Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Артамкин, Производящие функции модулярных графов и уравнение Бюргера, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 12, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:14:59

УДК 512.772

И. В. Артамкин

Производящие функции модулярных графов и уравнение Бюргерса

Доказывается, что производящие функции модулярных графов удовлетворяют уравнению Бюргерса, что позволяет единообразно получать производящие функции для виртуальной эйлеровой характеристики и многочлена Пуанкаре многообразия модулей пунктированных кривых $\overline{M}_{g,n}$, а также для количества (с весами $1/|\text{Aut } G|$) модулярных графов G определенного вида.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Алгебраическая кривая, имеющая не более чем простейшие двойные особые точки, на которой отмечено $n \geq 0$ упорядоченных неособых точек, называется *стабильной по Делиню–Мамфорду пунктированной кривой*. При этом стабильность означает, что каждая неприводимая рациональная компонента такой кривой имеет по крайней мере три особые и/или отмеченные точки, а эллиптическая компонента содержит по крайней мере одну такую точку. Двойственный модулярный граф пунктированной кривой X — это граф Γ , вершинами которого является множество неприводимых компонент кривой X , ребрами — множество двойных особых точек, а полуребрами — множество отмеченных точек. Для каждого модулярного графа Γ рассмотрим пространство модулей M_Γ кривых, для которых Γ является двойственным модулярным графом. Тогда компактификация Делиня–Мамфорда пространства модулей $M_{g,n}$ алгебраических кривых рода g с отмеченными n упорядоченными точками имеет стратификацию

$$\overline{M}_{g,n} = \bigcup_{\substack{\text{по всем модулярным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } n \text{ полуребрами}}} M_\Gamma. \quad (1.1)$$

Формально модулярный граф Γ можно определить следующим набором данных: $(V, \overrightarrow{E}, i, \overrightarrow{E}_-, s, g, l)$, где

- 1) V — конечное множество *вершин* Γ ;
- 2) $\overrightarrow{E}$ — конечное множество *ориентированных ребер* модулярного графа Γ ;
- 3) $i: \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{E}$ — *инволюция, меняющая ориентацию* (без неподвижных точек);
- 4) $\overrightarrow{E}_-$ — множество *исходящих ориентированных ребер* модулярного графа Γ ; требуется, чтобы $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_- \cup i(\overrightarrow{E}_-)$, так что каждое ребро является либо входящим, либо исходящим;

- 5) $s: \vec{E}_- \rightarrow V$ – сюръективное отображение, ставящее в соответствие каждому исходящему ребру из $\vec{E}_-$ вершину, из которой оно выходит;
- 6) $g: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – функция, задающая род вершины;
- 7) множество $\vec{H}_- = \vec{E}_- \setminus i(\vec{E}_-)$ называется множеством *исходящих полуребер* (т.е. ребер, инцидентных только одной вершине), для непустого $\vec{H}_-$ биекция $l: \vec{H}_- \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 3, \dots, n\}$ определяет *упорядочение множества полуребер* модулярного графа Γ .

Множество неориентированных *ребер* модулярного графа Γ – это фактормножество $E = (\vec{E} \cap i(\vec{E})) / i$. Изоморфизм двух модулярных графов задается парой биекций между множествами вершин и множествами ориентированных ребер, сохраняющих все описанные выше данные; заметим, что нетривиальный автоморфизм модулярного графа может быть тождественным как на множестве вершин, так и на множестве неориентированных ребер. Количество исходящих из вершины v ориентированных ребер $\nu(v) = |s^{-1}(v)|$ называется *валентностью вершины* $v \in V(\Gamma)$. Модулярный граф называется *стабильным*, если $2(g(v) - 1) + \nu(v) > 0$ для любой вершины $v \in V(\Gamma)$. Число $g(\Gamma) = \sum_{v \in V(\Gamma)} g(v) + \dim H_1(\Gamma) - \text{род}$ связного модулярного графа Γ ; $n(\Gamma)$ – число полуребер модулярного графа Γ . Предположим, что $g(v) = 0$ для всех вершин модулярного графа Γ , такие модулярные графы в дальнейшем будем называть *комбинаторными графами* или просто *графами*. В этом случае стабильность означает, что валентность каждой вершины не меньше трех. В этой работе мы будем рассматривать только связные стабильные модулярные графы.

Пусть $\{\mu_{g,n}, 2(g-1) + n > 0\}$ – множество (коммутативных) переменных, Γ – модулярный граф. Определим моном

$$\mu(\Gamma) = \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \prod_{v \in V(\Gamma)} \mu_{g(v), \nu(v)}, \quad (1.2)$$

где $\text{Aut } \Gamma$ – группа автоморфизмов модулярного графа Γ . Пусть $\mathcal{G}_{g,n}^k$ – множество всех модулярных графов рода g с k ребрами и n полуребрами, рассмотрим многочлены

$$\mu_{g,n}^k = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{g,n}^k} \mu(\Gamma) \quad (1.3)$$

и производящие функции

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \mu_{g,n}^k \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1} \quad (1.4)$$

и

$$\Phi(s, t, \hbar) = \frac{\partial \Psi(s, t, \hbar)}{\partial t} = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \mu_{g,n}^k \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} s^k \hbar^{g-1}. \quad (1.5)$$

Заметим, что

$$\Psi(1, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{g,n}} \mu(\Gamma) \frac{t^n}{n!} \hbar^{g-1} \quad (1.6)$$

— статистическая сумма, обычно рассматриваемая в квантовой теории поля (здесь $\mathcal{G}_{g,n} = \bigcup_k \mathcal{G}_{g,n}^k$ — множество всех модулярных графов рода g с n полуребрами).

Доказывается, что функции Φ и Ψ удовлетворяют уравнению Бюргерса.

ТЕОРЕМА 1.1. *Функция $\Psi(s, t, \hbar)$ удовлетворяет потенциальной форме уравнения Бюргерса*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right]; \quad (1.7)$$

а функция $\Phi(s, t, \hbar)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]. \quad (1.8)$$

Заметим, что начальное условие $\Psi(0, t, \hbar)$ для уравнения Бюргерса — это сумма по множеству $\mathcal{G}_{g,n}^0$ модулярных графов, не имеющих ребер. Для каждой пары (g, n) такой, что $2(g-1)+n > 0$, множество $\mathcal{G}_{g,n}^0$ состоит только из одного модулярного дерева $S_{g,n}$, имеющего одну вершину рода g и n полуребер, которое соответствует пространству модулей неособых пунктированных кривых: $M_{S_{g,n}} = M_{g,n}$. Поэтому

$$\Psi(0, t, \hbar) = \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 0 \\ 2(g-1)+n > 0}} \mu_{g,n} \frac{t^n}{n!} \hbar^{g-1}. \quad (1.9)$$

Можно несколькими способами придавать значения переменным $\{\mu_{g,n}\}$ так, чтобы получались интересные производящие функции Ψ (или Φ).

1.1. Считаящие функции для комбинаторных графов определенного типа.

а) Возьмем целое $d \geq 3$ и положим

$$\mu_{g,n} = \begin{cases} 1, & \text{если } g = 0 \text{ и } n = d; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.10)$$

Тогда Ψ является считающей функцией для d -валентных (комбинаторных) графов:

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g,n,k} \left[\sum_{\substack{\text{по } d\text{-валентным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуребрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1}. \quad (1.11)$$

(Заметим, что сумма в скобках ненулевая только при $(d-2)k = n + d(g-1)$.)

В этом случае начальные условия выглядят так:

$$\Psi(0, t, \hbar) = \frac{t^d}{d! \hbar} \quad \text{или} \quad \Phi(0, t, \hbar) = \frac{t^{d-1}}{(d-1)! \hbar}. \quad (1.12)$$

Ниже мы приводим явные формулы решения для наиболее интересного случая трехвалентных графов ($d = 3$).

б) Положим

$$\mu_{g,n} = \begin{cases} 1, & \text{если } g = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Получим считающую функцию для всех стабильных (комбинаторных) графов:

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g,n,k} \left[\sum_{\substack{\text{по всем графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуребрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1}. \quad (1.14)$$

Начальным условием в этом случае будет

$$\Psi(0, t, \hbar) = \left(e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 \right) \frac{1}{\hbar}. \quad (1.15)$$

в) Замена $\mu_{g,n} = 1$ для всех g, n дает считающую функцию для всех модулярных графов:

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g,n,k} \left[\sum_{\substack{\text{по всем модулярным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуребрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1}. \quad (1.16)$$

Начальное условие в этом случае:

$$\Psi(0, t, \hbar) = \left(e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1 \right) \frac{1}{\hbar} - 1 + \frac{e^t}{1 - \hbar}. \quad (1.17)$$

1.2. Виртуальная мотивная мера $M_{g,n}$. Выберем некоторую “мотивную меру” v , сопоставляющую каждому неособому алгебраическому многообразию X элемент $v(X)$ некоторой коммутативной $\mathbb{Q}$ -алгебры, удовлетворяющий следующим условиям:

- а) $v(X \setminus Y) + v(Y) = v(X)$ для любого замкнутого неособого подмногообразия $Y \subset X$;
- б) $v(X \times Z) = v(X)v(Z)$.

