Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин, Конусы в группах, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 59–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:25:35

УДК 512.8

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин

Конусы в группах

Изучается структура идеалов конуса P группы G . Полностью разбирается случай, когда P имеет один вполне первичный идеал. Строятся соответствующие примеры на основе универсальной накрывающей группы специальной линейной группы 2×2 -матриц над полем $\mathbb{R}$.

Библиография: 10 названий.

Введение

Подмножество P группы G назовем *конусом*, если $P \cdot P \subseteq P$ и $P \cup P^{-1} = G$. Если, кроме того, $P \cap P^{-1} = \{1\}$ (здесь и далее 1 – единичный элемент группы G), то P назовем *основным конусом* группы G . В работе изучается структура идеалов конусов, в частности, первичных и вполне первичных идеалов. Существует почти полная аналогия между этой задачей и исследованием структуры идеалов цепных областей в силу следующего легко проверяемого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подкольцо R тела D является цепным порядком в D (т.е. как левые, так и правые идеалы кольца R линейно упорядочены по включению) в том и только том случае, когда полугруппа $(R^*, \cdot)$ ненулевых элементов кольца R будет конусом в мультипликативной группе тела D .*

Для полной аналогии остается положительно ответить на следующий вопрос: для каждого ли основного конуса P группы G существует ассоциированный с ним цепной порядок R в теле D ; ассоциированный в том смысле, что $(G, \cdot) \subseteq (D^*, \cdot)$, $G \cap R = P$, и любой ненулевой элемент $d \in D$ может быть записан в виде $d = g_1 u_1 = u_2 g_2$, где u_1, u_2 обратимы в R , а $g_1, g_2 \in G$ таковы, что $P g_1 P = P g_2 P$ (см. [1, §1, определение 4])? Отметим, что этот вопрос включает в себя, в частности, проблему Мальцева о вложимости групповой алгебры правоупорядоченной группы в тело (см. [2, проблема 17, с. 87]), ибо группа G с линейным порядком $\leq$ будет правоупорядоченной в том и только том случае, если множество $P(G) = \{g \in G \mid g \geq 1\}$ является основным конусом в G ; тогда неравенство $g_1 \leq g_2$ равносильно принадлежности $g_2 g_1^{-1} \in P(G)$ (см. [2, глава V, §4]).

Другая причина возникшего интереса к конусам заключается в том, что с этим тесно связано изучение автоморфизмов линейно упорядоченных множеств (см. §3), и именно на этом пути получается полное описание конусов с одним вполне первичным идеалом (см. примеры в §4, а также теорему 4).

В работе упоминается пример фундаментальной группы трилистника с основным конусом, содержащим первичный, но не вполне первичный идеал, коммутант которой не содержится в собственной выпуклой подгруппе (см. [2, проблема 1, с. 34],

а также [3] и [4]). Отметим попутно, что в работе Бергмана [5] приводится пример правоупорядоченной, но не локально-индикабельной группы. Эти примеры объединяет то, что соответствующие группы вложены в один и тот же универсальный объект – универсальную накрывающую группу группы $SL(2, \mathbb{R})$.

§ 1. Основные свойства конусов

Всюду далее в этом параграфе P – конус в группе G . Непустое подмножество I группы G назовем *правым P -идеалом*, если $IP \subseteq I$ и $I \subseteq gP$ для некоторого $g \in G$. Аналогично определяется понятие левого P -идеала. Если I – правый и левый P -идеал одновременно, то говорим в этом случае, что I – P -идеал. При дополнительном условии $I \subseteq P$ приставку “ P -” опускаем и называем I (правым, левым) идеалом. Если, кроме того, $I \neq P$, то (правый, левый) идеал I называем *собственным*. Собственный идеал I конуса P называется *первичным* (вполне первичным), если из включения $aPb \subseteq I$ ($ab \in I$) для элементов $a, b \in P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$. Множество первичных идеалов конуса P обозначим $\text{спрс } P$, а множество вполне первичных идеалов обозначим $\overline{\text{спрс}} P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество правых (левых) P -идеалов линейно упорядочено по включению.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множество обратимых элементов конуса P совпадает с $P \cap P^{-1}$ и является подгруппой группы G .*

Это множество далее будем обозначать $U(P)$. В частности, P – основной конус в том и только том случае, когда $U(P) = \{1\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Множество $J(P)$ необратимых в P элементов будет максимальным правым (левым) собственным идеалом. Идеал $J(P)$ вполне первичен и имеет место разложение*

$$P = U(P) \cup J(P); \quad U(P) \cap J(P) = \emptyset. \quad (1)$$

Идеал $J(P)$ называем далее *радикалом* конуса P .

Доказательства предложений 2–4 непосредственны и аналогичны соответствующим утверждениям о цепных кольцах.

ЛЕММА 1. *Пусть J – вполне первичный идеал конуса P . Тогда $aJ = Ja = J$ для любого элемента $a \in P \setminus J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b \in J$, то $bP \subseteq aP$ (см. предложение 2); значит, $c = a^{-1}b \in P$. Так как $ac = b \in J$ и $a \notin J$, то $c \in J$ по определению вполне первичного идеала, т.е. $b \in aJ$. Итак, доказано, что $J \subseteq aJ$. Обратное включение очевидно, поэтому $J = aJ$. Аналогично доказывается равенство $J = Ja$.

Подмножество Q группы G назовем *надконусом* конуса P , если $Q \cdot Q \subseteq Q$ и $Q \supseteq P$. Ясно, что Q будет конусом в этом случае, и если $Q \neq G$, то Q будет P -идеалом.

ТЕОРЕМА 1 (локализация по вполне первичному идеалу). *Пусть J – вполне первичный идеал конуса P . Тогда множество $Q = (P \setminus J)^{-1} \cup P$ будет надконусом конуса P , радикал которого совпадает с J , а множество обратимых элементов совпадает с $(P \setminus J)^{-1} \cup (P \setminus J)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a, b \in P \setminus J$, то $ab \in P \setminus J$ в силу вполне первичности J . Следовательно, $b^{-1}a^{-1} \in (P \setminus J)^{-1}$. Далее, если $bP \supseteq aP$, то $b^{-1}a \in P$. В случае $bP \subset aP$ имеем: $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in (P \setminus J)^{-1}$, так как $a^{-1}b \in P \setminus J$. Остается рассмотреть произведения вида $a^{-1}p, pa^{-1}$ для $p \in J$. В этом случае $a^{-1}p, pa^{-1} \in J$ в силу леммы 1. Итак, доказано, что Q – надконус.

Ясно, что $J(Q) \subseteq J$, ибо элементы из множеств $(P \setminus J)^{-1}$ и $P \setminus J$ обратимы в Q . Но с другой стороны, J – идеал конуса Q , что следует из леммы 1. Тогда $J(Q) = J$ и $U(Q) = Q \setminus J(Q) = (P \setminus J)^{-1} \cup (P \setminus J)$.

Надконус Q , построенный в теореме 1, назовем *локализацией конуса P* по вполне первичному идеалу J и будем обозначать P_J .

