Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, Б. Дюкоме, Скорость стабилизации и устойчивость вязких сжимаемых баротропных симметричных течений со свободной границей для общей массовой силы, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 12, 33–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1442>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:59:09

УДК 517.958:531.32–537

А. А. Злотник, Б. Дюкоме

Скорость стабилизации и устойчивость вязких сжимаемых баротропных симметричных течений со свободной границей для общей массовой силы

Рассматриваются симметричные течения вязкой сжимаемой баротропной жидкости со свободной границей, приводимые в движение общей массовой силой f_S (зависящей как от эйлеровой, так и от лагранжевой координат) и внешним давлением $p_{\Gamma,S}$ при общей монотонной функции состояния p . Охватывается случай самогравитации, возникающий в астрофизике. Сначала изучаются существование, единственность и статическая устойчивость положительных стационарных решений, дается вариационное исследование этих решений и их статической устойчивости в терминах потенциальной энергии. В астрофизическом контексте доказывается, что стационарное решение единственно и статически устойчиво при условии, что первый адиабатический показатель больше или равен $4/3$.

Затем в случае, когда ω -предельное множество для нестационарных плотностей и свободной границы содержит статически устойчивое положительное стационарное решение, выводится равномерная стабилизация к последнему и, главное, устанавливаются оценки скорости стабилизации экспоненциального типа в L^2 и H^1 для плотности и скорости при $t \rightarrow \infty$ с помощью построения новых нетривиальных функционалов Ляпунова рассматриваемой задачи. Более того, доказывается, что статически устойчивые стационарные решения экспоненциально асимптотически устойчивы и эта нелинейная динамическая устойчивость дополнительно устойчива по отношению к малым нестационарным возмущениям f_S и $p_{\Gamma,S}$. Дополнительно вводится вариационное условие на стационарное решение, обеспечивающее глобальную по отношению к данным динамическую устойчивость. Исследование выполнено как в эйлеровых, так и в лагранжевых массовых координатах.

Библиография: 35 названий.

§ 1. Введение

Мы продолжаем наши исследования системы квазилинейных дифференциальных уравнений, описывающих симметричные течения вязкой сжимаемой баротропной жидкости, состоящей из уравнения неразрывности

$$\rho_t + \frac{1}{\varkappa}(\varkappa \rho v)_r = 0 \quad (1)$$

и уравнения импульса

$$\rho(v_t + vv_r) = \left[\frac{\mu(\rho)}{\varkappa}(\varkappa v)_r - p(\rho) \right]_r + \rho f[m], \quad (2)$$

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00539, 03-01-00606 и 04-01-00619).

в области $Q := \{(r, t) : r_0 < r < R(t), t > 0\}$, где $r_0 > 0$ – радиус (инертного) ядра, а $R(t)$ – радиус внешней свободной границы, удовлетворяющей уравнению

$$R'(t) = v|_{r=R(t)} \quad \text{при } t > 0. \quad (3)$$

Здесь и ниже $\varkappa(r) := r^k$ с $k = 0, 1$ или 2 соответственно в случаях плоской, цилиндрической или сферической симметрии,

$$m(r, t) := \int_{r_0}^r \rho(q, t) \varkappa(q) dq \quad (4)$$

– лагранжева массовая координата и $f[m](r, t) = f(r, m(r, t), t)$.

Система дополняется краевыми условиями на фиксированной левой и свободной правой границах

$$v|_{r=r_0} = 0, \quad \left[\frac{\mu(\rho)}{\varkappa} (\varkappa v)_r - p(\rho) - 2k\mu_1(\rho) \frac{v}{r} \right] \Big|_{r=R(t)} = -p_\Gamma(t) \quad \text{при } t > 0 \quad (5)$$

вместе с начальными условиями

$$\rho|_{t=0} = \rho^0(r), \quad v|_{t=0} = v^0(r) \quad \text{при } r \in \Omega_0 := (r_0, R^0), \quad R|_{t=0} = R^0 > r_0. \quad (6)$$

Искомые функции $\rho > 0$ и v – это плотность и скорость жидкости, $p(\rho)$ – давление ($s \mapsto p(s)$ – соответствующая функция состояния), $\mu(\rho)$ и $\mu_1(\rho)$ – два коэффициента вязкости, f – массовая сила и p_Γ – внешнее давление. Функции f и p_Γ имеют вид

$$f(r, \chi, t) = f_S(r, \chi) + \Delta f(r, \chi, t), \quad p_\Gamma(t) = p_{\Gamma,S} + \Delta p_\Gamma(t),$$

где f_S и $p_{\Gamma,S}$ – стационарные составляющие, а Δf и Δp_Γ – возмущения, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$ в некотором слабом смысле.

Соответствующая стационарная задача состоит в нахождении пары $\{\rho_S, R_S\}$, где $\rho_S \geq 0$ – стационарная плотность и $R_S, r_0 < R_S < \infty$, – свободный радиус, для которых выполняется нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$p(\rho_S)_r = \rho_S f_S[m_S] \quad \text{с } m_S(r) := \int_{r_0}^r \rho_S(q) \varkappa(q) dq \quad \text{в } \Omega_S := (r_0, R_S) \quad (7)$$

при условии свободной границы и ограничении на массу

$$p(\rho_S)|_{r=R_S} = p_{\Gamma,S}, \quad (8)$$

$$\int_{\Omega_S} \rho_S(q) \varkappa(q) dq = M := \int_{\Omega_0} \rho^0(q) \varkappa(q) dq. \quad (9)$$

Здесь m_S – стационарная лагранжева массовая координата и

$$f_S[m_S](r) = f_S(r, m_S(r)).$$

Прокомментируем наши основные предположения. Рассматривается массовая сила f_S , зависящая как от эйлеровой, так и от лагранжевой координат, для того чтобы охватить разнообразные приложения, включив не только случай $f_S = f_S(r)$ (или $f_S = f_S(\chi)$), наиболее часто изучавшийся в литературе, но и $f_S = f_G(r, \chi) := -G(M_0 + \chi)/r^2$ с $G > 0$ и $M_0 \geq 0$, здесь f_S представляет собой

точное выражение для гравитационной силы в астрофизическом случае (со сферической симметрией), см. [1]–[4] и более конкретно [5]–[8]. Вообще говоря, на поле сил f_S не налагается условий малости, знакоопределенности или монотонности, хотя демонстрируется роль, которую они играют. Рассматривается также общее уравнение состояния $p = p(\rho)$ с $p' > 0$, включая известную политропную модель $p(\rho) = p_0 \rho^\gamma$ с любыми $\gamma > 0$ и $p_0 > 0$ (см. обсуждение соответствия этой модели астрофизике в [9]). Берутся два зависящих от плотности коэффициента вязкости $\mu = \mu(\rho)$ и $\mu = \mu_1(\rho)$, для того чтобы охватить более реалистичные физические ситуации. С другой стороны, мы ограничиваемся случаем $r_0 > 0$ и $p_{\Gamma,S} > 0$.

В первой части данного исследования (см. [10], а также краткую версию [11]) были получены равномерные по времени оценки решения и изучены свойства его стабилизации (включая ω -предельные множества для $\{\rho, R\}$) при $t \rightarrow \infty$ без анализа скорости стабилизации и асимптотической устойчивости.

В настоящей второй части (которая замкнута в себе) мы обращаемся к этим двум важным вопросам вместе с анализом имеющих к ним отношение свойств стационарной задачи. Опишем полученные результаты. Исследование начинается с анализа эйлеровой стационарной задачи со свободной границей (7)–(9) в § 2. Сначала представлен общий результат о существовании решений и его следствие, относящееся к положительным решениям, т.е. с $\rho_S > 0$, и затем изучаются в основном такие решения. Даны также явные достаточные условия единственности. В частности, в астрофизическом контексте второе из них справедливо при достаточно больших r_0 или $p_{\Gamma,S}$ или при достаточно малых M . Затем определяется *статическая устойчивость* как положительность собственных значений ассоциированной линейной второго порядка обыкновенной дифференциальной задачи на собственные значения, возникающей в результате применения метода малых возмущений. Проверяется непрерывность минимального собственного значения подобных задач по отношению к вариации области (что используется в дальнейшем) и даются достаточные условия его положительности. Выводятся также C^1 - и H^2 -оценки для ρ_S и доказывается, что статически устойчивые решения изолированы (другими словами, локально единственны) в некотором сильном смысле.

Затрагивается также вариационный аспект задачи. Статическая потенциальная энергия переписывается в виде нелинейного функционала $\mathcal{R}$ одномерного вариационного исчисления со свободным правым концом относительно функции m_S с ограничением заданной полной массы. Проверяется, что стационарные решения, и только они, являются стационарными точками $\mathcal{R}$. Более того, условие статической устойчивости означает положительность второй вариации $\mathcal{R}$. Конечно, результаты такого типа являются классическими в механике; в астрофизическом контексте см., например, [2]–[4].

Результаты, относящиеся к эйлеровой нестационарной задаче со свободной границей (1)–(6), собраны в § 3. В теореме 1 кратко представлены основные используемые результаты из [10] относительно равномерных по времени оценок решения и их стабилизации. Фактически результаты дополняются: в случае, когда ω -предельное множество для $\{\rho, R\}$ (которое целиком состоит из стационарных решений) содержит статически устойчивое положительное решение $\{\rho_S, R_S\}$, выводится просто равномерная стабилизация к этому решению.

Нашей основной целью является существенно более глубокое изучение этой стабилизации посредством вывода оценок скорости стабилизации в нормах L^2 и H^1 .

Это реализуется в теореме 2, где устанавливаются оценки скорости стабилизации в $L^2(\Omega_t)$ как для $\rho - \rho_S$, так и для v , или в $H^1(\Omega_t)$ для $\rho - \rho_S$ и в $L^2(\Omega_t)$ для v и, наконец, в $H^1(\Omega_t)$ как для $\rho - \rho_S$, так и для v . Здесь $\Omega_t = (r_0, R(t))$. Как следствие справедлива и оценка для $R - R_S$. Эти оценки скорости стабилизации являются оценками экспоненциального типа. Фактическая скорость стабилизации зависит от того, с какой скоростью стремятся к нулю возмущения Δf и Δp_Γ . Убывание решений является на самом деле экспоненциальным, если таково же убывание возмущений (в частности, если они нулевые). Чтобы вывести эти оценки, строятся и изучаются подходящие нетривиальные функционалы Ляпунова. Следствие теоремы 2 дает $H^{2,1}(Q)$ -оценку для v .

Более того, показывается, что эти оценки скорости стабилизации верны для любых значений времени $t \geq 0$ равномерно относительно начальных данных, достаточно близких в L^2 -норме к любому выбранному статически устойчивому стационарному решению $\{\rho_S, R_S\}$ при условии, что возмущения Δf и Δp_Γ также достаточно малы (скажем, в L^2 -норме). Тем самым обосновывается, что статическая устойчивость положительных стационарных решений обеспечивает их *нелинейную динамическую устойчивость* (более точно, их экспоненциальную асимптотическую устойчивость), которая дополнительно устойчива по отношению к малым нестационарным возмущениям f_S и $p_{\Gamma,S}$. Легко видеть, что фактически этот результат верен также при немонотонной p при условии, что значения ρ_S принадлежат интервалу устойчивости p , где $p' > 0$.

Остальная часть статьи посвящена соответствующему изучению лагранжевых постановок стационарной и нестационарной задач в фиксированной области, что существенно обогащает исследование в целом. В § 4 рассматривается лагранжева стационарная задача в нескольких эквивалентных формах. Сначала дается иное доказательство существования положительных решений, установленного в § 2, с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке и выводятся другие условия единственности. Дается также другое определение статической устойчивости по аналогии с § 2. Интересно, что ассоциированные задачи на собственные значения в эйлеровых и лагранжевых координатах выглядят различными, поскольку содержат производные f_S по разным переменным (соответственно χ и r), а краевые условия на правом конце в них также различны (соответственно третьего и второго родов). Тем не менее доказывается эквивалентность этих двух определений статической устойчивости. После записи статической потенциальной энергии как нелинейного функционала $\mathcal{P}$ относительно стационарного объема, теперь с фиксированными концами и без ограничений, сначала проверяется, что именно лагранжевы стационарные решения соответствуют стационарным точкам $\mathcal{P}$, а затем, что второе определение статической устойчивости эквивалентно положительности второй вариации $\mathcal{P}$. Отметим, что в общем случае ни $\mathcal{R}$, ни $\mathcal{P}$ не являются выпуклыми. Далее показывается, что статически устойчивые лагранжевы решения также изолированы в некотором сильном смысле, и они идентифицируются как точки *локального квадратичного минимума* $\mathcal{P}$.

В заключение параграфа с использованием достоинств лагранжевой формулировки приводятся новые важные достаточные условия статической устойчивости и условия единственности стационарных решений. Для вывода последних используется метод стрельбы. В астрофизическом контексте оба условия сводятся к следующему условию на первый адиабатический показатель:

$$\Gamma_1(s) := \frac{sp'(s)}{p(s)} \geq \frac{4}{3};$$

отметим, что показатель $4/3$ хорошо известен в литературе как критический. В случае $p(\rho) = p_0 \rho^\gamma$, когда $\Gamma_1 \equiv \gamma$, см. связанные (но иные) результаты в [1]–[4], [6] и [12]–[14].

В §5 представлена нестационарная задача в лагранжевых массовых координатах и даны аналоги теорем 1 и 2. В качестве основного результата в теореме 3 устанавливаются оценки скорости стабилизации в $L^2(0, M)$ и $H^1(0, M)$ (экспоненциального типа), а также результат о нелинейной динамической устойчивости. Хотя эти оценки и их доказательства сравнительно близки к соответствующим им в эйлеровых координатах, они не идентичны, и представляется важным развивать оба подхода, поскольку фактически они дополняют друг друга. Кроме того, в последнем пункте теоремы 3 показывается, что динамическая устойчивость является глобальной по отношению к данным при некотором более ограничительном вариационном условии на стационарное решение. В заключение рассматривается связь между оценками скорости стабилизации в эйлеровых и в лагранжевых координатах.

Краткая версия этих результатов представлена в [15], [16].

Чтобы завершить введение, дадим краткие литературные комментарии. Поскольку общий обзор был дан в [10], здесь мы процитируем только немногие существующие статьи, содержащие оценки скорости стабилизации при ненулевой f_S . Задача со свободной границей исследовалась в основном в простейшем случае плоской симметрии ($k = 0$). Случай $f_S = f_S(r)$, $(f_S)_r \leq 0$, был изучен в [17] в лагранжевых массовых координатах (на основе подхода, впервые развитого для ситуации с фиксированной границей в [18]). Случай $f_S = f_S(r)$, $f_S \leq 0$ (и $p(\rho) = p_0 \rho^\gamma$), был рассмотрен в [19] (на основе модифицированного подхода из [18], данного в [20]). В эйлеровых координатах случай $f_S = f_S(r)$ с $f_S(r) \leq 0$ в окрестности точки $r = R_S$ был разобран в [21]. Случай $f_S = f_S(\chi)$ при вырождении ρ_S был рассмотрен в лагранжевых массовых координатах в [22] (отметим, что скорость стабилизации оказалась там степенного типа в отличие от экспоненциальной в предыдущих статьях), см. также более раннюю статью [23].

