Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вит. В. Волчков, О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 4, 21–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:41:17

УДК 517.988.28

Вит. В. Волчков

О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах

Получено решение проблемы описания класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса, лежащим в заданном шаре на компактном двухточечно-однородном пространстве.

Библиография: 35 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n , $\mathcal{M}(n)$ – группа евклидовых движений $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры. Рассмотрим следующую задачу (см. [1], [2]): описать класс локально суммируемых функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что

$$\int_{g\mathcal{K}} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

для любого $g \in \mathcal{M}(n)$. Эта задача допускает различные обобщения и модификации. Например, вместо одного компакта $\mathcal{K}$ можно рассматривать семейство компактов, а вместо уравнения (1) изучать решения системы уравнений свертки с заданными распределениями.

Первые работы по этой теме были выполнены в 1929 году и принадлежат русскому математику Д. Помпейю, который изучал существование ненулевых функций с условием (1) для некоторых $\mathcal{K}$. Как отмечено в [2], он ошибочно предполагал, что в случае, когда $\mathcal{K}$ – шар, уравнение (1) имеет только нулевое решение. В дальнейшем Ф. Джон установил, что функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса r однозначно определяется своими значениями в шаре $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$. Позже в исследованиях Ф. Джона, Д. Дельсарта, Л. Хёрмандера, Л. Зальцмана, К. А. Беренштейна и др. обнаружилось глубокие связи указанных вопросов со многими разделам современной математики и приложениями (см. обзоры [1]–[5] с обширной библиографией).

В последние годы значительное внимание уделяется локальным вариантам сформулированной задачи, т.е. когда функция f задана в ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и равенство (1) выполнено для $g \in \mathcal{M}(n)$: $g\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$. При переходе от глобальной ситуации к локальной трудности существенно возрастают. Это связано с нарушением групповой структуры, действующей на множестве решений уравнения (1). Среди первых результатов в этом направлении отметим аппроксимационную теорему Л. Хёрмандера для решений уравнения свертки на выпуклых областях в $\mathbb{R}^n$, а также локальную теорему о двух радиусах, полученную К. А. Беренштейном и Р. Гэем в 1986 году (см., например, [1]). Замечательного достижения добился в конце двадцатого века В. В. Волчков, создавший универсальный метод для полного решения многих задач такого типа,

---

Работа поддержана ФФИ Украины (грант № 01.07/00241).

позволивший, в частности, снять практически все лишние ограничения, имеющиеся в работах предшественников. Он основан на представлении решений широкого класса уравнений свертки в виде рядов по специальным функциям. Результаты этой методики подытожены в монографии [6], где поставлено более пятидесяти новых проблем, рассчитанных на продвижение данного направления. В частности, многообещающей программой исследований представляется развитие техники из [6] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Изучение естественно было начать с двухточечно-однородных пространств, типичными представителями которых являются $\mathbb{R}^n$, пространство Лобачевского и сфера. Сейчас эта работа в основном завершена для некомпактных двухточечно-однородных пространств (см. [7]–[12]). Ключевую роль при этом играют теоремы единственности для различных классов решений уравнения свертки с данным радиальным распределением. Однако методы, примененные ранее для доказательства таких теорем, не работают на других многообразиях (например, в случае компактных двухточечно-однородных пространств и группы Гейзенберга). Это создает серьезные препятствия для реализации указанной программы.

В недавнее время автором настоящей статьи предложен новый подход для изучения множеств единственности со сферической симметрией решений уравнения свертки, который годится во всех перечисленных случаях (см. [13]). Он основан на представлении сферических функций и их обобщений в виде евклидова преобразования Фурье интегрируемой функции с компактным носителем и сведении с помощью этих представлений уравнения свертки на соответствующем пространстве к уравнению свертки на $\mathbb{R}^1$ (см. [14; гл. 4, следствие 10.12], [15; (2.21), (5.8)], а также §§ 4, 6 ниже). В настоящей работе таким методом получено решение проблемы описания класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса, лежащим в заданном шаре на компактном двухточечно-однородном пространстве.

§ 2. Формулировка основного результата

Пусть X – компактное двухточечно-однородное пространство [14; гл. 1, § 4]. Согласно классификации Вана [14; гл. 1, § 4] всякое X изометрично одному из следующих симметрических пространств: сфере $SO(n+1)/SO(n)$, вещественному проективному пространству $SO(n+1)/O(n)$, комплексному проективному пространству $SU(n+1)/S(U(n) \times U(1))$, кватернионному проективному пространству $Sp(n+1)/(Sp(n) \times Sp(1))$ или проективной плоскости Кэли $F_4/Spin(9)$. Здесь и далее применяются стандартные обозначения классических и особых групп (см. [16; гл. 9, § 4]). Будем считать, что вещественная размерность a_X пространства X не меньше двух и минимум секционной кривизны X равен единице (см. [16; гл. 1, § 12], [17; гл. 3, теорема 3.30]). Зафиксируем точку $o \in X$ и определим

$$\mathcal{X} = \{p \in X : d_X(o, p) < \text{diam } X\},$$

где $d_X(\cdot, \cdot)$ – расстояние на X , $\text{diam } X = \sup_{p, q \in X} d_X(p, q)$. Тогда $\mathcal{X}$ можно рассматривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ и риманова метрика ds^2 задаются следующим образом (см. [18; гл. 9, теорема 7.8], [19; §§ 19, 20], [20]):

$$1) \ X = SO(n+1)/SO(n): \ \mathcal{D} = \mathbb{R}^n, \ ds^2 = (1 + |x|^2)^{-2} |dx|^2;$$

2) $X = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1} |dx|^2 - (1 + |x|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j dx_i dx_j;$$

3) $X = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^n$,

$$ds^2 = (1 + |z|^2)^{-1} |dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^n \bar{z}_i z_j dz_i d\bar{z}_j;$$

4) $X = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1))$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{2n}$,

$$\begin{aligned} ds^2 = & (1 + |z|^2)^{-1} |dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^n ((\bar{z}_i z_j + z_{n+i} \bar{z}_{n+j}) dz_i d\bar{z}_j \\ & + (\bar{z}_i z_{n+j} - z_{n+i} \bar{z}_j) dz_i d\bar{z}_{n+j} + (\bar{z}_{n+i} z_j - z_i \bar{z}_{n+j}) dz_{n+i} d\bar{z}_j \\ & + (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_{n+i} z_{n+j}) dz_{n+i} d\bar{z}_{n+j}); \end{aligned}$$

5) $X = \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{16}$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1} |dx|^2 - 2^{-1} (1 + |x|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^{16} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (\Phi(x, y)) dx_i dx_j,$$

где $\Phi(x, y) = 2(p_1(x)p_1(y) + \dots + p_8(x)p_8(y)) + p_9(x)p_9(y) + p_{10}(x)p_{10}(y)$,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x_1 x_2 - x_3 x_4 - x_5 x_6 - x_7 x_8 - x_9 x_{10} - x_{11} x_{12} - x_{13} x_{14} - x_{15} x_{16}, \\ p_2(x) &= x_1 x_4 - x_9 x_{12} - x_5 x_8 - x_{13} x_{16} + x_3 x_2 + x_{11} x_{10} + x_7 x_6 + x_{15} x_{14}, \\ p_3(x) &= x_1 x_6 - x_9 x_{14} + x_5 x_2 + x_{13} x_{10} + x_3 x_8 + x_{11} x_{16} - x_7 x_4 - x_{15} x_{12}, \\ p_4(x) &= x_1 x_8 + x_9 x_{16} + x_5 x_4 - x_{13} x_{12} - x_3 x_6 + x_{11} x_{14} + x_7 x_2 - x_{15} x_{10}, \\ p_5(x) &= x_1 x_{10} + x_9 x_2 + x_5 x_{14} - x_{13} x_6 + x_3 x_{12} - x_{11} x_4 - x_7 x_{16} + x_{15} x_8, \\ p_6(x) &= x_1 x_{12} + x_9 x_4 - x_5 x_{16} + x_{13} x_8 - x_3 x_{10} + x_{11} x_2 - x_7 x_{14} + x_{15} x_6, \\ p_7(x) &= x_1 x_{14} + x_9 x_6 - x_5 x_{10} + x_{13} x_2 + x_3 x_{16} - x_{11} x_8 + x_7 x_{12} - x_{15} x_4, \\ p_8(x) &= x_1 x_{16} - x_9 x_8 + x_5 x_{12} + x_{13} x_4 - x_3 x_{14} - x_{11} x_6 + x_7 x_{10} + x_{15} x_2, \\ p_9(x) &= x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{15}^2, & p_{10}(x) &= x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{16}^2. \end{aligned}$$

Многочлены $p_1, \dots, p_8$ и форма $\Phi(x, y)$ естественно интерпретируются в терминах чисел Кэли (см. §3 ниже).

Расстояние на $\mathcal{X}$ в указанных выше моделях определяется равенством

$$d_X(o, p) = \arctg |p|, \quad p \in \mathcal{X}, \quad (2)$$

и условием инвариантности d_X относительно группы изометрий G_X пространства X . Соотношение (2) показывает, что геодезический шар $B_R = \{p \in X : d_X(o, p) < R\}$, $0 < R \leq \pi/2$, совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и радиусом $\operatorname{tg} R$.

Риманова мера на $\mathcal{X}$ имеет вид

$$d\mu_X(p) = (1 + |p|^2)^{-\alpha_X - \beta_X - 2} dp, \quad (3)$$

где dp – мера Лебега в $\mathbb{R}^{a_X}$, $\alpha_X = -1 + a_X/2$ и $\beta_X = n/2 - 1, -1/2, 0, 1, 3$ для

$$X = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n), \quad \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)), \\ \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)), \quad \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$$

соответственно.

Пусть $L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ – множество локально суммируемых функций на B_R . Обозначим через $V_r(B_R)$, $0 < r < R$ класс функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, имеющих нулевые интегралы относительно меры $d\mu_X$ по всем замкнутым геодезическим шарам радиуса r из B_R . Для $s \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел) или $s = \infty$ положим $V_r^s(B_R) = V_r(B_R) \cap C^s(B_R)$. Класс $V_r^\infty(B_R)$ инвариантен относительно оператора Лапласа–Бельтрами L_X на X (см. [14; гл. 2, теорема 5.5]).

Возьмем $k \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, где

$$M_X(k) = 0 \quad \text{для } X = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n), \quad (4)$$

$$M_X(k) = [k/2] \quad \text{для остальных } X. \quad (5)$$

(В (5) мы используем стандартное обозначение $[t]$ для целой части числа $t \in \mathbb{R}^1$.)

Положим $\mathcal{H}_X^{k,m} = \mathcal{H}_{a_X}^k$ в случае (4) и

$$\mathcal{H}_X^{k,m} = \{f \in \mathcal{H}_{a_X}^k : (L_X f)(p) = 4(m - \beta_X)(k - m)(1 + |p|^2)f(p)\}$$

в случае (5), где $\mathcal{H}_{a_X}^k$ – пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$. Для $X = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$ имеем $\mathcal{H}_X^{k,m} = \mathcal{H}(m, k-m) + \mathcal{H}(k-m, m)$, где $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ – пространство, порожденное многочленами вида

$$(c_1 z_1 + \dots + c_n z_n)^\alpha (d_1 \bar{z}_1 + \dots + d_n \bar{z}_n)^\beta, \quad c_j, d_j \in \mathbb{C}, \quad c_1 d_1 + \dots + c_n d_n = 0.$$

Подобное описание для $\mathcal{H}_X^{k,m}$ при $X = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1))$ и $X = \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$ содержится в [21].