СЛЕДСТВИЕ. *Существует взаимно однозначное и обращающее включение соответствие между множеством вполне первичных идеалов конуса P и множеством $\text{Con } P$ надконусов конуса P , не совпадающих с G . Это соответствие задается правилами:*

$$J \in \overline{\text{спр}} P \rightarrow P_J \in \text{Con } P, \quad (2)$$

$$Q \in \text{Con } P \rightarrow J(Q) \in \overline{\text{спр}} P. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что соответствия (2) и (3) обращают включения. Кроме того, равенство $J(P_J) = J$ доказано в теореме 1. Наоборот, пусть $J = J(Q)$ для некоторого $Q \in \text{Con } P$. Так как $Q \neq G$, то $J \neq \emptyset$. Кроме того, J – вполне первичный идеал конуса Q (предложение 4), а значит, и конуса P . Тогда $P_J = P \cup (P \setminus J)^{-1} \subseteq Q$ и $(Q \setminus P)^{-1} \subseteq P \setminus J$, откуда $Q \subseteq P \cup (P \setminus J)^{-1} = P_J$. Равенство $P_J = Q$, а вместе с тем и следствие доказаны.

Пусть I – непустое подмножество группы G . Введем обозначения

$$O_r(I) = \{g \in G \mid Ig \subseteq I\},$$

$$O_l(I) = \{g \in G \mid gI \subseteq I\},$$

$$I^{-1} = \{g \in G \mid IgI \subseteq I\},$$

которые и назовем, соответственно, *правым множителем, левым множителем и обратным множеством* множества I . Отметим, что $O_r(I)$ и $O_l(I)$ будут подмоноидами группы G , а

$$I^{-1} = \{g \in G \mid Ig \subseteq O_l(I)\} = \{g \in G \mid gI \subseteq O_r(I)\}.$$

Далее нетрудно проверить, что если I – правый P -идеал, то $O_l(I)$ – конус, а $O_r(I)$ – надконус конуса P ; I является правым $O_r(I)$ - и левым $O_l(I)$ -идеалом, а I^{-1} является правым $O_l(I)$ - и левым $O_r(I)$ -идеалом. Аналогичное утверждение имеет место и для левых P -идеалов.

ТЕОРЕМА 2 (характеризация главных односторонних идеалов). *Пусть I – односторонний P -идеал. Обозначим $S = O_r(I)$, $Q = O_l(I)$. Тогда либо I – главный правый S -идеал и главный левый Q -идеал одновременно; либо I и $J(S)$ не являются главными правыми S -идеалами, $J(Q)$ и I не являются главными левыми Q -идеалами и $I^{-1}I = J(S)$, $II^{-1} = J(Q)$, $I = IJ(S)$, $J(Q)I = I$.*

Если I – правый P -идеал и $IJ(P) \neq I$, то $S = P$ и I – главный правый P -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что либо $I^{-1}I = S$, либо $II^{-1} = Q$. Пусть $I^{-1}I = S$. Тогда $ba = 1$ для некоторых элементов $b \in I^{-1}$ и $a \in I$. Следовательно, $ab = 1$ и $c = a(bc) \in aS$ для любого элемента $c \in I$. Отсюда вытекает включение $I \subseteq aS$. В силу очевидности обратного включения, получаем равенство $I = aS$. Тогда $Q = aSa^{-1}$, $I = Qa$, тем самым имеет место первый случай альтернативы. Аналогичный результат получаем, когда $II^{-1} = Q$.

Далее понадобятся две леммы.

ЛЕММА 2. *Имеют место равенства $O_l(I^{-1}) = S$, $O_r(I^{-1}) = Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $O_l(I^{-1}) \supset S$. Тогда $I \neq IO_l(I^{-1})$, поэтому $I \subset Qc \subseteq IO_l(I^{-1})$ для любого элемента $c \in IO_l(I^{-1}) \setminus I$. Отсюда вытекает, что $Ic^{-1} \subset Q$, а значит, $c^{-1} \in I^{-1}$. Далее имеем: $1 = c \cdot c^{-1} \in IO_l(I^{-1})I^{-1} = II^{-1}$ и согласно доказанному выше $I = aS$ — главный правый S -идеал. Тогда $O_l(I^{-1}) = O_l(Sa^{-1}) = S$, что противоречит предположению. Противоречие доказывает справедливость равенства $O_l(I^{-1}) = S$. Аналогично доказывается равенство $O_r(I^{-1}) = Q$.

ЛЕММА 3. $O_l(J(S)) = O_r(J(S)) = S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in G \setminus S$, то $a^{-1} \in J(S)$; поэтому $J(S)a \supset J(S)$, а значит, $a \notin O_r(J(S))$.

Продолжим доказательство теоремы. Предположим, что $I \neq IJ(S)$. Тогда $I \supseteq aS \supset IJ(S) \supseteq aJ(S)$ для элемента $a \in I \setminus IJ(S)$. Так как между aS и $aJ(S)$ нет правых S -идеалов, то $IJ(S) = aJ(S)$. Отсюда $a^{-1}I \subseteq O_l(J(S)) = S$ (лемма 3), что дает включение $I \subseteq aS$ и тем самым равенство $I = aS$. Тогда снова имеет место первый случай альтернативы. Заодно мы доказали последнее утверждение теоремы. Неравенство $I \neq J(Q)I$ аналогично ведет к первому случаю альтернативы.

Предположим теперь, что $I^{-1}I \neq S$ и $II^{-1} \neq Q$. Если либо $I^{-1}I \neq J(S)$, либо $J(S)$ был бы главным правым S -идеалом, то $I^{-1}I \subseteq zS$ для подходящего элемента $z \in J(S)$. Тогда $z^{-1}I^{-1}I \subseteq S$, откуда $z^{-1}I^{-1} \subseteq I^{-1}$, а значит, $z^{-1} \in O_l(I^{-1}) = S$ (лемма 2). Получаем, что z — обратимый в S элемент, принадлежащий радикалу $J(S)$. Это противоречие показывает, что на самом деле $I^{-1}I = J(S)$, и $J(S)$ не является главным правым S -идеалом. Аналогично доказывается равенство $II^{-1} = J(Q)$ и тот факт, что $J(Q)$ и I не являются главными левыми Q -идеалами.

Доказательство теоремы закончено.

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях и обозначениях теоремы 2, если $I \neq (I^{-1})^{-1}$, то $I = zJ(S) = J(Q)z$, $I^{-1} = Sz^{-1} = z^{-1}Q$ и $(I^{-1})^{-1} = zS = Qz$ для некоторого элемента $z \in G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $z \in (I^{-1})^{-1} \setminus I$, ибо заведомо $I \subseteq (I^{-1})^{-1}$. Тогда, во-первых, I не является главным правым S -идеалом, а во-вторых, согласно лемме 2 и теореме 2

$$S = O_l(I^{-1}) \supseteq I^{-1}(I^{-1})^{-1} \supseteq I^{-1}z \supseteq I^{-1}I = J(S). \quad (4)$$

Если $I^{-1}z = S$, то $I^{-1} = Sz^{-1}$, $I = zJ(S)$, $Q = zSz^{-1}$ и все остальные равенства в формулировке следствия проверяются немедленно. Если же $I^{-1}z \neq S$, то из (4) вытекает, что $I^{-1}z = J(S)$, т.е. $I^{-1} = J(S)z^{-1}$. Отсюда получаем: $J(S) = I^{-1}I = J(S)z^{-1}I$. Тогда $z^{-1}I \subseteq S$ согласно лемме 3, поэтому $z^{-1} \in I^{-1}$, —противоречие с равенством $I^{-1} = J(S)z^{-1}$. Противоречие показывает, что случая $I^{-1}z \neq S$ быть не может; тем самым следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть I — правый P -идеал с условием $O_r(I) = P$. Обозначим $S = O_l(I)$. Отображения

$$\begin{aligned} J \in \text{спес } P &\rightarrow IJI^{-1}, \\ B \in \text{спес } S &\rightarrow IB I^{-1} \end{aligned}$$

являются взаимно обратными изоморфизмами линейно упорядоченных по включению множеств $\text{спес } P$ и $\text{спес } S$. При этом P -идеал J вполне первичен тогда и только тогда, когда S -идеал IJI^{-1} вполне первичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если либо $I^{-1}I = P$, либо $II^{-1} = S$, то I — главный правый P -идеал, и справедливость утверждения проверяется непосредственно. В противном случае согласно теореме 2 получим: $I^{-1}I = J(P)$ и $II^{-1} = J(S)$.