В общем случае ($k = 0, 1, 2$), включающем намного более громоздкий сферически симметричный случай ($k = 2$), результаты [17] были обобщены в [24] при $(f_S/\varkappa)_r \leq 0$ и $\mu_1 = 0$ (на основе ранее написанной, но позже опубликованной статьи [25] для ситуации с фиксированной границей). Разностный аналог некоторых результатов из [24] содержится в [26]. Отметим также статьи [27], [28], где при $k = 2$ случай $p = p_0 \rho^\gamma$ с $\gamma = 1$ и γ близким к 1 был рассмотрен в ситуации с фиксированной границей. В астрофизическом контексте задача изучалась в [29] при $p_\Gamma = 0$ и в теплопроводном случае в [30], где в результатах о стабилизации требуются условия малости p или $1/r_0$; см. также [14] о некоторых локальных результатах в трехмерном случае без предположения о симметрии.

§ 2. Эйлерова стационарная задача

Во всей статье будем предполагать, что

$$p \in C(\overline{\mathbb{R}^+}), \quad p \text{ возрастает на } \overline{\mathbb{R}^+}, \quad p(\overline{\mathbb{R}^+}) = \overline{\mathbb{R}^+}, \quad p' \in C(\mathbb{R}^+), \quad (10)$$

$$f_S \in C([r_0, \infty) \times [0, M_1]) \quad \text{при некотором } M_1 > M. \quad (11)$$

Обозначим через p^{-1} функцию, обратную к p , и введем первообразные функции

$$F(r, \chi) := \int_{r_0}^r f_S(q, \chi) dq, \quad \pi(s) := \int_1^s \frac{p'(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad P_0(s) := \int_1^s \frac{p(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

Положим также $P_1(s) := sP_0(s)$ при $s > 0$ и $P_1(0) := \lim_{s \rightarrow 0+} P_1(s) = 0$ (см. [10]). В соответствии с [24], [10] наложим следующее общее условие на поведение f_S при $r = \infty$:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{k+1}{r^{k+1}} \cdot \max_{0 \leq \chi \leq M} F(r, \chi) \leq f_0 \quad \text{при некотором } f_0 \geq 0, \quad (12)$$

вместе с условием, связывающим f_0 и $p_{\Gamma, S}$, с параметром $N > 1$:

$$N^{-1} + M f_0 \leq p_{\Gamma, S} \leq N. \quad (13)$$

Для удобства читателя перечислим здесь другие основные условия на f_S и p , которые будут использоваться ниже в некоторых из наших утверждений:

$$\|(f_S)_r\|_{L^1((r_0, r); C[0, M])} := \|\|(f_S)_r\|_{C[0, M]}\|_{L^1(r_0, r)} \leq C(r) \quad \text{при любых } r > r_0, \quad (14)$$

$$\|(f_S)_\chi\|_{L^1((r_0, \tilde{R}_S); C[0, M_1])} \leq N \quad \text{с } \tilde{R}_S := R_S + \varepsilon_S \quad \text{при некотором } \varepsilon_S > 0, \quad (15)$$

$$\|\theta(r)[\delta]\|_{L^1(r_0, \tilde{R}_S)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0^+, \quad (16)$$

где

$$\theta(r)[\delta] := \sup_{0 < \Delta \leq \delta} \|(f_S)_\chi(r, \chi + \Delta) - (f_S)_\chi(r, \chi)\|_{C[0, M_1 - \Delta]},$$

и

$$p'' \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+), \quad \|(f_S)_r\|_{L^2((r_0, \tilde{R}_S); C[0, M_1])} + \|(f_S)_\chi\|_{L^2((r_0, \tilde{R}_S); C[0, M_1])} \leq N. \quad (17)$$

Будем рассматривать решения $\{\rho_S, R_S\}$ стационарной задачи (7)–(9) такие, что $\rho_S \in C(\overline{\Omega}_S)$, $\rho_S \geq 0$, $p_S := p(\rho_S) \in C^1(\overline{\Omega}_S)$. Стационарное решение $\{\rho_S, R_S\}$ называется *положительным*, если $(\rho_S)_{\min} := \min_{\overline{\Omega}_S} \rho_S > 0$. Ясно, что первое соотношение (7) вместе с (8) эквивалентны следующему:

$$p(\rho_S(r)) = p_{\Gamma, S} - \int_r^{R_S} \rho_S f_S[m_S] dq \quad \text{на } \overline{\Omega}_S. \quad (18)$$

Сформулируем сначала общий результат о существовании решения стационарной задачи. Пусть $K = K(N)$, $K_i = K_i(N)$, $i = 0, 1, \dots$, – положительные неубывающие функции N , которые могут зависеть также от p, f_S, M и т.д.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Предположим, что справедливы условия (10)–(13) (последнее условие (10) не требуется). Тогда существует стационарное решение $\{\rho_S, R_S\}$ такое, что $0 \leq \rho_S \leq K$ на $\overline{\Omega}_S$ и $r_0 + K_0^{-1} \leq R_S \leq K_0$. Кроме того, ρ_S удовлетворяет уравнению (7) и оценкам $0 \leq \rho_S \leq K_1$ на $[r_0, R_S + \varepsilon_S]$ при некотором $\varepsilon_S > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении дополнительных условий

$$p' \in C(\mathbb{R}^+), \quad sp'(s) = O(1) \quad \text{при } s \rightarrow 0^+ \quad (19)$$

и (14) результат следует из [10; теорема 3] (принимая во внимание оценки для ρ и R в [10; теорема 1 и замечание 1]); см. также теорему 1 в § 3 ниже. Более того, K и K_0 в оценках для ρ_S и R_S не зависят от p' и $C(r)$.

Для того чтобы снять эти условия, сначала введем усредненные функции

$$\begin{aligned} p_\delta(s) &:= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta [p(s+\alpha) - p(\alpha)] d\alpha, & f_{S,\delta}(r, \chi) &:= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta f_S(r+\alpha, \chi) d\alpha, \\ F_\delta(r, \chi) &:= \int_{r_0}^r f_{S,\delta}(q, \chi) dq = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta [F(r+\alpha, \chi) - F(r_0+\alpha, \chi)] d\alpha \end{aligned}$$

при $s \geq 0, r \geq r_0, 0 \leq \chi \leq M$ и $0 < \delta < \delta_0$ с достаточно малым δ_0 . Отметим, что условие (12) влечет неравенства

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{k+1}{r^{k+1}} \cdot \max_{0 \leq \chi \leq M} F_\delta(r, \chi) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{k+1}{r^{k+1}} \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \max_{0 \leq \chi \leq M} F(r+\alpha, \chi) d\alpha \leq f_0.$$

Поскольку также $p'_\delta(s) = [p(s+\delta) - p(s)]/\delta > 0$ при $s \geq 0$, то все условия (10)–(12), (13), (19) и (14) справедливы для $p_\delta, f_{S,\delta}, F_\delta$ в роли p, f_S, F (последнее условие – с некоторым $C = C_\delta(r)$). Следовательно, существуют решения $\{\rho_{S,\delta}, R_{S,\delta}\}$ стационарной задачи с $p_\delta, f_{S,\delta}$ в роли p, f_S и справедливы оценки

$$0 \leq \rho_{S,\delta} \leq K, \quad r_0 + K_0^{-1} \leq R_{S,\delta} \leq K_0.$$

Более того, анализируя доказательство теоремы 1, пп. 1, 2 в [10] (только в упрощенном случае $\rho^0 \equiv \text{const}, v^0 = 0, \Delta f = 0$ и $\Delta p_\Gamma = 0$) и используя неравенства $p(s) - p(\delta) \leq p_\delta(s) \leq p(s+\delta)$ при $s \geq 0$, находим, что K и K_0 не зависят от δ .

Дополнительно неравенства для p_δ влекут соответствующие им для обратной функции к p_δ : $p^{-1}(s) - \delta \leq p_\delta^{-1}(s) \leq p^{-1}(s + p(\delta))$ при $s \geq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|p^{-1} - p_\delta^{-1}\|_{C[0, s_0]} &\rightarrow 0, & \|f_S - f_{S,\delta}\|_{C([r_0, r] \times [0, M_1])} &\rightarrow 0 \\ \text{при } \delta \rightarrow 0 &\text{ для любых } s_0 > 0, r > r_0. \end{aligned}$$

При заданном R_S можно переписать уравнения (7)–(9) как задачу Коши для системы ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений)

$$\frac{dp_S}{dr} = p^{-1}(p_S) f_S[m_S], \quad \frac{dm_S}{dr} = p^{-1}(p_S) \varkappa \quad \text{на } \Omega_S = (r_0, R_S), \quad (20)$$

$$p_S(R_S) = p_{\Gamma, S}, \quad m_S(R_S) = M \quad (21)$$

для пары функций (p_S, m_S) ; кроме того, $m_S(r_0) = 0$. Предполагается, что $p_S, m_S \in C^1(\bar{\Omega}_S)$, $p_S \geq 0$ и $0 \leq m_S \leq M$ на $[r_0, R_S]$. Рассматривая эту задачу с $p_\delta^{-1}, f_{S,\delta}, R_{S,\delta}$ в роли p^{-1}, f_S, R_S , в силу указанного выше результата о существовании вместе с теоремой существования Пеано при $r > R_{S,\delta}$ получаем, что решения

$$(p_{S,\delta}, m_{S,\delta}) = \left(p_\delta(\rho_{S,\delta}), \int_{r_0}^r \rho_{S,\delta} \varkappa dq \right)$$

существуют и удовлетворяют оценкам $0 \leq p_{S,\delta} \leq K_2$ и $0 \leq m_{S,\delta} \leq M_1$ на $[r_0, R_{S,\delta} + 2\varepsilon_S]$ с K_2 и $\varepsilon_S > 0$, не зависящими от δ .

Пусть R_{S,δ_n} — произвольная сходящаяся последовательность с некоторым $\delta_n \rightarrow 0$, а $R_S := \lim_{n \rightarrow \infty} R_{S,\delta_n}$. В силу хорошо известных свойств последовательностей решений задачи Коши (см., например, [31; теорема I.2.4]) существует подпоследовательность (за которой сохраняем прежнее обозначение) такая, что $(p_{S,\delta_n}, m_{S,\delta_n})$ сходится к (p_S, m_S) в $C[r_0, R_S + \varepsilon_S]$, где (p_S, m_S) служит решением задачи Коши (20), (21). Ясно, что $m_S(r_0) = 0$ и $\{\rho_S, R_S\}$ с $\rho_S = p^{-1}(p_S)$ является стационарным решением с предписанными свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если выполнено условие

$$\frac{f_S(r, \chi)}{\kappa(r)} \leq f_0 \quad \text{при всех } (r, \chi) \in \overline{\Pi}_\infty := [r_0, \infty) \times [0, M] \quad \text{с некоторым } f_0 \geq 0 \quad (22)$$

(более жесткое, чем (12)) вместе с (13), то любое стационарное решение $\{\rho_S, R_S\}$ положительно, более того, $(\rho_S)_{\min} \geq p^{-1}(N^{-1})$ (поскольку $p(\rho_S) \geq p_{\Gamma,S} - M f_0 \geq N^{-1}$ в силу уравнения (18) и ограничения на массу (9)). В соответствии с утверждением 1 такое решение существует и удовлетворяет оценке $\rho_S \leq K$ на $\overline{\Omega}_S$.

Замечание 1 обобщает результат о существовании из [17], [24], где $f_S = f_S(r)$. Иное его доказательство (использующее лагранжеву формулировку задачи) будет дано в § 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для положительных решений $\{\rho_S, R_S\}$ ограничение на массу (9) влечет оценку сверху

$$R_S \leq \overline{R}_S((\rho_S)_{\min}) \quad \text{с} \quad \overline{R}_S(\alpha) := \left(r_0^{k+1} + (k+1) \frac{M}{\alpha} \right)^{1/(k+1)}.$$

Кроме того, аналогично [10; замечание 10] $\rho_S \in C^1(\overline{\Omega}_S)$ при условии, что $p' > 0$, поскольку $\rho_S = p^{-1}(p_S)$ и

$$(\rho_S)_r = \frac{1}{p'(\rho_S)} \rho_S f_S[m_S]. \quad (23)$$

Дадим теперь некоторые достаточные условия единственности стационарного решения. Положим $\rho_{\Gamma,S} := p^{-1}(p_{\Gamma,S})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1) Если $f_S \leq 0$ и $f_S(r, \chi)$ не убывает по $\chi \in [0, M]$ при любых $r \in [r_0, \overline{R}_S(\rho_{\Gamma,S})]$, то стационарная задача имеет единственное решение.

2) Пусть f_S удовлетворяет условиям $f_S \leq 0$ и

$$f_S(r, \widehat{\chi}) - f_S(r, \chi) \geq -\psi(r)(\widehat{\chi} - \chi) \quad (24)$$

при всех $0 \leq \chi < \widehat{\chi} \leq M, \quad r_0 \leq r \leq \overline{R}_S(\rho_{\Gamma,S})$

с некоторой функцией $\psi \in L^1(r_0, r)$ при всех $r > r_0$, $\psi \geq 0$, такой, что

$$\frac{M}{C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S})} \int_{r_0}^{\overline{R}_S(\rho_{\Gamma,S})} \psi dr \leq 1, \quad (25)$$

где $C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S}) := \inf_{s \geq \rho_{\Gamma,S}} p'(s) > 0$. Тогда стационарная задача имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $(\rho_S)_{\min} > 0$ стационарное уравнение (7) можно переписать в хорошо известной форме

$$[\pi(\rho_S)]_r = f_S[m_S] \quad \text{в } \Omega_S = (r_0, R_S). \quad (26)$$

При $f_S \leq 0$ функции $p(\rho_S)$ и ρ_S не возрастают на $[r_0, R_S]$, поэтому $(\rho_S)_{\min} = \rho_{\Gamma, S} > 0$ и $R_S \leq \bar{R}_S(\rho_{\Gamma, S})$.

Предположим, что существуют два различных решения $\{\rho_S, R_S\}$ и $\{\hat{\rho}_S, \hat{R}_S\}$, скажем, с $R_S \leq \hat{R}_S$ и $\rho_S \not\equiv \hat{\rho}_S$ на $\bar{\Omega}_S$ (приняв во внимание (9)). Ясно, что

$$(\pi(\rho_S) - \pi(\hat{\rho}_S))_r = f_S[m_S] - f_S[\hat{m}_S] \quad \text{в } \Omega_S$$

с $\hat{m}_S := \int_{r_0}^r \hat{\rho}_S \kappa dq$. Умножив это равенство на $-(m_S - \hat{m}_S)$, проинтегрировав по Ω_S и воспользовавшись (8) и (9), получим равенство

$$\mathcal{B}_{R_S}[\rho_S, \hat{\rho}_S] = 0 \quad (27)$$

с формой

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{R_S}[\rho_S, \hat{\rho}_S] &:= \int_{\Omega_S} (\pi(\rho_S) - \pi(\hat{\rho}_S))(\rho_S - \hat{\rho}_S) \kappa dr \\ &\quad - [\pi(\rho_{\Gamma, S}) - \pi(\hat{\rho}_S(R_S))](M - \hat{m}_S(R_S)) \\ &\quad + \int_{\Omega_S} (f_S[m_S] - f_S[\hat{m}_S])(m_S - \hat{m}_S) dr =: S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу соотношений (26), (8) и (9), примененных к $\{\hat{\rho}_S, \hat{R}_S\}$, и условия $f_S \leq 0$ имеем

$$S_2 = - \int_{R_S}^{\hat{R}_S} f_S[\hat{m}_S] dr \int_{R_S}^{\hat{R}_S} \hat{\rho}_S \kappa dr \geq 0. \quad (29)$$

В случае $f_S(r, \chi)$, не убывающей по χ , имеем $S_3 \geq 0$ и поэтому $S_1 \leq 0$ в силу (27). Поскольку π возрастает на $\mathbb{R}^+$, то это означает, что $\rho_S = \hat{\rho}_S$ на $\bar{\Omega}_S$ и приводит к противоречию.

