Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω , *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:54:54

УДК 517.5

Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев

Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω

В работе выясняется, насколько информативны все линейные функционалы при восстановлении функций из классов H_p^ω . Найдены оптимальные порядки восстановления функций из классов H_p^ω , которые полностью определяются теоремами вложения точно так же, как в случае функциональных классов, гладкость в которых задается числовыми параметрами.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\omega(\delta)$ – непрерывная на $[0, 1]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$0 = \omega(0) \leq \omega(\delta) \leq \omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta) \quad \text{при всех } 0 \leq \delta \leq \delta + \eta \leq 1.$$

Такие функции называют *модулями непрерывности*.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$ (причем $L^\infty(0, 1) \equiv C[0, 1]$) и $f \in L^p(0, 1)$. Модулем непрерывности в L^p функции f называют

$$\omega_p(\delta; f) = \begin{cases} \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

где $\delta \in (0, 1]$.

Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности и $1 \leq p \leq \infty$. Через H_p^ω обозначают множество всех функций $f \in L^p(0, 1)$ таких, что

$$\omega_p(\delta; f) \leq \omega(\delta)$$

при всех $\delta \in (0, 1]$.

Имеются различные варианты постановок задач об оптимальном восстановлении, направленные на изучение с единых позиций задач теории приближений и вычислительной математики (см., например, монографии В. М. Тихомирова [1], К. И. Бабенко [2], В. Н. Темлякова [3], Н. П. Корнейчука [4], статьи К. Ю. Осипенко [5], К. Ю. Осипенко и К. Вилдероттера [6], С. Фишера и Ч. Митчелли [7], [8] и имеющуюся в них обширную библиографию).

Сформулируем общую задачу восстановления в редакции из [9]. Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на

множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F \subset X$ и отображение $Tf = u(y; f)$ действует из F в Y .

Для каждого целого $N \geq 1$ через $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$, состоящих из набора N функционалов $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$, $l_j(\cdot): F \mapsto C$, $j = 1, \dots, N$ (в случае требования линейности l_j речь будет идти о линейности на линейной оболочке F), и функции

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y): C^N \times \Omega_1 \mapsto C,$$

и пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$.

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно, совпадающих с точностью до констант) для величины

$$\delta_N(D_N; T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y \quad (1)$$

и в указании пары $(l^{(N)}; \varphi_N)$ из D_N , реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1) пространства X и Y , классы F ($F \subset X$), операторы T и множества D_N , получаем различные постановки задач.

В частности, при $D_N = \Lambda_N \times \{\varphi_N\}$ получаем случай, согласно которому восстановление производится по данному множеству функционалов Λ_N и по всевозможным алгоритмам φ_N , и, тем самым, погрешность зависит только от Λ_N ; соответствующая величина δ_N носит специальное название *информативная мощность множества функционалов Λ_N* (это определение дано в [9], см. также [10]–[12]).

В настоящей работе изучается задача вычисления информативной мощности всевозможных линейных функционалов, определенных на линейной оболочке H_p^ω , при восстановлении в метрике L^q функций из классов H_p^ω .

В случае $1 \leq p < q \leq \infty$ необходимые (и достаточные) для корректности этой конкретизации общей задачи восстановления условия вложения были даны П. Л. Ульяновым в следующих теоремах фундаментального значения.

ТЕОРЕМА А. Пусть даны числа $1 \leq p < q < \infty$ и функция $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega \subset L^q$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

ТЕОРЕМА В. Пусть даны числа $1 \leq p < \infty$ и функция $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega \subset C$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Первый из этих критериев был получен в [13], а второй – в [14].

Таким образом, здесь в случае

$$X = L^p, \quad Y = L^q, \quad 1 \leq p < q \leq \infty, \quad F = H_p^\omega$$

изучается задача восстановления функций, т.е. случай $Tf = f$. В качестве D_N берется множество L_N всех пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$ таких, что $l_1(f), \dots, l_N(f)$ суть линейные функционалы на линейной оболочке H_p^ω , а φ_N – произвольная функция такая, что $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y) \in L^q$ как функция от y при любых $\tau_1, \dots, \tau_N$.

Тем самым, основной объект изучения в данной работе есть величина

$$\delta_N(D_N) = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in H_p^\omega} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^q(0,1)} \quad (2)$$

при $D_N = \{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}$.

Отметим, что одними из первых изучаемую здесь конкретизацию (2) общей задачи (1) в случае, когда класс F составлен из аналитических функций, исследовали С. Фишер и Ч. Митчелли (см. [7], [8]), сама же постановка задачи (1) при $D_N = \{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}$ является частным случаем общей постановки, предложенной К. Ю. Осипенко [5].

