЛЕММА 9. При $\beta > (1 + \sqrt{13})/4$

$$\sigma(F_n) = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{\log^{4\beta/(4\beta+1)} n}{n^{2\beta+1-(2\beta+2)/(4\beta+1)}}\right),$$

при $1 < \beta \leq (1 + \sqrt{13})/4$

$$\sigma(F_n) = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta+1-1/(2\beta-1)}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (2), (3), (5), получаем

$$\begin{aligned} \sigma(F_n) &= \Sigma_{n,2}^{(1)} + \Sigma_{n,1}^{(2)} + \Sigma_{n,2}^{(2)} \\ &= \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}}\right) + O\left(\frac{w}{n^{2\beta+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right) + O\left(\frac{n \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}}\right). \end{aligned}$$

Оптимизируя по w и r при

$$w = \min\left\{\frac{n}{2} - 2, \max(n^{1/(2\beta-1)}, n^{(2\beta+2)/(4\beta+1)} \log^{4\beta/(4\beta+1)} n)\right\}, \quad r = \frac{2\beta+1}{2(\beta-1)},$$

получаем при $\beta > (1 + \sqrt{13})/4$

$$\sigma(F_n) = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{\log^{4\beta/(4\beta+1)} n}{n^{2\beta+1-(2\beta+2)/(4\beta+1)}}\right),$$

при $1 < \beta \leq (1 + \sqrt{13})/4$

$$\sigma(F_n) = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta+1-1/(2\beta-1)}}\right).$$

Лемма доказана.

§ 4. Основная лемма и завершение доказательства теоремы 3

Рассмотрим сумму $\Sigma_{n,1}^{(2)}$.

ЛЕММА 10. Пусть $w < n/2$. В случае, если 2β целое,

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{\log n}{n^{4\beta-2}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right), \quad (6)$$

в противном случае

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right), \quad (7)$$

где C'_k – некоторые константы.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 3. С учетом формул (2), (3), (6) и (7) для остаточного члена R при целом 2β справедливо

$$R = O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{\log n}{n^{4\beta-2}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}} + \frac{n \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}}\right),$$

при нецелом 2β

$$R = O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}} + \frac{n \log^{4\beta} n}{w^{4\beta}}\right).$$

Положим

$$w = \frac{n}{2} - 2, \quad r = \frac{2\beta - 1}{\beta - 1}.$$

Подставляя значения w и r в выражение для R , получаем при целом 2β

$$R = O\left(\frac{\log n}{n^{4\beta-2}}\right),$$

при нецелом 2β

$$R = O\left(\frac{1}{n^{4\beta-2}}\right),$$

откуда следует утверждение теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Имеем

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) < n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} - \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}}. \quad (8)$$

Последняя сумма из (8) оценивается по лемме 3

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ \exists i: a_i > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} = O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right).$$

Пусть $a_i = n - v$, где $v = 1, \dots, w - 1$. Воспользовавшись формулами для континуантов (4), получим

$$q(a) = n \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \left(1 - \frac{v}{n} + \frac{1}{n} ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]) \right).$$

Тогда, разложив в ряд Тейлора по параметру

$$\frac{v}{n} - \frac{1}{n} ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])$$

величину $1/q(a)^{2\beta}$, получим при

$$\left| \frac{v}{n} - \frac{1}{n} ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]) \right| < 1$$

абсолютно сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(a)^{2\beta}} &= \frac{1}{n^{2\beta} \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &+ \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \gamma_k(2\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\gamma_k(\beta) = \frac{\beta \cdots (\beta + k - 1)}{k!}. \quad (10)$$

После подстановки (9) в (8) с учетом леммы 6 при выбранном w , заменяя суммирование по a_i на суммирование по v , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in A_n \\ \exists j: a_j > n-w}} \frac{1}{q^{2\beta}} &= \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{u+s=v} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} = u \\ a_{j+1} + \dots + a_t = s}} \frac{1}{n^{2\beta} \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &+ \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{u+s=v} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} = u \\ a_{j+1} + \dots + a_t = s}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \gamma_k(2\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k \\ &+ O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим главный член в полученной асимптотике. По лемме 7 о коэффициенте при главном члене получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{u+v \leq w} \sum_{a_1 + \dots + a_k = u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_k \rangle^{2\beta}} \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_l = v \\ a_l \geq 2}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_l \rangle^{2\beta}} \\ = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}}\right). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим остаток ряда. Поменяв порядки суммирования, запишем его в виде

$$\frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right).$$

Здесь коэффициент R_k вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} R_k &= \gamma_k(2\beta) \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &\quad \times (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k \\ &= \left(\sum_{v=1}^{\infty} - \sum_{v=w}^{\infty} \right) \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_t = v}} \gamma_k(2\beta) \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ &\quad \times (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $k < 2\beta - 2$ и $k \geq 2\beta - 2$. При $k < 2\beta - 2$

$$R_k = C'_k + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-2}}\right),$$

где

$$C'_k = \gamma_k(2\beta) \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_t = v}} \frac{(v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}},$$

что несложно показать, воспользовавшись леммой 9 для проверки сходимости рядов. Теперь рассмотрим случай $k \geq 2\beta - 2$.