ЛЕММА 4. А. Если A_1 и A_2 — левые P -идеалы такие, что $A_1 \supset A_2$ и $IA_1 = IA_2$, то $A_1 = Pz$ и $A_2 = J(P)z$ для некоторого $z \in G$.

Б. Если A_1 и A_2 — P -идеалы такие, что $A_1 \supset A_2$ и $IA_1I^{-1} = IA_2I^{-1}$, то либо A_1 и A_2 как в п. А, либо $A_1 = zP$, $A_2 = zJ(P)$ для некоторого $z \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Из условия вытекает, что $J(P)A_1 = J(P)A_2 \subseteq A_2 \subseteq A_1$, т.е. $J(P)A_1 \neq A_1$. Ввиду теоремы 2 $A_1 = Pz$ — главный левый P -идеал. Так как $J(P)z \subseteq A_2 \subseteq Pz$ и между $J(P)z$ и Pz нет левых P -идеалов, то $A_2 = J(P)z$.

Б. В силу утверждения А можно считать, что $IA_1 \supset IA_2$. Тогда, пользуясь правосторонним аналогом утверждения А (IA_1 и IA_2 вместо A_1 и A_2 и I^{-1} вместо I ; учесть также равенство $O_l(I^{-1}) = P$) получаем: $IA_1 = bP$, $IA_2 = bJ(P)$ для некоторого $b \in G$. Тогда $b^{-1}IA_1 = P$, поэтому $b^{-1}I$ — главный правый P -идеал (теорема 2). Пусть $b^{-1}I = z^{-1}P$ для подходящего элемента $z \in G$. Имеем: $A_1 = zP$ и $A_2 = zJ(P)$.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $J \in \text{спес } P$. Докажем, что $B = IJI^{-1} \in \text{спес } S$. Во-первых, B — собственный идеал конуса S , иначе $IJI^{-1} = S$, откуда $S \supseteq II^{-1} \supseteq IJI^{-1} = S$, т.е. $II^{-1} = S$. Тогда I — главный правый P -идеал (теорема 2), что противоречит предположению о I . Во-вторых, если $J = J(P)$, то $B = IJ(P)I^{-1} = II^{-1} = J(S)$, и первичность B доказана. Считаем далее, что $J \neq J(P)$. Тогда, в частности, $J = J(P)JJ(P)$ и $J \neq J(P)z$, $J \neq zJ(P)$ ни для какого $z \in G$. Пусть C — идеал конуса S , строго содержащий B ; тогда $I^{-1}CI \supset J = I^{-1}IJI^{-1}I$ (лемма 4). В силу первичности J имеем: $I^{-1}CII^{-1}CI \supset J$, следовательно, $I^{-1}C^2I \supset J$; поэтому $C^2 \supseteq I(I^{-1}C^2I)I^{-1} \supset IJI^{-1} = B$ (лемма 4, п. Б). Так как множество идеалов конуса линейно упорядочено по включению, то доказано, что $B \in \text{спес } S$.

Аналогично доказывается первичность идеала $I^{-1}BI$ конуса P , если $B \in \text{спес } S$.

Предположим теперь, что $J \in \overline{\text{спрес}} P$. Как и выше, можно считать, что $J \neq J(P)$ и, напоминая, $I^{-1}I = J(P)$. Из этого равенства и строгого включения $J \subset J(P)$ вытекает, что $P \supset gI \supset J$ для некоторого $g \in I^{-1}$. Так как правые и левые идеалы конуса S линейно упорядочены по включению, то для доказательства вполне первичности идеала $B = IJI^{-1}$ достаточно установить, что $s \in B$, как только $s^2 \in B$ и $s \in S$. Во-первых, докажем, что $gs^2g^{-1} \in P$ в этом случае. Действительно, иначе имели бы

$$J \supseteq gIJ \supseteq gIJI^{-1}I = gBI \supseteq gs^2I = gs^2g^{-1}gI \supseteq gs^2g^{-1}J \supseteq J,$$

ибо $gs^2g^{-1} \notin P$. Тогда $J = gs^2I$ и $P = O_r(I) = O_r(gs^2I) = O_r(J)$. Но конус $O_r(J)$ строго содержит P , так как J – вполне первичный идеал, не совпадающий с $J(P)$ (теорема 1). Полученное противоречие показывает, что на самом деле $gs^2g^{-1} \in P$. Во-вторых, из соотношения

$$(gs^2g^{-1})gI = gs^2I \subseteq gIJ = J$$

и вполне первичности идеала J следует, что $gs^2g^{-1} \in J$. Отсюда получаем: $gsI = gsg^{-1}gI \subseteq J \cdot P = J = gI \cdot J$; из чего вытекает $sJ(S) = sII^{-1} \subseteq IJI^{-1} = B$, и поэтому $s \in B$ в силу первичности B и неравенства $B \neq J(S)$.

Аналогично доказывается вполне первичность идеала $I^{-1}BI$ конуса P при условии, что $B \in \overline{\text{спрес}} S$.

§ 2. Конусы с одним вполне первичным идеалом

В этом параграфе снова P – конус в группе G .

ЛЕММА 5. Пусть I – собственный идеал конуса P .

- А. Если $I^2 = I$, то I – вполне первичный идеал.
- Б. Если пересечение $J = \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m$ не пусто, то J – вполне первичный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Достаточно доказать равенство $aI = I$ для всех $a \in P \setminus I$. Доказываем это методом от противного; пусть $aI \subset I$ для некоторого $a \in P \setminus I$. Тогда $P \supset a^{-1}I \supset I$ и $a^{-1}I = a^{-1}I^2 = (a^{-1}I)I \subseteq I$ – противоречивые включения.

Б. Если $I^n = I^{n+1}$ для некоторого натурального n , то $J = I^n = I^{2n} = J^2$ и утверждение следует из А. В противном случае для любых $a, b \in P \setminus J$ найдется натуральное число m такое, что $aP \cap bP \supseteq I^m$. Тогда $abP \supseteq aI^m = aPI^m \supseteq I^{2m} \neq J$ и, следовательно, $ab \notin J$.

Предположим теперь, что конус P имеет лишь один вполне первичный идеал, который, следовательно, совпадает с радикалом $J(P)$. Опишем структуру моноида P -идеалов. Заметим прежде всего, что конус P не имеет собственных надконусов и поэтому, в частности, $O_r(I) = P$ для любого правого P -идеала I .