В случае, когда выполнены условия п. 2), запишем соотношения

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\Omega_S} \int_0^1 \frac{p'(s_\alpha)}{s_\alpha} d\alpha (\rho_S - \hat{\rho}_S)^2 \kappa dr \geq C^{(1)}(\rho_{\Gamma, S}) \bar{S}_1 \\ \text{с } \bar{S}_1 &:= \int_{\Omega_S} \int_0^1 \frac{d\alpha}{s_\alpha} (\rho_S - \hat{\rho}_S)^2 \kappa dr, \end{aligned} \quad (30)$$

где $s_\alpha := (1 - \alpha)\hat{\rho}_S + \alpha\rho_S$. Условие (24) влечет оценку снизу

$$S_3 \geq - \int_{\Omega_S} \psi(m_S - \hat{m}_S)^2 dr \geq - \int_{\Omega_S} \psi dr \|m_S - \hat{m}_S\|_{C(\bar{\Omega}_S)}^2. \quad (31)$$

Далее, имеем

$$\|m_S - \hat{m}_S\|_{C(\bar{\Omega}_S)}^2 \leq \left(\int_{\Omega_S} |\rho_S - \hat{\rho}_S| \kappa dr \right)^2 \leq \int_{\Omega_S} \left(\int_0^1 \frac{d\alpha}{s_\alpha} \right)^{-1} \kappa dr \cdot \bar{S}_1. \quad (32)$$

В силу неравенства Коши–Шварца

$$1 \leq \int_0^1 s_\alpha(r) d\alpha \int_0^1 \frac{d\alpha}{s_\alpha(r)} \quad \text{на } \overline{\Omega}_S,$$

более того, указанное неравенство является строгим в любой точке $r \in \overline{\Omega}_S$, где $\rho_S(r) \neq \widehat{\rho}_S(r)$. Поэтому в силу предположения $\rho_S(r) \neq \widehat{\rho}_S(r)$ на $\overline{\Omega}_S$ находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \left(\int_0^1 \frac{d\alpha}{s_\alpha} \right)^{-1} \varkappa dr &< \int_{\Omega_S} \int_0^1 s_\alpha d\alpha \varkappa dr \\ &= \int_0^1 \left[(1-\alpha) \int_{\Omega_S} \widehat{\rho}_S \varkappa dr + \alpha \int_{\Omega_S} \rho_S \varkappa dr \right] d\alpha \leq M. \end{aligned}$$

В итоге соотношения (27)–(32) приводят к неравенству

$$\overline{S}_1 \left(C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S}) - M \int_{r_0}^{R_S} \psi dr \right) < 0$$

с $\overline{S}_1 > 0$, которое противоречит условию (25).

Пункт 1) утверждения 2 обобщает результат о единственности из [32], данный в случае $f_S = f_S(r)$ и $k = 0$. Фактически этот пункт справедлив без существования p' (если в доказательстве переопределить π в соответствии с [18]).

В п. 2) если p' является не убывающей на $\mathbb{R}^+$ (например, если $p(s) = p_0 s^\gamma$ с $\gamma \geq 1$), то $C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S}) = p'(\rho_{\Gamma,S})$. Условие (25) справедливо при достаточно малом $M \leq \overline{M}(r_0, \rho_{\Gamma,S})$ или при достаточно большом $\rho_{\Gamma,S} \geq \underline{\rho}_{\Gamma,S}(r_0, M)$. Кроме того, если дополнительно $\psi \in L^1(1, \infty)$, то это условие выполнено также при достаточно большом $r_0 \geq \underline{r}_0(M, \rho_{\Gamma,S})$.

В случае $f_S = f_G$, $k = 2$ условие (25) принимает вид

$$\frac{GM}{r_0 C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S})} \left(1 - \frac{r_0}{\overline{R}_S(\rho_{\Gamma,S})} \right) \leq 1$$

и следует из

$$\frac{GM}{r_0 C^{(1)}(\rho_{\Gamma,S})} \leq 1$$

(ср. с [30]).

Отметим, что даже в весьма специальном изотермическом случае $p(s) = p_0 s$ и при $f_S = f_S(r)$ стационарная задача может иметь конечное, счетное или континуальное множество положительных стационарных решений [33].

Обратимся к проблеме статической устойчивости. Следуя методу малых возмущений, мы можем заменить положительное решение $\{\rho_S, R_S\}$ на $\{\rho, R\} = \{\rho_S + \Delta\rho, R_S + \Delta R\}$ с малым $\{\Delta\rho, \Delta R\}$ и линеаризовать оператор задачи (26), (8), (9) с точностью до членов второго порядка малости по отношению к $\{\Delta\rho, \Delta R\}$:

$$\begin{aligned} [\pi(\rho)]_r - f_S[m] &= \left[\frac{p'(\rho_S)}{\rho_S} \Delta\rho \right]_r - (f_S)_\chi[m_S] \Delta m + \dots \quad \text{в } \Omega_S, \\ p(\rho(R)) - p_{\Gamma,S} &= p'(\rho_S(R_S))((\rho_S)_r(R_S) \Delta R + \Delta\rho(R_S)) + \dots, \\ m(R) - M &= (\rho_S \varkappa)(R_S) \Delta R + \Delta m(R_S) + \dots, \end{aligned}$$

где $\Delta m(r) := \int_{r_0}^r (\Delta \rho) \varkappa dq$. В силу уравнения (7) при $r = R_S$ имеем

$$p'(\rho_S(R_S))(\rho_S)_r(R_S) = \rho_S(R_S) f_S[m_S](R_S).$$

Поскольку $\Delta \rho = \varkappa^{-1}(\Delta m)_r$ и $\Delta R = -(\Delta m/(\rho_S \varkappa))(R_S)$, то можно исключить $\Delta \rho$ и ΔR и затем рассмотреть ассоциированную задачу на собственные значения для линеаризованного оператора

$$-\left[\frac{p'(\rho_S)}{\varkappa \rho_S} (\Delta m)_r \right]_r + (f_S)_\chi[m_S] \Delta m = \lambda a_0 \Delta m \quad \text{в } \Omega_S, \quad (33)$$

$$\Delta m(r_0) = 0, \quad \left\{ \frac{p'(\rho_S)}{\varkappa \rho_S} (\Delta m)_r - \frac{f_S[m_S]}{\varkappa \rho_S} \Delta m \right\} \Big|_{r=R_S} = 0. \quad (34)$$

Здесь предполагается, что выполнено условие (15) и $a_0 \in C(\overline{\Omega}_S)$ — некоторая функция с $(a_0)_{\min} > 0$. Положительное стационарное решение называется *статически устойчивым*, если

$$\lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\} > 0, \quad (35)$$

где $\lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\}$ — минимальное собственное значение этой самосопряженной задачи на собственные значения для ОДУ второго порядка. Это определение не зависит от выбора a_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В частном случае, когда $f_S = f_S(r)$, вопрос о статической устойчивости решается просто. Выбрав $a_0 := \rho_S \varkappa / p'(\rho_S)$ и перейдя к новой переменной $z(r) := \int_{r_0}^r a_0 dq$, легко преобразовать задачу на собственные значения (33), (34) к аналогичной простейшей с постоянными коэффициентами

$$-y_{zz} = \lambda y \quad \text{на } (0, z_S), \quad y(0) = 0, \quad y_z(z_S) - \frac{1}{\rho_{\Gamma,S}} \frac{f_S}{\varkappa}(R_S) y(z_S) = 0,$$

где $z_S = z(R_S)$. Последняя задача решается явно и удовлетворяет условию (35) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\rho_{\Gamma,S}} \frac{f_S}{\varkappa}(R_S) z_S = \frac{f_S(R_S)}{\rho_{\Gamma,S} \varkappa(R_S)} \int_{\Omega_S} \frac{\rho_S}{p'(\rho_S)} \varkappa dr < 1.$$

Это условие очевидным образом выполнено при $f_S(r) \leq 0$ [19] или $f_S(R_S) \leq 0$ [21].

В дальнейшем мы будем опираться на один вспомогательный результат. Рассмотрим самосопряженную задачу на собственные значения для ОДУ второго порядка

$$-(aw_r)_r + bw = \lambda w \quad \text{на } (r_0, R), \quad (36)$$

$$w(r_0) = 0, \quad (aw_r + dw)(R) = 0, \quad (37)$$

с параметром $R \in (r_0, \overline{R}]$ и коэффициентами $a \in L^\infty(r_0, \overline{R})$ с $0 < \delta_0 \leq a$ на $(r_0, \overline{R})$, $b \in L^1(r_0, \overline{R})$ и $d \in C((r_0, \overline{R}])$. Пусть $\lambda_{\min}(R)$ — минимальное собственное значение этой задачи (которая, конечно, должна пониматься в обобщенном смысле).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Имеет место свойство $\lambda_{\min}(R) \in C((r_0, \overline{R}])$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем краткими, поскольку результат представляет собой упражнение по спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов. Для $w \in \tilde{H}^1(r_0, R) := \{\varphi \in H^1(r_0, R) : \varphi(r_0) = 0\}$ введем ассоциированные с введенной задачей энергетический функционал и отношение Рэлея:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_R[w] &:= \int_{r_0}^R (aw_r^2 + bw^2) dr + d(R)w^2(R), \\ \mathcal{R}_R[w] &:= \mathcal{J}_R[w] \left(\int_{r_0}^R w^2 dr \right)^{-1} \quad (\text{при } w \neq 0).\end{aligned}$$

Пусть $r_{\varepsilon_0} := r_0 + \varepsilon_0 \leq R \leq \bar{R}$ при любом фиксированном $\varepsilon_0 \in (0, \bar{R} - r_0)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\left| \int_{r_0}^R bw^2 dr + d(R)w^2(R) \right| &\leq (\|b\|_{L^1(r_0, \bar{R})} + \|d\|_{C[r_{\varepsilon_0}, \bar{R}]}) \|w\|_{C[r_0, R]}^2 \\ &\leq \varepsilon \|w_r\|_{(r_0, R)}^2 + \varepsilon^{-1} C_{0\varepsilon_0} \|w\|_{(r_0, R)}^2 \quad \text{при всех } w \in \tilde{H}^1(r_0, R)\end{aligned} \quad (38)$$

с любым $\varepsilon > 0$ (здесь и далее в доказательствах примем сокращение $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_{L^2(G)}$). Воспользовавшись этой оценкой в сочетании с формулой Рэлея

$$\lambda_{\min}(R) = \min_{w \in \tilde{H}^1(r_0, R)} \mathcal{R}_R[w],$$

сначала получим, что

$$\sup_{[r_{\varepsilon_0}, \bar{R}]} |\lambda_{\min}(R)| \leq C_{1\varepsilon_0}. \quad (39)$$

Пусть $w^{(R)} \in \tilde{H}^1(r_0, R)$ с $\|w^{(R)}\|_{(r_0, R)} = 1$ — собственная функция, отвечающая $\lambda_{\min}(R)$. Тогда $\mathcal{J}_R[w^{(R)}] = \lambda_{\min}(R)$. Эта формула вместе с (38) и (39) влечет оценку

$$\sup_{[r_{\varepsilon_0}, \bar{R}]} \|w^{(R)}\|_{H^1(r_0, R)} \leq C_{2\varepsilon_0}. \quad (40)$$

Пусть теперь $r_{\varepsilon_0} \leq R_1 < R_2 \leq \bar{R}$. Применив формулу Рэлея в сочетании с условиями на коэффициенты a, b, d и оценкой (40), получим

$\lambda_{\min}(R_2) \leq \mathcal{R}_{R_2}[\tilde{w}^{(R_1)}] = \mathcal{R}_{R_1}[\tilde{w}^{(R_1)}] + \alpha(R_2 - R_1) = \lambda_{\min}(R_1) + \alpha(R_2 - R_1)$, где $\tilde{w}^{(R_1)}$ — продолжение $w^{(R_1)}$ постоянной $w^{(R_1)}(R_1)$ на $r > R_1$, а α — некоторая функция такая, что $\alpha(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0^+$. Аналогично

$$\lambda_{\min}(R_1) \leq \mathcal{R}_{R_1}[w^{(R_2)}] = \mathcal{R}_{R_2}[w^{(R_2)}] + \alpha(R_2 - R_1) = \lambda_{\min}(R_2) + \alpha(R_2 - R_1).$$

Поэтому $|\lambda_{\min}(R_2) - \lambda_{\min}(R_1)| \leq \alpha(R_2 - R_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что в случае $\lambda_{\min}(R) > 0$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_R[w] &\geq C_1 \|w_r\|_{L^2(r_0, R)}^2 \quad \text{при всех } w \in \tilde{H}^1(r_0, R) \\ \text{с } C_1 &:= \frac{\delta_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\delta_0} \frac{C_{0\varepsilon_0}}{\lambda_{\min}(R)} \right)^{-1}\end{aligned}$$

(которое следует из $\mathcal{J}_R[w] \geq \lambda_{\min}(R) \|w\|_{L^2(r_0, R)}^2$ и (38)).

Напомним также, что $w^{(R)} \in C^1(\bar{\Omega}_S)$ при условии, что $a \in C(\bar{\Omega}_S)$; более того, $w^{(R)} \in C^2(\bar{\Omega}_S)$ при условии, что $a \in C^1(\bar{\Omega}_S)$ и $b \in C(\bar{\Omega}_S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ясно, что для всех $w \in \tilde{H}^1(r_0, R)$

$$\|w\|_{C[r_0, R]}^2 \leq \left(\int_{r_0}^R |w_r| dr \right)^2 \leq \left\| \frac{1}{a} \right\|_{L^1(r_0, R)} \|aw_r^2\|_{L^1(r_0, R)}. \quad (41)$$

Поэтому $\lambda_{\min}(R) > 0$ (так как $\mathcal{J}_R[w] \geq (1 - \alpha_0) \|aw_r^2\|_{L^1(r_0, R)}$) при условии, что

$$\alpha_0 := \left(\int_{r_0}^R b_-(r) dr + d_-(R) \right) \int_{r_0}^R \frac{dr}{a(r)} < 1;$$

здесь и ниже $\varphi_- = \max\{-\varphi, 0\}$ и $\varphi_+ = \max\{\varphi, 0\}$.