С позиции оценки результатов настоящей статьи важно отметить (см. [12], где величина (1) была названа *компьютерным (вычислительным) поперечником*, и [9], [15]), что линейный поперечник, поперечник Фурье (ортопоперечник), частичные суммы рядов Фурье по всевозможным ортонормированным системам (включая системы, состоящие из всплесков) и разложения по базисам, линейные методы суммирования рядов Фурье при соответствующим выборе D_N также содержатся как в данной конкретизации (2), так и в общем определении (1), причем в каждом из указанных случаев для (2) выполнено неравенство

$$\delta_N(D_N) \geq \delta_N(\{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}). \quad (3)$$

В общем случае в саму постановку задачи восстановления вовлечены понятия и результаты из разных областей математики – теории функций и функционального анализа, вычислительной математики и информатики, теории вероятностей и т.д. Так, необходимым и достаточным условием вложения периодических классов Соболева $W_p^r(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s$, $1 < p < q < \infty$, является условие $r/s > 1/p - 1/q$. Как нами было показано (см. [10]), оптимальная оценка восстановления в метрике $L^q(0,1)^s$ функций из классов $W_p^r(0,1)^s$ по всем линейным функционалам равна $\delta_N \asymp N^{-(r/s - (1/p + 1/q))}$, тем самым, в случае классов Соболева (а также и для многих других классов, в которых гладкость определяется числовыми параметрами) именно точное условие корректности постановки задачи определяет оптимальный порядок приближения. Здесь мы показываем, что и в случае классов, гладкость в которых задается через функции, теоремы вложения определяют оптимальные погрешности восстановления.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны числа $2 \leq p < q < \infty$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in L_N} \sup_{f \in H_p^\omega} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^q} \\ \asymp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

с постоянными, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны число $2 \leq p < \infty$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in L_N} \sup_{f \in H_p^\omega} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^\infty} \asymp \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

с постоянными, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

Оценки снизу в теоремах 1 и 2 означают, что при любом выборе N функционалов, линейных на линейной оболочке H_p^ω , и при любом выборе алгоритма φ_N , в совокупности составляющих вычислительный агрегат $\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f))$ (включая все агрегаты из (3)), восстановить всякую функцию f из класса H_p^ω лучше, чем указано в теоремах 1 и 2, нельзя.

Оценки сверху в теоремах 1 и 2 реализуются на конкретных операторах восстановления. Именно, в случае теоремы 1 роль искомым операторов восстановления выполняют частичные суммы ряда Фурье–Хаара, где числовую информацию об f поставляют ее коэффициенты Фурье–Хаара. А в случае теоремы 2 оценка сверху следует из следующей оценки погрешностей тригонометрических интерполяционных многочленов Лагранжа с равноотстоящими узлами в равномерной метрике, полученной К. И. Осколковым [16].

Пусть $1 < p < \infty$. Если $f \in L^p(0, 1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega_p(1/n; f) < \infty$ (тогда f эквивалентна некоторой непрерывной функции, за которой сохраним то же обозначение), то

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} f\left(\frac{k}{2N+1}\right) \frac{\sin(2N+1)\pi\left(x - \frac{k}{2N+1}\right)}{\sin \pi\left(x - \frac{k}{2N+1}\right)} \right\|_{C[0,1]} \\ \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right). \end{aligned}$$

В [16] также получена оценка сверху погрешностей восстановления функций по их значениям в точках в терминах наилучших приближений тригонометрическими многочленами; точнее, сначала были получены оценки через наилучшие приближения, а затем, как следствие, и через модуль непрерывности.

Такого же сорта оценки, в их числе и двусторонние, были получены в работах [17]–[20].

§ 2. Необходимые определения и вспомогательные утверждения

Приведем вначале определение системы Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, [21]); в дальнейшем вместо “ряды (коэффициенты) Фурье по системе Хаара” будем писать “ряды (коэффициенты) Фурье–Хаара”.

Любое целое положительное число $n \geq 2$ можно однозначно представить в виде $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$, а $j = 1, \dots, 2^k$. Система Хаара определяется следующим образом ($x \in [0, 1]$): $\chi_1(x) \equiv 1$; при $n \geq 2$ полагают

$$\begin{aligned}\chi_n(x) &= 2^{k/2}, & \text{если } x \in \left(\frac{2j-2}{2^{k+1}}, \frac{2j-1}{2^{k+1}}\right), \\ \chi_n(x) &= -2^{k/2}, & \text{если } x \in \left(\frac{2j-1}{2^{k+1}}, \frac{2j}{2^{k+1}}\right);\end{aligned}$$

во внутренних точках разрыва полагают $\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi_n(x+0) + \chi_n(x-0))$, в граничных точках отрезка $[0, 1]$ функции χ_n определяются по непрерывности.

Коэффициенты Фурье–Хаара функции $f \in L(0, 1)$ будем обозначать через

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt,$$

а N -ю частичную сумму ряда Фурье–Хаара – через

$$S_N(x) \equiv S_N(x; f) = \sum_{n=1}^N c_n(f) \chi_n(x).$$

Как показал С. Б. Стечкин [22], если $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, то найдется выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ такой, что $\omega(\delta) \leq \omega_1(\delta) \leq 2\omega(\delta)$ при всех $0 \leq \delta \leq 1$. Таким образом, можно считать, что модуль непрерывности является выпуклой вверх функцией; отсюда, в частности, следует, что $\omega(\delta)/\delta$ – невозрастающая функция. Этими замечаниями мы будем пользоваться в дальнейшем без каких-либо напоминаний.