Соответствующая “виртуальная мотивная мера” $\tilde{v}$ орбиобразия X может быть задана как $\tilde{v}(X) = v(\tilde{X})/N$, где $\tilde{X} \rightarrow X$ – неразветвленное накрытие орбиобразий степени N , а X неособо. (Достаточно иметь такое накрытие для каждого страта некоторой стратификации X .) Положим $\mu_{g,n} = \tilde{v}(M_{g,n})$. Тогда нетрудно вывести, что

$$\mu(\Gamma) = \tilde{v}(M_\Gamma) \quad (1.18)$$

и

$$\mu_{g,n}^k = \tilde{v}(M_{g,n}^k), \quad (1.19)$$

где $M_{g,n}^k$ – пространство модулей стабильных по Делиню–Мамфорду n -пунктированных кривых рода g , имеющих ровно k особых точек. Заметим, что при заданных g и n пространства $M_{g,n}^k$ образуют стратификацию $\overline{M}_{g,n}$ и $\text{codim}_{\overline{M}_{g,n}} M_{g,n}^k = k$. Таким образом, производящие функции (1.4) имеют вид

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \tilde{v}(M_{g,n}^k) \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1}; \quad (1.20)$$

а статистическая сумма (1.6) становится производящей функцией для величин $\tilde{v}(\overline{M}_{g,n})$ для компактифицированного пространства модулей $\overline{M}_{g,n}$:

$$\Psi(1, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}(\overline{M}_{g,n}) \frac{t^n}{n!} \hbar^{g-1}. \quad (1.21)$$

Начальное условие (1.9) становится производящей функцией для величин $\tilde{v}(M_{g,n})$ для пространства модулей $M_{g,n}$ неособых кривых:

$$\Psi(0, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{v}(M_{g,n}) \frac{t^n}{n!} \hbar^{g-1}. \quad (1.22)$$

В качестве такой “виртуальной мотивной меры” $\tilde{v}$ можно взять виртуальный многочлен Пуанкаре от X (см. [1] или [2]), или виртуальную эйлерову характеристику X , или число точек $X(\mathbb{F}_q)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Но явная формула для начального условия известна только для виртуальной эйлеровой характеристики. Она дается известным результатом Харера–Загира [3]: для $g > 0$

$$\tilde{\chi}(M_{g,n}) = (-1)^n \frac{(2g-3+n)!(2g-1)}{(2g)!} B_{2g} \quad (1.23)$$

для $g \geq 2, n \geq 0$ или $g = 1, n \geq 1$. Объединив это со случаем $g = 0$ (см. [2] или § 6), получаем производящие функции

$$\begin{aligned} \Psi(0, t, \hbar) &= \frac{2(1+t)^2 \ln(1+t) - 2t - 3t^2}{4\hbar} - \frac{B_2}{2} \ln(1+t) \\ &+ \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \frac{\hbar^{g-1}}{(1+t)^{2g-2}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

и

$$\Phi(0, t, \hbar) = \frac{(1+t) \ln(1+t) - t}{\hbar} - \sum_{g=1}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g} \frac{\hbar^{g-1}}{(1+t)^{2g-1}}. \quad (1.25)$$

Во всех описанных случаях нам нужно решить задачу Коши для уравнения Бюргерса с начальным условием, заданным одной из формул (1.12), (1.15), (1.17) или (1.25). Уравнение (1.7) можно линеаризовать преобразованием Коула–Хопфа (см. [4], [5]):

$$\Psi = \ln F. \quad (1.26)$$

Подставляя в (1.7), получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\hbar}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

с начальным условием

$$F(0, t, \hbar) = e^{\Psi(0, t, \hbar)} = e^{\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{g,n} \frac{t^n}{n!} \hbar^{g-1}}. \quad (1.28)$$

Решение задачи Коши для (1.27) с начальным условием (1.28), формально выраженное через интеграл Пуассона, для $s = 1$ известно как теорема Вика (см. [6]):

$$\Psi(s, t, \hbar) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Psi(0, \xi, \hbar) - \frac{(t-\xi)^2}{2s\hbar}} d\xi \right). \quad (1.29)$$

Конечно, (1.29) должно рассматриваться как равенство формальных рядов Лорана от $\hbar$. К сожалению, во всех описанных случаях применение интеграла Пуассона неправомерно, так как начальные условия (1.12), (1.15), (1.17) и (1.25) не ограничены, так что несобственный интеграл (1.29) расходится. Более того, А. Н. Тихонов в 1935 г. (см. [7]) доказал, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием, растущим быстрее e^{t^2} , уже не единственно. А это как раз имеет место во всех рассматриваемых нами случаях. Например, для считающей функции для трехвалентных графов имеем следующий интеграл:

$$\Psi(s, t, \hbar) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{\hbar} \left[\frac{\xi^3}{6} - \frac{(t-\xi)^2}{2s} \right]} d\xi \right). \quad (1.30)$$

В (1.57) приводится явная формула для однопараметрического семейства решений (1.27) с начальным условием $e^{t^3/(6\hbar)}$.

Конечно, можно рассматривать (1.29) как распределение, но это вряд ли может помочь найти коэффициенты производящей функции. Вместо этого можно разложить решение по степеням $\hbar$:

$$\Phi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Phi_g(s, t) \hbar^{g-1}, \quad (1.31)$$

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(s, t) \hbar^{g-1}, \quad (1.32)$$

где $\Phi_g = \partial \Psi_g / \partial t$, и попытаться найти рекуррентную формулу для функций Φ_g или Ψ_g .

Тогда получаем квазилинейное уравнение для Φ_0

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial s} = \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \quad (1.33)$$

и рекуррентные квазилинейные уравнения для Φ_g и Ψ_g при $g > 0$

$$\frac{\partial \Phi_g}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{g-1}}{\partial t^2} + \Phi_0 \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} + \Phi_g \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{g-1} \Phi_i \frac{\partial \Phi_{g-i}}{\partial t}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \Psi_g}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \Phi_0 \frac{\partial \Psi_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Решая (1.33) с начальным условием $\Phi_0(0, t) = \Phi(0, t, 0)$, получаем описание производящей функции для модулярных деревьев ($g = 0$). Отметим, что пространство модулей $\overline{M}_{0,n}$ гладко и модулярные деревья не имеют автоморфизмов, так что для $g = 0$ получаем настоящие многочлен Пуанкаре, или Эйлерову характеристику, или число деревьев.

ТЕОРЕМА 1.2. *Формальные ряды*

$$\alpha_s(t) = t - s\Phi_0(0, t) = t - s \sum_{n=3}^{\infty} v(M_{0,n}) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.36)$$

и

$$\beta_s(t) = t + s\Phi_0(s, t) = t + s \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-3} v(M_{0,n}^k) s^k \right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.37)$$

взаимобратны относительно операции композиции; функция $\Phi_0(s, t)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\Phi_0(s, t) = \Phi_0(0, t + s\Phi_0(s, t)) \quad (1.38)$$

и

$$\Phi_0(0, t) = \Phi_0(s, t - s\Phi_0(0, t)). \quad (1.39)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. 1) *Считающая функция для числа трехвалентных деревьев*

$$\Phi_0(s, t) = \frac{1 - st - \sqrt{1 - 2st}}{s^2}, \quad \Phi_0(1, t) = 1 - t - \sqrt{1 - 2t}. \quad (1.40)$$

2) *Считающая функция для числа всех стабильных деревьев $\Phi_0(s, t)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$e^{t+s\Phi_0(s, t)} = 1 + t + (1 + s)\Phi_0(s, t) \quad (1.41)$$

и дифференциальному уравнению

$$(\Phi_0(s, t))'_t = \frac{t + (s + 1)\Phi_0(s, t)}{1 - s[t + (s + 1)\Phi_0(s, t)]}. \quad (1.42)$$

3) Производящая функция $\Phi_0(s, t)$ для многочлена Пуанкаре многообразия $\overline{M}_{0,n}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(1 + t + s\Phi_0(s, t))^q = q(q + s - 1)\Phi_0(s, t) + qt + 1 \quad (1.43)$$

и дифференциальному уравнению

$$(\Phi_0(s, t))' = \frac{t + (q + s)\Phi_0(s, t)}{1 + t - st - s(q + s - 1)\Phi_0(1, t)}. \quad (1.44)$$

4) Производящая функция $\Phi_0(s, t)$ для эйлеровой характеристики многообразия $\overline{M}_{0,n}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\ln(1 + t + s\Phi_0(s, t)) = \frac{t + (s + 1)\Phi_0(s, t)}{1 + t + s\Phi_0(s, t)} \quad (1.45)$$

и дифференциальному уравнению

$$(\Phi_0(s, t))'_t = \frac{t + (s + 1)\Phi_0(s, t)}{1 + t - st - s^2\Phi_0(s, t)}. \quad (1.46)$$

Уравнения для многочлена Пуанкаре и эйлеровой характеристики хорошо известны для $s = 1$ (см. [8]).

Функция $\Phi_0(s, t)$ существенно используется в рекуррентных формулах для решения уравнений (1.35) для $g > 0$, основанных на следующем интегральном представлении.

ТЕОРЕМА 1.3. *Решение*

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(s, t) \hbar^{g-1} \quad (1.47)$$

потенциального уравнения Бюргерса (1.7) с начальным условием $\Psi(0, t, \hbar)$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Psi(s, t, \hbar) &= \Psi(0, t + s\Phi_0(s, t), \hbar) \\ &+ \frac{\hbar}{2} \int_0^s \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial(\Psi - \Psi_0)}{\partial t} \right)^2 \right] (\sigma, t + (s - \sigma)\Phi_0(s, t), \hbar) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.48)$$

В результате мы имеем явные рекуррентные формулы.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Для $g > 0$*

$$\begin{aligned} \Psi_g(s, t) &= \Psi_g(0, t + s\Phi_0(s, t)) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^s \left[\frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t} \right] (\sigma, t + (s - \sigma)\Phi_0(s, t)) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Теперь мы готовы применить (1.49) к любому случаю, для которого мы можем найти $\Phi_0(s, t)$ и начальное условие $\Psi(0, t, \hbar)$.

1.3. Трехвалентные графы. Мы видели, что для трехвалентных графов $\Phi_0(s, t) = (1 - st - \sqrt{1 - 2st})/s^2$ и $\Psi(0, t, \hbar) = t^3/(6\hbar)$.

В этом случае можно найти однопараметрическое семейство явных решений уравнения (1.34), выраженных через модифицированные функции Бесселя $I_\nu(z)$ или функции Эйри $\text{Ai}(z)$ и $\text{Bi}(z)$ (определения см. в [9]). Все эти решения аналитичны вне прямой $s = 0$, а на этой прямой они только бесконечно дифференцируемы, причем любое из решений дает одно и то же разложение в ряд по s и t , который, впрочем, расходится.