При $k > 2\beta - 2$

$$\begin{aligned} R_k &\leq \gamma_k(2\beta) \sum_{v=1}^{w-1} v^k \sum_{s+u=v} \sum_{a_1 + \dots + a_j = s} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_j \rangle^{2\beta}} \sum_{a_1 + \dots + a_i = u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_i \rangle^{2\beta}} \\ &\leq \gamma_k(2\beta) 4C_0^2 w^{k+2-2\beta}. \end{aligned}$$

Просуммировав по $k > 2\beta - 2$, получим

$$\sum_{k > 2\beta - 2} \frac{R_k}{n^{2\beta+k}} \leq \frac{1}{n^{2\beta} w^{2\beta-2}} 4C_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(2\beta) \left(\frac{w}{n}\right)^k = \frac{1}{n^{2\beta} w^{2\beta-2}} 4C_0^2 \left(\frac{1}{1 - w/n}\right)^{2\beta}.$$

При выбранном w величина $1/(1 - w/n)$ не превосходит двух, следовательно, сумму можно оценить как

$$O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2\beta-2}}\right).$$

Может оказаться, что 2β целое. В этом случае при $k = 2\beta - 2$ получим

$$\begin{aligned} \gamma_k(2\beta) \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{j+1}, \dots, a_t \rangle^{2\beta}} \\ \times (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k = O(\log w). \end{aligned}$$

Следовательно, остаток ряда при целом 2β

$$O\left(\frac{\log w}{n^{4\beta-2}} + \frac{1}{w^{2\beta-2}n^{2\beta}}\right),$$

иначе

$$O\left(\frac{1}{w^{2\beta-2}n^{2\beta}}\right).$$

Таким образом, для суммы $\sum_{n,1}^{(2)}$ справедлива асимптотика при целом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{\log n}{n^{4\beta-2}} + \frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right),$$

при нецелом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(2)} = \frac{C_0}{n^{2\beta}} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C'_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{2\beta}w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{2r(\beta-1)}}\right).$$

Лемма доказана.

Тем самым теорема 3 также доказана.

§ 5. Доказательство основного результата

Напомним, что r и w – натуральные параметры, удовлетворяющие условиям $r \geq 1$ и $1 \leq w \leq n$.

Воспользуемся разбиением множества A_n , введенным в доказательстве теоремы 3. Далее, разобьем $A_{n,1}^{(2)}$ на множество $A_{n,1}^{(3)}$, где самое большое неполное частное – последнее, и множество $A_{n,2}^{(3)}$:

$$A_{n,1}^{(3)} = \{a \in A_{n,1}^{(2)} \mid a_t > \max\{a_1, \dots, a_{t-1}\}\}$$

и

$$A_{n,2}^{(3)} = A_{n,1}^{(2)} \setminus A_{n,1}^{(3)} = \{a = (a_1, \dots, a_t) \in A_{n,1}^{(2)} \mid a_t \leq \max\{a_1, \dots, a_{t-1}\}\}.$$

Для подмножества $A_{n,i}^{(j)}$ из A определим

$$\Sigma_{n,i}^{(j)} = \sum_{a \in A_{n,i}^{(j)}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^\beta},$$

где $a = (a_1, \dots, a_t)$, $q = q(a) = \langle a_1, \dots, a_t \rangle$, $q_- = q_-(a)$ и $q_+ = q_+(a)$ определены в лемме 1. Разобьем $\Sigma_{n,1}^{(3)}$ на $\Sigma_{n,1}^{(3)+}$ и $\Sigma_{n,1}^{(3)-}$:

$$\Sigma_{n,1}^{(3)+} = \sum_{a \in A_{n,1}^{(3)}} \frac{1}{(qq_+)^\beta}, \quad \Sigma_{n,1}^{(3)-} = \sum_{a \in A_{n,1}^{(3)}} \frac{1}{(qq_-)^\beta}.$$

Таким образом,

$$\sigma(F_n) = \Sigma_{n,2}^{(1)} + \Sigma_{n,2}^{(2)} + \Sigma_{n,2}^{(3)} + \Sigma_{n,1}^{(3)+} + \Sigma_{n,1}^{(3)-}. \quad (12)$$

Оценим эти суммы по отдельности.