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^q(0, 1)$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда для всякого $N \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|f(x) - S_N(x; f)\|_q \leq 24\omega_q\left(\frac{1}{N}; f\right).$$

Эта лемма при $q = \infty$ доказана Б. Секефальви-Надем [23], а при $1 \leq q < \infty$ – П. Л. Ульяновым в [21].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leq p < q < \infty$. Тогда для всякого $N \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\omega_q\left(\frac{1}{N}; f\right) &\ll \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega_p^q\left(\frac{1}{n}; f\right)\right)^{1/q}, \\ \omega_{\infty}\left(\frac{1}{N}; f\right) &\ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right).\end{aligned}$$

Первое из приведенных в лемме 2 неравенств доказано П. Л. Ульяновым [13], а второе – В. А. Андриенко [24].

ЛЕММА 3. Пусть даны модуль непрерывности $\omega(\delta)$ такой, что $\omega(\delta)/\delta \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, числа $\alpha \geq 1$, $\beta \in (1 - \alpha, 1)$, целое неотрицательное M такое, что $M\omega(1/M) > 2\omega(1)$.

Тогда существуют числовая последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что:

- 1) $B_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$, $B_n \leq \omega(1/n)$ при всех $n \geq 1$;
- 2) $n_{k+1} > 2n_k$, $B_{n_{k+1}} \leq \frac{1}{2}B_{n_k}$ при всех $k \geq 1$;
- 3) $\sum_{n=1}^N B_n \leq 3N\omega(1/N)$ при всех $N = 1, 2, \dots$;
- 4) справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\beta} B_{n_k}^{\alpha} \geq c(\alpha, \beta, \omega) \sum_{n=M}^{\infty} n^{-\beta} \omega^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем пользоваться конструкцией С. Б. Стечкина с изменениями, предложенными В. А. Андриенко [25] и П. Л. Ульяновым [13].

Положим $n_0 = 0$, $n_1 = M$, и если $n_1 < \dots < n_k$, $k \geq 1$, уже выбрали, то положим m_{k+1} равным наименьшему из чисел N , для которых $N\omega(1/N) > 2n_k\omega(1/n_k)$. Это всегда возможно, поскольку последовательность $N\omega(1/N) \uparrow \infty$ при $N \uparrow \infty$. Таким образом,

$$n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad n_k \leq n < m_{k+1}, \quad (4)$$

$$m_{k+1}\omega\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right) > 2n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Так как $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, то $n\omega(1/n) \leq 2n_k\omega(1/n_k)$ при $n_k \leq n < 2n_k$, поэтому (см. (4), (5))

$$m_{k+1} > 2n_k. \quad (6)$$

Если

$$\omega\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad (7)$$

то полагаем

$$n_{k+1} = m_{k+1}. \quad (8)$$

Если же $\omega(1/m_{k+1}) > \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$, то полагаем n_{k+1} равным наименьшему среди всех целых N , для которых $\omega(1/N) \leq \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$. Очевидно, что в этом случае $n_{k+1} > m_{k+1} > 2n_k$, $\omega(1/n_{k+1}) \leq \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$ и

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad n_k \leq n < n_{k+1}. \quad (9)$$

Положим $B_n = \omega(1/n_k)$, $n_{k-1} < n \leq n_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Построенные последовательности $\{n_k\}$ и $\{B_n\}$ обладают нужными свойствами. Докажем свойство 1). Монотонность последовательности B_n следует из монотонности последовательности $\omega(1/n)$. Далее, если $n_{k-1} < n \leq n_k$, $k = 1, 2, \dots$, то $B_n = \omega(1/n_k) \leq \omega(1/n)$. Свойство 1) доказано.

Докажем свойство 2). Из построения n_k (см. (4)–(7)) следует, что $n_{k+1} \geq 2n_k$ при всех $k \geq 1$ и $B_{n_{k+1}} = \omega(1/n_{k+1}) \leq \frac{1}{2}\omega(1/n_k) = \frac{1}{2}B_{n_k}$. Свойство 2) доказано.

Докажем свойство 3). Если $N \leq M$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N B_n = \omega\left(\frac{1}{M}\right) \leq \omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Если же $N > M$, то выберем $t \geq 2$ так, чтобы $n_{t-1} < N \leq n_t$. Тогда из определения $\{B_n\}$ следует

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_n &= \sum_{n=1}^{n_{t-1}} B_n + \sum_{n=n_{t-1}+1}^N B_n = \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} B_n + \sum_{n=n_{t-1}+1}^N B_n \\ &= \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} B_{n_k} + \sum_{n=n_{t-1}+1}^N \omega\left(\frac{1}{n_t}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{t-1} (n_k - n_{k-1}) B_{n_k} + (N - n_{t-1}) \omega\left(\frac{1}{n_t}\right) \leq \sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} + N \omega\left(\frac{1}{n_t}\right). \end{aligned}$$

Заметим сначала, что $\omega(1/n_t) \leq \omega(1/N)$.