Отождествляя $\mathcal{H}_X^{k,m}$ с пространством сужений его элементов на единичную сферу $\mathbb{S}^{a_X-1} = \{p \in \mathbb{R}^{a_X} : |p| = 1\}$, мы видим, что $\mathcal{H}_X^{k,m}$ является инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}_X(\tau)$ группы $K_X = G_X \cap \mathrm{O}(a_X)$ на $L^2(\mathbb{S}^{a_X-1})$ (см. [22; гл. 9, § 2.1]). Обозначим через $\mathfrak{T}_X^{k,m}(\tau)$ сужение $\mathfrak{T}_X(\tau)$ на $\mathcal{H}_X^{k,m}$. Тогда $\mathfrak{T}_X(\tau)$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\mathfrak{T}_X^{k,m}(\tau)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$ (см. [21], [9], [20]). В частности,

$$L^2(\mathbb{S}^{a_X-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \oplus \mathcal{H}_X^{k,m}.$$

Пусть $h_X^{k,m}$ – размерность $\mathcal{H}_X^{k,m}$, $\{Y_j^{k,m}\}$, $j \in \{1, \dots, h_X^{k,m}\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_X^{k,m}$ (ортонормированность понимается в смысле $L^2(\mathbb{S}^{a_X-1}, d\xi)$, где $d\xi$ – поверхностная мера на $\mathbb{S}^{a_X-1}$). Всякой функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{h_X^{k,m}} f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma), \quad p = \varrho\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{S}^{a_X-1}, \quad (6)$$

где

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\xi) \overline{Y_j^{k,m}(\xi)} d\xi.$$

По теореме Фубини функция $f_{k,m,j}$ является локально суммируемой на $(0, \operatorname{tg} R)$. Аналогично, функция $f^{k,m,j}(p) = f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma)$ принадлежит $L_{\operatorname{loc}}(B_R)$.

Для $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, $\beta, \lambda \in \mathbb{C}$ и $t \in (0, \pi/2)$ обозначим

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + \lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - \lambda}{2}; \alpha + 1; \sin^2 t\right), \quad (7)$$

где F – гипергеометрическая функция [23]. Зафиксируем $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $t \in (0, \pi/2)$. Тогда функция $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t)$ как функция от λ имеет бесконечно много нулей, причем все эти нули являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$. Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha,\beta}(t)} \lambda^{-1-\varepsilon} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0,$$

где $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(t) = \{\lambda > 0 : \varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t) = 0\}$ (см. предложение 2 в § 4).

При $p = \varrho\sigma$, $\sigma \in \mathbb{S}^{a_X-1}$, положим $\Phi_{\lambda,k,m,j}(p) = \Phi_{\lambda,k,m}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma)$, где

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda,k,m}(\varrho) &= \varrho^k (1 + \varrho^2)^{m+1-N_X(k+1)} \varphi_{\lambda,\alpha_X+k,\beta_X+2N_X(k+1)-k-2m-2}(\arctg \varrho), \\ N_X(k) &= (k+1)/2, \quad \text{если } X = \operatorname{SO}(n+1)/\operatorname{O}(n), \\ N_X(k) &= k, \quad \text{если } X \neq \operatorname{SO}(n+1)/\operatorname{O}(n). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) и [23; 2.9 (2)] следует, что $\Phi_{\lambda,1,0}(\varrho) = \varrho(1 + \varrho^2)^{-1} \varphi_{\lambda,\alpha_X+1,\beta_X+1}(\arctg \varrho)$, откуда $\mathcal{N}_{\alpha_X+1,\beta_X+1}(t) = \{\lambda > 0 : \Phi_{\lambda,1,0}(\operatorname{tg} t) = 0\}$. Отметим также, что для любого мультииндекса $\varkappa \in \mathbb{Z}_+^{a_X}$ с длиной $|\varkappa|$ имеет место оценка

$$\sup_{p \in B_t} \left| \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{\varkappa} \Phi_{\lambda,k,m,j}(p) \right| = O(|\lambda|^{|\varkappa|-k} e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

с постоянной, не зависящей от λ (см. § 4 ниже).

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < r < R \leq \pi/2$, $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех целых $k \geq 0$, $0 \leq m \leq M_X(k)$ и $j \in \{1, \dots, h_X^{k,m}\}$ выполнялось равенство

$$f^{k,m,j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha_X+1,\beta_X+1}(r)} c_{\lambda,k,m,j} \Phi_{\lambda,k,m,j}, \quad (9)$$

где $c_{\lambda,k,m,j} \in \mathbb{C}$ и $c_{\lambda,k,m,j} = O(\lambda^{-c})$, $\lambda \rightarrow +\infty$, для любого фиксированного $c > 0$. При этом ряд (9) сходится в пространстве $C^\infty(B_R)$.

Доказательство теоремы 1 содержится в § 7, а в §§ 3–6 развивается необходимый для этого аппарат. В § 3 даны вспомогательные конструкции, связанные с нормированными унитарными алгебрами, и координатное представление инволютивных изометрий компактных двухточечно-однородных пространств X . В § 4 рассматриваются свойства некоторых собственных функций оператора

Лапласа–Бельтрами на X . Приводятся их интегральные представления и асимптотические разложения, а также доказывается полнота системы $\{\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}, \lambda \in \mathcal{N}_{\alpha,\beta}(r)\}$ в пространстве $L([0, r], (\sin t)^{2\alpha+1} dt)$ при $\alpha > -1/2$, $\beta \in \mathbb{R}$. В § 5 вычисляются инфинитезимальные операторы, соответствующие инволютивным изометриям пространств X , и изучаются некоторые свойства класса $V_r(B_R)$. Результаты §§ 3, 5 позволяют свести доказательство основного результата работы к случаю, когда функция f имеет специальный вид, а именно, является произведением радиальной функции на гармонику первой степени. С использованием доказанной в § 4 полноты для функций такого вида получается разложение (9) в шаре B_r . В § 6 установлена теорема единственности для функций из $V_r^\infty(B_R)$, с помощью которой это разложение продолжается на B_R .

Отметим также, что сглаживание функций с нулевыми шаровыми средними (см. [6; часть 2, доказательство леммы 1.12]) позволяет получить подобное описание и для $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$. В этом случае коэффициенты $c_{\lambda,k,m,j}$ растут не быстрее фиксированной положительной степени λ , а ряд (9) сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(B_R)$. Относительно аналогов теорем 1 для некомпактных двухточечно-однородных пространств см. [6; часть 2], [7], [9], [11], [12].

§ 3. Вспомогательные конструкции

Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная унитарная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, в которой задано сопряжение, т.е. некоторый инволютивный антиавтоморфизм $a \rightarrow \bar{a}$. Рассмотрим удвоение $\mathcal{A}^2$ алгебры $\mathcal{A}$, т.е. прямую сумму $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ с умножением $(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \bar{\delta}\beta, \beta\bar{\gamma} + \delta\alpha)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{A}$. Соответствие $a \rightarrow (a, 0)$ позволяет считать алгебру $\mathcal{A}$ подалгеброй $\mathcal{A}^2$. Элемент $1 = (1, 0)$ будет единицей алгебры $\mathcal{A}^2$. Каждый элемент $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2$ единственным образом записывается в виде $\alpha + \beta\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = (0, 1)$. Определяя сопряжение в $\mathcal{A}^2$ по формуле $\overline{\alpha + \beta\mathbf{e}} = \bar{\alpha} - \beta\mathbf{e}$, положим $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}a = \mathbb{H}^2$, где $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ – поле комплексных чисел. Базис $\mathbb{H}$ состоит из $\mathbf{i}_0 = 1$ и трех элементов $\mathbf{i}_1 = (i, 0)$, $\mathbf{i}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$. Аналогично, базис $\mathbb{C}a$ состоит из $\mathbf{i}_0 = 1$ и семи элементов $\mathbf{i}_1 = (\mathbf{i}_1, 0)$, $\mathbf{i}_2 = (\mathbf{i}_2, 0)$, $\mathbf{i}_3 = (\mathbf{i}_3, 0)$, $\mathbf{i}_4 = (0, 1)$, $\mathbf{i}_5 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_4$, $\mathbf{i}_6 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_4$, $\mathbf{i}_7 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_4$. Некоммутативная алгебра $\mathbb{H}$ называется алгеброй кватернионов. Алгебра $\mathbb{C}a$ (некоммутативная, неассоциативная) называется алгеброй октав. Относительно основных свойств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{C}a$ см. [24; лекции 14–16].

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ – вещественная размерность $\mathbb{K}$. Определим

$$\mathbb{K}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать $\mathbb{K}^n$ как левый $\mathbb{K}$ -модуль. Декартово произведение $\mathbb{K}^n$ снабжено эрмитовым скалярным произведением

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{K}} = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n,$$

и евклидовой нормой

$$|a| = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ стандартный базис в $\mathbb{K}^n$, т.е. $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Для алгебры $\mathbb{C}a$ рассмотрим векторное пространство

$$\mathbb{C}a^2 = \{a = (a_1, a_2) : a_k \in \mathbb{C}a, k = 1, 2\}.$$

Если $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}a^2$, то положим

$$\Phi_{\mathbb{C}a}(a, b) = |a_1|^2 |b_1|^2 + |a_2|^2 |b_2|^2 + 2 \operatorname{Re}((a_1 a_2)(\overline{b_1 b_2})),$$

где $|\alpha| = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}}$, $\operatorname{Re} \alpha = (\alpha + \bar{\alpha})/2$ при $\alpha \in \mathbb{C}a$. Используя альтернативность $\mathbb{C}a$ и центральное тождество Муфанг [24; лекция 15, лемма 2], легко проверить, что

$$\Phi_{\mathbb{C}a}(a, b) = |(\bar{a}_1 b_2)(b_2^{-1} b_1) + a_2 \bar{b}_2|^2 \quad \text{для } b_2 \neq 0.$$

Отождествим $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ по правилу

$$a = (a_1, \dots, a_n) \rightarrow x = (x_1, \dots, x_{2n}), \quad (10)$$

где $a_k = x_k + i x_{n+k}$, $x_k, x_{n+k} \in \mathbb{R}$. Полагая $b_k = y_k + i y_{n+k}$, $y = (y_1, \dots, y_{2n})$, где $y_k, y_{n+k} \in \mathbb{R}$, мы получаем $\langle a, b \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} - i \{x, y\}_{\mathbb{R}}$, где $\{x, y\}_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^n (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k)$.