Более того, заметим, что оба неравенства в (41) фактически являются равенствами, если и только если

$$\frac{w(r)}{w_0(r)} \equiv \text{const} \quad \text{на } (r_0, R) \quad \text{с } w_0(r) = \int_{r_0}^r \frac{dq}{a(q)}.$$

Далее, w_0 является собственной функцией, отвечающей $\lambda = 0$ (как следствие $\mathcal{J}_R[w_0] = 0$), если и только если

$$b = 0 \quad \text{на } (r_0, R), \quad d(R) \int_{r_0}^R \frac{dr}{a(r)} = -1. \quad (42)$$

Таким образом, в случае, когда $\alpha_0 = 1$ и не выполнено по крайней мере одно из условий (42), опять-таки $\lambda_{\min}(R) > 0$. С другой стороны, $\lambda_{\min}(R) \leq 0$ при условии, что

$$w_0(R) \mathcal{J}_R[\bar{w}_0] = 1 + \left(\int_{r_0}^R b \bar{w}_0^2 dr + d(R) \right) \int_{r_0}^R \frac{dr}{a(r)} \leq 0 \quad \text{с } \bar{w}_0 := \frac{w_0}{w_0(R)}.$$

В связи с нашей исходной задачей рассмотрим случай

$$a = \frac{p'(\rho_S)}{\varkappa \rho_S}, \quad b = (f_S)_\chi[m_S], \quad d = -\frac{f_S}{\varkappa \rho_S}(R_S, M)$$

и $a_0 \equiv 1$. Как следствие

$$\lambda_{\min}(R) = \lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\}(R), \quad \lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\} = \lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\}(R_S)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R[w] &:= \mathcal{J}_R\{\rho_S, R_S\}[w] = \int_{r_0}^R \left(\frac{p'(\rho_S)}{\varkappa \rho_S} w_r^2 + (f_S)_\chi[m_S] w^2 \right) dr \\ &\quad - \frac{f_S}{\varkappa \rho_S}(R_S, M) w^2(R). \end{aligned}$$

Теперь представим оценки для ρ_S и докажем, что статически устойчивые решения являются изолированными в некотором сильном смысле, что будет существенно в следующем параграфе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $p' > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и $\{\rho_S, R_S\}$ – любое стационарное решение такое, что $(\rho_S)_{\min} \geq \delta_S > 0$ при некотором $\delta_S > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Имеет место свойство $\rho_S \in C^1(\overline{\Omega}_S)$ и справедлива оценка

$$\|\rho_S\|_{C^1(\overline{\Omega}_S)} \leq K. \quad (43)$$

Более того, ρ_S может быть продолжена на $[r_0, \tilde{R}_S]$, $\tilde{R}_S := R_S + \varepsilon_S$ при некотором $\varepsilon_S > 0$, так, что будут выполняться оценки (43), (7) и $\rho_S \geq \delta_S/2$.

Величины K и ε_S в этом пункте и п. 3) ниже зависят от δ_S .

2) При выполнении условия (15) не существует решения $\{\hat{\rho}_S, \hat{R}_S\}$ такого, что $\hat{R}_S = R_S$ и $\hat{\rho}_S \neq \rho_S$. Более того, ρ_S однозначно определена на $[R_S, \tilde{R}_S]$.

3) При выполнении условий (17) справедлива оценка $\|(\rho_S)_{rr}\|_{L^2(r_0, \tilde{R}_S)} \leq K$.

4) При выполнении условий (15), (16) вместе с (35) (т.е. когда $\{\rho_S, R_S\}$ статически устойчиво) при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ не существует другого решения $\{\hat{\rho}_S, \hat{R}_S\}$ такого, что $|R_S - \hat{R}_S| < \varepsilon_0$. Это другое решение не предполагается положительным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В соответствии с замечанием 2 $\rho_S \in C^1(\overline{\Omega}_S)$. Чтобы доказать (43), в силу неравенства (18) сначала получим

$$p(\rho_S) \leq p_{\Gamma, S} + M r_0^{-k} \|f_S\|_{C(\overline{\Pi}_S)}, \quad \text{где } \Pi_S := (r_0, \overline{R}_S(\delta_S)) \times J,$$

и поэтому $\rho_S \leq K_0$ (так как $p(+\infty) = +\infty$). Затем в силу (23)

$$\|(\rho_S)_r\|_{C(\overline{\Omega}_S)} \leq \frac{1}{\min_{[\delta_S, K_0]} p'(s)} K_0 \|f_S\|_{C(\overline{\Pi}_S)} \leq K.$$

2) Вернемся к задаче Коши (20), (21). Если она имеет решение такое, что $p_S > 0$ на $\overline{\Omega}_S$, то в силу условий (10) и (15) любое другое решение $(\hat{p}_S, \hat{m}_S)$ совпадает с (p_S, m_S) на всяком сегменте $[R_S - \delta, R_S] \subset \overline{\Omega}_S$, где $\hat{p}_S > 0$, а поэтому и на всем $\overline{\Omega}_S$. Это обеспечивает отсутствие другого решения $\{\hat{\rho}_S, \hat{R}_S\}$ такого, что $\hat{R}_S = R_S$.

Рассмотрев снова ту же задачу Коши, но теперь при $r > R_S$, можно продолжить ρ_S и m_S как функции из $C^1[r_0, \tilde{R}_S]$ для $\tilde{R}_S = R_S + \varepsilon_S$ с $\min_{[r_0, \tilde{R}_S]} \rho_S \geq \delta_S/2$ и $\max_{[r_0, \tilde{R}_S]} m_S \leq M_1 - \varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon_S > 0$ и $\varepsilon > 0$; более того, это продолжение единственно при условии (15). Как следствие соотношения (7) удовлетворяются на $[r_0, \tilde{R}_S]$. Рассуждения п. 1) доказательства показывают, что оценка $\|\rho_S\|_{C^1[r_0, \tilde{R}_S]} \leq K_1$ также справедлива.

3) При выполнении условий (17) можно продифференцировать (23) на $(r_0, \tilde{R}_S)$:

$$\begin{aligned} (\rho_S)_{rr} = & -\frac{p''(\rho_S)}{(p'(\rho_S))^2} (\rho_S)_r \rho_S f_S[m_S] + \frac{1}{p'(\rho_S)} ((\rho_S)_r f_S[m_S] \\ & + \rho_S (f_S)_r[m_S] + \rho_S^2 \varkappa(f_S)_\chi[m_S]), \end{aligned}$$

что и влечет п. 3).

4) Чтобы доказать п. 4), будем рассуждать от противного. Предположим, что существует последовательность решений $\{\rho_{S,n}, R_{S,n}\}$, $n \geq 1$, такая, что $R_{S,n} \neq R_S$ (см. п. 2)) и $R_{S,n} \rightarrow R_S$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым получим последовательность

$$(p_{S,n}, m_{S,n}) = \left(p(\rho_{S,n}), \int_{r_0}^r (\rho_{S,n} \varkappa)(q) dq \right)$$

решений задачи Коши (20), (21) с $R_{S,n}$ в роли R_S . Эти решения можно продолжить с $\Omega_{S,n} := (r_0, R_{S,n})$, удовлетворив (20) на большем интервале $(r_0, R_{S,n} + \varepsilon)$, с $\varepsilon \in (0, \varepsilon_S)$, не зависящим от n . В силу свойств последовательностей решений задачи Коши (см. опять [31; теорема I.2.4]) и единственности решений (p_S, m_S) на $[r_0, R_S + \varepsilon_S]$ получим, что $\|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon/2]} \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon/2]} \rightarrow 0 \quad (44)$$

и $\min_{[r_0, R_S + \varepsilon/2]} \rho_{S,n} \geq \delta_S/4$ при достаточно больших n .

По аналогии с (27) справедливо равенство

$$\mathcal{B}_{R_{S,n}}[\rho_{S,n}, \rho_S] = 0 \quad (45)$$

для формы

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{R_{S,n}}[\rho_{S,n}, \rho_S] &= \int_{\Omega_{S,n}} (\pi(\rho_{S,n}) - \pi(\rho_S))(\rho_{S,n} - \rho_S) \varkappa dr \\ &\quad - [\pi(\rho_{\Gamma,S}) - \pi(\rho_S(R_{S,n}))](m_{S,n} - m_S)(R_{S,n}) \\ &\quad + \int_{\Omega_{S,n}} (f_S[m_{S,n}] - f_S[m_S])(m_{S,n} - m_S) dr \\ &=: S_{1,n} + S_{2,n} + S_{3,n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Проанализируем слагаемые $S_{1,n}$, $S_{2,n}$ и $S_{3,n}$. Во-первых, в силу равномерных двусторонних оценок для $\rho_{S,n}$ и ρ_S на $\overline{\Omega}_{S,n}$ вместе с (10) и (44) имеем

$$\begin{aligned} S_{1,n} &= \int_{\Omega_{S,n}} \left\{ \frac{p'(\rho_S)}{\rho_S} + \alpha[\|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{C(\overline{\Omega}_{S,n})}] \right\} (\rho_{S,n} - \rho_S)^2 \varkappa dr \\ &= \int_{\Omega_{S,n}} \frac{p'(\rho_S)}{\rho_S} (\rho_{S,n} - \rho_S)^2 \varkappa dr + o(\|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{\Omega_{S,n}}^2). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь и ниже $\alpha[z]$ – различные функции в интегралах по некоторым интервалам E , зависящие от параметра z и обладающие свойством $\|\alpha[z]\|_{C(\overline{E})} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0^+$.

Во-вторых, в силу уравнения (26) на $\Omega_{S,n}$ и непрерывности f_S и ρ_S получим

$$\begin{aligned} \pi(\rho_{\Gamma,S}) - \pi(\rho_S(R_{S,n})) &= \int_{R_{S,n}}^{R_S} f_S[m_S] dr \\ &= \int_{R_{S,n}}^{R_S} \rho_S \varkappa \left(\frac{f_S}{\rho_S \varkappa}(R_S, M) + \alpha[|R_{S,n} - R_S|] \right) dr, \end{aligned}$$

поскольку $|M - m_S(r)| \leq \left| \int_{R_{S,n}}^{R_S} \rho_S \varkappa dr \right| \leq K |R_{S,n} - R_S|$ при r между $R_{S,n}$ и R_S .

Поскольку также

$$\int_{R_{S,n}}^{R_S} \rho_S \varkappa dr = (m_{S,n} - m_S)(R_{S,n}), \quad (48)$$

то получим (ср. с (29))

$$S_{2,n} = -\frac{f_S}{\varkappa \rho_S}(R_S, M)(m_{S,n} - m_S)^2(R_{S,n}) + o(|R_{S,n} - R_S|^2). \quad (49)$$

В-третьих, аналогично (47) выведем

$$\begin{aligned} S_{3,n} &= \int_{\Omega_{S,n}} \left\{ (f_S)_\chi[m_S] + O(\theta[\|m_{S,n} - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_{S,n})}]) \right\} (m_{S,n} - m_S)^2 dr \\ &= \int_{\Omega_{S,n}} (f_S)_\chi[m_S] (m_{S,n} - m_S)^2 dr \\ &\quad + O(\|\theta[\|m_{S,n} - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_{S,n})}]\|_{L^1(\Omega_{S,n})} \|m_{S,n} - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_{S,n})}^2). \end{aligned} \quad (50)$$

Формула (48) влечет неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta_S}{2} r_0^k |R_{S,n} - R_S| &\leq \|m_{S,n} - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_{S,n})} \\ &\leq \|(\rho_{S,n} - \rho_S) \varkappa\|_{L^1(\Omega_{S,n})} \leq K \|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{\Omega_{S,n}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Поэтому, подставляя (47), (49) и (50) в (46), а также используя (16), находим

$$\mathcal{B}_{R_{S,n}}[\rho_{S,n}, \rho_S] = \mathcal{J}_{R_{S,n}}[m_{S,n} - m_S] + o(\|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{\Omega_{S,n}}^2). \quad (52)$$

В силу утверждения 3 и условия (35) $\lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\}(R_{S,n}) \geq \lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\}/2 > 0$ при достаточно больших $n \geq N$. Поэтому для таких n согласно замечанию 4

$$\mathcal{J}_{R_{S,n}}[m_{S,n} - m_S] \geq K^{-1} \|\rho_{S,n} - \rho_S\|_{\Omega_{S,n}}^2 \quad (53)$$

(где K не зависит от n). Теперь (45), (52) и (53) влекут равенство $\rho_{S,n} = \rho_S$ на $\overline{\Omega}_{S,n}$ при $n \geq N$, которое противоречит ограничению на массу (9).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p' > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и при некотором $\delta_S > 0$ справедливы условия (15) и (16) с $\overline{R}_S(\delta_S)$ в роли $\tilde{R}_S$. Тогда может существовать только конечное число статически устойчивых решений таких, что $(\rho_S)_{\min} \geq \delta_S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить п. 4) с учетом замечания 2 (от противного).

Рассуждения из доказательства п. 4) относительно $\mathcal{B}_{R_{S,n}}[\rho_{S,n}, \rho_S]$ можно было бы заменить более простыми, но они будут существенно использованы в доказательстве оценок скорости стабилизации в следующем параграфе.

В силу замечания 5 условие

$$\alpha_0 := \left\{ \int_{\Omega_S} ((f_S)_\chi[m_S])_- dr + \frac{(f_S(R_S, M))_+}{\rho_{\Gamma, S} \varkappa(R_S)} \right\} \int_{\Omega_S} \frac{\rho_S}{p'(\rho_S)} \varkappa dr \leq 1$$

вместе с любым из двух условий

$$\text{meas}\{r \in \Omega_S : (f_S)_\chi[m_S](r) \neq 0\} > 0, \quad \frac{f_S(R_S, M)}{\rho_{\Gamma, S} \varkappa(R_S)} \int_{\Omega_S} \frac{\rho_S}{p'(\rho_S)} \varkappa dr \neq 1 \quad (54)$$

в случае $\alpha_0 = 1$ достаточно для того, чтобы получить $\lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\} > 0$.

Сравним эти условия с условиями из утверждения 2, п. 2). Во-первых, условие (15) с $\bar{R} = \bar{R}_S(\delta_S)$ влечет, что $\psi \geq \|((f_S)_\chi)_-\|_{C[0, M]}$ в (24). Далее, при $f_S \leq 0$ получим

$$\int_{\Omega_S} \frac{\rho_S}{p'(\rho_S)} \varkappa dr \leq \frac{M}{C^{(1)}(\rho_{\Gamma, S})}, \quad \alpha_0 \leq \frac{M}{C^{(1)}(\rho_{\Gamma, S})} \int_{r_0}^{\bar{R}_S(\rho_{\Gamma, S})} \psi dr.$$

Таким образом, условие (25) влечет $\alpha_0 \leq 1$; более того, справедливо и второе условие (54).

Обратимся теперь к вариационной интерпретации стационарной задачи и условия статической устойчивости. Для положительных решений сначала исключим функцию ρ_S , используя равенство $\rho_S = (m_S)_r / \varkappa$, и перепишем эквивалентным образом стационарную задачу как краевую задачу для ОДУ второго порядка в неизвестной области:

$$\begin{aligned} \left[\pi \left(\frac{1}{\varkappa} (m_S)_r \right) \right]_r &= f_S[m_S] \quad \text{в } \Omega_S, \\ m_S(r_0) &= 0, \quad \pi \left(\frac{1}{\varkappa} (m_S)_r \right) \Big|_{r=R_S} = \pi(\rho_{\Gamma, S}), \quad m_S(R_S) = M, \end{aligned}$$

с искомой функцией $m_S \in C^1(\bar{\Omega}_S)$ такой, что $((m_S)_r)_{\min} > 0$; фактически $m_S \in C^2(\bar{\Omega}_S)$.