По определению чисел n_k и B_n имеем

$$n_{k+1} B_{n_{k+1}} = n_{k+1} \omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) > 2n_k \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) = 2n_k B_{n_k},$$

поэтому

$$n_k B_{n_k} \leq \frac{1}{2} n_{k+1} B_{n_{k+1}} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{t-1-k}} n_{t-1} B_{n_{t-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, t-1.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} \leq n_{t-1} B_{n_{t-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{t-2}}\right) \leq 2n_{t-1} B_{n_{t-1}},$$

а в силу того, что $\omega(\delta)/\delta \uparrow$ при $\delta \downarrow 0$ и $N > n_{t-1}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} \leq 2N \omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^N B_n \leq 3N \omega(1/N)$. Свойство 3) доказано.

Перейдем теперь к доказательству свойства 4). Так как $\alpha + \beta > 1$, то при $n_{k+1} = m_{k+1}$ (см. (2)) и $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n} \right) &= \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} \left(n \omega \left(\frac{1}{n} \right) \right)^\alpha \leq 2^\alpha \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} \left(n_k \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) \right)^\alpha \\ &\leq 2^\alpha \left(n_k \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) \right)^\alpha \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} \leq C_1(\alpha, \beta) n_k^{1-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_k} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Если же $n_{k+1} > m_{k+1}$ (см. (9)), то

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n} \right) &\leq \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_k} \right) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta} \leq 2^\alpha \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_{k+1}-1} \right) \sum_{n=1}^{n_{k+1}} n^{-\beta} \\ &\leq C_2(\alpha, \beta) \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_{k+1}} \right) n_{k+1}^{1-\beta}, \end{aligned} \quad (11)$$

так как $\beta < 1$ и $\omega(1/(n_{k+1}-1)) \leq \omega(2/n_{k+1}) \leq 2\omega(1/n_{k+1})$.

Из (10) и (11) вытекает, что

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n} \right) \leq C_3(\alpha, \beta) \left\{ \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k^{1-\beta} + \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_{k+1}} \right) n_{k+1}^{1-\beta} \right\}$$

для всех $k = 1, 2, \dots$. Стало быть,

$$\sum_{n=M}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n} \right) \leq C(\alpha, \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \omega^\alpha \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k^{1-\beta}.$$

Лемма 3 полностью доказана.

В лемме 4 представлен метод получения оценок снизу.

ЛЕММА 4. Пусть даны линейное нормированное пространство Y числовых функций, симметричный класс функций F (т.е. если $f \in F$, то $(-f) \in F$), определенных на $[0, 1]$, Λ — фиксированное множество линейных функционалов, определенных на классе F . Для каждого целого положительного N через Λ_N обозначим множество пар из всевозможных наборов N функционалов $l_1, \dots, l_N \in \Lambda$ и функций $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N, x): C^N \times [0, 1] \rightarrow C$. Предположим, что для некоторой последовательности положительных чисел $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ выполнено условие: для каждого целого положительного числа N и для каждого набора линейных функционалов $l_1, \dots, l_N \in \Lambda$ найдется функция $f = f_{l_1, \dots, l_N} \in F$ такая, что

$$\|f\|_Y \geq a_N, \quad l_1(f) = \dots = l_N(f) = 0.$$

Тогда выполнено соотношение

$$\delta_N(\Lambda_N, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Lambda_N} \sup_{f \in F} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_Y \geq a_N.$$

Доказательство основано на применении неравенства треугольника.

Лемма 4 показывает, что изучаемая здесь величина δ_N снизу оценивается значением соответствующего поперечника по Гельфанду (см., например, [6]).

ЛЕММА 5. Пусть $2 < q < +\infty$, функция $f \in L^q(0, 1)$, последовательность $\{n_j\}_{j=0}^\infty$ такова, что для всех j выполнено $n_{j+1} \geq 2n_j$ (тем самым, $\{n_j\}_{j=0}^\infty$ лакунарная последовательность) и $n_0 = 0, n_1 = 1$. Положим

$$\rho_j(f, x) = \sum_{|m|=n_{j-1}}^{n_j-1} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\widehat{f}(m) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx$ – тригонометрические коэффициенты Фурье f .
Тогда

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_{\infty}^q n_j^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Литтлвуда–Пэли (см., например, [26; п. 1.5.2])

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 |f(x)|^q dx \asymp \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f, x)|^2 \right)^{q/2} dx. \quad (12)$$

Применяя неравенство ($\theta > 1, b_j \geq 0$)

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)^{\theta} \geq \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{\theta}$$

в случае $b_j = |\rho_j(f)|^2$, $\theta = q/2 > 1$, получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f, x)|^2 \right)^{q/2} \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f, x)|^q.$$

Интегрируя полученное неравенство, продолжим оценку (12):

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 |\rho_j(f, x)|^q dx = \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_q^q.$$

Так как $\rho_j(f)$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше n_j , то в силу неравенства разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3] имеем

$$\|\rho_j(f)\|_{\infty} \ll n_j^{1/q} \|\rho_j(f)\|_q,$$

или

$$\|\rho_j(f)\|_q \gg \|\rho_j(f)\|_{\infty} n_j^{-1/q}.$$

Стало быть,

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_{\infty}^q n_j^{-1}.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть даны целые неотрицательные числа N , $u \geq 2N$ и v .