ЛЕММА 11 [5]. Для суммы $\Sigma_{n,2}^{(1)}$ справедлива следующая оценка:

$$\Sigma_{n,2}^{(1)} \leq \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}. \quad (13)$$

ЛЕММА 12. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} \ll \frac{n \log^{3\beta} n}{w^{3\beta}}. \quad (14)$$

Лемма 12 аналогична лемме 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 для всех $a \in A_{n,1}^{(1)}$ выполнено $t \leq Kr \log n$. Имеем $n = a_1 + \dots + a_t \leq t \max a_j$, тогда $\max a_j \geq n/(Kr \log n)$.

Пусть $a \in A_{n,2}^{(2)}$ и j таковы, что $a_j = \max\{a_1, \dots, a_t\}$. Так как $a_j \leq n - w$, то для суммы остальных a_j имеем $\sum_{i \neq j} a_j > w$ и аналогично рассуждению, проведенному выше, $\max_{i \neq j} a_j \geq w/(Kr \log n)$. Таким образом, существует хотя бы один индекс $j \leq t - 1$ такой, что $a_j \geq w/(Kr \log n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,2}^{(2)} &\leq \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k, l, k \neq l: a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^beta} \right) \\ &\leq \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k \leq (t-1): a_k, a_t \geq w/(K \log n)}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^beta} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k, l \leq (t-1): a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^beta} \right) \\ &\leq 2 \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k \leq (t-1): a_k, a_t \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} + 2 \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_t = n \\ \langle a_1, \dots, a_t \rangle \leq n^r \\ \exists k, l \leq (t-1): a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{(qq_-)^\beta}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4), получим следующую оценку для континуанта:

$$q(a) \geq a_k a_t \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \langle a_{k+1}, \dots, a_{t-1} \rangle$$

и

$$q(a) \geq a_k a_l \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle \langle a_{k+1}, \dots, a_{l-1} \rangle \langle a_{l+1}, \dots, a_t \rangle.$$

Таким образом, разбивая сумму $\Sigma_{n,2}^{(2)}$ на две части (одна часть соответствует слагаемым с большим последним неполным частным a_t , а другая – слагаемым, у которых большими являются неполные частные a_k, a_l , ни одно из которых не является последним), имеем

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} \ll \sum_{\substack{a_k + a_t \leq n \\ a_k, a_t \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{a_k^{2\beta} a_t^{2\beta}} S_n(a_k) + \sum_{\substack{a_k + a_l \leq n \\ a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{a_k^{2\beta} a_l^{2\beta}} S_n(a_k, a_l), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_n(a_k) &= \sum_{u+v=n-a_k-a_t} \sum_{a_1+\dots+a_{k-1}=u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle^{2\beta}} \\
 &\quad \times \sum_{a_{k+1}+\dots+a_{t-1}=v} \frac{1}{\langle a_{k+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^{2\beta}}, \\
 S_n(a_k, a_l) &= \sum_{u+v+s=n-a_k-a_l} \sum_{a_1+\dots+a_{k-1}=u} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle^{2\beta}} \\
 &\quad \times \sum_{a_{k+1}+\dots+a_{l-1}=v} \frac{1}{\langle a_{k+1}, \dots, a_{l-1} \rangle^{2\beta}} \\
 &\quad \times \sum_{a_{l+1}+\dots+a_{t-1}=s} \frac{1}{\langle a_{l+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta \langle a_{l+1}, \dots, a_t \rangle^\beta}.
 \end{aligned}$$

Как легко видеть, для $S_n(a_k)$ справедливо

$$S_n(a_k) \leq \left(1 + 2 \sum_{\substack{x_1+\dots+x_r \leq \infty \\ x_r \geq 2}} \frac{1}{\langle x_1, \dots, x_r \rangle^{2\beta}} \right)^2 \leq \left(1 + 2 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right)^2.$$

Тогда для суммы $\Sigma_{n,2}^{(2)}$ в первом слагаемом из (15) справедлива оценка

$$\sum_{\substack{a_k+a_t \leq n \\ a_k, a_t \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{a_k^{2\beta} a_t^{2\beta}} \ll \frac{\log^{3\beta} n}{w^{3\beta}} \left(n - 2 \frac{w}{K \log n} \right).$$

Здесь $n - 2w/(K \log n)$ – число слагаемых в сумме, $(\log^{3\beta} n)/w^{3\beta}$ – оценка сверху для суммируемой величины.