Чтобы упростить вычисления, выполним замену переменной

$$\nu = \nu(r) := \frac{r^{k+1}}{k+1}$$

и введем функции

$$h(\nu(r), \chi) := \frac{f_S(r, \chi)}{r^k}, \quad H(\nu(r), \chi) := \int_{V_0}^{\nu(r)} h(\zeta, \chi) d\zeta = F(r, \chi), \quad V_0 := \frac{r_0^{k+1}}{k+1}. \quad (55)$$

Одновременно неравенства (12) и (22) принимают более простой вид

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \max_{0 \leq \chi \leq M} H(\nu, \chi) \leq f_0, \quad h(\nu, \chi) \leq f_0.$$

Таким образом, последняя задача преобразуется к более простой форме:

$$[\pi(\tilde{m}'_S)]' = h[\tilde{m}_S] \quad \text{в } (V_0, \nu_S), \quad (56)$$

$$\tilde{m}_S(V_0) = 0, \quad \pi(\tilde{m}'_S(\nu_S)) = \pi(\rho_{\Gamma, S}), \quad \tilde{m}_S(\nu_S) = M, \quad (57)$$

где $\tilde{m}_S(\nu(r)) = m_S(r)$, $\varphi' = d\varphi/d\nu$ и $\nu_S := R_S^{k+1}/(k+1)$. Более того, статическая потенциальная энергия (введенная в [10]) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}_S\{\rho_S, R_S\} := \int_{\Omega_S} (P_1(\rho_S) + p_{\Gamma,S} - \rho_S F[m_S]) \chi dr = \int_{V_0}^{\nu_S} g[\tilde{m}_S, \tilde{m}'_S] d\nu, \quad (58)$$

где $g[\tilde{m}_S, \tilde{m}'_S](\nu) = g(\nu, \tilde{m}_S(\nu), \tilde{m}'_S(\nu))$ с лагранжианом $g(\nu, m, n) := P_1(n) + p_{\Gamma,S} - nH(\nu, m)$. Тем самым получен классический функционал одномерного вариационного исчисления со свободным правым концом при ограничении $\tilde{m}_S(\nu_S) = M$.

Будем работать с этим функционалом следующим образом. При каком-либо $V_1 > V_0$ введем подпространство $\tilde{C}^1[V_0, V_1] := \{w \in C^1[V_0, V_1] : w(V_0) = 0\}$ и открытое множество $\mathcal{S}_M := \{w \in \tilde{C}^1[V_0, V_1] : \min_{[V_0, V_1]} w' > 0, w(V_1) > M\}$ и определим функционал

$$\mathcal{R}[m] := \int_{V_0}^{m^{-1}(M)} g[m, m'] d\nu$$

для $m \in \mathcal{S}_M$, где m^{-1} — функция, обратная к m . Ясно, что $\mathcal{F}_S\{\rho_S, R_S\} = \mathcal{R}[\tilde{m}_S]$.

Для $w \in \tilde{C}^1[V_0, V_1]$ имеем $m + \tau w \in \mathcal{S}_M$ при $0 \leq \tau < \tau_0$ с достаточно малым $\tau_0 = \tau_0(m, w) > 0$. Заметим, что существует единственная функция $\hat{\nu}$ такая, что $(m + \tau w)(\hat{\nu}(\tau)) \equiv M$ на $[0, \tau_0)$; следовательно,

$$[(m' + \tau w')\hat{\nu}_\tau(\tau) + w]_{\nu=\hat{\nu}(\tau)} \equiv 0 \quad \text{на } [0, \tau_0), \quad (59)$$

где $\hat{\nu}_\tau = d\hat{\nu}/d\tau$. Предположим, что выполнено условие (15) с $r_1 := [(k+1)V_1]^{1/(k+1)}$ в роли $\hat{R}_S$, и вычислим первую вариацию $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}[m](w) &:= \frac{d}{d\tau} \mathcal{R}[m + \tau w] \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{V_0}^{\hat{\nu}(0)} \{g_n[m, m'] w' + g_m[m, m'] w\} d\nu + g[m, m']_{\nu=\hat{\nu}(0)} \hat{\nu}_\tau(0), \end{aligned}$$

где g_n и g_m — частные производные $g(\nu, m, n)$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} g_n(\nu, m, n) &= P_0(n) + \frac{p(n)}{n} - H(\nu, m) = \pi(n) + p(1) - H(\nu, m), \\ g_m(\nu, m, n) &= -nH_\chi(\nu, m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_n(\nu, m, n) - \frac{g(\nu, m, n)}{n} = \frac{p(n) - p_{\Gamma,S}}{n}.$$

Ясно также, что $\hat{\nu}_0 := \hat{\nu}(0) = m^{-1}(M)$ и $\hat{\nu}_\tau(0) = -(w/m')(\hat{\nu}_0)$ (см. (59)). Поэтому

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}[m](w) &= \int_{V_0}^{m^{-1}(M)} \{(\pi(m') - H[m] - (\pi(m') - H[m]))_{\nu=m^{-1}(M)} w' \\ &\quad - m' H_\chi[m] w\} d\nu + \left\{ \frac{p(m') - p_{\Gamma,S}}{m'} w \right\} \Big|_{\nu=m^{-1}(M)}. \end{aligned}$$

Задача о стационарных точках функционала $\mathcal{R}$, т.е.

$$\delta \mathcal{R}[\tilde{m}_S](w) = 0 \quad \forall w \in \tilde{C}^1[V_0, V_1], \quad (60)$$

эквивалентна уравнению Эйлера (56) для $\mathcal{R}$ в совокупности с соотношениями (57) (принимая во внимание равенство $(H[m])' - m' H_\chi[m] = h[m]$). Таким образом, решения $\tilde{m}_S$ стационарной задачи (56), (57), и только они, являются стационарными точками $\mathcal{R}$.

Далее, предположим также, что $H_{\chi\chi} \in L^1(V_0, V_1; C[0, M_1])$ (при некотором $M_1 > M$) и $m, w \in C^2[V_0, V_1]$, и вычислим вторую вариацию $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{R}[m](w) &:= \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{R}[m + \tau w] \right|_{\tau=0} \\ &= \int_{V_0}^{\tilde{\nu}_0} \{ g_{nn}[m, m'] (w')^2 + 2g_{mn}[m, m'] ww' + g_{mm}[m, m'] w^2 \} d\nu \\ &\quad + \{ 2(g_n[m, m'] w' + g_m[m, m'] w) \hat{\nu}_\tau(0) \\ &\quad + (g_\nu[m, m'] + g_m[m, m'] m' + g_n[m, m'] m'') \hat{\nu}_\tau^2(0) + g[m, m'] \hat{\nu}_{\tau\tau}(0) \} \Big|_{\nu=\tilde{\nu}_0}. \end{aligned}$$

Продифференцировав (59), получим

$$\hat{\nu}_{\tau\tau}(0) = \left\{ -\frac{m''}{m'} \hat{\nu}_\tau^2(0) - 2\frac{w'}{m'} \hat{\nu}_\tau(0) \right\} \Big|_{\nu=\tilde{\nu}_0}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{R}[m](w) &= \int_{V_0}^{\tilde{\nu}_0} \{ g_{nn}[m, m'] (w')^2 + (g_{mm}[m, m'] - (g_{mn}[m, m'])') w^2 \} d\nu \\ &\quad + \left\{ \left(g_n[m, m'] - \frac{g[m, m']}{m'} \right) \left(2w' - \frac{m'' w}{m'} \right) \left(-\frac{w}{m'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(g_{mn}[m, m'] - \frac{g_m[m, m']}{m'} + \frac{g_\nu[m, m']}{(m')^2} \right) w^2 \right\} \Big|_{\nu=\tilde{\nu}_0}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} g_{nn}(\nu, m, n) &= \frac{p'(n)}{n}, \quad g_{mn}(\nu, m, n) = \frac{g_m(\nu, m, n)}{n}, \\ g_\nu(\nu, m, n) &= nh(\nu, m), \quad g_{mm}[m, m'] - (g_{mn}[m, m'])' = -h_\chi[m]. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае, когда $m'(m^{-1}(M)) = \rho_{\Gamma, S}$, выводим

$$\delta^2 \mathcal{R}[m](w) = \int_{V_0}^{m^{-1}(M)} \left\{ \frac{p'(m')}{m'} (w')^2 - h_\chi[m] w^2 \right\} d\nu - \left\{ \frac{h[m]}{m'} w^2 \right\} \Big|_{\nu=m^{-1}(M)}.$$

Окончательно

$$\delta^2 \mathcal{R}[\tilde{m}_S](\tilde{w}) = \mathcal{J}_{R_S} \{ \rho_S, R_S \} [w]$$

с $\tilde{w}(\nu(r)) = w(r)$, и, таким образом, условие статической устойчивости (35) означает положительность второй вариации

$$\delta^2 \mathcal{R}[\tilde{m}_S](w) > 0 \quad \forall w \in C^2[V_0, V_1], \quad w(V_0) = 0, \quad w \not\equiv 0,$$

при $p' > 0$, $p'' \in C^2(\mathbb{R}^+)$ и $(f_S)_\chi \in C(\bar{\Omega}_S \times [0, M])$ (напомним предположение, что V_1 удовлетворяет условию $\tilde{m}_S(V_1) > M$).

Отметим, что к ограничению на массу для функционала (58) можно было также применить метод множителей Лагранжа.

§ 3. Оценки скорости стабилизации в эйлеровых координатах

Обратимся к нестационарной задаче (1)–(6) и дополнительно к условиям (10) на p и (11) на f_S предположим, что коэффициенты вязкости $\mu, \mu_1 \in C(\mathbb{R}^+)$ имеют $\mu', \mu'_1 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ и удовлетворяют неравенствам

$$0 < \underline{\mu} \leq \mu(s), \quad -\underline{\mu}_1 \leq \mu_1(s) \leq \overline{\mu}_1 \quad \text{при } s > 0, \quad 2k\overline{\mu}_1 < (k+1)\underline{\mu}, \quad (61)$$

где $\underline{\mu}_1 \geq 0$, $\overline{\mu}_1 \geq 0$. Напомним, что последнее условие (61), связывающее μ и μ_1 , является стандартным при постоянных μ и μ_1 . Предположим также, что $\Delta f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; C_b(\overline{\Pi}_\infty))$ удовлетворяет условиям

$$|\Delta f(r, \chi, t)| \leq \overline{f}_1(t) + \overline{f}_2(t) \quad \text{с} \quad \|\overline{f}_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \|\overline{f}_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq N, \quad \overline{f}_1 \geq 0, \quad \overline{f}_2 \geq 0. \quad (62)$$

Здесь и ниже $C_b(\overline{G})$ для неограниченной области G обозначает пространство функций, непрерывных и ограниченных на $\overline{G}$, с нормой $\|\varphi\|_{C_b(\overline{G})} := \sup_{\overline{G}} |\varphi|$.

Будем изучать стабилизацию сильного решения задачи со свободной границей (1)–(6), обладающего свойствами

$$\begin{aligned} \rho &\in C(\overline{Q}_T), \quad \rho_r, \rho_t \in L^{2,\infty}(Q_T), \quad \min_{\overline{Q}_T} \rho > 0, \\ v &\in H^{2,1}(Q_T), \quad R \in C^1[0, T], \quad \min_{[0, T]} R > r_0 \end{aligned}$$

при всех $T > 0$, где $Q_T := \{(r, t) \in Q : t < T\}$. Как следствие $v \in C(\overline{Q}_T)$ и $m \in C^1(\overline{Q}_T)$.

Здесь и ниже $L^{\lambda, \nu}(Q_T)$ и $H^{2,1}(Q_T) = W^{2,1}_2(Q_T)$ – классические анизотропные пространства Лебега и Соболева [34] с нормами

$$\|\varphi\|_{L^{\lambda, \nu}(Q_T)} = \left\| \|\varphi\|_{L^\lambda(\Omega_t)} \right\|_{L^\nu(0, T)},$$

где $\Omega_t := (r_0, R(t))$ и $\lambda, \nu \in [1, \infty]$, и

$$\|\varphi\|_{H^{2,1}(Q_T)} = \|\varphi\|_{V_2(Q_T)} + \|\varphi_r\|_{V_2(Q_T)} + \|\varphi_t\|_{L^2(Q_T)},$$

где $V_2(Q_T)$ – стандартное пространство функций φ , имеющих конечную (параболическую) энергию $\|\varphi\|_{V_2(Q_T)} = \|\varphi\|_{L^{2,\infty}(Q_T)} + \|\varphi_r\|_{L^2(Q_T)}$. Будем использовать те же пространства и с Q в роли Q_T .

Предположим, что $\rho^0, v^0 \in H^1(\Omega_0)$, $\min_{\overline{\Omega}_0} \rho^0 > 0$, $v^0(r_0) = 0$ и $\Delta p_\Gamma \in L^2(\mathbb{R}^+)$; эти условия необходимы для существования сильного решения.

Напомним хорошо известные законы сохранения массы и энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \chi dr &= 0 \quad \left(\text{т.е.} \quad \int_{\Omega_t} \rho \chi dr \equiv M \right), \\ \frac{d}{dt} (\mathcal{E} + \mathcal{F}[\rho]) + \int_{\Omega_t} \frac{\mu(\rho)}{\chi} (\chi v)_r^2 dr - 2k \left(\mu_1(\rho) \frac{\chi v^2}{r} \right)_R \\ &= \int_{\Omega_t} \rho \Delta f[m] v \chi dr - \Delta p_\Gamma (v \chi)_R, \end{aligned}$$

выполненные (почти всюду) на $\mathbb{R}^+$, где

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho v^2 \chi dr \quad \text{и} \quad \mathcal{F}[\rho] := \int_{\Omega_t} (\rho P_0(\rho) + p_{\Gamma, S} - \rho F[m]) \chi dr$$

являются кинетической и потенциальной энергиями (последняя – с точностью до аддитивной постоянной и в пренебрежении возмущениями Δf и Δp_Γ), причем приняты обозначения $F[m](r, t) := F(r, m(r, t))$, $\psi_r^2 := (\psi_r)^2$ и $\varphi_R := \varphi|_{r=R(t)}$. Вывод второго закона использует формулу

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \varphi \chi dr = \int_{\Omega_t} \rho (D_t \varphi) \chi dr \quad \forall \varphi \in W^{1,1}(Q_T) \quad \text{и при почти всех } t \in (0, T), \quad (63)$$

содержащую лагранжеву производную по времени $D_t \varphi := \varphi_t + v \varphi_r$; эта формула будет применяться и в дальнейшем. Здесь и ниже аргументы (r, t) функций в интегралах и нормах по Ω_t опускаются.