Тогда для произвольных линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$, определенных по крайней мере на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в $[v+1, v+u]$, найдется тригонометрический многочлен $\psi(x)$ со спектром в $[v+1, v+u]$ такой, что

$$l_1(\psi) = \dots = l_N(\psi) = 0, \quad \|\psi\|_\infty \asymp u, \quad \|\psi\|_2^2 \asymp u.$$

Эта лемма есть частный случай леммы В из [10].

ЛЕММА 7. Пусть дано целое неотрицательное число N , последовательность целых чисел $\{n_j\}_{j=0}^\infty$ такая, что для всех $j \geq 1$ выполнено $n_{j+1} \geq 2n_j$, $n_1 \geq 3N$, $n_0 = 0$, последовательность $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ неотрицательных чисел, целое число $a > 1$.

Тогда для произвольных линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$, определенных по крайней мере на множестве всех тригонометрических многочленов, найдется последовательность тригонометрических многочленов $\{\psi(x)\}_{j=1}^a$ со спектром в $[n_{j-1}, n_j - 1]$ таких, что

$$l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, a, \\ \left\| \sum_{j=1}^a A_j \psi_j \right\|_\infty \gg \sum_{j=1}^a A_j n_j, \quad \|\psi_j\|_2^2 \ll n_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Константы в неравенствах из лемм 6 и 7 не зависят от u и v , N и $l_1, \dots, l_N$. Также в леммах 6 и 7 от функционалов требуется только линейность, непрерывность относительно какой-либо из используемых норм не обязательна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Положим $t_j = n_j - n_{j-1} - N$. Тогда $t_j \asymp n_j$.

Для каждого $j = 1, \dots, a$ из условий

$$l_1\left(\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_m e^{2\pi i m x}\right) = \dots = l_N\left(\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_m e^{2\pi i m x}\right) = 0$$

составим систему из N линейных однородных уравнений

$$\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_m l_1(e^{2\pi i m x}) = \dots = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_m l_N(e^{2\pi i m x}) = 0 \quad (13)$$

относительно $n_j - n_{j-1}$ неизвестных $\{c_m\}_{m=n_{j-1}}^{n_j-1}$.

Поскольку ранг r системы (13) не больше числа N уравнений, а число неизвестных есть $n_j - n_{j-1}$, то фундаментальная система решений (13) состоит из $n_j - n_{j-1} - r \geq n_j - n_{j-1} - N = t_j$ решений (см., например, [27; § 12]).

Тогда соответствующие им многочлены

$$d_j^{(1)}(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_{m,j}^{(1)} e^{2\pi i m x}, \quad \dots, \quad d_j^{(t_j)}(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} c_{m,j}^{(t_j)} e^{2\pi i m x}$$

также линейно независимы и

$$l_1(d_j^{(1)}) = \dots = l_N(d_j^{(1)}) = \dots = l_1(d_j^{(t_j)}) = \dots = l_N(d_j^{(t_j)}) = 0.$$

Используя метод ортогонализации Гильберта–Шмидта, получаем последовательность ортонормированных функций (тригонометрических многочленов со спектром в $[n_{j-1}, n_j - 1]$)

$$b_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{t_j} \alpha_{k,j}^{(1)} d_j^{(k)}, \quad \dots, \quad b_j^{(t_j)} = \sum_{k=1}^{t_j} \alpha_{k,j}^{(t_j)} d_j^{(k)}.$$

Отсюда в силу линейности функционалов $l_1, \dots, l_N$ получаем

$$l_1(b_j^{(1)}) = \dots = l_N(b_j^{(1)}) = \dots = l_1(b_j^{(t_j)}) = \dots = l_N(b_j^{(t_j)}) = 0. \quad (14)$$

Положим

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^a A_j (|b_j^{(1)}(x)|^2 + \dots + |b_j^{(t_j)}(x)|^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(x) dx &= \sum_{j=1}^a A_j \left(\int_0^1 |b_j^{(1)}(x)|^2 dx + \dots + \int_0^1 |b_j^{(t_j)}(x)|^2 dx \right) \\ &= \sum_{j=1}^a A_j t_j \asymp \sum_{j=1}^a A_j n_j. \end{aligned}$$

Поэтому найдется такая точка $\xi \in [0, 1]$, что $\Phi(\xi) \asymp \sum_{j=1}^a A_j n_j$. Положим $\psi_j(x) = \overline{b_j^{(1)}(\xi)} b_j^{(1)}(x) + \dots + \overline{b_j^{(t_j)}(\xi)} b_j^{(t_j)}(x)$ (как обычно, $\bar{z}$ есть комплексно сопряженное к $z \in C$). Тогда

$$\left\| \sum_{j=1}^a A_j \psi_j \right\|_{\infty} \geq \sum_{j=1}^a A_j \psi_j(\xi) = \Phi(\xi) \asymp \sum_{j=1}^a A_j n_j.$$

Далее, в силу ортонормированности функций $b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t_j)}$, равенства Парсеваля и неравенства разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3] имеем

$$\|\psi_j\|_2^2 = |b_j^{(1)}(\xi)|^2 + \dots + |b_j^{(t_j)}(\xi)|^2 = \psi_j(\xi) \leq \|\psi_j\|_{\infty} \ll n_j^{1/2} \|\psi_j\|_2,$$

откуда $\|\psi_j\|_2 \ll n_j^{1/2}$.