Аналогично, для суммы $S_n(a_k, a_l)$ выполняется

$$\begin{aligned}
 S_n(a_k, a_l) &\leq \left(1 + 2 \sum_{\substack{x_1+\dots+x_j \leq \infty \\ x_j \geq 2}} \frac{1}{\langle x_1, \dots, x_j \rangle^{2\beta}} \right)^2 \\
 &\quad \times \left(1 + \sum_{\substack{z_1+\dots+z_p \leq \infty \\ z_p \geq 2}} \frac{1}{\langle z_1, \dots, z_{p-1} \rangle^\beta \langle z_1, \dots, z_p \rangle^\beta} \right) \\
 &\leq \left(1 + 2 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right)^2 \left(1 + \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \right).
 \end{aligned}$$

Тогда для суммы $\Sigma_{n,2}^{(2)}$ во втором слагаемом из (15) справедлива оценка

$$\sum_{\substack{a_k+a_l \leq n \\ a_k, a_l \geq w/(K \log n)}} \frac{1}{a_k^{2\beta} a_l^{2\beta}} \ll \frac{\log^{4\beta} n}{w^{4\beta}} \left(n - 2 \frac{w}{K \log n} \right).$$

Здесь $n - 2w/(K \log n)$ – число слагаемых в сумме, $(\log^{4\beta} n)/w^{4\beta}$ – оценка сверху для суммируемой величины.

Таким образом, для $\Sigma_{n,2}^{(2)}$ имеем

$$\Sigma_{n,2}^{(2)} = O\left(\frac{n \log^3 n}{w^{3\beta}}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. При $w \leq n/2 - 2$ для суммы $\Sigma_{n,2}^{(3)}$ справедлива следующая асимптотика: в случае, если β целое,

$$\Sigma_{n,2}^{(3)} = \sum_{0 \leq k < \beta-2} B_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}} + \frac{\log w}{n^{3\beta-2}}\right), \quad (16)$$

в противном случае

$$\Sigma_{n,2}^{(3)} = \sum_{0 \leq k < \beta-2} B_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}}\right), \quad (17)$$

где B_k – некоторые константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,2}^{(3)} &= \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) < n^r \\ a_i > n-w, i \neq t}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^\beta} \right) \\ &= \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_i > n-w, i \neq t}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^\beta} \right) - \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ a_i > n-w, i \neq t}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^\beta} \right). \end{aligned}$$

Последняя сумма оценивается по лемме 11 как

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r \\ a_i > n-w, i \neq t}} \left(\frac{1}{(qq_-)^\beta} + \frac{1}{(qq_+)^\beta} \right) = O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}\right).$$

Рассмотрим оставшуюся сумму. Положим $a_i = n - v, v = 1, \dots, (w-1)$. Тогда для $1/(qq_-)^\beta$ и $1/(qq_+)^\beta$ с помощью формулы (4) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(qq_-)^\beta} &= \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta}} \frac{1}{(\langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle)^\beta} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])/n)^\beta} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}])/n)^\beta}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(qq_+)^\beta} &= \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta}} \frac{1}{(\langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle \langle a_{i+1}, \dots, a_t - 1 \rangle)^\beta} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])/n)^\beta} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t - 1])/n)^\beta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Разложим величины

$$\frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])/n)^\beta}$$

и

$$\frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}])/n)^\beta}$$

в ряд Тейлора по параметрам

$$\frac{v}{n} - \frac{1}{n}([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])$$

и

$$\frac{v}{n} - \frac{1}{n}([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}])$$

соответственно. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t])/n)^\beta} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \gamma_k(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^k \end{aligned} \quad (20)$$

при $\left| \frac{v}{n} - \frac{1}{n}([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]) \right| < 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - v/n + ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}])/n)^\beta} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \gamma_k(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^k \end{aligned} \quad (21)$$

при $\left| \frac{v}{n} - \frac{1}{n}([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]) \right| < 1$, где $\gamma_k(\beta)$ определены в (10).

При $v \leq n - 1$ ряды сходятся абсолютно.