Случай 1. Предположим, что $J(P)$ – главный правый P -идеал, порожденный элементом z . Тогда $J(P) = z(P) \supseteq Pz$ и $zPz^{-1} \supseteq P$. Отсюда вытекает, что $zPz^{-1} = P$ и $zP = Pz$. Согласно лемме 5 получаем, что множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} z^n P =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (zP)^n$ пусто. Так как между P и zP не может быть односторонних идеалов, то это же верно и для “отрезка” $[z^n P, z^{n+1} P]$. Тогда множество односторонних P -идеалов совпадает с множеством $\{z^m P \mid m \in \mathbb{Z}\}$ и образует бесконечную циклическую группу по умножению.

Назовем конус P в этом случае *дискретным*.

Случай 2. Предположим, что радикал $J(P)$ не является главным правым идеалом и не равен PaP ни для какого элемента $a \in J(P)$.

Для произвольно выбранного элемента $a \in J(P)$ обозначим $I = PaP$. Если $I = IJ(P)$, то $a = rab$ для некоторых $p \in P$ и $b \in J(P)$. Так как $PbP \neq J(P)$, то $PbP \subseteq Pz \subseteq J(P)$ для подходящего элемента $z \in J(P)$. Из равенства $a = rab$ следует соотношение $I = IPbP \subseteq Iz \subseteq IJ(P) = I$, т.е. $I = Iz$ и $z^{-1} \in O_r(I) = P$, что противоречит принадлежности $z \in J(P)$. Противоречие показывает, что на самом деле $I \neq IJ(P)$. Следовательно, $PaP = dP$ – главный правый P -идеал (теорема 2). Так как $dP \supseteq Pd$, то $dPd^{-1} \supseteq P$, откуда $dPd^{-1} = P$ и $dP = Pd$. Это значит, что соотношение $PaP = dP$ мы можем переписать таким образом: $Pd^{-1}aP = P$. Отсюда следует, что $d^{-1}a \in U(P)$, т.е. $d^{-1}aP = P$ и тем самым $aP = dP$ – двусторонний идеал. Как и ранее отсюда вытекает, что $aP = Pa$. Следовательно, $gP = Pg$ для любого элемента $g \in G$. Ввиду леммы 5 $\bigcap_{n=1}^{\infty} a^n P = \emptyset$ для любого $a \in J(P)$. Это значит, что линейно упорядоченная отношением включения группа главных P -идеалов архимедова, в частности, коммутативна.

Назовем конус P в случае 2 *архимедовым*.

Случай 3. Предположим, что $J(P) = PaP$ для некоторого $a \in J(P)$, причем $J(P)$ не является главным правым идеалом, а P не содержит собственных идеалов, кроме $J(P)$.

Назовем конус P в этом случае *почти простым* (соответствующий пример см. в § 4).

Случай 4. Предположим, что $J(P) = PaP$ для некоторого элемента $a \in J(P)$, причем $J(P)$ не является главным правым идеалом, и конус P содержит собственный идеал, отличный от $J(P)$.

Пусть I – идеал конуса P , строго содержащийся в радикале $J(P)$. Тогда $I \subseteq aP$, ибо иначе $I \supseteq aP$, откуда $I \supseteq PaP = J(P)$. Будем считать, что I – наибольший идеал, содержащийся в правом идеале aP (применяем лемму Цорна). Докажем, что I – первичный идеал. Действительно, если b и d взяты из $J(P) \setminus I$, то $PbP = PdP = J(P)$, откуда $PbPdP = J(P)^2 = J(P)$. Последнее равенство имеет место, так как $J(P)$ не является главным правым идеалом. Итак, $bPd \not\subseteq I$ и первичность идеала I доказана. Из леммы 5 вытекает, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \emptyset$. Так как между $J(P)$ и I нет идеалов, то не будет их и между $I^m J(P)$ и I^{m+1} для любого натурального m . Все идеалы конуса P перечислены в следующей цепочке:

$$P \supset J(P) \supset I \supseteq IJ(P) \supset I^2 \supseteq I^2 J(P) \supset \dots \supset I^n \supseteq I^n J(P) \supset \dots$$

Нестрогие включения могут быть строгими и тем самым I может быть главным правым (левым) идеалом, а могут и не быть строгими (примеры см. в § 4).

Назовем конус P в случае 4 *специальным*.

ТЕОРЕМА 4. *Любой конус P с единственным вполне первичным идеалом является либо архимедовым, либо почти простым, либо специальным. Все три случая реализуются в действительности.*

Снова перейдем к произвольному конусу P группы G . Рассмотрим два вполне первичных идеала J_1 и J_2 конуса P таких, что $J_1 \supset J_2$ и между J_1 и J_2 нет других вполне первичных идеалов. В этом случае пару J_1, J_2 будем называть *скачком*. Пусть Q_1 и Q_2 – локализации конуса P по идеалам J_1 и J_2 , соответственно. Тогда $Q_2 \supset Q_1$ и множество $Q_{12} = Q_1 \cap U(Q_2)$ будет конусом в группе $U(Q_2)$ с единственным вполне первичным идеалом $J(Q_{12}) = J_1 \cap U(Q_2)$. Действительно, если T – надконус конуса Q_{12} в $U(Q_{12})$, то $T_0 = T \cup J_2$ – надконус конуса P в G , лежащий строго между Q_1 и Q_2 . Назовем скачок J_1, J_2 *архимедовым (дискретным, почти простым, специальным)*, если таков конус Q_{12} в $U(Q_2)$. Следующее предложение усиливает и развивает теорему 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В условиях и обозначениях теоремы 3, если J_1, J_2 – архимедов (дискретный, почти простой, специальный) скачок конуса P , то IJ_1I^{-1}, IJ_2I^{-1} – скачок конуса S того же типа. Верно и обратное утверждение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. – прямое следствие леммы 4, п. Б и теоремы 3. Например, если J_1, J_2 – дискретный скачок, то $J_1^2 \neq J_1$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_1^n = J_2$. Из леммы 4 вытекает, что тогда $B_1^2 \neq B_1$ ($B_i = IJ_iI^{-1}, i = 1, 2$), и так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_1^n \in \overline{\text{спес}} S$ ввиду леммы 5, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_1^n = B_2$ по теореме 3. Отсюда следует, что скачок B_1, B_2 дискретный.

§ 3. Автоморфизмы линейно упорядоченных множеств

В этом параграфе всюду далее $(M, \leq)$ – линейно упорядоченное множество (л.у. множество), G – подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut } M$ этого л.у. множества.

Пусть $\{m_i \mid 0 \leq i < \lambda\}$ – трансфинитное перечисление элементов множества M . Это значит, что i и λ – ординалы, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, и объединение всех m_i совпадает с M . Для $g \in G$ через $v(g)$ обозначим наименьший индекс $i, i < \lambda$, такой, что $g(m_i) \neq m_i$. Если g не является тождественным отображением, то такой индекс существует. Для $g = 1$ полагаем по определению $v(g) = \lambda$. Нетрудно видеть, что

$$v(gh) \geq \min\{v(g), v(h)\}, \quad (5)$$

$$v(g^{-1}) = v(g) \quad (6)$$

для любых $g, h \in G$. Для всякого индекса $\nu, 0 \leq \nu \leq \lambda$, определим следующие подмножества в G :

$$\begin{aligned} P_\nu &= \{g \in G \mid \text{если } v(g) < \nu, \text{ то } g(m_{v(g)}) > m_{v(g)}\}, \\ J_\nu &= \{g \in P_\nu \mid v(g) < \nu\}, \\ S_\nu &= \{g \in P_\nu \mid v(g) \geq \nu\}. \end{aligned}$$

Следующая теорема обобщает известный факт теории правоупорядоченных групп (см. [2, глава V, § 4, теорема 1]).