Теперь извлечем некоторые результаты из [10], используемые в дальнейшем, причем слегка модифицируем их. Положим $\tilde{\rho} := \rho$ в $\overline{Q}$ и $\tilde{\rho}(r, t) := \rho(R(t), t)$ при $r > R(t)$ и $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть выполнены условия на p , μ , μ_1 и f_S , Δf , перечисленные в начале параграфа, вместе с условиями

$$0 < \rho^0 \leq N, \quad \|v^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq N, \quad (64)$$

(12), (13) и $\|\Delta p_\Gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq N$. Тогда верны следующие оценки, включая равномерную оценку сверху для ρ и двусторонние оценки для R :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho} v\|_{L^{2,\infty}(Q)} + \|(\chi v)_r\|_{L^2(Q)} &\leq K, \quad \rho(r, t) \leq \overline{\rho} := K \quad \text{в } \overline{Q}, \\ r_0 + K^{-1} &\leq R(t) \leq \overline{R} := K \quad \text{на } \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Кроме того, $\mathcal{E}(t) \rightarrow 0$ и $\mathcal{F}[\rho](t) \rightarrow \mathcal{F}^{(S)}$ при $t \rightarrow \infty$.

2) Пусть дополнительно выполнены условие (14) вместе с условиями

$$sp'(s) = O(1) \quad \text{и} \quad \mu(s) = O(1) \quad \text{при } s \rightarrow 0^+. \quad (65)$$

Тогда для любой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ существует подпоследовательность θ_n такая, что

$$\tilde{\rho}(\cdot, \theta_n) \rightarrow \rho_*(\cdot) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(r_0, \overline{R}) \quad \text{и} \quad R(\theta_n) \rightarrow R_*. \quad (66)$$

Более того, для любой последовательности $\theta_n \rightarrow \infty$, $\theta_n \geq 0$, удовлетворяющей этим свойствам, пара $\{\rho_*|_{(r_0, R_*)}, R_*\} = \{\rho_S, R_S\}$ служит стационарным решением, удовлетворяющим равенству

$$\mathcal{F}_S\{\rho_S, R_S\} = \mathcal{F}^{(S)}, \quad (67)$$

и справедливы предельные соотношения

$$\tilde{\rho}(\cdot, \theta_n) \rightarrow \rho_S(\cdot) \quad \text{в } L^\lambda(\Omega_S) \quad \forall 1 \leq \lambda < \infty \quad \text{и} \quad R(\theta_n) \rightarrow R_S. \quad (68)$$

3) Пусть выполнены условия пп. 1) и 2) и $p' > 0$ на $\mathbb{R}^+$. Предположим, что среди стационарных решений, удовлетворяющих (67) и (68) с $\lambda = 1$ для некоторой последовательности $\theta_n \rightarrow \infty$, $\theta_n \geq 0$, существует положительное (такое, что $(\rho_S)_{\min} \geq \delta_S$ при некотором $\delta_S > 0$) и статически устойчивое решение и выполнены также условия (15), (16) на f_S . Тогда это решение является единственным, удовлетворяющим (68), и поэтому

$$\tilde{\rho}(\cdot, t) \rightarrow \rho_S(\cdot) \quad \text{в } L^\lambda(\Omega_S) \quad \forall 1 \leq \lambda < \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (69)$$

Кроме того, если $N^{-1} \leq \rho^0$, то справедлива равномерная оценка снизу для ρ

$$0 < \underline{\rho} \leq \rho(r, t) \quad \text{в } \overline{Q} \quad (70)$$

и оценка

$$\|v\|_{V_2(Q)} \leq K. \quad (71)$$

4) Пусть выполнены все условия пп. 1)–3) вместе с

$$\|\rho_r^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq N. \quad (72)$$

Тогда справедливы равномерная H^1 -оценка и C -стабилизация для ρ :

$$\sup_{t \geq 0} \|\rho(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_t)} \leq K, \quad (73)$$

$$\|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (74)$$

5) Пусть выполнены все условия пп. 1)–4) вместе с

$$\|v_r^0\|_{L^2(\Omega_0)} \leq N, \quad \overline{f}_1 = 0 \quad (\text{см. (62)}), \quad \|p'_\Gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq N. \quad (75)$$

Тогда справедливы равномерная H^1 -оценка для v и L^2 -оценка для ρ_t :

$$\|v\|_{C_b(\overline{Q})} \leq K_1 \sup_{t \geq 0} \|v(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_t)} \leq K, \quad (76)$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{t > 0} \|\rho_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_t)} \leq K. \quad (77)$$

В оценках (71) и ниже в § 3 величины K и K_i зависят и от $\underline{\rho}$.

Справедливость этих результатов следует из [10; теоремы 1, 3 и 5], см. также [10; замечания 2 и 3, следствие 3]. Для вывода п. 3) используется также последний пункт утверждения 4 настоящей статьи, гарантирующий, что ω -предельное множество для пары $\{\rho, R\}$ сводится к единственной точке $\{\rho_S, R_S\}$. Кроме того, в этой ситуации оценка (70) справедлива при $(\rho_S)_{\min} \geq \delta_S$ без аналогичного ограничения на любое стационарное решение, как в [10; теорема 5, п. 1].

Отметим, что в простейшем случае, когда стационарное решение единственно, свойство (69) заведомо выполняется.

Теперь можно сформулировать и доказать основной результат параграфа.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть выполнены все условия пп. 1)–4) теоремы 1 вместе с условием на $(f_S)_\chi$:

$$(f_S)_\chi \text{ непрерывна в некоторой окрестности точки } (R_S, M). \quad (78)$$

Тогда верны следующие утверждения:

а) справедлива $L^2(\Omega_t)$ -оценка скорости стабилизации

$$\begin{aligned} \delta_0(t) &:= \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{L^2(\Omega_t)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_t)} + |\rho(R(t), t) - \rho_{\Gamma, S}| \\ &\leq K(e^{-a_0(t-t_0)}\delta_0(t_0) + \|e^{a_0(\tau-t)}\|\Delta f[m](\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_\tau)}\|_{L^1(t_0, t)} \\ &\quad + \|e^{a_0(\tau-t)}\Delta p_\Gamma(\tau)\|_{L^2(t_0, t)}) \quad \text{при } t \geq t_0; \end{aligned} \quad (79)$$

б) при выполнении дополнительных условий (17) справедлива комбинированная оценка скорости стабилизации

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &:= \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_t)} + |\rho(R(t), t) - \rho_{\Gamma, S}| \\ &\leq K(e^{-a_1(t-t_0)}\delta_1(t_0) + \|e^{a_1(\tau-t)}\|\Delta f[m](\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_\tau)}\|_{L^1(t_0, t)} \\ &\quad + \|e^{a_1(\tau-t)}\Delta p_\Gamma(\tau)\|_{L^2(t_0, t)}) \quad \text{при } t \geq t_0; \end{aligned} \quad (80)$$

в) при выполнении дополнительных условий (17) и (75) справедлива $H^1(\Omega_t)$ -оценка скорости стабилизации

$$\begin{aligned} \delta_2(t) &:= \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{H^1(\Omega_t)} + \|v(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_t)} + |\rho(R(t), t) - \rho_{\Gamma, S}| \\ &\leq K(e^{-a_2(t-t_0)}(\delta_2(t_0) + |\Delta p_\Gamma(t_0)|) + \|e^{a_2(\tau-t)}\|\Delta f[m](\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_\tau)}\|_{L^2(t_0, t)} \\ &\quad + \|e^{a_2(\tau-t)}\Delta p_\Gamma(\tau)\|_{L^2(t_0, t)} + \|e^{a_2(\tau-t)}p'_\Gamma(\tau)\|_{L^1(t_0, t)}) \quad \text{при } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (81)$$

В пп. а)–в) $a_i := 1/K_i$, $i = 0, 1, 2$, а $t_0 \geq 0$ достаточно велико.

2) Пусть $\{\rho_S, R_S\}$ – любое статически устойчивое положительное стационарное решение (в отличие от условий на него в теореме 1, п. 3)). Если данные удовлетворяют следующему условию близости к стационарным:

$$\begin{aligned} &\|\rho^0 - \rho_S\|_{L^2(\Omega_0)} + |R_0 - R_S| + \|v^0\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\quad + \|\bar{f}_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \|\bar{f}_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|\Delta p_\Gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (82)$$

с достаточно малым $\varepsilon_0 > 0$, то п. 1) справедлив при $t_0 = 0$, т.е. при любых $t \geq 0$, причем величины K и a_0, a_1, a_2 не зависят от данных; в этом смысле $\{\rho_S, R_S\}$ динамически устойчиво.

Этот результат верен и при немонотонной функции состояния p (опуская второе условие (10)) при условии, что значения ρ_S на $\bar{\Omega}_S$ принадлежат какому-либо интервалу (s_1, s_2) устойчивости p , где $p' > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В силу неравенства

$$|R - R_S| \leq K\|\rho - \rho_S\|_{L^2(\Omega_t)} \quad \text{при } t \geq t_0 \quad (83)$$

(см. его доказательство ниже) в левую часть оценки (79) можно добавить слагаемое $|R(t) - R_S|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Сначала вернемся к закону сохранения энергии и преобразуем член $\frac{d}{dt}\mathcal{F}[\rho]$. При любых положительных s и s_0 имеем

$$\begin{aligned} sP_0(s) &= s\pi(s) - p(s) + sp(1) = \int_{s_0}^s \frac{s-\zeta}{\zeta} p'(\zeta) d\zeta - p(s_0) + s(\pi(s_0) + p(1)) \\ &= (s - s_0)^2 \Pi_1(s, s_0) + s\pi(s_0) - p(s_0) + sp(1), \\ \Pi_1(s, s_0) &:= \int_0^1 \frac{p'(\zeta)}{\zeta} \Big|_{\zeta=(1-\lambda)s_0+\lambda s} (1-\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho P_0(\rho) + p_{\Gamma,S} - \rho F[m] = (\rho - \rho_S)^2 \Pi_1(\rho, \rho_S) + \rho(\pi(\rho_S) - F[m]) + p_{\Gamma,S} - p(\rho_S) + \rho p(1).$$

Будем использовать свойства стационарного решения, описанные в утверждении 4, п. 1), вместе со свойством равномерной стабилизации (74) и предположим, что t настолько велико, что $R(t) \leq R_S + \varepsilon_S$. В силу (63) и стационарного уравнения (26) аналогично (50) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\pi(\rho_S) - F[m]) \varkappa dr &= \int_{\Omega_t} \rho v(f_S[m_S] - f_S[m]) \varkappa dr \\ &= - \int_{\Omega_t} \rho v \{ (f_S)_\chi[m_S](m - m_S) + O(\theta[\|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}]) \|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \} \varkappa dr. \end{aligned}$$

Далее, применив равенство $(m - m_S)_t = -\rho v \varkappa$ и условия (78) и (16), выведем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\pi(\rho_S) - F[m]) \varkappa dr &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (f_S)_\chi[m_S](m - m_S)^2 dr - \frac{1}{2} \{v(f_S)_\chi[m_S](m - m_S)^2\}_R \\ &\quad + O(\|\theta[\|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}]\|_{L^1(\Omega_t)}) \bar{\rho} \|v\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (f_S)_\chi[m_S](m - m_S)^2 dr + \|v\|_{C(\overline{\Omega}_t)} o(\|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}). \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (p_{\Gamma,S} - p(\rho_S)) \varkappa dr = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_S, \quad \mathcal{A}_S := \mathcal{A}_S(R, R_S) = \int_{R_S}^R (p_{\Gamma,S} - p(\rho_S)) \varkappa dr.$$

В итоге, используя закон сохранения массы, имеем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\rho] = \frac{d}{dt} (\mathcal{U} + \mathcal{A}_S) + \|v\|_{C(\overline{\Omega}_t)} o(\|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}),$$

где

$$\mathcal{U} := \int_{\Omega_t} \left(\Pi_1(\rho, \rho_S)(\rho - \rho_S)^2 \varkappa + \frac{1}{2} (f_S)_\chi[m_S](m - m_S)^2 \right) dr.$$

Теперь из закона сохранения энергии, применив неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \mu \left\| \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} (\varkappa v)_r \right\|_{\Omega_t}^2 &\leq \int_{\Omega_t} \frac{\mu(\rho)}{\varkappa} (\varkappa v)_r^2 dr - \left(\tilde{\mu}_1(\rho) \frac{\varkappa v^2}{r} \right)_R, \\ r_0^k \|v\|_{C(\overline{\Omega}_t)} &\leq \|(\varkappa v)_r\|_{L^1(\Omega_t)} \leq K_0^{1/2} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} (\varkappa v)_r \right\|_{\Omega_t} \end{aligned} \quad (84)$$

с $\tilde{\mu}_1 := 2k\mu_1$ и достаточно малым $\varepsilon_2 > 0$ (см. [10; доказательство теоремы 1, п. 1]), выведем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{E} + \mathcal{U} + \mathcal{A}_S) + K^{-1} \|(\varkappa v)_r\|_{\Omega_t}^2 \\ \leq o(\|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}^2) + K(\|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \mathcal{E}^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2). \end{aligned} \quad (85)$$

Будем использовать следующие соотношения (аналогичные (51) и (48)):

$$\begin{aligned} \overline{R}^{-1/2} \|m - m_S\|_{L^2(\Omega_t)} &\leq \|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \leq \int_{\Omega_t} |\rho - \rho_S| \varkappa dr \\ &\leq \overline{R}^{k+1/2} \|\rho - \rho_S\|_{L^2(\Omega_t)}, \end{aligned} \quad (86)$$

$$\int_{R_S}^R \rho_S \varkappa dr = \int_{\Omega_t} \rho_S \varkappa dr - M = -(m - m_S)_R; \quad (87)$$

они влекут неравенство (83) (с $K := 2\overline{R}^{k+1/2}/(\delta_S r_0^k)$). Заметим, что в силу условия (15) и неравенств (86) и (83) справедлива оценка сверху

$$\begin{aligned} \mathcal{E} + \mathcal{U} + \mathcal{A}_S &\leq K(\|v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + \|m - m_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}^2 + (R - R_S)^2) \\ &\leq K_1(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + \|v\|_{\Omega_t}^2). \end{aligned} \quad (88)$$

Более того, аналогично (47)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \Pi_1(\rho, \rho_S)(\rho - \rho_S)^2 \varkappa dr &= \int_{\Omega_t} (\Pi_1(\rho_S, \rho_S) + \alpha[\|\rho - \rho_S\|_{C(\overline{\Omega}_t)}]) (\rho - \rho_S)^2 \varkappa dr \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \frac{p'(\rho_S)}{\rho_S} (\rho - \rho_S)^2 \varkappa dr + o(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{A}_S(R_S, R_S) = (\mathcal{A}_S)_r(r, R_S)|_{r=R_S} = 0$, а также

$$(\mathcal{A}_S)_{rr}(r, R_S) = -(p(\rho_S))_r \varkappa + (p_{\Gamma, S} - p(\rho_S)) \varkappa_r,$$

то в силу формулы Тейлора и стационарного уравнения (7) получим

$$\mathcal{A}_S(R, R_S) = -\frac{1}{2}(\rho_S f_S[m_S] \varkappa)(R_S)(R - R_S)^2 + o((R - R_S)^2).$$

В силу равенства (87) также $(m - m_S)_R = -(\rho_S \varkappa)(R_S)(R - R_S) + o(R - R_S)$, поэтому

$$\mathcal{A}_S(R, R_S) = -\frac{1}{2} \frac{f_S[m_S]}{\rho_S \varkappa}(R_S)(m - m_S)_R^2 + o((R - R_S)^2).$$