Подставляя (20) и (21) в (18), получаем при выбранном v

$$\begin{aligned} \frac{1}{(qq_-)^\beta} &= \frac{1}{n^{2\beta} \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \\ &\times \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляем полученное выражение для $1/(qq_-)^\beta$ в сумму:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} = \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta}} \\ & \times \frac{1}{\langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta+k}} R_k^-, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_k^- &= \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \\
 &\quad \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \\
 &\quad \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m \\
 &= \left(\sum_{v=1}^{\infty} - \sum_{v=w}^{\infty} \right) \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta} \\
 &\quad \times \frac{1}{\langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \\
 &\quad \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $k < \beta - 2$ и $k \geq \beta - 2$. При $k < \beta - 2$, воспользовавшись леммой 9 и [5; лемма 7], легко увидеть, что

$$R_k^- = B_k^- + O\left(\frac{1}{w^{\beta-k-2}}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
 B_k^- &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \\
 &\quad \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \\
 &\quad \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $k \geq \beta - 2$. Получим оценку для R_k^- . Используя лемму 9 и [5; теорема 1], имеем

$$\begin{aligned}
 R_k^- &\leq \sum_{v=1}^{w-1} v^k \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \sum_{s+u=v} 8C_0 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{s^{2\beta} u^\beta} \\
 &\leq 8C_0 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) w^{k-\beta+2}.
 \end{aligned}$$

Тогда для остатка ряда получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k > \beta-2} \frac{R_k^-}{n^{2\beta+k}} &\leq 8C_0 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \\
 &= 8C_0 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}} \left(\frac{1}{1 - w/n} \right)^{2\beta}.
 \end{aligned}$$

При выбранном w величина $1/(1 - w/n)$ не превосходит двух, следовательно, остаток ряда можно оценить как $O(1/(n^{2\beta} w^{\beta-2}))$. Если β целое, то для

$k = \beta - 2$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \\ & \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \\ & \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m = O(\log w). \end{aligned}$$

Аналогичные действия можно провести и для части суммы с $1/(qq_+)$. Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} = \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta}} \\ & \times \frac{1}{\langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta+k}} R_k^+, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_k^+ &= \left(\sum_{v=1}^{\infty} - \sum_{v=w}^{\infty} \right) \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta} \\ & \times \frac{1}{\langle a_{i+1}, \dots, a_t - 1 \rangle^\beta} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t - 1]))^l \\ & \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $k < 2\beta - 2$ и $k \geq 2\beta - 2$. При $k < 2\beta - 2$ для R_k^+ справедливо

$$R_k^+ = B_k^+ + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-2}}\right),$$

где

$$\begin{aligned} B_k^+ &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^\beta \langle a_{i+1}, \dots, a_{t-1} \rangle^\beta} \\ & \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_{t-1}]))^l \\ & \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m, \end{aligned}$$

что несложно показать, воспользовавшись леммой 9 и [5; лемма 6]. Теперь рассмотрим случай $k \geq 2\beta - 2$. Получим оценку для R_k^+ :

$$\begin{aligned} R_k^+ &\leq \sum_{v=1}^{w-1} v^k \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \sum_{s+u=v} 4C_0 \frac{1}{s^{2\beta} u^{2\beta}} \\ &\leq 4C_0 \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) w^{k-2\beta+2}. \end{aligned}$$

Тогда для остатка ряда справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{k>2\beta-2} \frac{R_k^+}{n^{2\beta+k}} &\leq 4C_0 \frac{1}{n^{2\beta} w^{2\beta-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \\ &= 4C_0 \frac{1}{n^{2\beta} w^{2\beta-2}} \left(\frac{1}{1-w/n} \right)^{2\beta}. \end{aligned}$$

При выбранном w величина $1/(1-w/n)$ не превосходит двух, следовательно, остаток ряда можно оценить как $O(1/(n^{2\beta} w^{2\beta-2}))$. Если 2β целое, то для $k = 2\beta - 2$

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_t = v}} \frac{1}{\langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle^{2\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t \rangle^{\beta} \langle a_{i+1}, \dots, a_t - 1 \rangle^{\beta}} \\ \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t - 1]))^l \\ \times \gamma_m(\beta) (v - ([a_{i-1}, \dots, a_1] + [a_{i+1}, \dots, a_t]))^m = O(\log w). \end{aligned}$$

Таким образом, сложив суммы для $1/(q(a)q_-(a))$ и $1/(q(a)q_+(a))$, получим при целом β

$$\Sigma_{n,2}^{(3)} = \sum_{0 \leq k < \beta-2} B_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{\log w}{n^{3\beta-2}} + \frac{1}{w^{\beta-2} n^{2\beta}}\right),$$

при нецелом β

$$\Sigma_{n,2}^{(3)} = \sum_{0 \leq k < \beta-2} B_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{w^{\beta-2} n^{2\beta}}\right),$$

где

$$B_k = B_k^- + B_k^+.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 14. При целом 2β

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,1}^{(3)+} &= \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} D_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ &+ O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}} + \frac{\log w}{n^{4\beta-1}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}}\right), \end{aligned} \quad (23)$$