По аналогии с (10) мы можем интерпретировать элементы $\mathbb{H}^n$ как точки в $\mathbb{C}^{2n}$, используя соответствие

$$a = (a_1, \dots, a_n) \mapsto z = (z_1, \dots, z_{2n}), \quad (11)$$

где $a_k = z_k + z_{n+k} \mathbf{i}_2$, $z_k, z_{n+k} \in \mathbb{C}$. Пусть $b_k = w_k + w_{n+k} \mathbf{i}_2$, $w = (w_1, \dots, w_{2n})$, где $w_k, w_{n+k} \in \mathbb{C}$. Тогда $\langle a, b \rangle_{\mathbb{H}} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{H}} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} - \{z, w\}_{\mathbb{C}} \mathbf{i}_2$, где $\{z, w\}_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^n (z_k w_{n+k} - z_{n+k} w_k)$.

Наконец, отождествим $\mathbb{C}a^2$ с $\mathbb{R}^{16}$ с помощью отображения

$$a = (a_1, a_2) \mapsto x = (x_1, \dots, x_{16}), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + x_9 \mathbf{i}_1 + x_5 \mathbf{i}_2 + x_{13} \mathbf{i}_3 + x_3 \mathbf{i}_4 + x_{11} \mathbf{i}_5 + x_7 \mathbf{i}_6 + x_{15} \mathbf{i}_7, \\ a_2 &= x_2 + x_{10} \mathbf{i}_1 + x_6 \mathbf{i}_2 + x_{14} \mathbf{i}_3 + x_4 \mathbf{i}_4 + x_{12} \mathbf{i}_5 + x_8 \mathbf{i}_6 + x_{16} \mathbf{i}_7. \end{aligned}$$

Прямой подсчет показывает, что

$$a_1 a_2 = p_1(x) + p_5(x) \mathbf{i}_1 + p_3(x) \mathbf{i}_2 + p_7(x) \mathbf{i}_3 + p_2(x) \mathbf{i}_4 + p_6(x) \mathbf{i}_5 + p_4(x) \mathbf{i}_6 + p_8(x) \mathbf{i}_7.$$

Кроме того, при

$$\begin{aligned} b_1 &= y_1 + y_9 \mathbf{i}_1 + y_5 \mathbf{i}_2 + y_{13} \mathbf{i}_3 + y_3 \mathbf{i}_4 + y_{11} \mathbf{i}_5 + y_7 \mathbf{i}_6 + y_{15} \mathbf{i}_7, \\ b_2 &= y_2 + y_{10} \mathbf{i}_1 + y_6 \mathbf{i}_2 + y_{14} \mathbf{i}_3 + y_4 \mathbf{i}_4 + y_{12} \mathbf{i}_5 + y_8 \mathbf{i}_6 + y_{16} \mathbf{i}_7, \end{aligned}$$

$y = (y_1, \dots, y_{16})$, где $y_k \in \mathbb{R}$, выполнено равенство $\Phi_{\mathbb{C}a}(a, b) = \Phi(x, y)$ (см. § 2).

В дальнейшем мы будем использовать отождествления (10)–(12).

Обозначим

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}^n} &= \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n), \quad \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n), \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n &= \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)), \\ \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n &= \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)), \quad \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2 = \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9).\end{aligned}$$

Пусть $X = \overline{\mathbb{R}^n}$ или $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Положим

$$\phi_a(b) = \frac{(1 + 2\langle b, a \rangle_{\mathbb{R}} - |b|^2)a - (1 + |a|)^2 b}{1 + |a|^2 |b|^2 + 2\langle b, a \rangle_{\mathbb{R}}}$$

в случае $X = \overline{\mathbb{R}^n}$ и

$$\phi_a(b) = (1 + \langle b, a \rangle_{\mathbb{K}})^{-1} \left(-\sqrt{1 + |a|^2} b + \left(1 + \frac{\langle b, a \rangle_{\mathbb{K}}}{1 + \sqrt{1 + |a|^2}} \right) a \right)$$

для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Рассмотрим отображения $\varphi_{t,j}$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, a_X\}$, которые задаются для указанных X следующим образом: если $ln + 1 \leq j \leq (l+1)n$, $l \in \{0, \dots, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} - 1\}$, то $\varphi_{t,j} = \phi_a$, где $a = t \mathbf{i} e_{j-ln}$.

Для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$ положим

$$\begin{aligned}\varphi_t(a_1, a_2) &= ((t - a_1)(ta_1 + 1)^{-1}, -\sqrt{1 + t^2}(t\bar{a}_1 + 1)^{-1}a_2), \\ a_1 &\in \mathbb{C}a \setminus \{-t^{-1}\}, \quad a_2 \in \mathbb{C}a.\end{aligned}$$

Отображения $\varphi_{t,j}$, φ_t являются инволютивными изометриями соответствующего пространства X (см. [25; п. 2.6, (26)], [26; гл. 2, теорема 2.2.2], [9; § 2], [20]). Они будут использоваться в § 5 для изучения класса $V_r(B_R)$.

§ 4. Свойства функций $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t)$ и $\Phi_{\lambda,k,m,j}(p)$

Рассмотрим для $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ и $0 < t < \pi/2$ дифференциальное уравнение

$$(L_{\alpha,\beta}f)(t) = ((\alpha + \beta + 1)^2 - \lambda^2)f(t), \quad (13)$$

где

$$(L_{\alpha,\beta}f)(t) = (A_{\alpha,\beta}(t))^{-1} \frac{d}{dt} \left(A_{\alpha,\beta}(t) \frac{df(t)}{dt} \right),$$

$A_{\alpha,\beta}(t) = (\sin t)^{2\alpha+1}(\cos t)^{2\beta+1}$. Замена $x = \sin^2 t$ приводит (13) к гипергеометрическому дифференциальному уравнению с параметрами $(\alpha + \beta + 1 + \lambda)/2$, $(\alpha + \beta + 1 - \lambda)/2$, $\alpha + 1$ (см. [23; 2.1 (1)]). Поэтому если $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$, то функция $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t)$ является решением (13), удовлетворяющим начальным условиям $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(0) = 1$, $\varphi'_{\lambda,\alpha,\beta}(0) = 0$.

Применение [23; 2.8 (20), 2.8 (27)] дает для этого решения формулы дифференцирования

$$\varphi'_{\lambda,\alpha,\beta}(t) = (4(\alpha + 1))^{-1}((\alpha + \beta + 1)^2 - \lambda^2) \sin(2t) \varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta+1}(t), \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} (A_{\alpha+1/2,\beta+1/2}(t) \varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta+1}(t)) = 2(\alpha + 1) A_{\alpha,\beta}(t) \varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(t). \quad (15)$$

Далее, подставляя в (13) $f = \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}$ и полагая последовательно $\lambda = \mu$, $\lambda = \nu$, получаем

$$\begin{aligned} & (\mu^2 - \nu^2) A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\nu, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\mu, \alpha, \beta}(t) \\ &= \frac{d}{dt} (A_{\alpha, \beta}(t) (\varphi'_{\nu, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\mu, \alpha, \beta}(t) - \varphi'_{\mu, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\nu, \alpha, \beta}(t))). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} \alpha > -1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & (\mu^2 - \nu^2) \int_0^t A_{\alpha, \beta}(x) \varphi_{\nu, \alpha, \beta}(x) \varphi_{\mu, \alpha, \beta}(x) dx \\ &= A_{\alpha, \beta}(t) (\varphi'_{\nu, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\mu, \alpha, \beta}(t) - \varphi'_{\mu, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\nu, \alpha, \beta}(t)). \end{aligned} \quad (16)$$

Получим теперь представление $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$ в виде преобразования Фурье интегрируемой функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) &= \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} (\sin t)^{-2\alpha} (\cos t)^{-\beta-1/2} \\ &\times \int_0^t \cos(\lambda x) (\cos x - \cos t)^{\alpha-1/2} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\cos t - \cos x}{2 \cos t}\right) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

где Γ – гамма-функция.

Для доказательства (17) нам потребуются три леммы.

ЛЕММА 1. Если $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda + \alpha + \beta + 1) > 0$, то

$$\begin{aligned} \varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1, \alpha, \beta}(t) &= \frac{2\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(\lambda+\alpha+\beta+1)} (\cos t)^{-2\alpha-2\beta-2} \\ &\times \int_0^t \left(\frac{\sin x}{\sin t}\right)^{2\lambda} \frac{(\operatorname{tg} x)^{2\alpha+2\beta+1}}{(\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg}^2 x)^{\alpha+\beta+1}} \varphi_{2\lambda+1, \alpha, -\alpha}(x) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x > 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ имеет место равенство

$$\Gamma(b) x^{b+\mu-1} F(a, b; c; -x) = \frac{\Gamma(b+\mu)}{\Gamma(\mu)} \int_0^x t^{b-1} F(a, b+\mu; c; -t) (x-t)^{\mu-1} dt \quad (19)$$

(см. [27; (2.10)]). При $x = \operatorname{tg}^2 t$, $a = \lambda + \alpha + 1$, $b = \lambda + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$ и $\mu = -\alpha - \beta$ формула (19) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\cos t)^{-2\lambda-2\alpha-2\beta-2} F(\lambda + \alpha + 1, \lambda + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; -\operatorname{tg}^2 t) \\ &= \frac{2\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(-\alpha-\beta)\Gamma(\lambda+\alpha+\beta+1)} (\cos t)^{-2\alpha-2\beta-2} \\ &\times \int_0^t \left(\frac{\sin x}{\sin t}\right)^{2\lambda} \frac{(\operatorname{tg} x)^{2\alpha+2\beta+1}}{(\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg}^2 x)^{\alpha+\beta+1}} (\cos x)^{-2\lambda-2} \\ &\times F(\lambda + \alpha + 1, \lambda + 1; \alpha + 1; -\operatorname{tg}^2 x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя (20) и [23; 2.9 (4)], получаем (18).

ЛЕММА 2. *Предположим, что $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$, $-1 < \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда*

$$|\varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(t)| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{-\operatorname{Re}(\alpha+\beta)} e^{2t|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (21)$$

где константа c_1 не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Мелера–Дирихле [23; 3.7 (27), 3.4 (6)]

$$\begin{aligned} \varphi_{2\lambda+1,\alpha,-\alpha}(x) &= \frac{2^{1/2-\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} (\sin x)^{-2\alpha} \\ &\quad \times \int_0^{2x} (\cos y - \cos 2x)^{\alpha-1/2} \cos\left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)y\right) dy. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\varphi_{2\lambda+1,\alpha,-\alpha}(x)| &\leq c_2 \frac{e^{2x|\operatorname{Im} \lambda|}}{(\sin x)^{2\operatorname{Re} \alpha}} \int_0^{2x} (\cos y - \cos 2x)^{\operatorname{Re} \alpha - 1/2} dy \\ &\leq c_2 \frac{e^{2x|\operatorname{Im} \lambda|}}{(\sin x)^{2\operatorname{Re} \alpha} \sqrt{1 + \cos 2x}} \\ &\quad \times \int_{\cos 2x}^1 (y - \cos 2x)^{\operatorname{Re} \alpha - 1/2} (1 - y)^{-1/2} dy = c_3 \frac{e^{2x|\operatorname{Im} \lambda|}}{\cos x}, \end{aligned} \quad (22)$$

где c_2, c_3 зависят только от α . Из (22) и (18) заключаем, что

$$|\varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(t)| \leq c_4 \left| \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+\beta+1)} \right| e^{2t|\operatorname{Im} \lambda|},$$

где c_4 не зависит от λ . Это доказывает (21) (см. [23; 1.18 (4)]).