ТЕОРЕМА 1.4. *Считающая функция Φ для трехвалентных графов*

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t, \hbar) &= \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \left[\sum_{\substack{\text{по трехвалентным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуредрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} s^k \hbar^{g-1} \\
&= \frac{1-st}{s^2 \hbar} - \frac{\sqrt{1-2st}}{s^2 \hbar} \left[\frac{C_1 I_{-2/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right) + C_2 I_{2/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right)}{C_1 I_{1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right)} \right] \\
&= \frac{1-st}{s^2 \hbar} - \frac{2^{1/3}}{s \hbar^{2/3}} \left[\frac{C'_1 \text{Ai}' \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) + C'_2 \text{Bi}' \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right)}{C'_1 \text{Ai} \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) + C'_2 \text{Bi} \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right)} \right] \\
&= \frac{1-st-\sqrt{1-2st}}{s^2 \hbar} + \frac{s}{1-2st} W \left(\frac{s^3 \hbar}{(\sqrt{1-2st})^3} \right), \tag{1.50}
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C'_1, C'_2 – произвольные константы ($C'_1 = \sqrt{3}(C_2 - C_1)$ и $C'_2 = C_2 + C_1$), а $W(u)$ – считающая функция для трехвалентных графов с одним полуредом (см. также таблицу 1):

$$\begin{aligned}
W(u) &= \sum_{g=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\text{по трехвалентным} \\ \text{графам } \Gamma \text{ рода } g \\ \text{с одним полуредом}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] u^{g-1} \\
&= \frac{1}{u} \left[1 - \frac{C_1 I_{-2/3}(1/(3u)) + C_2 I_{2/3}(1/(3u))}{C_1 I_{1/3}(1/(3u)) + C_2 I_{-1/3}(1/(3u))} \right] \\
&= \frac{1}{u} \left[1 - \left(1 - \frac{(16/9-1)}{1!} \frac{3}{8} u + \frac{(16/9-1)(16/9-9)}{2!} \left(\frac{3}{8} u \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(16/9-1)(16/9-9)(16/9-25)}{3!} \left(\frac{3}{8} u \right)^3 + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 - \frac{(4/9-1)}{1!} \frac{3}{8} u + \frac{(4/9-1)(4/9-9)}{2!} \left(\frac{3}{8} u \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(4/9-1)(4/9-9)(4/9-25)}{3!} \left(\frac{3}{8} u \right)^3 + \dots \Big)^{-1} \Big] \\
& = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)!}{2(2n)!(3n)!} \frac{u^n}{288^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!} \frac{u^n}{288^n} \right)^{-1} \\
& = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}u + \frac{15}{8}u^2 + \frac{1105}{128}u^3 + \frac{1695}{32}u^4 + \frac{414125}{1024}u^5 + \dots. \quad (1.51)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$W(u) = \sum_{g=1}^{\infty} \tau_g u^{g-1}. \quad (1.52)$$

Тогда¹

$$\sum_{\substack{\text{по трехвалентным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуребрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} = \begin{cases} (2n-5)!! , & g=0, \ n \geq 3; \\ \frac{1}{2}(2n-2)!! , & g=1, \ n \geq 1; \\ \tau_g \frac{(3g+2n-5)!!}{(3g-3)!!} , & g \geq 2, \end{cases} \quad (1.53)$$

причем числа τ_g при $g > 1$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\tau_g = \frac{1}{2} \left((3g-4)\tau_{g-1} + \sum_{i=1}^{g-1} \tau_i \tau_{g-i} \right). \quad (1.54)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Считаящая функция Ψ для трехвалентных графов имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Psi(s, t, \hbar) &= \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \left[\sum_{\substack{\text{по трехвалентным графам } \Gamma \\ \text{рода } g \text{ с } k \text{ ребрами} \\ \text{и } n \text{ полуребрами}}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1} \\
&= \frac{1}{6s^3 \hbar} [-2 + 6st - 3s^2 t^2] - \frac{1}{6} \ln(s^3 \hbar) \\
&\quad + \ln \left[C'_1 \text{Ai} \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) + C'_2 \text{Bi} \left(\frac{1-2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6s^3 \hbar} [-2 + 6st - 3s^2 t^2] - \frac{1}{2} \ln(s^3 \hbar) + \frac{1}{2} \ln(1-2st) - \ln 3 - \frac{1}{3} \ln 2 \\
&\quad + \ln \left[C_1 I_{1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 \hbar} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6s^3 \hbar} [2(\sqrt{1-2st})^3 - 2 + 6st - 3s^2 t^2] \\
&\quad - \frac{1}{4} \ln(1-2st) + V \left(\frac{s^3 \hbar}{(\sqrt{1-2st})^3} \right), \quad (1.55)
\end{aligned}$$

¹Как заметил Дон Загир, правую часть формулы (1.53) можно единообразно записать в виде $\tau_g (3g+2n-5)!!/(3g-3)!!$ для всех значений g и n таких, что $n+2g > 2$, полагая $\tau_1 = 1/2$ и $\tau_0 = -1$, поскольку естественно считать, что $0!! = 1$ и $(-3)!! = -1$.

где $V(u)$ – считающая функция для трехвалентных графов без полуребер (см. также таблицу 2):²

$$\begin{aligned}
 V(u) &= \sum_{g=2}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\text{по трехвалентным} \\ \text{графам } \Gamma \text{ рода } g}} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \right] u^{g-1} \\
 &= \ln \left[\frac{C_1 I_{1/3}(1/(3u)) + C_2 I_{-1/3}(1/(3u))}{3\sqrt[3]{2}\sqrt{u}} e^{-1/(3u)} \right] \\
 &= \ln \left[1 - \frac{(4/9-1)}{1!} \frac{3}{8} u + \frac{(4/9-1)(4/9-9)}{2!} \left(\frac{3}{8} u\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(4/9-1)(4/9-9)(4/9-25)}{3!} \left(\frac{3}{8} u\right)^3 + \dots \right] \\
 &= \sum_{g=2}^{\infty} \frac{\tau_g}{3g-3} u^{g-1} = \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!} \frac{u^n}{288^n} \right] \\
 &= \frac{5}{24} u + \frac{5}{16} u^2 + \frac{1105}{1152} u^3 + \frac{565}{128} u^4 + \frac{82825}{3072} u^5 + \dots, \quad (1.56)
 \end{aligned}$$

где τ_g , C_i и C'_i те же самые, что и в теореме 1.4.

Одновременно мы построили однопараметрическое семейство решений задачи Коши для уравнения теплопроводности (1.27) с начальным условием $F(0, t) = e^{t^3/(6h)}$ (неединственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с быстро растущими начальными условиями (быстрее, чем e^{t^2}) была замечена А. Н. Тихоновым в 1935 г. [7]):

$$\begin{aligned}
 F(s, t) &= \sqrt{\frac{1-2st}{s^3 h}} e^{\frac{-2+6st-3s^2 t^2}{6s^3 h}} \\
 &\quad \times \left[C_1 I_{1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 h} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 h} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt[4]{1-2st}} e^{\frac{1}{6s^3 h} [2(\sqrt{1-2st})^3 - 2 + 6st - 3s^2 t^2]} \\
 &\quad \times \frac{C_1 I_{1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 h} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 h} \right)}{\sqrt{\frac{s^3 h}{(\sqrt{1-2st})^3}}} e^{-\frac{(\sqrt{1-2st})^3}{3s^3 h}}. \quad (1.57)
 \end{aligned}$$

Второе представление в (1.57) дается, чтобы показать, что F определена и бесконечно дифференцируема на действительной оси $s = 0$: это очевидно для первого сомножителя, а второй представляет собой $V(s^3 h / (\sqrt{1-2st})^3)$ (см. (1.56)).

² Доян Загир сообщил автору красивое комбинаторное рассуждение, сразу приводящее к формуле $V(u) = \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!} \frac{u^n}{288^n} \right]$.

ТАБЛИЦА 1. Первые два члена разложения $W(u) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}u + \dots$

	$g = 1$	$g = 2$						
Граф Γ
$ \text{Aut } \Gamma $	2	4	8	4				
τ_g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	+	$\frac{1}{8}$	+	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{5}{8}$

ТАБЛИЦА 2. Первые два члена разложения $V(u) = \frac{5}{24}u + \frac{5}{16}u^2 + \dots$

	$g = 2$		$g = 3$								
Граф Γ
$ \text{Aut } \Gamma $	12	8	24	16	8	16	48				
$\frac{\tau_g}{3g-3}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$		$\frac{1}{24}$	$+$	$\frac{1}{16}$	$+$	$\frac{1}{8}$	$+$	$\frac{1}{16}$	$+$	$\frac{1}{48} = \frac{5}{16}$

1.4. Считаящая функция для числа всех комбинаторных графов.

В этом случае функция Φ_0 удовлетворяет функциональному уравнению (1.41) и дифференциальному уравнению (1.42). Начальное условие для уравнения Бюргерса (1.7) задается (1.15).

ТЕОРЕМА 1.5. Члены Ψ_g разложения считающей функции

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(s, t) \hbar^{g-1} \quad (1.58)$$

для числа всех (комбинаторных) графов выражаются следующим образом:

– при $g = 1$

$$\Psi_1(s, t) = -\frac{1}{2} \ln(1 - s(t + (s + 1)\Phi_0(s, t))); \quad (1.59)$$

– при $g > 1$

$$\Psi_g(s, t) = \frac{s^g(1 + t + (s + 1)\Phi_0(s, t))}{(1 - s(t + (s + 1)\Phi_0(s, t)))^g} P_g\left(\frac{s(1 + t + (s + 1)\Phi_0(s, t))}{(1 - s(t + (s + 1)\Phi_0(s, t)))}\right), \quad (1.60)$$