при нецелом 2β

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,1}^{(3)+} &= \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} D_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ &+ O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

где D_k – некоторые константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Sigma_{n,1}^{(3)+} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) < n^r \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} - \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}}.$$

Последняя сумма оценивается по лемме 11 как

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} = O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}\right).$$

Для оставшейся суммы справедливо

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} = \sum_{v=1}^w \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} = v}} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}}. \quad (25)$$

Здесь $a_t = n - v$, $v = 1, \dots, w$. Так как

$$q = a_t q_- + (q_-)_- = q_-(n - v + [a_{t-1}, \dots, a_1]),$$

$$q_+ = (a_t - 1)q_- + (q_-)_- = q_-(n - v - 1 + [a_{t-1}, \dots, a_1]),$$

то получим для $1/(qq_+)^{\beta}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} &= \frac{1}{n^{2\beta} q_-^{2\beta}} \frac{1}{(1 - v/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 - v/n - 1/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Разлагая величины

$$\frac{1}{(1 - v/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}}, \quad \frac{1}{(1 - v/n - 1/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}}$$

в ряд Тейлора по параметрам

$$\frac{v}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1], \quad \frac{v}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1]$$

соответственно, получаем при $v \leq (n-1)$

$$\frac{1}{(1 - v/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\beta) \left(\frac{v}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1] \right)^k,$$

$$\frac{1}{(1 - v/n - 1/n + [a_{t-1}, \dots, a_1]/n)^{\beta}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\beta) \left(\frac{v}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1] \right)^k,$$

где $\gamma_k(\beta)$ определены в (10). Тогда, подставив полученные ряды в (26), получим при $v \leq (n-1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} &= \frac{1}{n^{2\beta} q_-^{2\beta}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \left(\frac{v}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1] \right)^l \right. \\ &\quad \times \left. \gamma_m(\beta) \left(\frac{v}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}[a_{t-1}, \dots, a_1] \right)^m \right) \\ &= \frac{1}{n^{2\beta} q_-^{2\beta}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \right. \\ &\quad \times \left. \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m \right). \end{aligned}$$

Далее, подставляя в (25) выражение для $1/(qq_+)^{\beta}$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{a_1+\dots+a_{t-1}=v} \frac{1}{(qq_+)^{\beta}} \\
 &= \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{a_1+\dots+a_{t-1}=v} \frac{1}{n^{2\beta} q_-^{2\beta}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right. \\
 & \quad \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m \Big) \\
 &= \frac{2}{n^{2\beta}} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{q_-^{2\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2\beta+k}} \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{q_-^{2\beta}} \\
 & \quad \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму R_k , стоящую при $1/n^{2\beta+k}$:

$$\begin{aligned}
 R_k &= \sum_{v=1}^{w-1} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{2}{q_-^{2\beta}} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \\
 & \quad \times \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m \\
 &= \left(\sum_{v=1}^{\infty} - \sum_{v=w}^{\infty} \right) \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{2}{q_-^{2\beta}} \\
 & \quad \times \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m.
 \end{aligned}$$

Справедлива оценка:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{2}{q_-^{2\beta}} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \\
 & \quad \times \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m \ll \sum_{v=1}^{\infty} v^k \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{q_-^{2\beta}}.
 \end{aligned}$$

Так как по лемме 9

$$\sum_{a_1+\dots+a_t=\nu} \frac{1}{q(a)^{2\beta}} = O\left(\frac{1}{\nu^{2\beta}}\right),$$

то общий член данного ряда есть $O(1/v^{2\beta-k})$, следовательно, ряд сходится при $2\beta - k > 1$, т.е. при $k < 2\beta - 1$. Оценим остаток ряда при таких k :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v=w}^{\infty} \sum_{a_1+\dots+a_{t-1}=v} \frac{2}{q_-^{2\beta}} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \gamma_m(\beta) (v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m \\
 & \ll \sum_{v=w}^{\infty} v^k \sum_{a_1+\dots+a_i=v} \frac{1}{q^{2\beta}} \ll \int_w^{\infty} \frac{dv}{v^{2\beta-k}} = O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-1}}\right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_k = D_k + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-1}}\right),$$

где

$$D_k = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\substack{a_1+\dots+a_{t-1}=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{2}{q_-^{2\beta}} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta)(v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^l \\ \times \gamma_m(\beta)(v + 1 - [a_{t-1}, \dots, a_1])^m.$$

Теперь рассмотрим R_k при $k \geq 2\beta - 1$:

$$R_k \leq 2 \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \sum_{v=1}^{w-1} v^k \sum_{\substack{a_1+\dots+a_i=v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{q^{2\beta}} \\ \leq 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \int_1^{w-1} \frac{dv}{v^{2\beta-k}} \\ \leq 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) w^{k+1-2\beta},$$