ЛЕММА 3. *Пусть f – целая функция. Предположим, что для некоторого $a \in (0, \pi)$*

$$f(\lambda) = O(e^{a|\lambda|}) \quad \text{в полуплоскости } \operatorname{Re} \lambda \geq 0 \quad (23)$$

и $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f \equiv 0$.

Эта лемма является частным случаем теоремы 7 из [28; гл. 2, § 2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $-1 < \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0$. Положим $f(\lambda) = \varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(t) - g(2\lambda + \alpha + \beta + 1)$, где $g(\lambda)$ – функция в правой части (17). Согласно [15; (5.8)] $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, в силу (21) функция f удовлетворяет (23). Отсюда по лемме 3

$$\varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(t) = g(2\lambda + \alpha + \beta + 1). \quad (24)$$

Так как f является целой функцией по переменной β , равенство (24) выполнено для всех $\beta \in \mathbb{C}$. Тем самым, предложение 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$, $\beta \in \mathbb{C}$ и*

$$c(\alpha) = \begin{cases} [\operatorname{Re} \alpha + 1/2], & \text{если } \operatorname{Re} \alpha + 1/2 \notin \mathbb{N}, \\ [\operatorname{Re} \alpha], & \text{если } \operatorname{Re} \alpha + 1/2 \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда для любого целого $0 \leq s \leq c(\alpha)$ существует положительная константа $c_1(\alpha, \beta, s)$ такая, что

$$|\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)| \leq \frac{c_1(\alpha, \beta, s)}{(\sin t)^{2s} (\cos t)^{s + \operatorname{Re} \beta + |\operatorname{Re} \beta| + 1/2}} \frac{e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}}{|\lambda|^s} \quad (26)$$

для всех $t \in (0, \pi/2)$ и всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим

$$f(y) = (y - \cos t)^{\alpha-1/2} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \frac{1}{2} - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\cos t - y}{2 \cos t}\right).$$

Повторное интегрирование по частям дает

$$\int_{-t}^t e^{i\lambda x} f(\cos x) dx = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^s \int_{-t}^t e^{i\lambda x} \left(\frac{d}{dx}\right)^s (f(\cos x)) dx.$$

Отсюда и из (17) имеем

$$|\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)| \leq \frac{2^{\operatorname{Re} \alpha - 1/2}}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right| \times (\sin t)^{-2 \operatorname{Re} \alpha} (\cos t)^{-\operatorname{Re} \beta - 1/2} \frac{e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}}{|\lambda|^s} \int_{-t}^t \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^s (f(\cos x)) \right| dx. \quad (27)$$

Далее, по лемме 2.3 из [15]

$$\left| F\left(\frac{1}{2} + \beta + j, \frac{1}{2} - \beta + j; \alpha + \frac{1}{2} + j; \frac{\cos t - \cos x}{2 \cos t}\right) \right| \leq c_5 \left(\frac{\cos x}{\cos t}\right)^{|\operatorname{Re} \beta|}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (28)$$

где c_5 зависит только от α, β и j . Комбинируя (27), (28) и (22), получаем требуемую оценку.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Предположим, что $a, b \in (0, \pi/2)$ фиксированы и $t \in [a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$, имеют место равномерные относительно t асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi} (\sin t)^{\alpha+1/2} (\cos t)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) &= \frac{\cos(\lambda t - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1))}{\lambda^{\alpha+1/2}} \\ &+ \frac{(1/4 - \alpha^2) \operatorname{ctg} t + (\beta^2 - 1/4) \operatorname{tg} t}{2} \frac{\sin(\lambda t - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1))}{\lambda^{\alpha+3/2}} + O\left(\frac{e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda^{\alpha+5/2}}\right), \quad (29) \\ \frac{\sqrt{\pi} (\sin t)^{\alpha+1/2} (\cos t)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)} \frac{d}{d\lambda} \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) &= -t \frac{\sin(\lambda t - \frac{\pi}{4}(2\alpha + 1))}{\lambda^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}}{\lambda^{\alpha+3/2}}\right). \quad (30) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} \lambda > -1/2$, $\beta \in \mathbb{C}$ требуемое утверждение вытекает из предложения 1 и асимптотического разложения интегралов Фурье [29; гл. 2, доказательство теоремы 10.2]. Применяя формулу

$$\begin{aligned} &(\Gamma(\alpha + 1))^{-1} (\cos t)^2 \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) \\ &= (\Gamma(\alpha + 2))^{-1} (\alpha + 1 - (\alpha - \beta + 2) \sin^2 t) \varphi_{\lambda, \alpha+1, \beta-1}(t) \\ &\quad + (4\Gamma(\alpha + 3))^{-1} ((\alpha - \beta + 3)^2 - \lambda^2) (\sin t)^2 \varphi_{\lambda, \alpha+2, \beta-2}(t) \end{aligned}$$

(см. [23; 2.8 (30)]), получаем (29) и (30) в общем случае.

Далее нам потребуются свойства λ -нулей функции $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для фиксированных $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $t \in (0, \pi/2)$ справедливы следующие утверждения.

- (i) Функция $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$ имеет бесконечно много нулей.
- (ii) Все нули $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$.
- (iii) Пусть $\lambda_l = \lambda_l(\alpha, \beta, t)$, $l \in \mathbb{N}$, – последовательность всех положительных нулей $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$, занумерованных в порядке возрастания, и пусть $0 < a \leq t \leq b < \pi/2$. Тогда имеет место равномерное относительно t асимптотическое разложение

$$t\lambda_l = \pi \left(\frac{2\alpha + 3}{4} + l + q(t, \alpha, \beta) \right) + \left(\left(\frac{1}{4} - \alpha^2 \right) \operatorname{ctg} t + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) \operatorname{tg} t \right) (2\lambda_l)^{-1} + O(\lambda_l^{-3}),$$

где $q(t, \alpha, \beta)$ принадлежит $\mathbb{Z}$ и не зависит от l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (16) и повторяя рассуждения из [6; часть 2, доказательство леммы 2.4], получаем утверждения (i), (ii). Утверждение (iii) следует из (29), (30) (см., например, [6; часть 2, доказательство леммы 2.5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть

$$\alpha \in (-1/2, +\infty), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \cap (2\alpha + (5 - c(\alpha))/2, +\infty), \quad r \in (0, \pi/2)$$

(см. (25)). Допустим, что функция u удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $L_{\alpha, \beta}^s u \in C^2[0, r]$, $s = 0, 1, \dots, k-1$, $L_{\alpha, \beta}^k u \in C[0, r]$;
- 2) $(L_{\alpha, \beta}^s u)(r) = 0$, $s = 0, 1, \dots, k-1$.

Для $\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}(r)$ положим

$$c_\lambda(u) = \left(\int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}^2(t) dt \right)^{-1} \int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) u(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) dt.$$

Тогда $c_\lambda(u) = O(\lambda^{-2k-c(\alpha)+4\alpha+4})$, $\lambda \rightarrow +\infty$, и

$$u(t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}(r)} c_\lambda(u) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t), \quad t \in [0, r]. \quad (31)$$

При этом ряд (31) сходится к функции u в пространстве $C^s[0, r]$ для $s \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, k - 2\alpha - (5 - c(\alpha))/2)$.

Доказательство предложения 3 основано на двух леммах.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in (0, \pi/2)$. Предположим, что $v \in L[0, r]$ и

$$\int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) v(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) dt = 0 \quad (32)$$

для всех $\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}(r)$. Тогда $v = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $w(\lambda) = h(\lambda)/\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(r)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $h(\lambda)$ – интеграл в левой части (32). Из условия леммы и предложения 2 следует, что w – четная целая функция не выше первого порядка. Кроме того, из (26) и (29) вытекает, что $w(\lambda) = O(|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по прямым $\operatorname{Im} \lambda = \pm \operatorname{Re} \lambda$.

По принципу Фрагмена–Линделёфа w является многочленом не выше первой степени. В силу четности w имеем $w(\lambda) = w(0)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Это означает (см. (17)), что для $x \in (\cos r, 1)$

$$\int_{\cos r}^x \xi(y)(x-y)^{\alpha-1/2} \mathcal{F}_1\left(\frac{y-x}{2y}\right) dy = w(0) \frac{(x-\cos r)^{\alpha-1/2}}{(\sin r)^{2\alpha}(\cos r)^{\beta+1/2}} \mathcal{F}_1\left(\frac{\cos r-x}{2\cos r}\right),$$

где $\xi(y) = y^{\beta+1/2}v(\arccos y)$, $\mathcal{F}_1(t) = F(1/2 + \beta, 1/2 - \beta; \alpha + 1/2; t)$. Обозначим $M(\alpha, \beta, r) = \max\{|\mathcal{F}_1(t)| : t \in [1/2 - 1/(2\cos r), 0]\}$. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r) > 0$ такое, что на $(\cos r, \cos r + \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$c_2(\alpha, \beta, r) \int_{\cos r}^x |\xi(y)|(x-y)^{\alpha-1/2} dy \geq |w(0)|(x-\cos r)^{\alpha-1/2}, \quad (33)$$

где $c_2(\alpha, \beta, r) = 2M(\alpha, \beta, r)(\sin r)^{2\alpha}(\cos r)^{\beta+1/2}$. Пусть $t \in (\cos r, \cos r + \varepsilon)$. Умножим обе части (33) на $(t-x)^{\alpha-1/2}$ и проинтегрируем по x в пределах от $\cos r$ до t . После простых преобразований находим

$$c_2(\alpha, \beta, r) \int_{\cos r}^t |\xi(y)|(t-y)^{2\alpha} dy \geq |w(0)|(t-\cos r)^{2\alpha}.$$

Продолжая эту процедуру, получаем

$$c_2(\alpha, \beta, r) \int_{\cos r}^t |\xi(y)|(t-y)^\mu dy \geq |w(0)|(t-\cos r)^\mu \quad (34)$$

при некотором $\mu > 0$. Устремляя в (34) t к $\cos r$, заключаем, что $w(0) = 0$. Таким образом,

$$\int_{\cos r}^x \xi(y)(x-y)^{\alpha-1/2} \mathcal{F}_1\left(\frac{y-x}{2y}\right) dy = 0, \quad x \in (\cos r, 1).$$

Отсюда $v = 0$ (см., например, [6; часть 1, следствие 3.1]).