ТЕОРЕМА 5 (конусы группы автоморфизмов л.у. множества).

- А. Для любого ординала ν , $0 \leq \nu \leq \lambda$, подмножество P_ν будет конусом с группой обратимых элементов S_ν , и в случае $P_\nu \neq G$ — с радикалом J_ν . Для $\nu = 0$ имеем: $P_0 = G$ и $J_0 = \emptyset$. Для $\nu = \lambda$ P_λ — основной конус; в частности, группа G правоупорядочиваема.
- Б. Если $0 \leq \nu \leq \mu \leq \lambda$, то $P_\mu \subseteq P_\nu$ и $J_\mu \supseteq J_\nu$.
- В. Если для некоторого ординала ν , $0 \leq \nu \leq \lambda$, подмножество $\bigcup \{m_i \mid i < \nu\}$ множества M плотно в M , то $P_\nu = P_\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Заметим, что $P_\nu = J_\nu \cup S_\nu$ и $J_\nu \cap S_\nu = \emptyset$. Предположим, что $g, h \in P_\nu$ и обозначим $i = v(h)$, $j = v(g)$. Если $i < \nu$ и $i \leq j$, то $h(m_i) \geq i$, откуда $gh(m_i) > g(m_i) \geq m_i$. В силу (5) имеем $v(gh) \geq i$, значит, $gh \in J_\nu$. Если $j < \nu$ и $j \leq i$, то $h(m_j) \geq m_j$, откуда $gh(m_j) \geq g(m_j) > m_j$, и снова $gh \in J_\nu$. Если же $i \geq \nu$, $j \geq \nu$, то $v(gh) \geq \nu$ (см. (5)), следовательно, $gh \in S_\nu$.

Тем самым доказано, что P_ν — полугруппа, J_ν — идеал этой полугруппы, а S_ν — подполугруппа в P_ν . Ввиду (6) S_ν будет подгруппой в P_ν . Это значит, что J_ν — максимальный правый (левый) идеал в P_ν .

Пусть $g \in G \setminus P_\nu$. Тогда $v(g) < \nu$ и $g(m_{v(g)}) < m_{v(g)}$. Отсюда $m_{v(g)} < g^{-1}(m_{v(g)})$. Так как $v(g^{-1}) = v(g) < \nu$, то $g^{-1} \in J_\nu$. Тем самым $P_\nu \cup P_\nu^{-1} = G$ и первое утверждение доказано. Равенства $P_0 = G$, $J_0 = \emptyset$, $S_\lambda = \{1\}$, а также утверждение Б следуют сразу из определения множеств P_ν , J_ν , S_ν .

В. Пусть $g \in P_\nu$. Если $g \in J_\nu$, то $g \in J_\nu \subseteq J_\lambda \subseteq P_\lambda$, откуда $g \in P_\lambda$. В противном случае $g \in S_\nu$. Выберем трансфинитную последовательность $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots$ такую, что все $i_j < \nu$ и $\lim_j m_{i_j} = t$. Здесь t — любой наперед заданный элемент. Тогда

$$g(m) = g(\lim_j m_{i_j}) = \lim_j g(m_{i_j}) = \lim_j m_{i_j} = t,$$

откуда снова $g = 1 \in P_\lambda$.

Справедливо в некотором смысле обратное утверждение к утверждению теоремы 5. Пусть P — конус в абстрактной группе G . Множество $M = \{gP \mid g \in G\}$ линейно упорядочим, считая $g_1P \leq g_2P$ тогда и только тогда, когда $g_1P \supseteq g_2P$. Элемент $h \in G$ действует слева на M по правилу $gP \rightarrow hgP$. Мы получаем гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow \text{Aut } M$, причем, если P — основной конус, то φ — инъекция и $P = P_1$ для $m_0 = P$ (элементы $m_1, m_2, \dots$ из перечисления множества M уже не добавляют никаких новых конусов). Отсюда следует, что любая счетная правоупорядоченная группа может быть вложена в правоупорядоченную группу $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$.

Теперь заметим, что любой автоморфизм л.у. множества M может быть единственным образом продолжен до автоморфизма дедекиндова замыкания множества M . Ввиду этого будем считать, что л.у. множество M замкнуто в смысле Дедекинда. Далее, если $m \in M$ — наибольший или наименьший элемент множества M , то существует естественный изоморфизм $\text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}(M \setminus \{m\})$. Поэтому

будем считать в дальнейшем, что M не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Для всякого элемента $m \in M$ через $\text{St}(m)$ будем обозначать стабилизатор элемента m в группе G , т.е. множество всех элементов $g \in G$ таких, что $g(m) = m$. Кроме того, через $P(m)$ будем обозначать конус $\{g \in G \mid g(m) \geq m\}$ группы G . Ясно, что $\text{St}(m)$ – подгруппа в G и

$$\begin{aligned}\text{St}(h(m)) &= h \text{St}(m) h^{-1}, \\ P(h(m)) &= h P(m) h^{-1}, \\ U(P(m)) &= \text{St}(m)\end{aligned}$$

для любого элемента $h \in G$.

Правый P -идеал I (P – конус в абстрактной группе) назовем *дивизориальным*, если I совпадает с пересечением главных правых P -идеалов, его содержащих; само это пересечение назовем *дивизориальным замыканием* и обозначим $\hat{I}$. Если $I \neq \hat{I}$, то выберем любой элемент s из дополнения $\hat{I} \setminus I$. Тогда $\hat{I} \supseteq cP \supset I$ и между cP и I нет правых P -идеалов. Следовательно, $\hat{I} = cP$ и $I = cJ(P)$, причем $J(P)$ не является главным правым P -идеалом. Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если I – не дивизориальный правый P -идеал, то $I = cJ(P)$, и $J(P)$ не является главным правым P -идеалом. В этом случае $\hat{I} = cP$.*

ТЕОРЕМА 6. *Пусть элемент $m \in M$ таков, что M является дедекиндовым замыканием для G -орбиты элемента m . Обозначим $P = P(m)$. Существует биекция между правыми дивизориальными P -идеалами и элементами множества M , задаваемая правилами:*

$$\begin{aligned}I - \text{правый } P\text{-идеал} &\rightarrow d(I) = \inf\{g(m) \mid g \in I\}, \\ a \in M &\rightarrow L(a) = \{g \in G \mid g(m) \geq a\}.\end{aligned}$$