где P_g является многочленом степени $2g - 2$, удовлетворяющим следующему рекуррентному линейному дифференциальному уравнению:³

$$\begin{aligned} & gP_g(u) + uP'_g(u) \\ &= \frac{1}{2} \left[u^2(u + 1)^2 P''_{g-1}(u) + u(u + 1)[(2g + 1)u + 3]P'_{g-1}(u) \right. \\ & \quad + [(g^2 - 1)u^2 - (3g - 2)u + 1]P_{g-1}(u) \\ & \quad + u \sum_{i=1}^{g-1} [u(u + 1)P'_i(u) + (iu + 1)P_i(u)] \\ & \quad \left. \times [u(u + 1)P'_{g-i}(u) + ((g - i)u + 1)P_{g-i}(u)] \right]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ниже мы приводим первые три функции Ψ_g , вычисленные с помощью пакета MAPLE:

$$\begin{aligned} \Psi_1(s, t) &= \frac{1}{2} st + \left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^2\right)t^2 \\ &+ \left(\frac{1}{12}s + \frac{7}{12}s^2 + \frac{2}{3}s^3\right)t^3 + \left(\frac{1}{48}s + \frac{3}{8}s^2 + \frac{59}{48}s^3 + s^4\right)t^4 \\ &+ \left(\frac{1}{240}s + \frac{41}{240}s^2 + \frac{19}{16}s^3 + \frac{121}{48}s^4 + \frac{8}{5}s^5\right)t^5 + O(t^6), \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(s, t) &= \left(\frac{1}{8}s^2 + \frac{5}{24}s^3\right) + \left(\frac{1}{8}s^2 + \frac{2}{3}s^3 + \frac{5}{8}s^4\right)t \\ &+ \left(\frac{1}{16}s^2 + \frac{41}{48}s^3 + \frac{109}{48}s^4 + \frac{25}{16}s^5\right)t^2 \\ &+ \left(\frac{1}{48}s^2 + \frac{47}{72}s^3 + \frac{133}{36}s^4 + \frac{53}{8}s^5 + \frac{175}{48}s^6\right)t^3 \\ &+ \left(\frac{1}{192}s^2 + \frac{203}{576}s^3 + \frac{15}{4}s^4 + \frac{1885}{144}s^5 + \frac{3419}{192}s^6 + \frac{525}{64}s^7\right)t^4 \\ &+ \left(\frac{1}{960}s^2 + \frac{53}{360}s^3 + \frac{7901}{2880}s^4 + \frac{593}{36}s^5 + \frac{7943}{192}s^6 \right. \\ & \left. + \frac{1091}{24}s^7 + \frac{1155}{64}s^8\right)t^5 + O(t^6), \end{aligned} \quad (1.63)$$

³ Следует формально положить $P_1(u) = (\ln(u + 1))/(2u)$.

$$\begin{aligned}
\Psi_3(s, t) = & \left(\frac{1}{48} s^3 + \frac{11}{48} s^4 + \frac{25}{48} s^5 + \frac{5}{16} s^6 \right) \\
& + \left(\frac{1}{48} s^3 + \frac{25}{48} s^4 + \frac{119}{48} s^5 + \frac{185}{48} s^6 + \frac{15}{8} s^7 \right) t \\
& + \left(\frac{1}{96} s^3 + \frac{9}{16} s^4 + \frac{241}{48} s^5 + \frac{727}{48} s^6 + \frac{1745}{96} s^7 + \frac{15}{2} s^8 \right) t^2 \\
& + \left(\frac{1}{288} s^3 + \frac{113}{288} s^4 + \frac{295}{48} s^5 + \frac{4595}{144} s^6 + \frac{20357}{288} s^7 + \frac{2225}{32} s^8 + 25 s^9 \right) t^3 \\
& + \left(\frac{1}{1152} s^3 + \frac{29}{144} s^4 + \frac{6101}{1152} s^5 + \frac{6365}{144} s^6 \right. \\
& \left. + \frac{184495}{1152} s^7 + \frac{40465}{144} s^8 + \frac{30075}{128} s^9 + 75 s^{10} \right) t^4 \\
& + \left(\frac{1}{5760} s^3 + \frac{157}{1920} s^4 + \frac{20159}{5760} s^5 + \frac{258589}{5760} s^6 + \frac{31815}{128} s^7 + \frac{794353}{1152} s^8 \right. \\
& \left. + \frac{385291}{384} s^9 + \frac{93555}{128} s^{10} + 210 s^{11} \right) t^5 + O(t^6). \tag{1.64}
\end{aligned}$$

1.5. Виртуальная эйлерова характеристика $\overline{M}_{g,n}$. В этом случае функция Φ_0 удовлетворяет функциональному уравнению (1.45) и дифференциальному уравнению (1.46). Начальные условия для уравнения Бюргерса (1.7) или (1.8) задаются (1.24) или (1.25).

ТЕОРЕМА 1.6. *Члены Ψ_g разложения производящей функции*

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(s, t) \hbar^{g-1} \tag{1.65}$$

для виртуальной эйлеровой характеристики могут быть выражены следующим образом:

– при $g = 1$

$$\Psi_1(s, t) = -\frac{1}{2} \ln(1 + t - s(t + s\Phi_0(s, t))) + \frac{5}{12} \ln(1 + t + s\Phi_0(s, t)); \tag{1.66}$$

– при $g > 1$

$$\Psi_g(s, t) = \frac{1}{(1 + t + s\Phi_0(s, t))^{2g-2}} \Psi_g\left(\frac{s(1 + t + s\Phi_0(s, t))}{1 + t - s(t + s\Phi_0(s, t))}, 0\right), \tag{1.67}$$

и $\Psi_g(s, 0)$ является многочленом от s степени $3g - 3$, удовлетворяющим следующим рекуррентным уравнениям:

$$\begin{aligned}
\Psi_{g+1}(s, 0) = & \frac{B_{2g}}{2g(2g+2)} + \frac{1}{2} \int_0^s \left[\sigma^4 \frac{\partial^2 \Psi_g}{\partial s^2}(\sigma, 0) + \sigma^2 (3\sigma + 3 - 4g) \frac{\partial \Psi_g}{\partial s}(\sigma, 0) \right. \\
& - 2(g-1)(\sigma - 2g + 1) \Psi_g(\sigma, 0) + \sum_{i=1}^g \left(\sigma^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial s}(\sigma, 0) - 2(i-1) \Psi_i(\sigma, 0) \right) \\
& \left. \times \left(\sigma^2 \frac{\partial \Psi_{g-i+1}}{\partial s}(\sigma, 0) - 2(g-i) \Psi_{g-i+1}(\sigma, 0) \right) \right] d\sigma. \tag{1.68}
\end{aligned}$$

Старший коэффициент $\Psi_g(s, 0)$ равняется $\tau_g/(3g-3)$ (определение τ_g см. в теореме 1.4).

В §6 мы приводим результаты расчетов по этим формулам, проведенных при помощи пакета MAPLE.

§ 2. Склейки и разрезания модулярных графов

Рассмотрим множество $\mathcal{G}_{g,n}^k$ стабильных модулярных графов рода g , имеющих k ребер и n полуребер. Для $k > 0$, $n > 0$ и $g \geq 0$ существует однозначно определенное отображение склейки

$$\&: \mathcal{G}_{g-1,n+2}^{k-1} \rightarrow \mathcal{G}_{g,n}^k, \quad (2.1)$$

склеивающее первое и последнее полуребра модулярного графа $\Gamma \in \mathcal{G}_{g-1,n+2}^{k-1}$ в одно ребро $e^\&$ нового модулярного графа $\&(\Gamma) \in \mathcal{G}_{g,n}^{k-1}$ (порядок остальных $n-2$ полуребер наследуется из Γ). Отметим, что ребро $e^\&$ обладает однозначно определенной ориентацией (направленной от первого полуребра к последнему), так что мы построили отображение склейки

$$\tilde{\&}: \mathcal{G}_{g-1,n+2}^{k-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k, \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k$ — множество $\mathcal{G}_{g,n}^k$ стабильных модулярных графов рода g , имеющих k ребер, n полуребер и одно отмеченное ориентированное ребро. Отображение $\tilde{\&}$ инъективно: граф Γ может быть восстановлен из $\tilde{\&}(\Gamma)$ разрезанием отмеченного ребра.

Теперь для $k > 0$, $n \geq 0$, $g \geq 0$ возьмем некоторые неотрицательные целые числа $n_1, n_2, k_1, k_2, g_1, g_2$ такие, что $n_1 + n_2 = n$, $k_1 + k_2 = k-1$, $g_1 + g_2 = g$, и некоторое разбиение (I_1, I_2) множества $\{1, 2, \dots, n\} = I_1 \sqcup I_2$ такое, что $|I_1| = n_1$, $|I_2| = n_2$. Пусть $I_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}$ и $I_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_{n_1}$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_{n_2}$. Выберем два модулярных графа $\Gamma_1 \in \mathcal{G}_{g_1,n_1+1}^{k_1}$ и $\Gamma_2 \in \mathcal{G}_{g_2,n_2+1}^{k_2}$ и склеим первое полуребро модулярного графа Γ_1 и последнее полуребро модулярного графа Γ_2 . Зададим упорядочение полуребер объединенного графа $\Gamma_1 \& \Gamma_2$ следующим образом: m -е полуребро модулярного графа Γ_1 становится i_{m-1} -м полуребром модулярного графа $\Gamma_1 \& \Gamma_2$ для $2 \leq m \leq n_1 + 1$ и m -е полуребро модулярного графа Γ_2 становится j_m -м полуребром модулярного графа $\Gamma_1 \& \Gamma_2$ для $1 \leq m \leq n_2$. Таким образом, мы определили отображения склейки:

$$\&: \mathcal{G}_{g_1,n_1+1}^{k_1} \times \mathcal{G}_{g_2,n_2+1}^{k_2} \times \mathcal{P}_{n_1,n_2} \rightarrow \mathcal{G}_{g,n}^k, \quad (2.3)$$

$$\tilde{\&}: \mathcal{G}_{g_1,n_1+1}^{k_1} \times \mathcal{G}_{g_2,n_2+1}^{k_2} \times \mathcal{P}_{n_1,n_2} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k, \quad (2.4)$$

где $\mathcal{P}_{n_1,n_2}$ — множество всех разбиений. Повторя приведенное выше рассуждение, мы видим, что отображение (2.4) инъективно. Все отображения склей-

ки (2.1), (2.3) (и соответственно (2.2), (2.4)) можно объединить (при фиксированных n и g) в одно отображение:

$$\mathcal{E}_{g,n}: \mathcal{G}_{g-1,n+2}^{k-1} \cup \bigcup_{\substack{k_1+k_2=k-1 \\ g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n}} (\mathcal{G}_{g_1,n_1+1}^{k_1} \times \mathcal{G}_{g_2,n_2+1}^{k_2} \times \mathcal{P}_{n_1,n_2}) \rightarrow \mathcal{G}_{g,n}^k \quad (2.5)$$

$$\left(\tilde{\mathcal{E}}_{g,n}: \mathcal{G}_{g-1,n+2}^{k-1} \cup \bigcup_{\substack{k_1+k_2=k-1 \\ g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n}} (\mathcal{G}_{g_1,n_1+1}^{k_1} \times \mathcal{G}_{g_2,n_2+1}^{k_2} \times \mathcal{P}_{n_1,n_2}) \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k \right). \quad (2.6)$$

Последнее отображение $\tilde{\mathcal{E}}_{g,n}$, очевидно, биективно: для $(\vec{e}, \tilde{\Gamma}) \in \tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k$ обратное отображение $\tilde{\mathcal{E}}_{g,n}^{-1}$ получается разрезанием отмеченного ориентированного ребра $\vec{e}$ графа $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{G}_{g,n}^k$ на два полуребра, причем упорядочение полуребер наследуется из графа $\tilde{\Gamma}$. (Два новых разрезанных полуребра приобретают соответственно первый и последний номер согласно с ориентацией выделенного ребра.)