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}(r)$, и пусть

$$\delta(\lambda, \mu) = \int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) \varphi_{\mu, \alpha, \beta}(t) dt.$$

Тогда $\delta(\lambda, \mu) = 0$ при $\lambda \neq \mu$ и $\delta(\lambda, \lambda) \lambda^{4\alpha+4} > c_6$, где константа $c_6 > 0$ не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda \neq \mu$ утверждение следует из (16). Повторяя рассуждения из [11; лемма 9], получаем требуемую оценку для $\delta(\lambda, \lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Интегрируя функцию $A_{\alpha, \beta}(t)u(t) \times \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$ на $[0, r]$ по частям с учетом (14), (15), находим

$$\int_0^r A_{\alpha, \beta}(t)u(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) dt = \frac{(-1)^k}{(\lambda^2 - (\alpha + \beta + 1)^2)^k} \int_0^r A_{\alpha, \beta}(t)(L_{\alpha, \beta}^k u)(t) \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(t) dt.$$

Теперь предложение 3 вытекает из (26) и лемм 4, 5.

В заключение этого параграфа рассмотрим некоторые свойства функций $\Phi_{\lambda,k,m,j}(p)$.

Введем дифференциальный оператор

$$D(\alpha, \beta) = (1 + \varrho^2) \frac{d}{d\varrho} + \varrho^{-1}(\alpha + (\alpha - 2\beta)\varrho^2).$$

Обозначим $\rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1$, $\nu_X(\lambda) = (\rho_X + \lambda)/2$,

$$a = \nu_X(\lambda) + N_X(k+1) - m - 1, \quad b = \nu_X(-\lambda) + N_X(k+1) - m - 1, \quad c = k + \alpha_X + 1. \quad (35)$$

Используя формулы дифференцирования гипергеометрической функции [23; 2.8 (20), (22), (24), (27)], получаем

$$D(-k, m+1 - N_X(k+1))\Phi_{\lambda,k,m} = 2c^{-1}ab\Phi_{\lambda,k+1,m}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} D(-k, \beta_X - m)\Phi_{\lambda,k,m} \\ = 2c^{-1}(\nu_X(\lambda) + m - \beta_X)(\nu_X(-\lambda) + m - \beta_X)\Phi_{\lambda,k+1,m+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$D(k + 2\alpha_X, N_X(k) + \alpha_X + \beta_X - m)\Phi_{\lambda,k,m} = 2(c-1)\Phi_{\lambda,k-1,m}, \quad (38)$$

$$D(k + 2\alpha_X, \alpha_X + m)\Phi_{\lambda,k,m} = 2(c-1)\Phi_{\lambda,k-1,m-1}. \quad (39)$$

Из (36), (38) и тождества

$$\begin{aligned} (L_X + 4(N_X(k) - m - 1)(N_X(k) + \alpha_X + \beta_X - m))(\varphi(\varrho)Y_j^{k,m}(\sigma)) \\ = (D(1 - k, m+1 - N_X(k)) \\ \times D(k + 2\alpha_X, N_X(k) + \alpha_X + \beta_X - m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k,m}(\sigma), \end{aligned} \quad (40)$$

которое можно установить непосредственно, делаем вывод, что

$$(L_X + \lambda^2 - \rho_X^2)\Phi_{\lambda,k,m,j} = 0. \quad (41)$$

Пусть

$$e_{X,\lambda,\xi}(p) = \left(\frac{1 + |p|^2}{1 - 2i\langle p, \xi \rangle_{\mathbb{R}} - F_X(p, \xi)} \right)^{\nu_X(\lambda)}, \quad p \in B_{\pi/4}, \quad \xi \in \mathbb{S}^{a_X-1},$$

где $F_X(p, \xi)$ определяется для каждого из пространств X следующим образом:

- 1) $X = \mathbb{R}^n$: $F_X(p, \xi) = |p|^2$; 2) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$): $F_X(p, \xi) = |\langle p, \xi \rangle_{\mathbb{K}}|^2$;
- 3) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$: $F_X(p, \xi) = \Phi(p, \xi)$ (см. §§ 2, 3).

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ положим $(\lambda)_k = \Gamma(\lambda + k)/\Gamma(\lambda)$. Пусть также $d\omega(\xi)$ – нормированная поверхностная мера на $\mathbb{S}^{a_X-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место интегральное представление*

$$\Phi_{\lambda,k,m,j}(p) = q(\lambda) \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} e_{X,\lambda,\xi}(p) Y_j^{k,m}(\xi) d\omega(\xi), \quad p \in B_{\pi/4}, \quad (42)$$

где $q(\lambda) = (-i)^k (a_X/2)_k ((\nu_X(\lambda))_{k-m} (\nu_X(\lambda) - \beta_X)_m)^{-1}$, если $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, и $q(\lambda) = (-2i)^k (n/2)_k / (2\nu_X(\lambda))_k$ при $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\nu \in \mathbb{C}$ и любого однородного гармонического многочлена H степени k на $\mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \langle \sigma, \xi \rangle_{\mathbb{R}} + \varrho^2} \right)^{\nu} H(\xi) d\omega(\xi) \\ &= \left(\left(\frac{n}{2} \right)_k \right)^{-1} (\nu)_k \varrho^k (1 - \varrho^2)^{\nu} F\left(\nu + k, \nu + 1 - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2}; \varrho^2 \right) H(\sigma), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \langle \sigma, \xi \rangle_{\mathbb{R}} + \varrho^2 \langle \sigma, \xi \rangle_{\mathbb{R}}^2} \right)^{\nu} H(\xi) d\omega(\xi) \\ &= 2^{-k} \left(\left(\frac{n}{2} \right)_k \right)^{-1} (2\nu)_k \varrho^k (1 - \varrho^2)^{\nu} F\left(\nu + \frac{k}{2}, \nu + \frac{k+1}{2}; k + \frac{n}{2}; \varrho^2 \right) H(\sigma), \end{aligned} \quad (44)$$

где $0 \leq \varrho < 1$, $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ (см. [30; (4.21), (4.23)], а также [23; 2.1 (26)]). Учитывая, что

$$\Phi_{\lambda,k,m}(\varrho) = \varrho^k (1 + \varrho^2)^{\nu_X(\lambda)} F(a, c - b; c; -\varrho^2)$$

(см. [23; 2.9 (3)], (35)) и используя в (43), (44) аналитическое продолжение по ϱ , получаем (42) для $X = \overline{\mathbb{R}^n}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. В остальных случаях доказательство формулы (42) аналогично (см. [30; (4.9), (4.11)], [31; (20)], [20]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $t \in (0, \pi/2)$. Тогда для любого мультииндекса $\varkappa \in \mathbb{Z}_+^{a_X}$ с длиной $|\varkappa|$

$$\sup_{p \in B_t} \left| \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{\varkappa} \Phi_{\lambda,k,m,j}(p) \right| = O(|\lambda|^{|\varkappa|-k} e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (45)$$

где постоянная в O не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$f(p, \xi) = \frac{1 + |p|^2}{1 - 2i\langle p, \xi \rangle_{\mathbb{R}} - F_X(p, \xi)}, \quad p \in B_{\pi/4}, \quad \xi \in \mathbb{S}^{a_X-1}. \quad (46)$$

Из (46) и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$1 \leq |f(p, \xi)| \leq (1 + |p|^2)(1 - |p|^2)^{-1}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\arg f(p, \xi)| &= |\arctg(2\langle p, \xi \rangle_{\mathbb{R}}(1 - F_X(p, \xi))^{-1})| \\ &\leq \arctg(2|p|(1 - |p|^2)^{-1}) = 2 \arctg |p|. \end{aligned}$$

Отсюда при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

$$|e_{X,\lambda,\xi}(p)| \leq ((1 + |p|^2)(1 - |p|^2)^{-1})^{\rho_X/2} e^{(\arctg |p|)|\operatorname{Im} \lambda|}. \quad (47)$$

Поскольку функция $\Phi_{\lambda,k,m,j}(p)$ является четной по λ , то (42) и (47) влекут (45) для $t < \pi/4$. Оценка (45) в общем случае следует теперь из (29).

§ 5. Построение инфинитезимальных операторов

ЛЕММА 6. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$. Тогда $f_{k,m,j}(\varrho)Y_i^{k,m}(\sigma) \in V_r^s(B_R)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $i, j \in \{1, \dots, h_X^{k,m}\}$. Аналогичное утверждение верно и для класса $V_r(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{t_{i,j}^{k,m}(\tau)\}$ – матрица представления $\mathfrak{T}_X^{k,m}(\tau)$ в базисе $\{Y_j^{k,m}\}$, т.е.

$$\mathfrak{T}_X^{k,m}(\tau)Y_j^{k,m} = \sum_{i=1}^{h_X^{k,m}} t_{i,j}^{k,m}(\tau)Y_i^{k,m}. \quad (48)$$

Используя (48), (6) и соотношения ортогональности для $t_{i,j}^{k,m}(\tau)$, получаем

$$f_{k,m,j}(\varrho)Y_i^{k,m}(\sigma) = h_X^{k,m} \int_{K_X} f(\tau^{-1}p) \overline{t_{i,j}^{k,m}(\tau)} d\tau, \quad (49)$$

где $d\tau$ – нормированная мера Хаара на K_X . Отсюда следует утверждение леммы 6.

Введем для каждого из пространств X операторы A_j , $1 \leq j \leq a_X$, следующим образом:

1) $X = \mathbb{R}^n$:

$$A_j = (1 - |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_j \sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial}{\partial x_l};$$

2) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$:

$$A_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial}{\partial x_l};$$

3) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$:

$$A_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \sum_{l=1}^n \bar{z}_l \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$A_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j-n}} + z_{j-n} \sum_{l=1}^n z_l \frac{\partial}{\partial z_l}, \quad n+1 \leq j \leq 2n;$$

4) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$:

$$A_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \sum_{l=1}^{2n} \bar{z}_l \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} - z_{j+n(1-2s)} \sum_{l=1}^n (-1)^s \left(\bar{z}_{n+l} \frac{\partial}{\partial z_l} - \bar{z}_l \frac{\partial}{\partial z_{n+l}} \right),$$

$$sn+1 \leq j \leq (s+1)n, \quad s \in \{0, 1\};$$

$$A_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j-2n}} + z_{j-2n} \sum_{l=1}^{2n} z_l \frac{\partial}{\partial z_l} - \bar{z}_{j+(3-2s)n} \sum_{l=1}^n (-1)^s \left(z_{n+l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} - z_l \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+l}} \right),$$

$$sn+1 \leq j \leq (s+1)n, \quad s \in \{2, 3\};$$

5) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$:

$$A_j = \left(1 - \sum_{l=1}^8 x_{2l-1}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_j \sum_{l=1}^8 P_{l,\lambda_j}(x) \frac{\partial}{\partial x_{2l}} + 2x_j \sum_{l=1}^{16} x_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$j \in \{1, 3, \dots, 15\};$$

$$A_j = \left(1 - \sum_{l=1}^8 x_{2l}^2\right) \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_{j-1} \sum_{l=1}^8 Q_{l, \lambda_{j-1}}(x) \frac{\partial}{\partial x_{2l-1}} + 2x_j \sum_{l=1}^{16} x_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$j \in \{2, 4, \dots, 16\}.$$