Правый P -идеал $L(a)$ будет двусторонним P -идеалом в том и только том случае, если $g(a) \geq a$ для всех $g \in P$ (т.е. из неравенства $g(m) \geq m$ следует неравенство $g(a) \geq a$). Далее, $L(a)$ будет вполне первичным идеалом тогда и только тогда, когда $a > m$ и $g(a) = a$ для всех $g \in P$ таких, что $g(m) < a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Монотонность отображений $I \rightarrow d(I)$ и $a \rightarrow L(a)$ ясна. Если I – правый P -идеал, то $g_0P \supseteq I$ для некоторого $g_0 \in G$. Тогда для любого $g \in I$ найдется элемент $p \in P$ такой, что $g = g_0p$, откуда $g(m) = g_0p(m) \geq g_0(m)$. Следовательно, множество $\{g(m) \mid g \in I\}$ ограничено снизу, и в силу замкнутости по Дедекинду множества $(M, \leq)$ элемент $d(I) \in M$ существует. Докажем теперь, что $L(a)$ – правый P -идеал. Пусть $g \in L(a)$ и $h \in P$. Тогда $gh(m) \geq g(m) \geq m$, откуда $gh \in L(a)$. Кроме того, $L(a) \neq \emptyset$, так как M не имеет наибольшего элемента, а G -орбита элемента m плотна в M . Так как M не имеет наименьшего элемента, то найдется элемент $g_0 \in G$ с условием $g_0(m) \leq a$. Нетрудно видеть, что $g_0P \supseteq L(a)$ в этом случае. Действительно, если $h \in L(a)$, то $g_0^{-1}h(m) \geq g_0^{-1}(a) \geq m$, откуда $g_0^{-1}h \in P$. Итак, доказано, что $L(a)$ – правый P -идеал. Если $L(a)$ не дивизориален, то $L(a) = hJ(P)$ согласно предложению 5, причем $J(P)$

не является главным правым P -идеалом. Следовательно, m , а значит, и $h(m)$ не являются изолированной точкой. Тогда $h(m) \geq a$, ибо иначе $hp(m) < a$ для некоторого элемента $p \in J(P)$, что противоречит равенству $L(a) = hJ(P)$. Итак, $h(m) \geq a$ и $h \in L(a) = hJ(P)$, — снова противоречие. Противоречие показывает, что правый идеал $L(a)$ является дивизориальным.

Докажем, что $Ld(I) = \hat{I}$. Во-первых, $I \subseteq Ld(I)$. Во-вторых, если $h \in G \setminus I$, то $hP \supseteq Ld(I)$, ибо для любого элемента $g \in Ld(I)$ имеет место неравенство $g(m) \geq d(I)$, из которого следует, что $h^{-1}g(m) \geq h^{-1}d(I) \geq m$. Тем самым доказано, что $Ld(I) = \hat{I}$. Докажем равенство $dL(a) = a$. Неравенство $dL(a) \geq a$ очевидно. Предположим, что $dL(a) > a$. Так как M — дедекиндово замыкание для G -орбиты элемента m , то найдется автоморфизм $g \in G$ такой, что $a \leq g(m) < dL(a)$. Тогда $g \in L(a)$ и $g(m) < \inf\{h(m) \mid h \in L(a)\} \leq g(m)$. Это противоречие показывает, что на самом деле $a = dL(a)$.

Итак, первое утверждение теоремы доказано. Предположим теперь, что $L(a)$ — P -идеал, но $g(a) < a$ для некоторого элемента $g \in P$. Еще раз пользуясь тем, что M — дедекиндово замыкание G -орбиты элемента m , найдем такой автоморфизм $h \in G$, что $g^{-1}(a) > h(m) \geq a$. Тогда $a > gh(m)$ и $h \in L(a)$. Следовательно, $gh \in L(a)$ ввиду того, что $L(a)$ — P -идеал, из чего следует неравенство $gh(m) \geq a$. Это неравенство противоречит предыдущему. Противоречие показывает, что $g(a) \geq a$ для любого $g \in P$.

Наоборот, пусть $g(a) \geq a$ для всех $g \in P$ и $h \in L(a)$ — произвольный элемент. Тогда $gh(m) \geq g(a) \geq a$, откуда $gh \in L(a)$, и, значит, $L(a)$ — двусторонний P -идеал.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $L(a)$ — вполне первичный идеал. Тогда неравенство $a > m$ следует из того, что $L(a) \subset P$. Пусть $g \in P$ и $g(m) < a$. В силу предыдущего утверждения, равенство $g(a) = a$ следует из невозможности строгого неравенства $g(a) > a$. Если бы $g(a) > a$, то нашелся бы элемент $h \in G$ такой, что $g(a) > h(m) \geq a$. Тогда $g^{-1}h(m) \geq g^{-1}(a) > m$, откуда $g^{-1}h \in P$. Но одновременно, $g^{-1}h(m) < a$, что означает $g^{-1}h \notin L(a)$. Итак, g и $g^{-1}h$ не принадлежит $L(a)$, но $h = g \cdot g^{-1}h \in L(a)$. Это противоречие с вполне первичностью идеала $L(a)$.

Обратно, пусть условие $g(a) = a$ выполнено для всех $g \in P$ таких, что $g(m) < a$ и $a > m$. Тогда в силу второго утверждения теоремы $L(a)$ — идеал конуса P . Если $g, h \in P \setminus L(a)$, то $g(m) < g(a) = a$ и $h(m) < h(a) = a$. Следовательно, $gh(m) < gh(a) = a$, откуда $gh \notin L(a)$. Это доказывает, что $L(a) \in \overline{\text{спрес}} P$.

Доказательство теоремы завершено.

Отрезок $[a, b] \subseteq M$ назовем сжимаемым (более точно: G -сжимаемым), если существует автоморфизм $g \in G$ такой, что

$$a < g(a) < g(b) < b.$$

СЛЕДСТВИЕ. В условиях и обозначениях теоремы 6 конус P будет почти простым тогда и только тогда, когда любой отрезок $[m, g(m)]$, где $g \in J(P)$, сжимаем. Конус P будет архимедовым, если и только если $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(m) = +\infty$ для любого элемента $g \in J(P)$. Конус P будет дискретным в том и только том случае, когда $(M, \leq) \simeq (\mathbb{Z}, \leq)$ и $G \simeq (\mathbb{Z}, +)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из теоремы 6, а второе – из теоремы 4.

Предположим, что конус P дискретен, и z – порождающий элемент радикала этого конуса. Обозначим $m_i = z^i(m)$ ($i \in \mathbb{Z}$). Если $u \in U(P)$, то $u(m) = m$. Для любого целого числа i найдется элемент $u_i \in U(P)$ такой, что $uz^i = z^i u_i$. Тогда $u(m_i) = uz^i(m) = z^i u_i(m) = z^i(m) = m_i$. Следовательно, объединение всех m_i будет G -орбитой элемента m . Это объединение замкнуто по Дедекинду, откуда $M = \cup\{m_i\} \simeq (\mathbb{Z}, \leq)$. Тогда $U(P) = \{1\}$ и, значит, $G = \text{gr}\{z\} \simeq (\mathbb{Z}, +)$.