Рассмотрим проекцию

$$\pi_{g,n}: \tilde{\mathcal{G}}_{g,n}^k \rightarrow \mathcal{G}_{g,n}^k. \quad (2.7)$$

Выберем некоторый модулярный граф $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{G}_{g,n}^k$; группа $\text{Aut } \tilde{\Gamma}$ действует на множестве его ориентированных ребер $\vec{E}(\tilde{\Gamma})$. Пары $(\vec{e}, \tilde{\Gamma})$ из слоя $\pi_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами этого действия. Выберем представителей $\{\vec{e}_\alpha\}$ по одному из каждой орбиты, тогда

$$2k = |\vec{E}(\tilde{\Gamma})| = \sum_{\vec{e}_\alpha} |\text{Aut } \tilde{\Gamma} \cdot \vec{e}_\alpha| = \sum_{\vec{e}_\alpha} (\text{Aut } \tilde{\Gamma} : \text{Aut } \tilde{\Gamma}_{\vec{e}_\alpha}) = \sum_{\vec{e}_\alpha} \frac{|\text{Aut } \tilde{\Gamma}|}{|\text{Aut } \tilde{\Gamma}_{\vec{e}_\alpha}|}, \quad (2.8)$$

где $\text{Aut } \tilde{\Gamma}_{\vec{e}_\alpha}$ — стабилизатор ориентированного ребра $\vec{e}_\alpha$. Каждая пара $(e_\alpha, \tilde{\Gamma})$ лежит в однозначно определенном образе одного из отображений $\tilde{\mathcal{E}}$: (2.4), если ребро e_α разбивает модулярный граф $\tilde{\Gamma}$ на две несвязные части, или (2.2), если не разбивает. В первом случае

$$\text{Aut } \tilde{\Gamma}_{\vec{e}_\alpha} \cong \text{Aut } \Gamma_1 \times \text{Aut } \Gamma_2, \quad (2.9)$$

во втором случае —

$$\text{Aut } \tilde{\Gamma}_{\vec{e}_\alpha} \cong \text{Aut } \Gamma. \quad (2.10)$$

(В случае (2.9) $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \& \Gamma_2$ и в случае (2.10) $\tilde{\Gamma} = \&(\Gamma)$.) Объединяя (2.10), (2.9) и (2.8), получаем

$$\frac{2k}{|\text{Aut } \tilde{\Gamma}|} = \sum_{\Gamma \in \&_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} + \sum_{(\Gamma_1, \Gamma_2, (I_1, I_2)) \in \&_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma_1|} \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma_2|}. \quad (2.11)$$

Пусть $\{\mu_{g,n}, 2(g-1) + n > 0\}$ – множество (коммутативных) переменных. В (1.2) и (1.3) мы определили мономы

$$\mu(\Gamma) = \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \prod_{v \in V(\Gamma)} \mu_{g(v), \nu(v)} \quad (2.12)$$

и многочлены

$$\mu_{g,n}^k = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_{g,n}^k} \mu(\Gamma). \quad (2.13)$$

Каждый из модулярных графов (или каждый из пар модулярных графов) в $\tilde{\mathcal{X}}_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})$ состоит из одного и того же набора вершин с теми же валентностями; поэтому, умножая (2.11) на $\prod_{v \in V(\tilde{\Gamma})} \mu_{g(v), \nu(v)}$, получаем

$$2k\mu(\tilde{\Gamma}) = \sum_{\Gamma \in \tilde{\mathcal{X}}_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})} \mu(\Gamma) + \sum_{(\Gamma_1, \Gamma_2, (I_1, I_2)) \in \tilde{\mathcal{X}}_{g,n}^{-1}(\tilde{\Gamma})} \mu(\Gamma_1)\mu(\Gamma_2). \quad (2.14)$$

Суммируя (2.14) по всем $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{G}_{g,n}^k$, имеем

$$2k\mu_{g,n}^k = \mu_{g-1, n+2}^{k-1} + \sum_{\substack{k_1+k_2=k-1 \\ g_1+g_2=g \\ n_1+n_2=n}} \binom{n}{n_1} \mu_{g_1, n_1}^{k_1} \mu_{g_2, n_2}^{k_2}. \quad (2.15)$$

Вспоминая определение производящей функции (1.4)

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{3g-3+n} \mu_{g,n}^k \frac{t^n}{n!} s^k \hbar^{g-1} \quad (2.16)$$

и умножая (2.15) на $t^n s^{k-1} \hbar^{g-1} / (2n!)$, получаем потенциальное уравнение Бюргера

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Теорема 1.1 доказана.

Используя подобные рассуждения, можно доказать формулу (1.18): для любой виртуальной мотивной меры $\tilde{v}$

$$\tilde{v}(M_{\Gamma}) = \frac{1}{|\text{Aut } \Gamma|} \prod_{v \in V(\Gamma)} \tilde{v}(M_{g(v), \nu(v)}). \quad (2.18)$$

Это очевидно, когда Γ является деревом; любой модулярный граф может быть построен из дерева последовательными операциями склейки (2.1). Так что для доказательства нам нужно только сравнить $\tilde{v}(M_{\Gamma})$ и $\tilde{v}(M_{\&(\Gamma)})$ в (2.1). Положим $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\Gamma}) = \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma)$ (это просто означает, что $\tilde{\Gamma} = \&(\Gamma)$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ является его выделенным

ориентированным ребром, полученным при склейке двух полуребер). Рассмотрим пространство модулей $\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}}$, параметризующее стабильные пунктированные кривые Делиня–Мамфорда с одной отмеченной ветвью на одной из особых точек, двойственный модулярный граф которых совпадает с $\widetilde{\Gamma}$. Проекция $\pi: \widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}} \rightarrow M_{\widetilde{\Gamma}}$ — это $2k$ -листное неразветвленное накрытие орбиобразий; пространство $\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}}$ распадается на несвязное объединение компонент, соответствующих орбитам действия группы $\text{Aut } \widetilde{\Gamma}$ на множестве ориентированных ребер $\vec{E}(\widetilde{\Gamma})$ модулярного графа $\widetilde{\Gamma}$. Обозначим компоненту, соответствующую орбите $\vec{e}$, через $\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}}$, тогда $\pi: \widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}} \rightarrow M_{\widetilde{\Gamma}}$ является неразветвленным накрытием орбиобразий степени $(\text{Aut } \widetilde{\Gamma} : \text{Aut } \widetilde{\Gamma}_{\vec{e}}) = |\text{Aut } \widetilde{\Gamma}| / |\text{Aut } \widetilde{\Gamma}_{\vec{e}}|$. Поэтому

$$\widetilde{v}(\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}}) = \frac{|\text{Aut } \widetilde{\Gamma}|}{|\text{Aut } \widetilde{\Gamma}_{\vec{e}}|} \widetilde{v}(\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}}). \quad (2.19)$$

Отображения склейки (2.1) и (2.2) определяют отображения склейки

$$\&_{\Gamma}: M_{\Gamma} \rightarrow M_{\widetilde{\Gamma}}, \quad (2.20)$$

$$\widetilde{\&}_{\Gamma}: M_{\Gamma} \rightarrow \widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}}. \quad (2.21)$$

Образом $\widetilde{\&}_{\Gamma}$ является $\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}}$, и имеет место изоморфизм

$$\widetilde{\&}_{\Gamma}: M_{\Gamma} \cong \widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}}, \quad (2.22)$$

поэтому $\widetilde{v}(M_{\Gamma}) = \widetilde{v}(\widetilde{M}_{\widetilde{\Gamma}, \vec{e}})$. Это завершает доказательство (1.18).

§ 3. Решения уравнения Бюргерса

В этом параграфе мы решаем уравнения Бюргерса (1.7) или (1.8) с помощью разложений (1.32) и (1.31):

$$\Psi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Psi_g(s, t) \hbar^{g-1}, \quad (3.1)$$

$$\Phi(s, t, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} \Phi_g(s, t) \hbar^{g-1}. \quad (3.2)$$

Подставляя в (1.7) и (1.8), мы получаем квазилинейное уравнение для Φ_0

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial s} = \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \quad (3.3)$$

и рекуррентные квазилинейные уравнения для Φ_g и Ψ_g для $g > 0$

$$\frac{\partial \Phi_g}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{g-1}}{\partial t^2} + \Phi_0 \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} + \Phi_g \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{g-1} \Phi_i \frac{\partial \Phi_{g-i}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Psi_g}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \Phi_0 \frac{\partial \Psi_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Для $g = 0$ имеется только квазилинейное уравнение (3.3). Уравнения для характеристик

$$\frac{ds}{1} = -\frac{dt}{\Phi_0} = \frac{d\Phi_0}{0}. \quad (3.6)$$

Два первых интеграла (3.6)

$$\Phi_0 = C_1, \quad t + s\Phi_0 = C_2. \quad (3.7)$$

Тогда общее решение (3.3) имеет вид

$$f_0(\Phi_0, t + s\Phi_0) = 0, \quad (3.8)$$

где f_0 — произвольная функция. Подставляя начальные условия $\Phi_0(0, t)$, получаем, что при $s = 0$ $f_0(\Phi_0(0, t), t) = 0$; это означает, что $f_0(a, b) = 0$ равносильно $a = \Phi_0(0, b)$. Таким образом, уравнение (3.8) дает функциональное уравнение для $\Phi_0(s, t)$

$$\Phi_0(s, t) = \Phi_0(0, t + s\Phi_0(s, t)). \quad (3.9)$$

Положим

$$\alpha_s(t) = t - s\Phi_0(0, t), \quad \beta_s(t) = t + s\Phi_0(s, t). \quad (3.10)$$

Из (3.9) получаем, что $t + s\Phi_0(s, t) - s\Phi_0(0, t + s\Phi_0(s, t)) = t$, так что функция α_s является обратной к функции β_s относительно композиции функций:

$$\alpha_s(\beta_s(t)) = t, \quad \beta_s(\alpha_s(t)) = t. \quad (3.11)$$

Таким образом, теорема 1.2 доказана.