С учетом неравенств (83) и (53) с m и R в роли $m_{S,n}$ и $R_{S,n}$ это означает, что

$$\mathcal{U} + \mathcal{A}_S = \frac{1}{2} \mathcal{J}_R[m - m_S] + o(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2) \geq K^{-1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2$$

при достаточно больших $t \geq t_1$. Следовательно, справедлива и оценка снизу

$$K^{-1}(\|v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2) \leq \mathcal{E} + \mathcal{U} + \mathcal{A}_S. \quad (89)$$

Шаг 2. Разделим уравнение импульса на ρ и вычтем из результата стационарное уравнение (26):

$$v_t + \frac{1}{2}(v^2)_r + \pi(\rho)_r - \pi(\rho_S)_r - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\mu(\rho)}{\varkappa} (\varkappa v)_r \right]_r = f_S[m] - f_S[m_S] + \Delta f[m].$$

Умножим это равенство на $-(m - m_S)$, проинтегрируем по Ω_t и затем проинтегрируем по частям. Воспользовавшись формулами

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_t} v_t(m - m_S) dr &= - \int_{\Omega_t} ((v(m - m_S))_t + \rho v^2 \varkappa) dr \\ &= - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} v(m - m_S) dr + (v^2(m - m_S))_R - \int_{\Omega_t} \rho v^2 \varkappa dr \end{aligned}$$

и $(m - m_S)_r = (\rho - \rho_S)\varkappa$ вместе с условием на свободной границе, выведем

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} v(m - m_S) dr - \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\rho + \rho_S) v^2 \varkappa dr \\ & + \int_{\Omega_t} [(\pi(\rho) - \pi(\rho_S))(\rho - \rho_S)\varkappa + (f_S[m] - f_S[m_S])(m - m_S)] dr \\ & - \int_{\Omega_t} \frac{\mu(\rho)}{\varkappa} (\varkappa v)_r \left(\frac{1}{\rho} (\rho - \rho_S)\varkappa - \frac{\rho_r}{\rho^2} (m - m_S) \right) dr \\ & + \left[\frac{1}{2} v^2 - (\pi(\rho) - \pi(\rho_S)) + \frac{\tilde{\mu}_1(\rho)v}{\rho r} + \frac{1}{\rho} (p(\rho) - p_\Gamma) \right]_R (m - m_S)_R \\ & = - \int_{\Omega_t} \Delta f[m](m - m_S) dr. \end{aligned} \quad (90)$$

Вспомнив обозначение (46) и применив соотношения (52) и (53) с $\rho(\cdot, t)$, $m(\cdot, t)$ и $R(t)$ вместо $\rho_{S,n}$, $m_{S,n}$ и $R_{S,n}$, выведем также

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} [(\pi(\rho) - \pi(\rho_S))(\rho - \rho_S)\varkappa + (f_S[m] - f_S[m_S])(m - m_S)] dr \\ & - (\pi(\rho) - \pi(\rho_S))_R (m - m_S)_R \\ & = \mathcal{B}_R(\rho, \rho_S) \geq K^{-1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + o(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2) \geq K_1^{-1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 \end{aligned}$$

при достаточно больших $t \geq t_2$.

Оценим последовательно другие интегралы в равенстве (90). Согласно неравенствам (86)

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega_t} v(m - m_S) dr \right| &\leq \bar{R}^{k+1} (\|v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2), \\
 \int_{\Omega_t} (\rho + \rho_S) v^2 \varkappa dr &\leq 3\bar{\rho} \bar{R}^k \|v\|_{\Omega_t}^2, \\
 \left| \int_{\Omega_t} \frac{\mu(\rho)}{\varkappa} (\varkappa v)_r \left(\frac{1}{\rho} (\rho - \rho_S) \varkappa - \frac{\rho_r}{\rho^2} (m - m_S) \right) dr \right| \\
 &\leq \|\mu\|_{C[\underline{\rho}, \bar{\rho}]} \|(\varkappa v)_r\|_{\Omega_t} (\underline{\rho}^{-1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} + r_0^{-k} \underline{\rho}^{-2} \|\rho_r\|_{\Omega_t} \|m - m_S\|_{C(\bar{\Omega}_t)}) \\
 &\leq K\varepsilon^{-1} \|(\varkappa v)_r\|_{\Omega_t}^2 + \varepsilon \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 \quad \forall \varepsilon > 0,
 \end{aligned} \tag{91}$$

где использованы (73), а также оценка

$$\left| \int_{\Omega_t} \Delta f[m] (m - m_S) dr \right| \leq \bar{R}^{k+1} \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}.$$

Далее, оценим оставшиеся слагаемые граничного члена в (90):

$$\begin{aligned}
 &\left| \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\tilde{\mu}_1(\rho)v}{\rho r} + \frac{1}{\rho} (p(\rho) - p_\Gamma) \right]_R (m - m_S)_R \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} v_R^2 (M + m_S(R)) + \{2k\hat{\mu}_1(\underline{\rho} r_0)^{-1} |v_R| \\
 &\quad + \bar{\rho}^{-1} (\|p'\|_{C[\underline{\rho}, \bar{\rho}]} |\rho_R - \rho_{\Gamma,S}| + |\Delta p_\Gamma|)\} \bar{R}^{k+1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} \\
 &\leq K\varepsilon^{-1} (\|v\|_{C(\bar{\Omega}_t)}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 + (\Delta p_\Gamma)^2) + \varepsilon \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 \quad \forall \varepsilon \in (0, 1].
 \end{aligned}$$

Собрав вместе полученные оценки, применив неравенство (84) и выбрав $\varepsilon := 1/K$ достаточно малым, в итоге выведем из (90) следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} v(m - m_S) dr + K^{-1} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 \\
 &\leq K (\|(\varkappa v)_r\|_{\Omega_t}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}). \tag{92}
 \end{aligned}$$

Шаг 3. Теперь умножим уравнение на свободной границе

$$\frac{d\rho_R}{dt} + \frac{\rho_R}{\mu(\rho_R)} (p(\rho_R) - p_{\Gamma,S}) = b_{1,R} := \frac{\rho_R}{\mu(\rho_R)} \left(-\tilde{\mu}_1(\rho_R) \frac{v_R}{R} + \Delta p_\Gamma \right)$$

(см. [10; доказательство утверждения 2]) на $\rho_R - \rho_{\Gamma,S}$ и получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 + \frac{\rho_R}{\mu(\rho_R)} (p(\rho_R) - p_{\Gamma,S}) (\rho_R - \rho_{\Gamma,S}) = b_{1,R} (\rho_R - \rho_{\Gamma,S}).$$

В силу оценок $\underline{\rho} \leq \rho_R \leq \bar{\rho}$ вместе с условиями (61) на μ, μ_1 и $p' > 0$ найдем

$$\frac{d}{dt} (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 + K^{-1} (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 \leq K (\|v\|_{C(\bar{\Omega}_t)}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2). \tag{93}$$

Просуммировав неравенство (85) с неравенствами (92) и (93), умноженными на параметры $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, а также применив неравенства (86) и (84), выведем

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathcal{V}_0}{dt} + K^{-1} \{ (1 - K^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \|(\kappa v)_r\|_{\Omega_t}^2 \\ & \quad + \varepsilon_1 \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + (\varepsilon_2 - K^2\varepsilon_1)(\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 \} \\ & \leq o(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2) + K \{ (1 + \varepsilon_1) \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} (\mathcal{E} + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2)^{1/2} \\ & \quad + (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\Delta p_\Gamma)^2 \} \end{aligned}$$

с

$$\mathcal{V}_0 := \mathcal{E} + \mathcal{U} + \mathcal{A}_S - \varepsilon_1 \int_{\Omega_t} v(m - m_S) dr + \varepsilon_2 (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2.$$

Последовательно выбрав ε_2 и ε_1 достаточно малыми и приняв во внимание неравенства (88), (89) и (91), при достаточно больших $t \geq t_0$ получим

$$\frac{d\mathcal{V}_0}{dt} + K^{-1} \{ \|(\kappa v)_r\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2 \} \leq K \{ \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \mathcal{V}_0^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2 \} \quad (94)$$

вместе с

$$\mathcal{V}_0 \asymp \|v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma,S})^2. \quad (95)$$

Здесь и ниже символика $\mathcal{V}_i \asymp \mathcal{A}_i$ означает, что $K^{-1}\mathcal{A}_i \leq \mathcal{V}_i \leq K\mathcal{A}_i$. Ясно, что эти соотношения влекут, что $\mathcal{V}_0$ является функционалом Ляпунова и справедлива первая оценка скорости стабилизации (79).

Шаг 4. Чтобы доказать оценку (80), сначала напомним, что при выполнении условий (17) из утверждения 4 следует, что $\|(\rho_S)_{rr}\|_{\Omega_t} \leq K$. Перепишем уравнение импульса в форме

$$\rho \kappa D_t (\kappa^{-1} (d[\rho] + v)) + p(\rho)_r = -\kappa^{-1} \kappa_r \rho v^2 + \rho f[m]$$

с $d[\rho] := (\mu(\rho)/\rho^2)\rho_r$ (см. [10; доказательство теоремы 5, п. 2]) и, воспользовавшись стационарным уравнением, получим

$$\begin{aligned} & \rho \kappa D_t (\kappa^{-1} (d[\rho] - d[\rho_S] + v)) + (p(\rho) - p(\rho_S))_r \\ & = -\rho \kappa v (\kappa^{-1} d[\rho_S])_r - k^{-1} r \rho v^2 + \rho f_S[m] - \rho_S f_S[m_S] + \rho \Delta f[m]. \end{aligned}$$

Умножим это равенство на $\kappa^{-1} (d[\rho] - d[\rho_S] + v)$, проинтегрируем по Ω_t и получим (см. также формулу (63))

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathcal{Y}}{dt} + \int_{\Omega_t} (p(\rho) - p(\rho_S))_r (d[\rho] - d[\rho_S]) \kappa^{-1} dr \\ & = b_2 := \int_{\Omega_t} \{ -(p(\rho) - p(\rho_S))_r v \kappa^{-1} + (-\rho \kappa v (\kappa^{-1} d[\rho_S])_r - k^{-1} r \rho v^2 \\ & \quad + (\rho - \rho_S) f_S[m] + \rho_S (f_S[m] - f_S[m_S]) \\ & \quad + \rho \Delta f[m]) (d[\rho] - d[\rho_S] + v) \} \kappa^{-1} dr \end{aligned} \quad (96)$$

с

$$\mathcal{Y} := \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho (d[\rho] - d[\rho_S] + v)^2 \kappa^{-1} dr.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} d[\rho] - d[\rho_S] &= \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} (\rho - \rho_S)_r + \left(\frac{\mu(\rho)}{\rho^2} - \frac{\mu(\rho_S)}{\rho_S^2} \right) (\rho_S)_r, \\ (p(\rho) - p(\rho_S))_r &= p'(\rho)(\rho - \rho_S)_r + (p'(\rho) - p'(\rho_S))(\rho_S)_r. \end{aligned} \quad (97)$$

Применив условия на μ , p и f_S (включая (17)) вместе с оценками $\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$, $\delta_S/2 \leq \rho_S \leq 2\bar{\rho}$, $r_0 \leq r \leq \bar{R}$ и (73), можно вывести оценки (ср. с [21])

$$K^{-1} \|(\rho - \rho_S)_r\|_{\Omega_t}^2 - K(\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + \|v\|_{\Omega_t}^2) \leq \mathcal{Y} \leq K(\|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|v\|_{\Omega_t}^2), \quad (98)$$

$$K^{-1} \|(\rho - \rho_S)_r\|_{\Omega_t}^2 - K\|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 \leq \int_{\Omega_t} (p(\rho) - p(\rho_S))_r (d[\rho] - d[\rho_S]) \kappa^{-1} dr, \quad (99)$$

а также

$$\begin{aligned} |b_2| &\leq K \{ \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)} \|v\|_{\Omega_t} + (\|\kappa v\|_{C(\bar{\Omega}_t)} + \|\kappa v\|_{C(\bar{\Omega}_t)} \|\sqrt{\rho} \kappa v\|_{\Omega_t} \\ &\quad + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} + \| (f_S)_\chi \|_{C[0, M_1]} \|m - m_S\|_{C(\bar{\Omega}_t)} + \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t}) \mathcal{Y}^{1/2} \}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |b_2| &\leq \varepsilon \|(\rho - \rho_S)_r\|_{\Omega_t}^2 + K\varepsilon^{-1} (\|\kappa v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2) + K\|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \mathcal{Y}^{1/2} \\ &\quad \forall \varepsilon \in (0, 1] \end{aligned}$$

и равенство (96) вместе с (99) влекут

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} + K^{-1} \|(\rho - \rho_S)_r\|_{\Omega_t}^2 \leq K(\|\kappa v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}^2 + \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \mathcal{Y}^{1/2}).$$

Скомбинировав это неравенство с (94) и применив соотношения (95) и (98), для $\mathcal{V}_1 := \mathcal{V}_0 + \varepsilon_3 \mathcal{Y}$ при подходящем $\varepsilon_3 > 0$ выведем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}_1}{dt} + K^{-1} \{ \|\kappa v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma, S})^2 \} \\ \leq K \{ \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t} \mathcal{V}_1^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2 \} \end{aligned} \quad (100)$$

вместе с

$$\mathcal{V}_1 \asymp \|v\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma, S})^2. \quad (101)$$

Таким образом, $\mathcal{V}_1$ является нашим вторым функционалом Ляпунова и верна оценка (80).