В последнем случае $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_j = -1$, $j \in \{3, 5, \dots, 15\}$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_7 = 6$, $\lambda_9 = 1$, $\lambda_{11} = 5$, $\lambda_{13} = 3$, $\lambda_{15} = 7$; многочлены $P_{l,q}: \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $Q_{l,q}: \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^1$ ($0 \leq q \leq 7$) определяются соотношениями (см. §§2, 3):

$$\begin{aligned} & \mathbf{i}_q(p_1(x) + p_5(x)\mathbf{i}_1 + p_3(x)\mathbf{i}_2 + p_7(x)\mathbf{i}_3 + p_2(x)\mathbf{i}_4 + p_6(x)\mathbf{i}_5 + p_4(x)\mathbf{i}_6 + p_8(x)\mathbf{i}_7) \\ &= P_{1,q}(x) + P_{5,q}(x)\mathbf{i}_1 + P_{3,q}(x)\mathbf{i}_2 + P_{7,q}(x)\mathbf{i}_3 + P_{2,q}(x)\mathbf{i}_4 \\ & \quad + P_{6,q}\mathbf{i}_5 + P_{4,q}(x)\mathbf{i}_6 + P_{8,q}(x)\mathbf{i}_7, \\ & (p_1(x) + p_5(x)\mathbf{i}_1 + p_3(x)\mathbf{i}_2 + p_7(x)\mathbf{i}_3 + p_2(x)\mathbf{i}_4 + p_6(x)\mathbf{i}_5 + p_4(x)\mathbf{i}_6 + p_8(x)\mathbf{i}_7)\mathbf{i}_q \\ &= Q_{1,q}(x) + Q_{5,q}(x)\mathbf{i}_1 + Q_{3,q}(x)\mathbf{i}_2 + Q_{7,q}(x)\mathbf{i}_3 + Q_{2,q}(x)\mathbf{i}_4 \\ & \quad + Q_{6,q}\mathbf{i}_5 + Q_{4,q}(x)\mathbf{i}_6 + Q_{8,q}(x)\mathbf{i}_7. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда $A_j f \in V_r^{s-1}(B_R)$ для всех $1 \leq j \leq a_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать изометрии $\varphi_{t,j}$ и φ_t из §3. Кроме того, в случае $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$ рассмотрим также изометрии $\tau(a_1, a_2) = (\bar{a}_2, \bar{a}_1)$, $\tau_q(a_1, a_2) = (\mathbf{i}_q a_1, a_2 \mathbf{i}_q)$, $1 \leq q \leq 7$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{C}a$. Если $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$, то положим $g_{t,j} = \varphi_{t,j}$. Для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$ определим $g_{t,q} = \tau_q \circ \varphi_t \circ \tau_q$, $g_{t,q+7} = \tau \circ g_{t,q} \circ \tau$, $1 \leq q \leq 7$; $g_{t,15} = -\varphi_t$; $g_{t,16} = \tau \circ g_{t,15} \circ \tau$. Пусть $g \in G_X$ и $g\bar{B}_r \subset B_R$. Поскольку $f \in V_r^s(B_R)$, имеем

$$\int_{gB_r} f(g_{t,j}(p)) d\mu_X(p) = 0, \quad 1 \leq j \leq a_X, \quad (50)$$

для всех достаточно малых t . Дифференцируя (50) по t и полагая $t = 0$, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 8. Пусть $Y \in \mathcal{H}_X^{k,m} \setminus \{0\}$ и функция $\varphi(\varrho)Y(\sigma)$ принадлежит $V_r^s(B_R)$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $(D(-k, m+1 - N_X(k+1))\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, h_X^{k+1,m}\}$;
- (ii) если $m \leq M_X(k+1) - 1$, то $(D(-k, \beta_X - m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m+1}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, h_X^{k+1,m+1}\}$;
- (iii) если $k \geq 1$ и $m \leq M_X(k-1)$, то $(D(k+2\alpha_X, N_X(k)+\alpha_X+\beta_X-m)\varphi)(\varrho) \times Y_j^{k-1,m}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, h_X^{k-1,m}\}$;
- (iv) если $k \geq 1$ и $m \geq 1$, то $(D(k+2\alpha_X, \alpha_X+m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k-1,m-1}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, h_X^{k-1,m-1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 6, 7

$$A_l(\psi(\varrho)H(\varrho\sigma)) \in V_r^{s-1}(B_R), \quad 1 \leq l \leq a_X, \quad (51)$$

для каждого $H \in \mathcal{H}_X^{k,m}$, где $\psi(\varrho) = \varphi(\varrho)\varrho^{-k}$. Найдем проекции функций (51) при некоторых l и H на соответствующее пространство гармоник. Рассмотрим четыре случая.

(а) Случай $X = \overline{\mathbb{R}^n}$ или $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Если $X = \overline{\mathbb{R}^n}$, то

$$\begin{aligned} A_1(\psi(\varrho)(x_1 + ix_2)^k) \\ = \frac{k}{n + 2k - 2} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + (n + k - 2)\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(1 - \varrho^2) \right) \varrho^{1-k} H_1(x) \\ + \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + k\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(\varrho^2 - 1) \right) \varrho^{-k-1} H_2(x), \end{aligned} \quad (52)$$

где $H_1(x) = (x_1 + ix_2)^{k-1}$, $H_2(x) = x_1(x_1 + ix_2)^k - k(n + 2k - 2)^{-1}\varrho^2(x_1 + ix_2)^{k-1}$. Очевидно, что $H_1 \in \mathcal{H}_X^{k-1,0}$ при $k \geq 1$. Кроме того, $H_2 \in \mathcal{H}_X^{k+1,0}$, так как

$$(n + 2k - 2)x_l h - \varrho^2 \frac{\partial h}{\partial x_l} \in \mathcal{H}_X^{k+1,0} \quad \forall h \in \mathcal{H}_X^{k,0}, \quad l \in \{1, \dots, n\} \quad (53)$$

(см. [22; гл. 9, § 2.3 (5)]). Аналогично, для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$

$$\begin{aligned} A_1(\psi(\varrho)(x_1 + ix_2)^k) = \frac{k}{n + 2k - 2} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + (n + k - 2)\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} \right) \varrho^{1-k} H_1(x) \\ + \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) - k\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} \right) \varrho^{-k-1} H_2(x). \end{aligned} \quad (54)$$

(б) Случай $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Имеем

$$\begin{aligned} A_1(\psi(\varrho)z_1^{k-m}\bar{z}_2^m) \\ = \frac{k-m}{2(n+k-1)} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(2n+k-2-(k-2m)\varrho^2) \right) \varrho^{1-k} H_3(z) \\ + \frac{1}{2} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) - \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(k+(k-2m)\varrho^2) \right) \varrho^{-k-1} H_4(z), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} A_1(\psi(\varrho)z_1^m\bar{z}_2^{k-m}) \\ = \frac{m}{2(n+k-1)} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(2n+k-2-(k-2m)\varrho^2) \right) \varrho^{1-k} H_5(z) \\ + \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) - \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(k+(2m-k)\varrho^2) \right) \varrho^{-k-1} H_6(z), \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} H_3(z) &= z_1^{k-m-1}\bar{z}_2^m, & H_4(z) &= \bar{z}_1 z_1^{k-m}\bar{z}_2^m - (k-m)(n+k-1)^{-1}\varrho^2 z_1^{k-m-1}\bar{z}_2^m, \\ H_5(z) &= z_1^{m-1}\bar{z}_2^{k-m}, & H_6(z) &= \bar{z}_1 z_1^m\bar{z}_2^{k-m} - m(n+k-1)^{-1}\varrho^2 z_1^{m-1}\bar{z}_2^{k-m}. \end{aligned}$$

При этом $H_3 \in \mathcal{H}_X^{k-1,m}$ и $H_4 \in \mathcal{H}_X^{k+1,m+1}$ для $m \leq [(k-1)/2]$, $H_5 \in \mathcal{H}_X^{k-1,m-1}$ для $k \geq 1$, $m \geq 1$ и $H_6 \in \mathcal{H}_X^{k+1,m}$.

(с) Случай $X = \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(z) &= \bar{z}_1^{\alpha-2\beta}(\bar{z}_1 z_{n+2} - \bar{z}_2 z_{n+1})^\beta, \\ \mathcal{Q}_{\alpha,\beta}(z) &= z_{n+1} \bar{z}_1^{\alpha-2\beta-1}(\bar{z}_1 z_{n+2} - \bar{z}_2 z_{n+1})^\beta. \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{Q}_{k,m} \in \mathcal{H}_X^{k,m}$, если $m \leq [(k-1)/2]$, и $\mathcal{P}_{k,m} \in \mathcal{H}_X^{k,m}$ (см. [9; § 4], [21; теорема 2.4]). Находим

$$\begin{aligned} & A_1(\psi(\varrho)\mathcal{P}_{k,m}(z)) \\ &= \frac{1}{2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k+(k-2m)\varrho^2) \right) \varrho^{-k-1} \mathcal{P}_{k+1,m}(z), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & A_{3n+2}(\psi(\varrho)\mathcal{P}_{k,m}(z)) - A_2(\psi(\varrho)\mathcal{Q}_{k,m}(z)) \\ &= \frac{1}{2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k+(2m-k-2)\varrho^2) \right) \varrho^{-k-1} \mathcal{P}_{k+1,m+1}(z), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & A_{n+2}(\psi(\varrho)\mathcal{P}_{k,m}(z)) \\ &= \frac{m}{4n+2k-2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(4n+k-2+(k-2m)\varrho^2) \right) \\ &\quad \times \varrho^{1-k} \mathcal{P}_{k-1,m-1}(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k+(k-2m)\varrho^2) \right) \varrho^{-k-1} H_7(z), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & A_{2n+1}(\psi(\varrho)\mathcal{P}_{k,m}(z)) + A_{n+1}(\psi(\varrho)\mathcal{Q}_{k,m}(z)) \\ &= \frac{k-m+1}{4n+2k-2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(4n+k-2+(2m-k-2)\varrho^2) \right) \\ &\quad \times \varrho^{1-k} \mathcal{P}_{k-1,m}(z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left((1+\varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k+(2m-k-2)\varrho^2) \right) \\ &\quad \times \varrho^{-k-1} (H_8(z) + H_9(z)), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$H_7(z) = \bar{z}_{n+2} \mathcal{P}_{k,m}(z) - (2n+k-1)^{-1} \varrho^2 \frac{\partial \mathcal{P}_{k,m}}{\partial z_{n+2}},$$

$$H_8(z) = z_1 \mathcal{P}_{k,m}(z) - (2n+k-1)^{-1} \varrho^2 \frac{\partial \mathcal{P}_{k,m}}{\partial \bar{z}_1},$$

$$H_9(z) = \bar{z}_{n+1} \mathcal{Q}_{k,m}(z) - (2n+k-1)^{-1} \varrho^2 \frac{\partial \mathcal{Q}_{k,m}}{\partial z_{n+1}}.$$

Согласно (53) H_7 , H_8 и H_9 являются однородными гармоническими многочленами степени $k+1$ в $\mathbb{R}^{4n}$.