если $k > 2\beta - 1$, и $O(\log w)$ при $k = 2\beta - 1$ (в случае, если 2β целое). Тогда для остатка ряда при выбранном w получим следующую оценку:

$$\sum_{k>2\beta-1} \frac{R_k}{n^{2\beta+k}} \leq 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \sum_{k>2\beta-1} \frac{w^{k+1-2\beta}}{n^{2\beta+k}} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \\ = 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}} \sum_{k>2\beta-1} \frac{w^k}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \\ \leq 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{n^k} \sum_{l+m=k} \gamma_l(\beta) \gamma_m(\beta) \\ \leq 4 \frac{\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}} \left(\frac{1}{1-w/n} \right)^{2\beta} = O\left(\frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}}\right).$$

Выделив константу в главном члене, получим при целом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(3)+} = \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} D_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}} + \frac{\log w}{n^{4\beta-1}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}}\right),$$

при нецелом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(3)+} = \frac{1}{n^{2\beta}} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} D_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ + O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}} + \frac{1}{w^{2\beta-1} n^{2\beta}}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. При целом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(3)-} = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} E_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + O\left(\frac{\log w}{n^{3\beta-1}} + \frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}}\right), \quad (27)$$

иначе

$$\Sigma_{n,1}^{(3)-} = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} E_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}}\right), \quad (28)$$

где E_k – некоторые константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Sigma_{n,1}^{(3)-} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) < n^r \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} = \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} - \sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r}} \frac{1}{(qq_-)^\beta}.$$

Последняя сумма оценивается по лемме 11 как

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ q(a) \geq n^r}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} = O\left(\frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}\right).$$

Для оставшейся суммы имеем

$$\sum_{\substack{a \in A_n \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} = 2 \sum_{v=1}^w \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} = v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{(qq_-)^\beta}. \quad (29)$$

Здесь $a_t = n - v$, $v = 1, \dots, w$. Так как

$$q = a_t q_- + (q_-)_- = n q_- \left(1 - \frac{1}{n} (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])\right),$$

то, разлагая $1/(qq_-)^\beta$ в ряд Тейлора по параметру $(v - [a_{t-1}, \dots, a_1])/n$, получаем

$$\frac{1}{(qq_-)^\beta} = \frac{1}{n^\beta q_-^{2\beta}} + \frac{1}{n^\beta q_-^{2\beta}} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\beta) \left(\frac{1}{n} (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])\right)^k. \quad (30)$$

Следовательно, подставив (30) в (29), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_t > n-w}} \frac{1}{(qq_-)^\beta} &= 2 \sum_{v=1}^w \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} = v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{n^\beta q_-^{2\beta}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta+k}} 2 \gamma_k(\beta) \sum_{v=1}^w (v - [a_{t-1}, \dots, a_1])^k \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} = v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{q_-^{2\beta}} \\ &= 2 \sum_{v=1}^w \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} = v \\ a_{t-1} \geq 2}} \frac{1}{n^\beta q_-^{2\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{n^{\beta+k}}, \end{aligned}$$

где R_k задаются формулой

$$\begin{aligned} R_k &= 2\gamma_k(\beta) \sum_{v=1}^w \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} (v - [a_t, \dots, a_1])^k \\ &= 2\gamma_k(\beta) \left(\sum_{v=1}^{\infty} - \sum_{v=w}^{\infty} \right) \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} (v - [a_t, \dots, a_1])^k. \end{aligned}$$

Справедлива оценка:

$$2\gamma_k(\beta) \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} (v - [a_t, \dots, a_1])^k \ll \sum_{v=1}^{\infty} v^k \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}}.$$

Из леммы 9 следует, что

$$\sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} = O\left(\frac{1}{v^{2\beta}}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^k \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} \ll \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{2\beta-k}}.$$

Таким образом, последний ряд сходится при $2\beta - k > 1$, т.е. при $k < 2\beta - 1$. При таких k оценим остаток ряда:

$$\begin{aligned} &2\gamma_k(\beta) \sum_{v=w}^{\infty} \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} (v - [a_t, \dots, a_1])^k \\ &\ll \sum_{v=w}^{\infty} v^k \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} \ll \int_w^{\infty} \frac{dv}{v^{2\beta-k}} = O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-1}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $k < 2\beta - 1$

$$R_k = E_k + O\left(\frac{1}{w^{2\beta-k-1}}\right).$$

Здесь E_k – константы, которые задаются формулой

$$E_k = 2\gamma_k(\beta) \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{a \in A_v} \frac{1}{q^{2\beta}} (v - [a_t, \dots, a_1])^k.$$