Теперь рассмотрим квазилинейное уравнение (3.5). Уравнения для характеристик для (3.5):

$$\frac{ds}{1} = -\frac{dt}{\Phi_0} = \frac{d\Psi_g}{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t}}. \quad (3.12)$$

Уравнения для характеристик для (3.4):

$$\frac{ds}{1} = -\frac{dt}{\Phi_0} = \frac{d\Phi_g}{\Phi_g \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{g-1}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{g-1} \Phi_i \frac{\partial \Phi_{g-i}}{\partial t}}. \quad (3.13)$$

Обозначим знаменатель из (3.12) через $H_g(s, t)$:

$$H_g(s, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Отметим, что H_g зависит только от Ψ_i при $i < g$. Мы уже нашли один первый интеграл для (3.13) и (3.12) при всех g :

$$\Phi_0(s, t) = C_1. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.9), мы видим, что

$$\Phi_0(0, t + sC_1) = C_1. \quad (3.16)$$

Обозначим через φ одну из ветвей обратной функции для $\Phi_0(0, t)$, тогда

$$t = \varphi(C_1) - sC_1.$$

Теперь другой первый интеграл для (3.5) может быть (рекуррентно) найден простым интегрированием:

$$\Psi_g - \int H_g(s, \varphi(C_1) - sC_1) ds = C_2. \quad (3.17)$$

Исключая C_1 , получаем

$$\Psi_g - \Xi_g(s, t) = C_2, \quad (3.18)$$

где

$$\Xi_g(s, t) = \int_0^s H_g(\sigma, t + (s - \sigma)\Phi_0(s, t)) d\sigma. \quad (3.19)$$

Отметим, что мы выбираем константу интегрирования так, что $\Xi_g(0, t) = 0$. Таким образом, общее решение (3.5) может быть записано в виде

$$\Psi_g(s, t) = \Xi_g(s, t) + U_g(\Phi_0(s, t)) \quad (3.20)$$

для произвольной функции U_g . Функция U_g определяется тогда из начального условия:

$$U_g(\Phi_0(0, t)) = \Psi_g(0, t). \quad (3.21)$$

Подставляя $t + s\Phi_0(s, t)$ вместо t в $\Phi_0(0, t)$ и применяя формулу (3.9), мы получаем рекуррентную формулу для решения уравнения Бюргерса:

$$\begin{aligned} \Psi_g(s, t) &= \Psi_g(0, t + s\Phi_0(s, t)) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^s \left[\frac{\partial^2 \Psi_{g-1}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{g-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi_{g-i}}{\partial t} \right] (\sigma, t + (s - \sigma)\Phi_0(s, t)) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Теорема 1.3 доказана.

§ 4. Случай $g = 0$

В этом параграфе мы при помощи теоремы 1.2 получаем единообразным способом функциональные уравнения для $\Phi_0(s, t)$ во всех обсуждавшихся случаях.

4.1. Считаящие функции для числа трехвалентных деревьев. Для числа трехвалентных деревьев $\Phi_0(0, t) = t^2/2$ (см. (1.12) для $d = 3$). Чтобы найти обратную функцию для $\alpha_s(t) = t - st^2/2$, нужно только решить квадратное уравнение $\beta_s(t) - s\beta_s(t)^2/2 = t$. Его решение $\beta_s(t) = \alpha_1^{-1}(t) = (1 - \sqrt{1 - 2st})/s$ и, следовательно,

$$\Phi_0(s, t) = \frac{1 - st - \sqrt{1 - 2st}}{s^2}, \quad \Phi_0(1, t) = 1 - t - \sqrt{1 - 2t}, \quad (4.1)$$

— хорошо известная производящая функция для числа трехвалентных деревьев с отмеченными полуребрами.

4.2. Считаящие функции для числа всех стабильных деревьев. В этом случае (см. (1.15))

$$\Phi_0(0, t) = e^t - t - 1. \quad (4.2)$$

Подставляя в (1.38), получаем функциональное уравнение (1.41), из которого стандартно выводится дифференциальное уравнение (1.42).

4.3. Многочлен Пуанкаре и эйлерова характеристика многообразия $\overline{M}_{0,n}$. Многочлен Пуанкаре для $M_{0,n}$ от переменной y совпадает с числом точек многообразия $M_{0,n}(\mathbb{F}_q)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ (с заменой $q = y^2$). На проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ всего $q + 1$ точка; первые три можно действием проективной группы перевести в 0, 1 и ∞ ; остальные $q - 3$ точки можно выбрать

$$(q - 2)(q - 3) \cdots (q - n + 2) \quad (4.3)$$

способами. Следовательно, производящая функция имеет вид:

$$\Phi_0(0, t) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(q - 2)!}{(n - 1)!(q - n + 1)!} t^{n-1} = \frac{(1 + t)^q - qt - 1}{q(q - 1)}. \quad (4.4)$$

Подставляя в (1.38), получаем функциональное уравнение (1.43), из которого стандартно выводится дифференциальное уравнение (1.44).

Для случая эйлеровой характеристики достаточно просто положить $q = 1$ в (4.4).

§ 5. Считаящая функция для трехвалентных графов

В этом случае лучше начать с уравнения (1.8) для функции $\Phi(s, t, h)$. Для любого трехвалентного графа рода g , имеющего k ребер и n полуребер, $k = 3g - 3 + n$, поэтому Φ содержит только мономы

$$s^{3g-3+n} t^{n-1} h^{g-1} = s(s^3 h)^g (st)^{n-1} \quad (5.1)$$

и, следовательно,

$$\Phi(s, t, h) = sZ(s^3 h, st) \quad (5.2)$$

для некоторой функции $Z(x, y)$. Подставляя (5.2) в (1.8), получаем уравнение

$$Z + 3x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{x}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + xZ \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Аналогично (1.31) получаем разложение

$$Z(x, y) = \sum_{g=0}^{\infty} Z_g(y) x^{g-1}. \quad (5.4)$$

Тогда для $Z_0(y)$ имеем однородное уравнение

$$-2Z_0 + yZ_0' = Z_0Z_0'. \quad (5.5)$$

Нужным нам решением (5.5) с начальным условием $Z_0(0) = 0$ является

$$Z_0(y) = 1 - y - \sqrt{1 - 2y}, \quad (5.6)$$

которое, конечно, совпадает с (1.40). Для $g > 0$ (5.3) дает следующее рекуррентное линейное уравнение для $Z_g(y)$, которое, конечно, эквивалентно (1.34):

$$-2Z_g + 3gZ_g + yZ_g' = \frac{1}{2} Z_{g-1}'' + Z_0Z_g' + Z_gZ_0' + \sum_{i=1}^{g-1} Z_i'Z_{g-i}. \quad (5.7)$$

Нетрудно найти Z_1 и общую формулу для Z_g (можно было использовать и (1.49), что, правда, в этом случае привело бы к чуть более громоздким вычислениям):

$$Z_1 = \frac{1}{2(1-2y)}, \quad Z_g = \frac{\tau_g}{(\sqrt{1-2y})^{3g-1}} \quad (5.8)$$

для некоторых констант τ_g и $\tau_1 = 1/2$. Уравнение (5.7) дает рекуррентную формулу для τ_g , $g > 1$:

$$\tau_g = \frac{1}{3g-2} \left(\frac{1}{2} (3g-2)(3g-4)\tau_{g-1} + \sum_{i=1}^{g-1} (3i-1)\tau_i\tau_{g-i} \right), \quad (5.9)$$

которую нетрудно представить в более удобном виде:

$$\tau_g = \frac{1}{2} \left((3g-4)\tau_{g-1} + \sum_{i=1}^{g-1} \tau_i\tau_{g-i} \right). \quad (5.10)$$

Вот первые четыре значения τ_g :

$$\tau_1 = \frac{1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{5}{8}, \quad \tau_3 = \frac{15}{8}, \quad \tau_4 = \frac{1105}{128}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.8) в (5.4), получаем решение Z в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + \sum_{g=1}^{\infty} \tau_g \frac{x^g}{(\sqrt{1-2y})^{3g-1}} = Z_0 + \frac{x}{1-2y} \sum_{g=1}^{\infty} \tau_g \left(\frac{x}{(\sqrt{1-2y})^3} \right)^{3g-1} \\ &= Z_0 + \frac{x}{1-2y} W \left(\frac{x}{(\sqrt{1-2y})^3} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где W – некоторая функция одной переменной. Подставляя (5.12) в (5.3), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $W(u)$:

$$1 + (8u - 2)W + (27u^2 - 6x)W' + 9u^3W'' + 4uW^2 + 6u^2W'W = 0. \quad (5.13)$$

Умножая (5.13) на $u^{-2/3}$ и интегрируя, имеем

$$-2u^{1/3}W(u) + 2u^{4/3}W(u) + u^{4/3}W(u)^2 + 3u^{7/3}W'(u) + u^{1/3} + C = 0. \quad (5.14)$$

Поскольку W регулярно при $u = 0$, $C = 0$, разделив (5.14) на $u^{1/3}$, получим уравнение Риккати

$$2(u - 1)W(u) + uW(u)^2 + 1 + 3u^2W'(u) = 0. \quad (5.15)$$

Для уравнения (5.15) $u = 0$ является особой точкой, и оно имеет единственное решение в виде формального ряда

$$W(u) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}u + \frac{15}{8}u^2 + \frac{1105}{128}u^3 + \frac{1695}{32}u^4 + \frac{414125}{1024}u^5 + O(u^6). \quad (5.16)$$