(d) Случай $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}^a}^2$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{[\alpha/2]-\beta} a_{\alpha,\beta,l} \mathcal{S}_{\alpha,\beta,l}(x), & \text{если } \beta \leq [\alpha/2], \\ 0, & \text{если } \beta > [\alpha/2], \end{cases}$$

где

$$a_{\alpha,\beta,l} = \left(-\frac{1}{4}\right)^l (l+1)(l+2) \binom{l\alpha-2\beta-l+2}{l+2},$$

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta,l}(x) = (x_1 + ix_2)^{\alpha-2\beta-2l} (p_9(x) - p_{10}(x) + 2ip_1(x))^{\beta+l}.$$

(Здесь используется определение из § 2 для p_1 , p_9 , p_{10} , а также стандартное обозначение для числа сочетаний.)

Пусть $\mathcal{L}_X = (4(1 + |x|^2))^{-1} L_X$. Тогда

$$(\mathcal{L}_X - (3 - m - l)(k - m - l)) \mathcal{S}_{k,m,l} = -\frac{(k - 2m - 2l)(k - 2m - 2l - 1)}{4} \mathcal{S}_{k,m,l+1}.$$

Отсюда $\mathcal{R}_{k,m} \in \mathcal{H}_X^{k,m}$ и $\mathcal{S}_{k,m,l} \in \sum_{i=l}^{\lfloor k/2 \rfloor - m} \mathcal{H}_X^{k,m+i}$. Далее прямой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} (-A_1 - iA_2)(\psi(\varrho)\mathcal{R}_{k,m}(x)) &= \frac{k - 2m + 1}{k - 2m + 3} \varphi_1(\varrho)(\mathcal{R}_{k+1,m}(x) - \Sigma_1) \\ &+ \frac{k - 2m + 5}{4(k - 2m + 3)} \varphi_2(\varrho)(\mathcal{R}_{k+1,m+1}(x) - \Sigma_2) + \varphi_1(\varrho)\Sigma_3 - \psi(\varrho)(\Sigma_4 + \Sigma_5), \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varrho) &= \varrho^{-k-1} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k + (k - 2m)\varrho^2) \right), \\ \varphi_2(\varrho) &= \varrho^{-k-1} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(-k + (2m - k - 6)\varrho^2) \right), \\ \Sigma_1 &= \sum_{1 \leq l \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor - m} a_{k+1,m+1,l} \mathcal{S}_{k+1,m+1,l}(x), \\ \Sigma_2 &= \sum_{2 \leq l \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor - m} a_{k+1,m,l} \mathcal{S}_{k+1,m,l}(x), \\ \Sigma_3 &= \sum_{2 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor - m} a_{k,m,l} \mathcal{S}_{k+1,m,l}(x), \\ \Sigma_4 &= \sum_{1 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor - m} (k - 2m - 2l) a_{k,m,l} \mathcal{S}_{k+1,m+1,l}(x), \\ \Sigma_5 &= \sum_{2 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor - m} 2l a_{k,m,l} \mathcal{S}_{k+1,m,l}(x) \end{aligned}$$

и суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю. Подобным образом,

$$\begin{aligned} (-A_1 + iA_2)(\psi(\varrho)\mathcal{R}_{k,m}(x)) &= \frac{4m(k - 2m + 1)}{(14 + 2k)(k - 2m + 3)} \varphi_3(\varrho)(\mathcal{R}_{k-1,m-1}(x) - \Sigma_6) \\ &+ \frac{(k - 2m + 5)(k - m + 3)}{(14 + 2k)(k - 2m + 3)} \varphi_4(\varrho)(\mathcal{R}_{k-1,m}(x) - \Sigma_7) + \frac{\varphi_3(\varrho)}{14 + 2k}(\Sigma_8 + \Sigma_9) \\ &- \frac{\varrho^2 \psi(\varrho)}{14 + 2k}(\Sigma_{10} + \Sigma_{11}) + \varphi_1(\varrho)H_{10}(x) + \psi(\varrho)H_{11}(x), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_3(\varrho) &= \varrho^{1-k} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(k + 14 + (k - 2m)\varrho^2) \right), \\ \varphi_4(\varrho) &= \varrho^{1-k} \left((1 + \varrho^2)\varphi'(\varrho) + \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(k + 14 + (2m - k - 6)\varrho^2) \right), \\ \Sigma_6 &= \sum_{2 \leq l \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor - m} a_{k-1,m-1,l} \mathcal{S}_{k-1,m-1,l}(x), \\ \Sigma_7 &= \sum_{1 \leq l \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor - m} a_{k+1,m+1,l} \mathcal{S}_{k-1,m,l}(x), \end{aligned}$$

$$\Sigma_8 = \sum_{1 \leq l \leq [k/2] - m} 2(k - 2m - 2l)a_{k,m,l}\mathcal{S}_{k-1,m,l}(x),$$

$$\Sigma_9 = \sum_{2 \leq l \leq [k/2] - m} 4(m + l)a_{k,m,l}\mathcal{S}_{k-1,m-1,l}(x),$$

$$\Sigma_{10} = \sum_{1 \leq l \leq [k/2] - m} (k - 2m - 2l)(14 + 2k + 4l)a_{k,m,l}\mathcal{S}_{k-1,m,l}(x),$$

$$\Sigma_{11} = \sum_{2 \leq l \leq [k/2] - m} 8l(m + l)a_{k,m,l}\mathcal{S}_{k-1,m-1,l}(x),$$

$$H_{10}(x) = (x_1 - ix_2)\mathcal{R}_{k,m}(x) - \frac{\varrho^2}{14 + 2k} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_{k,m}}{\partial x_1} - i \frac{\partial \mathcal{R}_{k,m}}{\partial x_2} \right),$$

$$H_{11}(x) = \sum_{l=0}^{[k/2]-m} 2la_{k,m,l} \left(\frac{\varrho^2}{14 + 2k} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{k,m,l}}{\partial x_1} - i \frac{\partial \mathcal{S}_{k,m,l}}{\partial x_2} \right) - (x_1 - ix_2)\mathcal{S}_{k,m,l}(x) \right).$$

При этом H_{10} и H_{11} являются однородными гармоническими многочленами степени $k + 1$ в $\mathbb{R}^{16}$ (см. (53)).

Теперь мы в состоянии завершить доказательство леммы 8. Из (51) и леммы 6 вытекает, что все члены ряда (6) для функции $A_l(\psi(\varrho)H(\varrho\sigma))$ принадлежат $V_r^{s-1}(B_R)$. Учитывая этот факт и используя (52)–(62), получаем утверждение леммы 8.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $Y \in \mathcal{H}_X^{k,m}$ и функция $\varphi(\varrho)Y(\sigma)$ принадлежит $V_r^s(B_R)$, где $s \geq 2$. Тогда $L_X(\varphi(\varrho)Y(\sigma)) \in V_r^{s-2}(B_R)$.

Для доказательства достаточно применить утверждения (i), (iii) леммы 8 и воспользоваться соотношением (40).

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\varphi(\varrho)Y(\sigma) \in V_r^1(B_R)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_X^{1,0} \setminus \{0\}$. Тогда $\varphi(\operatorname{tg} r) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения (iii) леммы 8 имеем

$$\varrho^{-1-2\alpha_X}(1 + \varrho^2)^{\alpha_X + \beta_X + 2} \frac{d}{d\varrho} (\varrho^{1+2\alpha_X}(1 + \varrho^2)^{-\beta_X} \varphi(\varrho)) \in V_r(B_R).$$

Интегрируя эту функцию на шаре B_r (см. (3)), получим $\varphi(\operatorname{tg} r) = 0$.

§ 6. Теорема единственности

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f^{k,m,j} = 0$ в B_R при всех $0 \leq k \leq s$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$ и $j \in \{1, \dots, h_X^{k,m}\}$. В частности, если $f \in V_r^\infty(B_R)$ и $f = 0$ в B_r , то $f = 0$ в B_R .

Утверждения такого типа восходят к Ф. Джону [32]. Аналоги теоремы 2 для некомпактных двухточечно-однородных пространств получены ранее в [6; часть 2, 3], [8], [9], [11], [12]. Однако, как уже отмечалось, метод, используемый в этих работах, неприменим для компактных двухточечно-однородных пространств. Здесь мы предлагаем универсальный подход, который работает для всех двухточечно-однородных пространств и может быть распространен для уравнений свертки на других многообразиях (см. [13], [33]).

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются два вспомогательных утверждения. Обозначим через $R_j^{(\alpha, \beta)}$ нормированный многочлен Якоби, т.е.

$$R_j^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(-j, j + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-t}{2}\right), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (63)$$

Отметим, что сферические функции на X имеют вид $R_j^{(\alpha_X, \beta_X)}(\cos(2d_X(o, p)))$, $j \in \mathbb{Z}_+$ (см. [14; гл. 5, теорема 4.5], [34]).

ЛЕММА 9. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in (0, \pi)$, и пусть $\{c_j\}_{j=0}^\infty$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=0}^\infty |c_j| < \infty.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) функция $\psi_1(\theta) = \sum_{j=0}^\infty c_j \cos((j + (\alpha + \beta + 1)/2)\theta)$ является тождественным нулем на $(0, \gamma)$.
- (ii) функция $\psi_2(\theta) = \sum_{j=0}^\infty c_j R_j^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ является тождественным нулем на $(0, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (63) и (7)

$$R_j^{(\alpha, \beta)}(\cos 2t) = \varphi_{2j+\alpha+\beta+1, \alpha, \beta}(t), \quad t \in (0, \pi/2). \quad (64)$$

Из (64) и (17) получаем

$$\begin{aligned} \psi_2(\theta) &= \frac{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-\beta-1} \\ &\quad \times \int_0^\theta \psi_1(\vartheta) \mathcal{F}_2\left(\frac{\cos(\vartheta/2) - \cos(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)}\right) d\vartheta, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_2(x) = x^{\alpha-1/2} F(1/2 + \beta, 1/2 - \beta; \alpha + 1/2; -x)$. Отсюда следует утверждение леммы 9 (см., например, [6; часть 1, следствие 3.1]).

ЛЕММА 10. Пусть f – радиальная функция класса $V_r(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что функция $f \in V_r^q(B_R)$, где $q = 2\alpha_X + 4$ (см. [6; часть 2, доказательство леммы 1.9]). Зафиксируем $\varepsilon \in (0, R - r)$. Рассмотрим радиальную функцию $w_\varepsilon \in C^\infty(X)$ со следующими свойствами:

- 1) $w_\varepsilon(p) = 1$, если $d_X(o, p) < R - \varepsilon$;
- 2) $w_\varepsilon(p) = 0$, если $d_X(o, p) > (2R - \varepsilon)/2$.