Теперь оценим сумму при $k \geq 2\beta - 1$:

$$R_k \leq 4\gamma_k(\beta) C_0 \sum_{v=1}^{w-1} v^{k-2\beta} \leq 4\gamma_k(\beta) C_0 w^{k+1-2\beta}$$

при $k > 2\beta - 1$ и $O(\log w)$ при $k = 2\beta - 1$. Тогда, просуммировав по $k > 2\beta - 1$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k > 2\beta - 1} \frac{R_k}{n^{\beta+k}} &\leq 4C_0 \frac{1}{n^{\beta} w^{2\beta-1}} \sum_{k > 2\beta - 1} \gamma_k(\beta) \frac{w^k}{n^k} \\ &\leq 4C_0 \frac{1}{n^{\beta} w^{2\beta-1}} \left(\frac{1}{1 - w/n} \right)^{\beta} = O\left(\frac{1}{n^{\beta} w^{2\beta-1}}\right). \end{aligned}$$

Выделяя константу в главном члене, получаем

$$\frac{2}{n^\beta} \sum_{\substack{a \in A_n \\ a_1 + \dots + a_{t-1} \leq w}} \frac{1}{q_-^{2\beta}} = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + O\left(\frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}}\right).$$

Таким образом, при целом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(3)-} = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} E_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + O\left(\frac{\log n}{n^{3\beta-1}} + \frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}}\right),$$

при нецелом 2β

$$\Sigma_{n,1}^{(3)-} = \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-1} E_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + O\left(\frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}}\right).$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Подставляя (13), (14), (16), (14), (27), (28) в (12), получаем при целом 2β

$$\begin{aligned} & \Sigma_{n,1}^{(3)-} + \Sigma_{n,1}^{(3)+} + \Sigma_{n,2}^{(3)} + \Sigma_{n,2}^{(2)} + \Sigma_{n,2}^{(1)} \\ &= \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + \sum_{0 \leq k < \beta-2} C_k^* \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ &+ O\left(\frac{\log n}{n^{3\beta-2}} + \frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}} + \frac{n \log^{3\beta} n}{w^{3\beta}} + \frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}\right), \end{aligned}$$

где

$$C_k = E_k, \quad C_k^* = B_k + D_k, \quad C_0^* = B_k + \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)};$$

при нецелом 2β

$$\begin{aligned} & \Sigma_{n,1}^{(3)-} + \Sigma_{n,1}^{(3)+} + \Sigma_{n,2}^{(3)} + \Sigma_{n,2}^{(2)} + \Sigma_{n,2}^{(1)} \\ &= \frac{1}{n^\beta} \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)} + \sum_{1 \leq k < 2\beta-2} C_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + \sum_{0 \leq k < \beta-2} C_k^* \frac{1}{n^{2\beta+k}} \\ &+ O\left(\frac{1}{n^{2\beta} w^{\beta-2}} + \frac{n \log^{3\beta} n}{w^{3\beta}} + \frac{1}{n^\beta w^{2(\beta-1)}} + \frac{1}{n^{(\beta-1)(2r-1)}}\right), \end{aligned}$$

где

$$C_k = E_k, \quad C_k^* = B_k + D_k, \quad C_0^* = B_k + \frac{2\zeta(2\beta-1)}{\zeta(2\beta)}.$$

Чтобы порядок остаточного члена оказался минимальным, нужно положить

$$w = \frac{n}{2} - 2, \quad r = \frac{3\beta}{2(\beta-1)} + \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] A. Brocot, *Calcul des rouages par approximations, nouvelles méthodes*, par Brocot, horloger (Paris), 1892.
- [2] E. Lucas, *Théorie des nombres. Tome I. Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique*, Gauthiers-Villars, Paris, 1891.
- [3] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998; пер. с англ.: R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics: a foundation for computer science*, Addison-Wesley Publ., Amsterdam, 1994.
- [4] M. Kesseböhmer, B. O. Stratmann, “Stern–Brocot pressure and multifractal spectra in ergodic theory of numbers”, *Stoch. Dyn.*, **4**:1 (2004), 77–84.
- [5] N. Moshchevitin, A. Zhigljavsky, “Entropies of the partitions of the unit interval generated by the Farey tree”, *Acta Arith.*, **115**:1 (2004), 47–58.

А. А. Душистова (А. А. Dushistova)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: anchatnik@bk.ru

Поступила в редакцию
10.11.2005 и 17.11.2006