Общее решение уравнения (5.15) аналитически выражается через модифицированные функции Бесселя:

$$W(u) = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{C_1 I_{-2/3}(1/(3u)) + C_2 I_{2/3}(1/(3u))}{C_1 I_{1/3}(1/(3u)) + C_2 I_{-1/3}(1/(3u))} \right) \quad (5.17)$$

для любых C_1, C_2 . С помощью асимптотических разложений модифицированных функций Бесселя (см. [9]) решение (при любых C_1 и C_2) можно представить как отношение двух степенных рядов:

$$\begin{aligned} W(u) &= \frac{1}{u} \left(1 - \left(1 - \frac{(16/9 - 1)}{1!} \frac{3}{8}u + \frac{(16/9 - 1)(16/9 - 4)}{2!} \left(\frac{3}{8}u \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(16/9 - 1)(16/9 - 4)(16/9 - 25)}{3!} \left(\frac{3}{8}u \right)^3 + \dots \right) \right. \\ &\quad \times \left(1 - \frac{(4/9 - 1)}{1!} \frac{3}{8}u + \frac{(4/9 - 1)(4/9 - 4)}{2!} \left(\frac{3}{8}u \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(4/9 - 1)(4/9 - 4)(4/9 - 25)}{3!} \left(\frac{3}{8}u \right)^3 + \dots \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Теперь можно выписать ответ:

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t, \hbar) &= \frac{1}{s^2 \hbar} [1 - st - \sqrt{1 - 2st}] + \frac{1}{s^2} \sum_{g=1}^{\infty} \tau_g \frac{s^{3g} \hbar^{g-1}}{(\sqrt{1 - 2st})^{3g-1}} \\
&= \frac{1 - st - \sqrt{1 - 2st}}{s^2 \hbar} + \frac{s}{1 - 2st} \sum_{g=1}^{\infty} \tau_g \left(\frac{s^3 \hbar}{(\sqrt{1 - 2st})^3} \right)^{g-1} \\
&= \frac{1 - st - \sqrt{1 - 2st}}{s^2 \hbar} + \frac{s}{1 - 2st} W \left(\frac{s^3 \hbar}{(\sqrt{1 - 2st})^3} \right). \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Полезно также выразить решение $\Phi(s, t, \hbar)$ через функции Эйри (см. [9]):

$$\begin{aligned}
\Phi(s, t, \hbar) &= \frac{1 - st}{s^2 \hbar} - \frac{2^{1/3}}{s \hbar^{2/3}} \left(C'_1 \text{Ai}' \left(\frac{1 - 2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) + C'_2 \text{Bi}' \left(\frac{1 - 2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) \right) \\
&\quad \times \left(C'_1 \text{Ai} \left(\frac{1 - 2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) + C'_2 \text{Bi} \left(\frac{1 - 2st}{2^{2/3} s^2 \hbar^{2/3}} \right) \right)^{-1}, \tag{5.20}
\end{aligned}$$

где $C'_1 = \sqrt{3} (C_2 - C_1)$ и $C'_2 = C_2 + C_1$. Теперь легко проинтегрировать и получить аналитическое выражение (1.55) для функции $\Psi(s, t, \hbar)$; константа интегрирования (зависящая от s и $\hbar$) может быть найдена из уравнения Бюргерса (1.7).

Теорема 1.4 и следствие 1.3 доказаны.

§6. Виртуальная эйлерова характеристика $\overline{M}_{g,n}$

Основной шаг в доказательстве теоремы 1.6 – заметить, что решения $\Psi_g(s, t)$ можно представить в виде

$$\Psi_g(s, t) = \frac{1}{(1 + t + s\Phi_0(s, t))^{2g-2}} P_g \left(\frac{s(1 + t + s\Phi_0(s, t))}{1 + t - s(t + s\Phi_0(s, t))} \right), \tag{6.1}$$

где P_g – некоторый многочлен. Для этого достаточно вычислить $\Psi_g(s, t)$ по формулам (1.49) для первых нескольких значений g , а затем доказать это утверждение индукцией по g , пользуясь уравнением (1.33). (При вычислении производных функции Φ_0 надо воспользоваться уравнением (1.46).) После этого остается только заметить, что при $t = 0$ равенство (6.1) превращается в $\Psi_g(s, 0) = P_g(s)$. Для вычисления старших коэффициентов уравнение (1.68) дает в точности рекуррентное соотношение (1.54), определяющее числа τ_g . Впрочем, это совпадение имеет чисто геометрическую природу: нетрудно видеть, что старшие коэффициенты многочленов $P_g(s)$ – это в точности коэффициенты при $s^{3g-3} \hbar^{g-1}$ в разложении $\Psi_g(s, t)$ в ряд по $s, t, \hbar$, которые соответствуют вкладу в эйлерову характеристику $\overline{M}_{g,n}$ нульмерного страта $M_{g,n}^{3g-3}$, соответствующего дискретному множеству максимально вырожденных кривых, двойственный граф которых является комбинаторным трехвалентным графом (ll-кривые в терминологии книги А. Н. Тюринга [10]).

Ниже мы приводим некоторые результаты вычислений по формулам (1.67), (1.68), выполненные в пакете MAPLE.

Многочлены $\Psi_g(s, 0)$ для $g = 2, 3, 4, 5, 6$:

$$\Psi_2(s, 0) = \frac{5}{24}s^3 - \frac{1}{6}s^2 + \frac{13}{288}s - \frac{1}{240}, \quad (6.2)$$

$$\Psi_3(s, 0) = \frac{5}{16}s^6 - \frac{55}{96}s^5 + \frac{35}{72}s^4 - \frac{2539}{10368}s^3 + \frac{1307}{17280}s^2 - \frac{19}{1440}s + \frac{1}{1008}, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4(s, 0) = & \frac{1105}{1152}s^9 - \frac{1045}{384}s^8 + \frac{8549}{2304}s^7 - \frac{66773}{20736}s^6 + \frac{182341}{92160}s^5 - \frac{2235257}{2488320}s^4 \\ & + \frac{187051}{622080}s^3 - \frac{17063}{241920}s^2 + \frac{6221}{604800}s - \frac{1}{1440}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_5(s, 0) = & \frac{565}{128}s^{12} - \frac{26015}{1536}s^{11} + \frac{145883}{4608}s^{10} - \frac{3182161}{82944}s^9 \\ & + \frac{2805265}{82944}s^8 - \frac{229328099}{9953280}s^7 + \frac{374564131}{29859840}s^6 - \frac{578872613}{104509440}s^5 \\ & + \frac{114641981}{58060800}s^4 - \frac{667199}{1209600}s^3 + \frac{32821}{290304}s^2 - \frac{181}{12096}s + \frac{1}{1056}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_6(s, 0) = & \frac{82825}{3072}s^{15} - \frac{400565}{3072}s^{14} + \frac{1266935}{4096}s^{13} \\ & - \frac{159107029}{331776}s^{12} + \frac{241682111}{442368}s^{11} - \frac{9702562787}{19906560}s^{10} \\ & + \frac{253843871663}{716636160}s^9 - \frac{1079372228279}{5016453120}s^8 + \frac{835339878797}{7524679680}s^7 \\ & - \frac{614429790997}{12541132800}s^6 + \frac{6419764103}{348364800}s^5 - \frac{3031168109}{522547200}s^4 \\ & + \frac{106613887}{72576000}s^3 - \frac{24719227}{88704000}s^2 + \frac{441541}{12700800}s - \frac{691}{327600}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Начальные члены разложения функций $\Psi_g(s, t)$ для $g = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \Psi_1(s, t) = & \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{12}\right)t + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{7}{24}s + \frac{1}{24}\right)t^2 \\ & + \left(\frac{2}{3}s^3 - \frac{5}{8}s^2 + \frac{2}{9}s - \frac{1}{36}\right)t^3 + \left(s^4 - \frac{41}{32}s^3 + \frac{199}{288}s^2 - \frac{3}{16}s + \frac{1}{48}\right)t^4 \\ & + \left(\frac{8}{5}s^5 - \frac{83}{32}s^4 + \frac{89}{48}s^3 - \frac{533}{720}s^2 + \frac{1}{6}s - \frac{1}{60}\right)t^5 + O(t^6), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(s, t) = & \left(\frac{5}{24}s^3 - \frac{1}{6}s^2 + \frac{13}{288}s - \frac{1}{240}\right) \\ & + \left(\frac{5}{8}s^4 - \frac{3}{4}s^3 + \frac{109}{288}s^2 - \frac{13}{144}s + \frac{1}{120}\right)t \\ & + \left(\frac{25}{16}s^5 - \frac{39}{16}s^4 + \frac{325}{192}s^3 - \frac{379}{576}s^2 + \frac{67}{480}s - \frac{1}{80}\right)t^2 \\ & + \left(\frac{175}{48}s^6 - \frac{167}{24}s^5 + \frac{3497}{576}s^4 - \frac{677}{216}s^3 + \frac{4393}{4320}s^2 - \frac{7}{36}s + \frac{1}{60}\right)t^3 \\ & + \left(\frac{525}{64}s^7 - \frac{3547}{192}s^6 + \frac{44519}{2304}s^5 - \frac{9439}{768}s^4\right. \\ & \left.+ \frac{17933}{3456}s^3 - \frac{5065}{3456}s^2 + \frac{23}{90}s - \frac{1}{48}\right)t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1155}{64} s^8 - \frac{1123}{24} s^7 + \frac{14579}{256} s^6 - \frac{5485}{128} s^5 \right. \\
& \left. + \frac{11887}{540} s^4 - \frac{3833}{480} s^3 + \frac{5801}{2880} s^2 - \frac{97}{300} s + \frac{1}{40} \right) t^5 + O(t^6), \tag{6.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(s, t) = & \left(\frac{5}{16} s^6 - \frac{55}{96} s^5 + \frac{35}{72} s^4 - \frac{2539}{10368} s^3 + \frac{1307}{17280} s^2 - \frac{19}{1440} s + \frac{1}{1008} \right) \\
& + \left(\frac{15}{8} s^7 - \frac{395}{96} s^6 + \frac{305}{72} s^5 - \frac{9259}{3456} s^4 \right. \\
& \left. + \frac{29311}{25920} s^3 - \frac{341}{1080} s^2 + \frac{19}{360} s - \frac{1}{252} \right) t \\
& + \left(\frac{15}{2} s^8 - \frac{3665}{192} s^7 + \frac{4415}{192} s^6 - \frac{119495}{6912} s^5 \right. \\
& \left. + \frac{928913}{103680} s^4 - \frac{171107}{51840} s^3 + \frac{1819}{2160} s^2 - \frac{15}{112} s + \frac{5}{504} \right) t^2 \\
& + \left(25s^9 - \frac{4625}{64} s^8 + \frac{28655}{288} s^7 - \frac{1790105}{20736} s^6 + \frac{1360669}{25920} s^5 \right. \\
& \left. - \frac{1821137}{77760} s^4 + \frac{66737}{8640} s^3 - \frac{27491}{15120} s^2 + \frac{415}{1512} s - \frac{5}{252} \right) t^3 \\
& + \left(75s^{10} - \frac{62075}{256} s^9 + \frac{864475}{2304} s^8 - \frac{1131595}{3072} s^7 + \frac{35398361}{138240} s^6 \right. \\
& \left. - \frac{5165251}{38880} s^5 + \frac{16351757}{311040} s^4 - \frac{141479}{8960} s^3 + \frac{69679}{20160} s^2 - \frac{2995}{6048} s + \frac{5}{144} \right) t^4 \\
& + \left(210s^{11} - \frac{192115}{256} s^{10} + \frac{247385}{192} s^9 - \frac{13001167}{9216} s^8 + \frac{76135781}{69120} s^7 \right. \\
& \left. - \frac{3737291}{5760} s^6 + \frac{11534753}{38880} s^5 - \frac{165193453}{1555200} s^4 + \frac{17647}{600} s^3 - \frac{911023}{151200} s^2 \right. \\
& \left. + \frac{155}{189} s - \frac{1}{18} \right) t^5 + O(t^6). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Таблицы значений $\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,0})$ и $\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,1})$, $g \leq 20$. Нетрудно заметить, что в этом интервале значений g эйлерова характеристика $\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,0})$ растет примерно как $C(g-1)!/2^{g-1}$, а отношение