Тогда $w_\varepsilon f$ радиальна,

$$w_\varepsilon f \in V_r^q(B_{R-\varepsilon}) \quad (65)$$

и $(w_\varepsilon f)(p) = 0$ при $d_X(o, p) < r$ и $(2R - \varepsilon)/2 < d_X(o, p) < R$. Запишем $w_\varepsilon f$ в виде $(w_\varepsilon f)(p) = f_0(d_X(o, p))$. Имеем

$$f_0(\theta) = \sum_{j=0}^\infty c_j R_j^{(\alpha_X, \beta_X)}(\cos 2\theta), \quad 0 \leq \theta < R, \quad (66)$$

где последовательность $\{c_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$ удовлетворяет оценке $c_j = O(j^{-3})$, $j \rightarrow +\infty$ (см. [35; гл. 7, теорема 7.6]). Положим

$$u(\vartheta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos((2j + \alpha_X + \beta_X + 1)\vartheta). \quad (67)$$

Поскольку $f_0 = 0$ на $[0, r)$, из леммы 9 вытекает, что

$$u(\vartheta) = 0 \quad \text{при} \quad \vartheta \in [-r, r]. \quad (68)$$

Далее, из (65), (66) и теоремы о среднем для собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами [14; гл. 4, предложение 2.4] получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \int_0^r R_j^{(\alpha_X, \beta_X)}(\cos 2\theta) A_X(\theta) d\theta R_j^{(\alpha_X, \beta_X)}(\cos 2t) = 0, \quad 0 \leq t < R - r - \varepsilon,$$

где $A_X(\theta) = 2\pi^{\alpha_X+1}(\Gamma(\alpha_X+1))^{-1}(\sin \theta)^{2\alpha_X+1}(\cos \theta)^{2\beta_X+1}$ – площадь сферы радиуса θ в X . Снова по лемме 9

$$\int_0^r A_X(\theta) \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos((2j + \alpha_X + \beta_X + 1)t) R_j^{(\alpha_X, \beta_X)}(\cos 2\theta) d\theta = 0, \quad 0 \leq t < R - r - \varepsilon. \quad (69)$$

Из (69) и (17) находим

$$\int_0^r A_X(\theta) B_X(\theta) \int_0^\theta (u(t+x) + u(t-x)) \mathcal{F}_2\left(\frac{\cos x - \cos \theta}{2 \cos \theta}\right) dx d\theta = 0, \quad (70)$$

$$0 \leq t < R - r - \varepsilon,$$

где $B_X(\theta) = (\sin \theta)^{-2\alpha_X}(\cos \theta)^{\alpha_X - \beta_X - 1}$. В силу (70) и (68)

$$\int_0^r A_X(\theta) B_X(\theta) \int_0^\theta u(t+x) \mathcal{F}_2\left(\frac{\cos x - \cos \theta}{2 \cos \theta}\right) dx d\theta = 0,$$

$$0 \leq t < \min\{r, R - r - \varepsilon\}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\int_r^{t+r} u(y)v(y-t)dy = 0, \quad 0 \leq t < \min\{r, R - r - \varepsilon\},$$

где

$$v(x) = \int_x^r A_X(\theta) B_X(\theta) \mathcal{F}_2\left(\frac{\cos x - \cos \theta}{2 \cos \theta}\right) d\theta$$

(см. (68)). По теореме Титчмарша о свертке [6; часть 1, следствие 3.1]

$$u(\vartheta) = 0, \quad |\vartheta| \leq \min\{2r, R - \varepsilon\}. \quad (71)$$

Если $R > 2r + \varepsilon$, то заключаем подобным же образом из (70) и (71), что $u(\vartheta) = 0$ для $|\vartheta| \leq \min\{3r, R - \varepsilon\}$ и т.д. Таким образом, $u = 0$ на $[\varepsilon - R, R - \varepsilon]$. Теперь, используя (66), (67) и (17), получаем

$$f_0(\theta) = \frac{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)} B_X(\theta) \int_0^\theta u(x) \mathcal{F}_2\left(\frac{\cos x - \cos \theta}{2 \cos \theta}\right) dx = 0, \quad 0 \leq \theta < R - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \in (0, R - r)$ было выбрано произвольным, приходим к требуемому утверждению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $s = 0$ достаточно применить леммы 6, 10 (см. (49)). В общем случае утверждение теоремы получается индукцией по s с помощью леммы 8.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для доказательства этим методом теоремы единственности в случае некомпактного двухточечно-однородного пространства $\mathfrak{X}$ нужно сделать в приведенных выше рассуждениях следующие изменения:

- 1) вместо разложения (66) по многочленам Якоби использовать аналог предложения 3 о разложении по сферическим функциям на $\mathfrak{X}$ или формулу обращения для сферического преобразования на $\mathfrak{X}$ (см. [14; гл. 4, теорема 7.5]);
- 2) вместо (17) применить подобное соотношение для сферических функций на $\mathfrak{X}$ (см. [15; (2.21)]).

§ 7. Доказательство основного результата

Предположим, что выполнено разложение (9). Пусть $\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha_X+1, \beta_X+1}(r)$. Тогда из (41) и теоремы о среднем для собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами [14; гл. 4, предложение 2.4] получаем $\Phi_{\lambda, k, m, j} \in V_r(B_R)$. Поэтому $f^{k, m, j} \in V_r(B_R)$ для всех k, m, j . Отсюда $f \in V_r(B_R)$.

Далее, в силу лемм 6, 8 и равенств (36)–(39) необходимость в теореме 1 достаточно установить при $k = 1, m = 0, j \in \{1, \dots, h_X^{1,0}\}$. Пусть $\varphi(\varrho)Y(\sigma) \in V_r^\infty(B_R)$, где $Y \in \mathcal{H}_X^{1,0} \setminus \{0\}$. Доказательство предложения 3 показывает (см. следствия 4, 5 и (40)), что

$$\varphi(\varrho) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{\alpha_X+1, \beta_X+1}(r)} \gamma_\lambda \Phi_{\lambda, 1, 0}(\varrho), \quad (72)$$

где $\varrho \in [0, \operatorname{tg} r]$, $\gamma_\lambda \in \mathbb{C}$ и $\gamma_\lambda = O(\lambda^{-c})$, $\lambda \rightarrow +\infty$, для любого $c > 0$. Обозначим через $\phi(\varrho)$ функцию в правой части (72) при $\varrho \in [0, \operatorname{tg} R]$. Тогда функция $(\varphi(\varrho) - \phi(\varrho))Y(\sigma)$ принадлежит $V_r^\infty(B_R)$ и равна нулю в B_r . По теореме 2 $\varphi = \phi$ на $[0, \operatorname{tg} R]$. Таким образом, (72) имеет место для $\varrho \in [0, \operatorname{tg} R]$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы

- [1] К. А. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления*, **54**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–111; англ. пер.: C. A. Berenstein, D. C. Struppa, “Complex analysis and convolution equations”, *Several complex variables. V: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopedia Math. Sci., **54**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–108.
- [2] L. Zalcman, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Approximation by solutions of partial differential equations*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Hanstholm, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **365**, Kluwer, Dordrecht, 1992, 185–194.
- [3] L. Zalcman, Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Radon transform and tomography* (South Hadley, MA, USA, 2000), Contemp. Math., **278**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 69–74.
- [4] I. Netuka, J. Veselý, “Mean value property and harmonic functions”, *Classical and modern potential theory and applications* (Chateau de Bonas, France, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **430**, Kluwer, Dordrecht, 1994, 359–398.

- [5] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Экстремальные задачи интегральной геометрии”, Математика сегодня, **1**, № 12, Научно-методический центр высшего образования, Киев, 2001, 51–79.
- [6] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [7] Вит. В. Волчков, “О функциях с нулевыми шаровыми средними на комплексных гиперболических пространствах”, *Матем. заметки*, **68**:4 (2000), 504–512; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, “On functions with zero spherical means on complex hyperbolic spaces”, *Math. Notes*, **68**:3–4 (2000), 436–443.
- [8] Vit. V. Volchkov, “Uniqueness theorems for mean periodic functions on complex hyperbolic spaces”, *Anal. Math.*, **28**:1 (2002), 61–76.
- [9] Вит. В. Волчков, “О функциях с нулевыми шаровыми средними на кватернионном гиперболическом пространстве”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:5 (2002), 3–32; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, “Functions with zero ball means on the quaternionic hyperbolic space”, *Izv. Math.*, **66**:5 (2002), 875–903.
- [10] Вит. В. Волчков, “Теоремы единственности для периодических в среднем функций на кватернионном гиперболическом пространстве”, *Матем. заметки*, **74**:1 (2003), 32–40; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, “Uniqueness theorems for periodic (in mean) functions on quaternion hyperbolic space”, *Math. Notes*, **74**:1–2 (2003), 30–37.
- [11] В. В. Волчков, “Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах”, *Матем. сб.*, **192**:9 (2001), 17–38; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Theorems on ball mean values in symmetric spaces”, *Sb. Math.*, **192**:9 (2001), 1275–1296.
- [12] В. В. Волчков, “Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах”, *Докл. РАН*, **381**:6 (2001), 727–731; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A local two-radius theorem on symmetric spaces”, *Dokl. Math.*, **64**:3 (2001), 398–401.
- [13] Вит. В. Волчков, “Сферические средние на группе Гейзенберга и симметрических пространствах”, *Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Техн. Науки*, **3** (2005), 7–11.
- [14] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [15] T. Koornwinder, “A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform”, *Ark. Mat.*, **13**:1 (1975), 145–159.
- [16] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
- [17] А. Л. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **93**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
- [18] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. II, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Wiley-Intersci., New York–London–Sydney, 1969.
- [19] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, *Ann. of Math. Stud.*, **78**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1973.
- [20] Вит. В. Волчков, *Новые результаты в геометрическом анализе*, Изд-во Донецкого нац. ун-та, Донецк, 2004.
- [21] R. T. Smith, “The spherical representations of groups transitive on S^n ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **24**:4 (1974), 307–325.
- [22] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, *Transl. Math. Monogr.*, **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

- [23] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. I: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. I, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1953.
- [24] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982; англ. пер.: M. M. Postnikov, *Lectures in geometry. Semester V. Lie groups and Lie algebras*, Мир, М., 1986.
- [25] Л. В. Альфорс, *Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве*, Современная математика: вводные курсы, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. V. Ahlfors, *Möbius transformations in several dimensions*, Ordway Professorship Lectures Math., Minneapolis, MN, Univ. of Minnesota, School of Math., 1981.
- [26] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* , Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Grundlehren Math. Wiss., **241**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980.
- [27] R. Askey, J. Fitch, “Integral representations for Jacobi polynomials and some applications”, *J. Math. Anal. Appl.*, **26**:2 (1969), 411–437.
- [28] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967; англ. пер.: A. O. Gel'fond, *Calculus of finite differences*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1971.
- [29] Э. Я. Риекстыньш, *Асимптотические разложения интегралов*, т. 1, Зинатне, Рига, 1974.
- [30] M. El Harchaoui, “Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe: Cas des deux boules”, *J. Anal. Math.*, **67** (1995), 1–37.
- [31] M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay, “Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternionique – cas des deux boules”, *Complex Variables Theory Appl.*, **43**:1 (2000), 29–57.
- [32] Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958; англ. пер.: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Dover, Mineola, NY, 2004.
- [33] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Analogues of the local two-radii theorem on non-compact Riemannian symmetric spaces of arbitrary rank*, Изд-во Донецкого нац. ун-та, Донецк, 2004.
- [34] C. A. Berenstein, L. Zalcman, “Pompeiu's problem on symmetric spaces”, *Comment. Math. Helv.*, **55**:1 (1980), 593–621.
- [35] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.

Вит. В. Волчков (Vit. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет,
Украина
E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступила в редакцию
24.11.2005 и 09.10.2006