Выполнение равенств

$$l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, a,$$

следует из (14), линейности функционалов $l_1, \dots, l_N$ и определения функций ψ_j .

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Если последовательность функций

$$f_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x$$

удовлетворяет условиям $\|f_j\|_2 \asymp n_j^{1/2}$, $\|f_j\|_\infty \asymp n_j$, то при $2 \leq p \leq \infty$ имеют место неравенства $\|f_j\|_p \asymp n_j^{1-1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся два раза неравенством разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3]:

$$\|f_j\|_p \ll n_j^{1/2-1/p} \|f_j\|_2 \asymp n_j^{1/2-1/p} n_j^{1/2} = n_j^{1-1/p}, \quad n_j \asymp \|f_j\|_\infty \ll n_j^{1/p} \|f_j\|_p.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть даны модуль непрерывности $\omega(\delta)$, числа α и β . Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \asymp \sum_{n=8T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)$$

с постоянными, не зависящими от $T \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sum_{n=T+1}^{8T} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \asymp T^{1-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{T}\right) \asymp \sum_{n=8T+1}^{9T} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right),$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=T+1}^{9T} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=9T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\asymp \sum_{n=8T+1}^{9T} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=9T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=8T+1}^{\infty} n^{-\beta} \omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных результатов

3.1. Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N . Определим функционалы $l_1(f) = c_1(f)$, $\dots$, $l_N(f) = c_N(f)$ – коэффициенты Фурье–Хаара и функцию $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) = \sum_{n=1}^N z_n \chi_n(x)$ – многочлен по системе Хаара. Тогда

$$\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x) = \sum_{n=1}^N c_n(f) \chi_n(x) = S_N(f; x)$$

– частичная сумма ряда Фурье–Хаара функции f .

Поэтому для $f \in H_p^\omega$ в силу лемм 1 и 2 получаем

$$\begin{aligned} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_q &\ll \omega_q\left(\frac{1}{n}; f\right) \ll \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q}, \\ \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_\infty &\ll \omega_\infty\left(\frac{1}{n}; f\right) \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

В силу произвольности функции $f \in H_p^\omega$, для которой по определению класса выполнено неравенство $\omega_p(\delta; f) \leq \omega(\delta)$, получаем оценки сверху в теоремах 1 и 2.

3.2. Оценка снизу. Рассмотрим сначала случай, когда $\omega(\delta)/\delta$ ограничена, т.е. когда $\omega(\delta) \asymp \delta$. В этом случае класс H_p^ω содержит пространство Соболева $W_p^1[0, 1]$. Для $W_p^1[0, 1]$ в [10] нами был найден точный порядок при $2 \leq p < q \leq \infty$:

$$\delta_N(L_N, Tf = f, W_p^1)_{L^q} \asymp N^{-1+1/p-1/q}.$$

Легко проверить, что при $\omega(\delta) \asymp \delta$ имеют место соотношения

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q} \asymp N^{-1+1/p-1/q}$$

в случае $2 \leq p < q < \infty$, а в случае $q = \infty$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \asymp N^{-1+1/p}.$$

Тем самым, в случае, когда $\omega(\delta)/\delta$ ограничена, оценки снизу в теоремах 1 и 2 доказаны.

Перейдем теперь к случаю, когда $\omega(\delta)/\delta$ не ограничена.

Пусть даны число N и N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$.

Докажем сначала оценку снизу в теореме 1. Пусть число n такое, что $2^{n-1} < N \leq 2^n$. Положим $M = 2^{n+2} \in [4N, 8N]$.

Пусть числа $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ ($n_0 = 0$) и $\{B_n\}$ найдены по лемме 3 в случае $\alpha = q$, $\beta = 2 - q/p$. Определим целое число $a > 1$ так, что

$$\sum_{j=1}^a n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q,$$

если ряд $\sum_{j=1}^a n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ сходится, и

$$\sum_{j=1}^a n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geq \sum_{j=M}^{\infty} n_j^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right)$$

в противном случае.

В силу леммы 6, примененной при $u = n_j - n_{j-1}$, $v = n_{j-1} - 1$, если $j \geq 2$, и $v = 1$, если $j = 1$, найдутся функции ($n_1 = M$)

$$\psi_1(x) = \sum_{m=2}^{n_1-1} a_m \cos 2\pi m x, \quad \psi_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x, \quad j = 2, \dots, a,$$

такие, что $\|\psi_j\|_2^2 \asymp \|\psi_j\|_\infty \asymp n_j$ и $l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0$.