§ 4. Примеры

Пусть E – евклидова плоскость с ортонормированным базисом e_1, e_2 ; S – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Параметризуем S полуинтервалом $[0, 2\pi)$, сопоставляя числу $t \in \mathbb{R}$ конец единичного вектора $e(t) = e_1 \cos t + e_2 \sin t$. Наоборот, если a – произвольный ненулевой вектор пространства E , то через $\arg a$ обозначим то единственное число $t \in [0, 2\pi)$, для которого $e(t) = a/\|a\|$. Группу линейных автоморфизмов пространства E будем отождествлять с $\text{GL}(2, \mathbb{R})$, отождествление строится по базису e_1, e_2 . Если $s \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, то через $s(t)$ будем обозначать аргумент вектора $s(e(t))$; тем самым задано действие $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ на S , ядром которого служат гомотетии. Рассмотрим прямую $\mathbb{R}$ как универсальное накрытие окружности S , эпиморфизм $\mathbb{R} \rightarrow [0, 2\pi)$ задается таким образом: $t \rightarrow \arg e(t)$. Пусть G – универсальная накрывающая группа группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Известно, что центр G – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом z таким, что z^2 порождает ядро накрытия $\tau: G \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$, причем $\tau(z) = -1_E$. Заметим, что группа $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ действует на полуинтервале $[0, 2\pi)$ локально монотонно. Поднимем действие группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ на $[0, 2\pi)$ до монотонного действия G на $\mathbb{R}$ так, что z – сдвиг множества $\mathbb{R}$ на число π и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 2\pi) & \xrightarrow{\tau(g)} & [0, 2\pi) \end{array}$$

коммутативна для всякого элемента $g \in G$. Для элемента $s \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ через s_0 будем обозначать то единственное монотонное преобразование $g \in G$, для которого $\tau(g) = s$ и $g(0) = s(0)$. Тогда прообраз элемента s при эпиморфизме τ совпадает с множеством $s_0 z^{2i}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Более подробно об универсальной накрывающей группе G см., например, в [6, лекция 20].

ЛЕММА 6. Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ – действительные числа из полуинтервала $[0, \pi)$ такие, что $a_1 < a_2 < a_3$ и $b_1 < b_2 < b_3$. Тогда существует элемент $s \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ такой, что $s(a_i) = b_i$ для $i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для случая $a_1 = 0, a_2 = \pi/4, a_3 = \pi/2$. Матрица $\tilde{s} = \begin{pmatrix} \cos b_1 & \cos b_3 \\ \sin b_1 & \sin b_3 \end{pmatrix}$ очевидно удовлетворяет условиям $\tilde{s}(a_1) = b_1$, $\tilde{s}(a_3) = b_3$, и определитель ее $d = \sin(b_3 - b_1)$ больше нуля. Остается подобрать положительное число α так, чтобы элемент $s = \begin{pmatrix} \alpha \cos b_1 & \frac{\cos b_3}{\alpha d} \\ \alpha \sin b_1 & \frac{\sin b_3}{\alpha d} \end{pmatrix}$ группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$

удовлетворял условию $s(a_2) = b_2$ (двум другим он заведомо удовлетворяет). Так как $s(a_2) \rightarrow b_1$, если $\alpha \rightarrow +\infty$, и $s(a_2) \rightarrow b_3$, если $\alpha \rightarrow 0 + 0$, то такое число α существует в силу теоремы Коши о промежуточном значении.

ТЕОРЕМА 7. *Конус $P = \{g \in G \mid g(0) \geq 0\}$ группы G специален, zP – первичный, но не вполне первичный идеал конуса P . Группа T_0 обратимым элементом конуса P посредством τ изоморфно отображается на группу верхнетреугольных матриц из $SL(2, \mathbb{R})$ с положительными элементами на главной диагонали.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $z \in J(P)$ и $zP = Pz$ – идеал конуса P . Далее, для любого элемента $g \in G$ найдется натуральное число n такое, что $z^n(0) > g(0)$, откуда следует, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} z^n P = \emptyset$. Из леммы 6 и теоремы 6 вытекает, что между $J(P)$ и zP нет идеалов. Следовательно, $J(P)$ и zP – единственные первичные идеалы. Идеал zP не является вполне первичным, так как в $J(P)$ существуют корни из z любой степени n (сдвиги множества $\mathbb{R}$ на величину π/n , $n \in \mathbb{N}$).

Утверждение об изоморфизме T_0 и группы

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}; a > 0 \right\}$$

проверяется прямым вычислением.

Группа T монотонно действует на интервале $(0, \pi)$ (сужение действия $GL(2, \mathbb{R})$ с S на $(0, \pi)$) и нет нужды поднимать это действие до действия T_0 на $\mathbb{R}$, ибо интервал $(0, \pi)$ – л.у. множество, замкнутое по Дедекинду и не содержащее наименьшего и наибольшего элементов. Для $\alpha \in (0, \pi)$ введем обозначение $Q(\alpha) = \{s \in T \mid s(\alpha) \geq \alpha\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *$Q(\alpha)$ – почти простой конус и $U(Q(\alpha)) \simeq (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из леммы 6 и следствия теоремы 6. Справедливость второго утверждения проверяется прямым вычислением.

Рассмотрим теперь три примера счетных конусов. Первый пример связан с правоупорядоченной группой, построенной Д. М. Смирновым [7]:

$$ST = \left\{ \begin{pmatrix} k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, k \in \mathbb{Q}; k > 0 \right\}.$$

Группа ST так же, как и T , действует монотонно на интервале $(0, \pi)$. При отображении $\begin{pmatrix} k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{k} & a/\sqrt{k} \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{pmatrix}$ группа ST изоморфно переходит в плотную подгруппу группы T , сохраняя при этом действие на интервале $(0, \pi)$. Следовательно, $SQ(\alpha) = \{s \in ST \mid s(\alpha) \geq \alpha\}$ – почти простой конус для любого элемента $\alpha \in (0, \pi)$. Нетрудно подобрать α так, что группа обратимых элементов конуса $SQ(\alpha)$ будет единичной, и тем самым группа ST будет правоупорядоченной. Действительно, если ε – положительное иррациональное число, то вектор $\begin{pmatrix} k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + a\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ не может быть коллинеарным вектору $e_1 + \varepsilon e_2$; поэтому $\alpha = \arg(e_1 + \varepsilon e_2)$ – искомое число. В этом случае $SQ(\alpha)$ – основной почти простой конус (другое доказательство см. в [8]).

Рассмотрим теперь дискретную подгруппу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Ее универсальная накрывающая группа GZ изоморфна прообразу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ при эпиморфизме τ и порождается элементами u, v такими, что

$$u^3 = v^2 = z, \quad \tau(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u(0) = v(0) = \pi/2.$$

В частности, $v(r) = r + \pi/2$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Более подробно о группе GZ можно узнать в [9, §10].

Элементы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ порождают в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ свободную подгруппу ранга 2, которая совпадает с группой

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{4}, c \equiv b \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

(см. [9, 14.2.1 и 14.2.2]). Следовательно, элементы A_0, B_0 порождают в G свободную подгруппу F_0 , которая изоморфно отображается на F посредством эпиморфизма τ .

ЛЕММА 7. *Для любых чисел a_1, a_2 таких, что $0 \leq a_1 < a_2 < \pi$ найдется элемент $g \in F_0$, для которого $a_1 < g(a_1) < g(a_2) < a_2$ (т.е. интервал $(a_1, a_2) - F_0$ -сжимаем).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что множество $\{s(0) \mid s \in F\}$ всюду плотно на полуинтервале $[0, 2\pi)$, ибо множество рациональных чисел вида c/a , где $a, c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv 1 \pmod{4}$, $c \equiv 0 \pmod{2}$ всюду плотно на $\mathbb{R}$. Во-вторых, $A^n(\alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ для любого $\alpha \in [0, \pi)$. Пусть элемент $s \in F$ таков, что $\beta = s(0) \in (a_1, a_2)$. Тогда $s(U) \subseteq (a_1, a_2)$ для некоторой достаточно малой правой окрестности U нуля. Выберем натуральное число n такое, что $A^n(a_1)$ и $A^n(a_2)$ принадлежали бы окрестности U . Тогда $g = (sA^n)_0$ — искомый элемент.