$$\frac{\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,1})}{\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,0})(2g-2)}$$

растет от 1.025 для $g = 3$ до 1.038 для $g = 20$.

g	$\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,0})$
2	$\frac{119}{1440} \approx 0.0826$
3	$\frac{8027}{181440} \approx 0.0442$
4	$\frac{2097827}{43545600} \approx 0.0482$
5	$\frac{150427667}{1916006400} \approx 0.0785$
6	$\frac{31966432414753}{188305108992000} \approx 0.170$
7	$\frac{21067150021261}{46115536896000} \approx 0.457$
8	$\frac{27108194937436478387}{18438836272496640000} \approx 1.470168428$
9	$\frac{12253091020103495716943}{2225676001833123840000} \approx 5.505334564$
10	$\frac{41107639746528672580958364833}{1748045931839735463936000000} \approx 23.51633844$
11	$\frac{18149470500315527186930400759373}{160820225729255662682112000000} \approx 112.8556462$
12	$\frac{19004221040884074685037446900552041691}{31610823569342493056795934720000000} \approx 601.1934804$
13	$\frac{1335395944593790109991624206528868880873}{379329882832109916681551216640000000} \approx 3520.407975$
14	$\frac{2697359250099761465877837488047416054790459}{120006181114158410004708930355200000000} \approx 22476.83599$
15	$\frac{17628737527982037548325073368636345668379043678957}{1134360827105204653737711258361135104000000000} \approx 155406.7904$
16	$\frac{6118750700933322043736181893289455692441208195878609}{52893624852448399854284136389867785420800000000} \approx 1156803.059$
17	$\frac{71372306743070002809491037076029984614872395664643491}{77378343566800166975964253861875548160000000000} \approx 9223809.073$
18	$\frac{17198235432952170987858390769814893434655150721674671445771265141}{219267898302032160155302114911031967019769528320000000000} \approx 78434807.68$
19	$\frac{13050435425469643163551878925079739017685769865160451968198706727723}{184185034573707014530453776525266852296606403788800000000000} \approx 708550260.6$
20	$\frac{137014760506364785741048203429669320537974177259444567259217133497233731}{20219257750768810601193019037621586300795818606592000000000000} \approx 6776448582.0$

g	$\tilde{\chi}(\overline{M}_{g,1})$
1	$\frac{5}{12} \approx 0.416666667$
2	$\frac{247}{1440} \approx 0.171527778$
3	$\frac{13159}{72576} \approx 0.1813133818$
4	$\frac{5160601}{17418240} \approx 0.2962756857$
5	$\frac{1060344499}{1642291200} \approx 0.6456495042$
6	$\frac{43927799939987}{25107347865600} \approx 1.749599367$
7	$\frac{25578458051299001}{4519322615808000} \approx 5.659799095$
8	$\frac{71323310082487963309}{3352515685908480000} \approx 21.27456417$
9	$\frac{48270890814008387585027269}{529710888436283473920000} \approx 91.12686159$
10	$\frac{1532013946846243955713315776917}{3496091863679470927872000000} \approx 438.2075777$
11	$\frac{2255889841768911901484548469527387}{964921354375533976092672000000} \approx 2337.900215$
12	$\frac{288832892614815185388417599064551131741}{21073882379561662037863956480000000} \approx 13705.72766$
13	$\frac{66447212654413192038655941663348291926069}{758659765664219833363102433280000000} \approx 87584.99615$
14	$\frac{123070096996308531323829981549308669630859857}{203087383423960386161815112908800000000} \approx 605995.7784$
15	$\frac{146281181967774383738497529449993443280442541690511}{32410309345862990106791750238889574400000000} \approx 4513415.173$
16	$\frac{133309147159236466453784033068792506720345957334028501807}{3702553739671387989799889547290744979456000000000} \approx 36004648.83$
17	$\frac{2721690926359201802650400830738540838572166621421649160557}{8886128975211331175519734913497787950694400000000} \approx 306285327.8$
18	$\frac{123136066030368677688394485156439501180080883329398977909415435779}{44489138785919568727162747952963007801112657920000000000} \approx 2767778145.0$
19	$\frac{975371306046856089312443646349848042163131041618448148820157981265999}{36837006914741402906090755305053370459321280757760000000000} \approx 26478028150.0$
20	$\frac{183782438297282310449428294736692535953487484512586556016473804299555114127}{68745476352613956044056264727913393422705783262412800000000000} \approx 267337500700.0$

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ $\tilde{\chi}(M_{g,n})$, $g \leq 6$, $n \leq 6$

g	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
2	$\frac{413}{720} \approx 0.5736111111$	$\frac{89}{32} \approx 2.781250000$	$\frac{12431}{720} \approx 17.26527778$	$\frac{189443}{1440} \approx 131.5576389$	$\frac{853541}{720} \approx 1185.473611$
3	$\frac{179651}{181440} \approx 0.9901399912$	$\frac{495611}{72576} \approx 6.828855269$	$\frac{684641}{12096} \approx 56.60061177$	$\frac{199014019}{362880} \approx 548.4292852$	$\frac{1103123803}{181440} \approx 6079.826957$
4	$\frac{97471547}{43545600} \approx 2.238378780$	$\frac{1747463783}{87091200} \approx 20.06475721$	$\frac{9056350741}{43545600} \approx 207.9739570$	$\frac{71024755987}{29030400} \approx 2446.564842$	$\frac{1402182822991}{43545600} \approx 32200.33305$
5	$\frac{35763130021}{5748019200} \approx 6.221818121$	$\frac{157928041517}{2299207680} \approx 68.68802801$	$\frac{701735503159}{821145600} \approx 854.5810915$	$\frac{135972856739213}{11496038400} \approx 11827.80120$	$\frac{115110462356893}{638668800} \approx 180234.9862$
6	$\frac{350875518979697}{17118646272000} \approx 20.49668609$	$\frac{14466239894532961}{53801459712000} \approx 268.8819220$	$\frac{105018494553645499}{26900729856000} \approx 3903.927333$	$\frac{4680800827073885069}{75322043596800} \approx 62143.83736$	$\frac{15587244161672916947}{14485008384000} \approx 1076094.935$
7	$\frac{5346168720992921}{68474585088000} \approx 78.07522622$	$\frac{766050649843508339}{645617516544000} \approx 1186.539445$	$\frac{44501877704266668461}{2259661307904000} \approx 19694.04775$	$\frac{1601797289485334976137}{4519322615808000} \approx 354433.0480$	$\frac{3106681102072897118941}{451932261580800} \approx 6874218.475$

В заключение хотелось бы поблагодарить Г. Б. Шабата, обратившего внимание автора на производящие функции модулярных деревьев, и Ю. И. Манина за полезные обсуждения. Особенную благодарность автор хотел бы выразить Дону Загиру за целый ряд исправлений и упрощений в окончательном варианте текста. Также автор выражает признательность Институту Макса Планка в Бонне, чьим гостеприимством пользовался при завершении этой работы.

Список литературы

1. *Fulton W., MacPherson R.* A compactification of configuration spaces // *Ann. of Math.* (2). 1994. V. 139. P. 183–225.
2. *Manin Yu. I.* Generating functions in algebraic geometry and sums over trees // *The moduli spaces of curves* / ed. Dijkgraaf et al. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1995. P. 401–417. (*Progr. Math.* V. 129.)
3. *Harer J., Zagier D.* The Euler characteristic of the moduli space of curves // *Invent. Math.* 1986. V. 85. № 3. P. 457–485.
4. *Cole J. D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quart. App. Math.* 1951. V. 9. P. 225–236.
5. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // *Comm. Pure Appl. Math.* 1950. V. 3. P. 201–230.
6. *Getzler E.* The semi-classical approximation for modular operads // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 194. P. 481–492.
7. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // *Матем. сб.* 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.
8. *Манин Ю. И.* Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей. М.: Факториал Пресс, 2002.
9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
10. *Тюрин А. Н.* Квантование, классическая и квантовая теория поля и тэта-функции. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)
E-mail: artamkin@mail.ru

Поступила в редакцию
31.03.2005