Положим теперь

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x);$$

тогда $l_1(\psi) = \dots = l_N(\psi) = 0$.

Пусть, как обычно, через $E_k(\psi)_p$ обозначено наилучшее приближение функции ψ в метрике L^p тригонометрическими многочленами порядка не выше k . Оценим сверху $E_k(\psi)_p$.

Очевидно, что для целого k найдется целое r такое, что $n_r \leq k < n_{r+1}$.

Если $r \geq 1$, то, заметив, что $\sum_{j=1}^r n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x)$ есть тригонометрический многочлен порядка не выше $n_r - 1$, получаем

$$\begin{aligned} E_k(\psi)_p &\leq E_{n_r-1}(\psi)_p \leq \left\| \sum_{j=1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x) - \sum_{j=1}^r n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x) \right\|_p \\ &\leq \sum_{j=r+1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} \|\psi_j\|_p \ll \sum_{j=r+1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j^{1-1/p} \\ &= \sum_{j=r+1}^a B_{n_j} \leq 2B_{n_{r+1}} \leq 2B_k. \end{aligned}$$

Если же $r < 1$, т.е. $r = 0$, то аналогично получаем

$$E_k(\psi)_p \leq \|\psi\|_p \ll B_{n_1} \ll B_k.$$

Таким образом, $E_k(\psi)_p \ll B_k$ для всех k .

Отсюда в силу обратной теоремы теории приближений (см. [28; п. 6.1]) и п. 3) леммы 3 имеем

$$\omega_p\left(\frac{1}{m}, \psi\right) = O\left(m^{-1} \sum_{k=1}^m B_k\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

т.е. $c \cdot \psi \in H_p^\omega$ для некоторого числа c .

Если ряд $\sum_{j=1}^\infty n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ сходится, то, применяя последовательно леммы 5 и 3, получаем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_q^q &\gg \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-q} B_{n_j}^q \|\psi_j\|_\infty^q n_j^{-1} \gg \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-q+q-1} B_{n_j}^q \\ &= \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \gg \sum_{j=1}^\infty n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \gg \sum_{n=M}^\infty n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Если же ряд $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ расходится, то, применяя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_q^q &\gg \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-q} B_{n_j}^q \|\psi_j\|_{\infty}^q n_j^{-1} \gg \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-q+q-1} B_{n_j}^q \\ &= \sum_{j=1}^a n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geq \sum_{n=M}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае

$$\|\psi\|_q^q \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q \left(\frac{1}{n} \right).$$

Далее, применяя лемму 9, затем лемму 4, получаем оценку снизу в теореме 1.

Перейдем теперь к оценке снизу в теореме 2. Пусть числа $\{n_k\}$, $\{B_n\}$ найдены по лемме 3 в случае $\alpha = 1$, $\beta = 1 - 1/p$. Определим целое число $a > 1$ так, что

$$\sum_{j=1}^a n_j^{1/p} B_{n_j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j},$$

если ряд $\sum_{j=1}^a n_j^{1/p} B_{n_j}$ сходится, и

$$\sum_{j=1}^a n_j^{1/p} B_{n_j} \geq \sum_{j=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega \left(\frac{1}{n} \right)$$

в противном случае.

В силу леммы 7, примененной в случае $A_j = n_j^{1/p-1} B_{n_j}$, найдутся функции ψ_j ,

$$\psi_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x, \quad j = 1, \dots, a,$$

такие, что $\|\psi_j\|_2^2 \ll n_j$ и $l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0$.

Положим

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x).$$

Тогда $l_1(\psi) = \dots = l_N(\psi) = 0$.

Так как

$$\|\psi\|_p \ll (n_j)^{1/2-1/p} \|\psi_j\|_2 \ll (n_j)^{1-1/p},$$

то аналогично теореме 1 получаем, что $c \cdot \psi \in H_p^{\omega}$ для некоторого числа c .

Далее, в случае сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j}$, последовательно применяя леммы 3 и 7, получаем

$$\|\psi\|_{\infty} \geq \sum_{j=1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j = \sum_{j=1}^a n_j^{1/p} B_{n_j} \gg \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j} \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega \left(\frac{1}{n} \right).$$

Если же ряд $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j}$ расходится, то, применяя лемму 7, имеем

$$\|\psi\|_{\infty} \geq \sum_{j=1}^a n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j = \sum_{j=1}^a n_j^{1/p} B_{n_j} \geq \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, в любом случае

$$\|\psi\|_{\infty} \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее, применяя сначала лемму 9, затем лемму 4, получаем оценку снизу в теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что необходимую часть теорем 1 и 2 нельзя получить прямым применением леммы 12 из работы [13] (а также аналогичных лемм из [24] и [25]), поскольку в ней последовательность $\{n_k\}$ может расти очень быстро, и потому не всегда возможно гарантированно получить искомую оценку снизу: может оказаться, что до некоторого номера n_k имеющейся информации не достаточно для построения крайней функции класса H_p^{ω} (см. лемму 4), а после номера n_k получаем слишком маленькую сумму.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы вложения типа теорем А и В были доказаны и для других, нежели H_p^{ω} , классов функций одного и многих переменных. Не исключено, что связи, аналогичные установленным в настоящей статье, между теоремами вложения и порядками соответствующих компьютерных (вычислительных) поперечников (1) имеют место и в этих случаях.