ТЕОРЕМА 8. *Для любого действительного числа α множество $\mathrm{PZ}(\alpha) = \{g \in \mathrm{GZ} \mid g(\alpha) \geq \alpha\}$ — специальный конус в группе GZ , а $\mathrm{PF}(\alpha) = \{g \in F_0 \mid g(\alpha) \geq \alpha\}$ — специальный конус в группе F_0 . В первом случае $z\mathrm{PZ}(\alpha)$ является первичным, но не вполне первичным идеалом, а во втором таковым будет идеал $I = \{g \in F_0 \mid g(\alpha) \geq \alpha + \pi\}$.*

Группы $U(\mathrm{PZ}(\alpha))$ и $U(\mathrm{PF}(\alpha))$ либо единичные, либо бесконечные циклические. Первый случай имеет место, если $\alpha = \arg(e_1 + \varepsilon e_2)$, где число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ не принадлежит ни одному квадратичному расширению поля $\mathbb{Q}$; причем I тогда не будет главным правым (левым) $\mathrm{PF}(\alpha)$ -идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha < b_1 < b_2 < \alpha + \pi$. В силу плотности F_0 -орбиты нуля на прямой $\mathbb{R}$, найдется элемент $g \in F_0$, для которого $h(b_1) < gh(b_1) < gh(b_2) < h(b_2)$. Тогда $b_1 < h^{-1}gh(b_1) < h^{-1}gh(b_2) < b_2$, т.е. интервал (b_1, b_2) F_0 -сжимаем. Применяя следствие теоремы 6 так же, как и в доказательстве предложения 7, получаем, что $\mathrm{PZ}(\alpha)$ и $\mathrm{PF}(\alpha)$ — специальные конусы, а $z\mathrm{PZ}(\alpha)$ и I — первичные, но не вполне первичные идеалы.

Предположим, что $g(\alpha) = \alpha + \pi$ или $g(\alpha) = \alpha$ для некоторого элемента $g \in \text{GZ}$ и $\alpha = \arg(e_1 + \varepsilon e_2)$. Тогда $e_1 + \varepsilon e_2$ является собственным вектором матрицы $\tau(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ с собственным числом β . Отсюда $a + b\varepsilon = \beta$ и $c + d\varepsilon = \beta\varepsilon$, поэтому $b\varepsilon^2 + (a - d)\varepsilon + c = 0$. Если ε не принадлежит ни одному квадратичному расширению поля $\mathbb{Q}$, то $b = 0$, $a = d$ и $c = 0$. Единственно возможные варианты в этом случае — $-g = z$ и $g = 1$. Заметим, что $z \notin F_0$. Это рассуждение показывает, что $U(\text{PZ}(\alpha)) = U(\text{PF}(\alpha)) = 1$ и I не является главным правым (левым) идеалом при выбранном как и выше ε .

Если $U(\text{PZ}(\alpha)) \neq 1$, то $g(\alpha) = \alpha$ для некоторого не единичного элемента $g \in \text{GZ}$. Обозначим тогда через H образ группы $U(\text{PZ}(\alpha))$ при эпиморфизме τ . Из построения универсальной накрывающей группы следует, что отображение $\tau: U(\text{PZ}(\alpha)) \rightarrow H$ будет изоморфизмом групп. Обозначим через K $\mathbb{Q}$ -подалгебру, порожденную в алгебре 2×2 -матриц над $\mathbb{Q}$ группой H . Так как все матрицы из H имеют совпадающий собственный вектор, то $\dim_{\mathbb{Q}} K \leq 3$. Пусть $\text{tg } \alpha \notin \mathbb{Q}$, тогда любой не единичный элемент $A \in H$ порождает квадратичное расширение $\mathbb{Q}[A]$ поля $\mathbb{Q}$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}} K = 2$, и поэтому K — поле. Обозначим через C целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в поле K . По теореме Дирихле (см. [10, глава II, § 4, теорема 5]) группа $U(C)$ обратимых элементов кольца C будет прямым произведением циклической бесконечной группы на группу корней из 1. Так как $H \simeq U(\text{PZ}(\alpha))$ — линейно упорядочиваемая группа и $H \subseteq U(C)$, то H — бесконечная циклическая группа. Если $\text{tg } \alpha \in \mathbb{Q}$, то, изменяя базис, сводим доказательство к случаю $\alpha = 0$; тогда $U(\text{PZ}(\alpha)) = \text{gr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

СЛЕДСТВИЕ. В свободной группе ранга 2 существует основной специальный конус.

В связи с этим результатом возникает вопрос: существует ли в свободной группе основной почти простой конус?

Рассмотрим теперь элементы $x = u^{-1}vu^{-1}$ и $y = v$, порождающие группу GZ и имеющие соотношение $xy^2x = y$. В работе [4] доказано, что $P_{xy} = \text{semigr}\{x, y\}$ — основной конус в GZ , $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} x^n P_{xy}$ — вполне первичный идеал, а $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} x^{-n} y^3 P_{xy}$ — первичный, но не вполне первичный идеал. С точки зрения развитой в настоящей работе теории этот факт получает простую геометрическую трактовку. Действительно, можно подсчитать, что $x(-\pi/4) = -\pi/4$, тогда конус $\text{PZ}(-\pi/4)$ содержит x и y , причем $U(\text{PZ}(-\pi/4)) = \text{gr}\{x\}$. Следовательно, $\text{PZ}(-\pi/4)$ — локализация конуса P_{xy} по идеалу J .

В заключение отметим без доказательства несложный, но интересный факт о группе $G = \text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$. Пусть $m_0, m_1, m_2, \dots$ — перечисление рациональных чисел. Тогда

$$\emptyset = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_{\omega} \subset P_{\omega} \subset \dots \subset P_2 \subset P_1 \subset P_0 = G,$$

(J_i, J_{i+1}) — почти простой скачок основного конуса P_{ω} для любого натурального числа $i \geq 0$ (тем самым, J_i , $i \geq 1$, и J_{ω} — все собственные идеалы конуса P_{ω}), а группа S_i изоморфна прямому произведению $i + 1$ экземпляров группы $\text{Aut } \mathbb{Q}$.

Список литературы

1. *Дубровин Н. И.* Рациональное замыкание групповых колец левоупорядоченных групп // Матем. сб. 1993. Т. 183. № 7. С. 3–48.
2. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
3. *Дубровина Т. В.* Один пример конечно порожденной правоупорядоченной группы // Тезисы XIX Всесоюзной алгебраической конференции. Львов, 1987.
4. *Дубровин Н. И.* Пример цепного первичного кольца с нильпотентными элементами // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). № 3. С. 441–447.
5. *Verzhan G. M.* Right orderable groups that are not locally indicable // Pacific J. Math. 1991. V. 147. P. 243–248.
6. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
7. *Смирнов Д. М.* Правоупорядоченные группы // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 6. С. 41–59.
8. *Дубровин Н. И.* Цепные области // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1980. № 2. С. 51–54.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Н.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
10. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1964.

Владимирский политехнический институт

Поступила в редакцию
23.06.1993