Список литературы

- [1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
- [2] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, М., 1986.
- [3] В. Н. Темляков, *Приближения функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986; англ. пер.: V. N. Temlyakov, "Approximation of functions with bounded mixed derivative", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **178**:1 (1989).
- [4] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: N. Korneïchuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [5] К. Ю. Осипенко, "Об n -поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 55–79; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, "On n -widths, optimal quadrature formulas, and optimal recovery of functions analytic in a strip", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 55–78.
- [6] K. Yu. Osipenko, K. Wilderotter, "Optimal information for approximating periodic analytic functions", *Math. Comp.*, **66**:220 (1997), 1579–1592.
- [7] S. D. Fisher, Ch. A. Micchelli, "Optimal sampling of holomorphic functions", *Amer. J. Math.*, **106**:3 (1984), 593–609.
- [8] S. D. Fisher, Ch. A. Micchelli, "Optimal sampling of holomorphic functions. II", *Math. Ann.*, **273**:1 (1985), 131–147.

- [9] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье”, *Вестн. Евраз. ун-та*, 1997, №3, 90–144.
- [10] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Об информативной мощности линейных функционалов”, *Матем. заметки*, **73**:6 (2003), 803–812; англ. пер.: Sh. Azhgaliev, N. Temirgaliev, “Informativeness of linear functionals”, *Math. Notes*, **73**:5–6 (2003), 759–768.
- [11] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье (Продолжение 1)”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, **3–4** (2002), 222–272.
- [12] Н. Темиргалиев, “Проблемы теории функций и вычислительные методы (доклад, представленный на Всемирный Конгресс математиков 2006 года в Мадриде)”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, **2** (2007), 19–51.
- [13] П. Л. Ульянов, “Вложение некоторых классов функций H_p^ω ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 649–686; англ. пер.: P. L. Ul’janov, “The imbedding of certain function classes H_p^ω ”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 601–637.
- [14] П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 193–225; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “Absolute and uniform convergence of Fourier series”, *Math. USSR-Sb.*, **1** (1967), 169–197.
- [15] *Теория функций и вычислительные методы*, Материалы Международной конф., посвященной 60-летию со дня рождения проф. Н. Темиргалиева (Астана, 2007), Изд-во ЕНУ, Астана, 2007.
- [16] К. И. Осколков, “Inequalities of the “large sieve” type and applications to problems of trigonometric approximation”, *Anal. Math.*, **12**:2 (1986), 143–166.
- [17] В. Н. Темляков, “Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных”, *Матем. сб.*, **128(170)**:2(10) (1985), 256–268; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximate recovery of periodic functions of several variables”, *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 249–261.
- [18] В. Х. Христов, “О сходимости некоторых интерполяционных процессов в интегральных и дискретных нормах”, *Конструктивная теория функций* (Варна, 1981), Изд-во АН Болгарии, София, 1983, 185–188.
- [19] К. Г. Иванов, “On the rates of convergence of two moduli of functions”, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **5** (1983), 97–104.
- [20] С. Н. Кудрявцев, “Некоторые задачи теории приближений для одного класса функций конечной гладкости”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 3–20; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Some problems in approximation theory for a class of functions of finite smoothness”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 145–164.
- [21] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
- [22] А. В. Ефимов, “Линейные методы приближения непрерывных периодических функций”, *Матем. сб.*, **54(96)**:1 (1961), 51–90.
- [23] B. Szökefalvi-Nagy, “Approximation properties of orthogonal expansion”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **15**:1 (1953), 31–37.
- [24] В. А. Андриенко, “Вложение некоторых классов функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:6 (1967), 1311–1326; англ. пер.: V. A. Andrienko, “The imbedding of certain classes of functions”, *Math. USSR-Izv.*, **1**:6 (1967), 1255–1270.
- [25] В. А. Андриенко, “О необходимых условиях вложения классов функций H_p^ω ”, *Матем. сб.*, **78(120)**:2 (1969), 280–300; англ. пер.: V. A. Andrienko, “Necessary conditions for imbedding the function classes H_p^ω ”, *Math. USSR-Sb.*, **7**:2 (1969), 273–292.

- [26] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [27] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука, М., 1978; англ. пер.: A. Kurosh, *Higher algebra*, Mir, Moscow, 1988.
- [28] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Pergamon, New York, 1963.

Ш. У. Ажгалиев (Sh. Azhgaliyev)

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва

Республика Казахстан, г. Астана

E-mail: nepash@mail.ru

Поступила в редакцию

14.11.2005 и 04.05.2007

Н. Темиргалиев (N. Temirgaliyev)

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва

Республика Казахстан, г. Астана

E-mail: ntmath@mail.ru