Шаг 5. Пусть теперь выполнены оба условия (75) и (17). Напомним уравнение импульса в следующей форме (см. [10; доказательство теоремы 5, п. 3]):

$$\kappa^{-1} D_t(\kappa v) = \frac{1}{\rho} \sigma_r + k \frac{v^2}{r} + f[m] = \mu(\rho) \Psi_r + b_3$$

с функциями

$$\begin{aligned}\sigma &:= \frac{\mu(\rho)}{\varkappa}(\varkappa v)_r - \tilde{\mu}_1(\rho)\frac{v}{r} - p(\rho), \quad \Psi := \frac{\sigma + p_\Gamma}{\rho\mu(\rho)}, \\ b_3 &:= \frac{1}{\rho}(\rho\mu(\rho))_r \Psi + \frac{k}{r}v^2 + \frac{1}{\rho}\left(\tilde{\mu}_1(\rho)\frac{v}{r}\right)_r + f[m].\end{aligned}$$

Перепишем это уравнение с использованием стационарного уравнения так:

$$\varkappa^{-1}D_t(\varkappa v) = \mu(\rho)\Phi_r + \tilde{b}_3, \quad (102)$$

где

$$\Phi := \frac{\sigma + p(\rho_S) + \Delta p_\Gamma}{\rho\mu(\rho)} = \frac{1}{\rho\varkappa}(\varkappa v)_r - \omega_2(\rho)\frac{v}{r} - \frac{p(\rho) - p(\rho_S) - \Delta p_\Gamma}{\rho\mu(\rho)}, \quad (103)$$

$$\omega_2(\rho) := \frac{\tilde{\mu}_1(\rho)}{\rho\mu(\rho)}, \quad \tilde{b}_3 := \frac{1}{\rho}(\rho\mu(\rho))_r \Phi + \frac{k}{r}v^2 + \frac{1}{\rho}\left(\tilde{\mu}_1(\rho)\frac{v}{r}\right)_r + f[m] - \frac{\rho_S}{\rho}f_S[m_S]. \quad (104)$$

Заметим, что $\Phi_R = 0$ и

$$\begin{aligned}\bar{\rho}^{-1}\|v_r\|_{\Omega_t} - K(\|v\|_{\Omega_t} + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} + |\Delta p_\Gamma|) \\ \leq \|\Phi\|_{\Omega_t} \leq K(\|v_r\|_{\Omega_t} + \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} + |\Delta p_\Gamma|).\end{aligned} \quad (105)$$

Аналогично соответствующим соотношениям для Ψ и b_3 в [10] справедливы равенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho\Phi^2\varkappa dr + \int_{\Omega_t}\mu(\rho)\Phi_r^2\varkappa dr \\ = -\int_{\Omega_t}\left\{\rho\left(D_t\left(\omega_2(\rho)\frac{v}{r}\right) + D_t\frac{p(\rho) - p(\rho_S) - \Delta p_\Gamma}{\rho\mu(\rho)}\right)\Phi + \tilde{b}_3\Phi_r\right\}\varkappa dr\end{aligned} \quad (106)$$

и оценки

$$\begin{aligned}\left|D_t\left(\omega_2(\rho)\frac{v}{r}\right)\right| &\leq K\left(|(\varkappa v)_r\sqrt{\rho\varkappa}v| + \left|\mu(\rho)\Phi_r + \tilde{b}_3 - (k+1)\frac{v^2}{r}\right|\right) \\ &\leq K_1(|(\varkappa v)_r| + |\Phi_r| + |\tilde{b}_3| + |\varkappa v|),\end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{b}_3\|_{\Omega_t} &\leq \varepsilon\|\Phi_r\|_{\Omega_t} + K(\varepsilon^{-1}\|\Phi\|_{\Omega_t} + \|(\varkappa v)_r\|_{\Omega_t}) \\ &\quad + \left\|f[m] - \frac{\rho_S}{\rho}f_S[m_S]\right\|_{\Omega_t} \quad \forall \varepsilon > 0\end{aligned} \quad (108)$$

с Φ и $\tilde{b}_3$; дополнительно в (107) была применена оценка $\|v\|_{C_b(\bar{Q})} \leq K$. Положив $\omega(\rho) := 1/(\rho\mu(\rho))$ и воспользовавшись уравнением неразрывности, имеем также

$$\begin{aligned}&|D_t[\omega(\rho)(p(\rho) - p(\rho_S) - \Delta p_\Gamma)]| \\ &= |\omega(\rho)(-p'(\rho)\varkappa^{-1}(\varkappa v)_r - p'_\Gamma + v(p(\rho) - p(\rho_S))_r) \\ &\quad - \rho\omega'(\rho)\varkappa^{-1}(\varkappa v)_r(p(\rho) - p(\rho_S) - \Delta p_\Gamma)| \\ &\leq K\{|\rho_r||\varkappa v| + |(\varkappa v)_r| + |p'_\Gamma| + |(p(\rho) - p(\rho_S))_r| \\ &\quad + |(\varkappa v)_r|(|p(\rho) - p(\rho_S)| + |\Delta p_\Gamma|)\}.\end{aligned}$$

Применив также равномерные $H^1(\Omega_t)$ -оценки (73) и (76), из (106) выведем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho\kappa} \Phi\|_{\Omega_t}^2 + \underline{\mu} \|\sqrt{\kappa} \Phi_r\|_{\Omega_t}^2 &\leq K \{ (\|\kappa v\|_{\Omega_t} + \|\Phi_r\|_{\Omega_t} \\ &+ \|p(\rho) - p(\rho_S)\|_{H^1(\Omega_t)} + |p'_\Gamma| + |\Delta p_\Gamma|) \|\Phi\|_{\Omega_t} + \|\tilde{b}_3\|_{\Omega_t} \|\Phi_r\|_{\Omega_t} \}. \end{aligned}$$

Применив, во-первых, равенство (97) и оценку (108) вместе с соотношениями

$$f[m] = f_S[m] + \Delta f[m]$$

и

$$\begin{aligned} \left\| f_S[m] - \frac{\rho_S}{\rho} f_S[m_S] \right\|_{\Omega_t} &= \left\| \frac{1}{\rho} (\rho - \rho_S) f_S[m_S] + f_S[m] - f_S[m_S] \right\|_{\Omega_t} \\ &\leq K \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} + \left\| (f_S)_\chi \right\|_{C[0, M_1]} \left\| m - m_S \right\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \leq K_1 \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t} \quad (109) \end{aligned}$$

и, во-вторых, правое неравенство (105), установим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho\kappa} \Phi\|_{\Omega_t}^2 + \underline{\mu} \|\sqrt{\kappa} \Phi_r\|_{\Omega_t}^2 &\leq K (\|\Phi\|_{\Omega_t}^2 + \|\kappa v\|_{\Omega_t}^2 + |p'_\Gamma| \|\Phi\|_{\Omega_t} + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 \\ &+ (\Delta p_\Gamma)^2 + \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t}^2) \\ &\leq K_1 (\|v_r\|_{\Omega_t}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + |p'_\Gamma| \|\sqrt{\rho\kappa} \Phi\|_{\Omega_t}). \end{aligned}$$

Скомбинировав их с (100) и очевидным тождеством

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Delta p_\Gamma)^2 + \delta (\Delta p_\Gamma)^2 = \delta (\Delta p_\Gamma)^2 + p'_\Gamma \Delta p_\Gamma \quad \forall \delta, \quad (110)$$

а также воспользовавшись (101) и (105), для $\mathcal{V}_2 := \mathcal{V}_1 + \varepsilon_4 \|\sqrt{\rho\kappa} \Phi\|_{\Omega_t}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2$ при подходящем $\varepsilon_4 > 0$ выведем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}_2}{dt} + K^{-1} \{ \|v\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma, S})^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + \|\Phi_r\|_{\Omega_t}^2 \} \\ \leq K \{ \|\Delta f[m]\|_{\Omega_t}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + |p'_\Gamma| \mathcal{V}_2^{1/2} \} \quad (111) \end{aligned}$$

вместе с

$$\mathcal{V}_2 \asymp \|v\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^1(\Omega_t)}^2 + (\rho_R - \rho_{\Gamma, S})^2 + (\Delta p_\Gamma)^2. \quad (112)$$

Тем самым справедлива последняя оценка (81). Отметим, что $\mathcal{V}_2$ также является функционалом Ляпунова при условии, что $\Delta p_\Gamma = 0$. Пункт 1) доказан.

Шаг 6. Дадим обоснование п. 2). В соответствии с доказательством п. 1) все оценки скорости стабилизации справедливы при $0 \leq t \leq T$ с любым $T \geq 0$ при следующих априорных оценках решения:

$$\max_{[0, T]} |R(t) - R_S| \leq \varepsilon_S, \quad \max_{[0, T]} \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \leq \varepsilon_1 \quad (113)$$

с достаточно малым $\varepsilon_1 > 0$, а также

$$0 < \underline{s}_0 \leq \rho(r, t) \leq \overline{s}_0 \quad \text{на } \overline{Q}_T, \quad \max_{[0, T]} \|\rho_r(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_t)} \leq N_1. \quad (114)$$

Важный момент заключается в том, что величины K и a_i в этих оценках зависят от $\varepsilon_S, \varepsilon_1, \underline{s}_0, \overline{s}_0$ и N_1 , но не от T .

Ясно, что оценки (113) влекут двусторонние оценки для ρ в (114) с

$$\underline{s}_0 := \min_{[r_0, R_S + \varepsilon_S]} \rho_S - \varepsilon_1 > 0 \quad \text{и} \quad \overline{s}_0 := \max_{[r_0, R_S + \varepsilon_S]} \rho_S + \varepsilon_1$$

с достаточно малым ε_1 . (В случае, когда p является немонотонной, но $p'(s) > 0$ на (s_1, s_2) и $s_1 < \rho_S(r) < s_2$ на $\overline{\Omega}_S$, можно предположить, что ε_S и ε_1 в (113) столь малы, что $s_1 + \varepsilon_1 \leq \rho_S(r) \leq s_2 - \varepsilon_1$ на $[r_0, R_S + \varepsilon_S]$ и поэтому $s_1 < \underline{s}_0 < \overline{s}_0 < s_2$.) Далее, согласно [10; доказательство оценки (73) в теореме 5] вторая оценка в (114) также верна с некоторым N_1 , зависящим от ε_S и ε_1 , но не от T .

При выполнении условия (82) с каким-либо $\varepsilon_0 > 0$ оценка скорости стабилизации (79) при $0 \leq t \leq T$ вместе с замечанием 6 гарантируют выполнение неравенств

$$\max_{[0, T]} |R(t) - R_S| \leq K_1 \max_{[0, T]} \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{\Omega_t} \leq K_1 K_2 \varepsilon_0. \quad (115)$$

Следовательно, в силу оценки (43) для ρ_S и второй оценки (114)

$$\max_{[0, T]} \|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{C(\overline{\Omega}_t)} \leq K_3 (K_2 \varepsilon_0)^{1/2}. \quad (116)$$

Величины $K_i, i = 1, 2, 3$, не зависят от T (и ε_0); можно считать, что $K_i \geq 1$. Выберем ε_0 так, чтобы $2K_1 K_2 \varepsilon_0 \leq \varepsilon_S$ и $2K_3 (K_2 \varepsilon_0)^{1/2} \leq \varepsilon_1$. С помощью стандартных рассуждений о продолжении, основанных на непрерывности ρ, R и ρ_S , получим последовательно оценки (113) и (115), (116) и, таким образом, снова (113) с ε_S и ε_1 , замененными на $\varepsilon_S/2$ и $\varepsilon_1/2$, сначала для достаточно малых $T = T(\varepsilon_S, \varepsilon_1, \varepsilon_0) > 0$, а в итоге для любых $T > 0$. Следовательно, все оценки скорости стабилизации, перечисленные в п. 1), справедливы при всех $t \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2, п. 1) или п. 2) (включая условия (17) и (75) в обоих случаях) справедлива оценка $\|v\|_{H^{2,1}(Q)} \leq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q^{t_0} := \{(r, t) \in Q : t > t_0\}$ и $\|\varphi\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})} := \|\varphi\|_{Q^{t_0}} + \|\varphi_r\|_{Q^{t_0}}$. Проинтегрировав (111) по (t_0, ∞) и применив (112), получим

$$\begin{aligned} & \|v\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})}^2 + \|\rho - \rho_S\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})}^2 + \|\Phi\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})}^2 \\ & \leq K(\mathcal{V}_2(t_0) + \|\Delta f[m]\|_{(t_0, \infty)}^2 + \|\Delta p_\Gamma\|_{(t_0, \infty)}^2 + \|p'_\Gamma\|_{(t_0, \infty)}^2) \leq K_1. \end{aligned} \quad (117)$$

Далее, из (108) и (109) следует, что $\|\tilde{b}_3\|_{Q^{t_0}} \leq K$. Следовательно, уравнение (102) влечет

$$\|v_t\|_{Q^{t_0}} = \|\varkappa^{-1} v(\varkappa v)_r + \mu(\rho) \Phi_r + \tilde{b}_3\|_{Q^{t_0}} \leq K.$$

В силу равенства (103), умноженного на ρ и продифференцированного по r , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa} (\varkappa v)_{rr} &= \frac{k}{r \varkappa} (\varkappa v)_r + \rho \Phi_r + \rho_r \Phi + (\rho \omega_2(\rho))_r \frac{v}{r} + \rho \omega_2(\rho) \left(\frac{v}{r} \right)_r \\ &+ \left(\frac{1}{\mu(\rho)} \right)_r (p(\rho) - p(\rho_S) - \Delta p_\Gamma) + \frac{1}{\mu(\rho)} (p(\rho) - p(\rho_S))_r. \end{aligned}$$

Применив неравенство $\|\varphi\|_{L^{\infty,2}(Q^{t_0})} \leq c\|\varphi\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})}$ и равенство (97) вместе с оценками (73) и (117), выведем

$$\begin{aligned} \|(\kappa v)_{rr}\|_{Q^{t_0}} &\leq K(1 + \|\rho_r\|_{L^{2,\infty}(Q)}) (\|v\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})} + \|\Phi\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})} \\ &\quad + \|\rho - \rho_S\|_{H^{1,0}(Q^{t_0})} + \|\Delta p_\Gamma\|_{L^2(t_0, \infty)}) \leq K_1. \end{aligned}$$

Следовательно, и $\|v_{rr}\|_{Q^{t_0}} \leq K$.

Аналогичные рассуждения позволяют извлечь неравномерную оценку $\|v_t\|_{Q_T} + \|v_{rr}\|_{Q_T} \leq K(T)$ при любых $T > 0$ из [10; доказательство теоремы 5, п. 3] (т.е. из доказательства оценки (76) настоящей работы). Следовательно, $\|v_t\|_Q + \|v_{rr}\|_Q \leq K$. Поскольку справедливы также оценки (71) и (76), то доказательство завершено.

Отметим, что условие на p'_Γ в (75) может быть существенно обобщено (см. [17]).

§ 4. Лагранжева стационарная задача

Лагранжева стационарная задача (в фиксированной области $J = (0, M)$) может быть выведена из эйлеровой (7)–(9) в случае положительных решений заменой переменной $\chi = m_S(r)$:

$$\begin{aligned} Dp(\bar{\rho}_S) &= \frac{\check{f}_S[r_S]}{r_S^k}, \quad V_S := \frac{1}{k+1} r_S^{k+1} = V_0 + \int_0^\chi \eta_S(\xi) d\xi, \quad \eta_S := \frac{1}{\bar{\rho}_S} \text{ в } J, \\ p(\bar{\rho}_S(M)) &= p_{\Gamma, S}, \end{aligned} \quad (118)$$

где неизвестная функция $\bar{\rho}_S \in C(\bar{J})$ с $p(\bar{\rho}_S) \in C^1(\bar{J})$ и $(\bar{\rho}_S)_{\min} := \min_{\bar{J}} \bar{\rho}_S > 0$ является положительным лагранжевым стационарным решением таким, что $\rho_S(r) = \bar{\rho}_S(m_S(r))$ при $r \in \bar{\Omega}_S$; кроме того, здесь

$$D = \frac{d}{d\chi}, \quad \check{f}_S[r_S](\chi) = f_S(r_S(\chi), \chi), \quad r_S \geq r_0, \quad V_0 = \frac{1}{k+1} r_0^{k+1}.$$

Наоборот, если дано положительное решение $\bar{\rho}_S$ лагранжевой задачи (118), (119), то обратная замена переменной $r = r_S(\chi)$ приводит к положительному решению $\{\rho_S, R_S\}$ эйлеровой задачи (7)–(9), где $\rho_S(r_S(\chi)) = \bar{\rho}_S(\chi)$ при $\chi \in \bar{J}$ и $R_S = r_S(M)$. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между положительными решениями этих двух задач.

Удобно переписать задачу (118), (119) относительно неизвестной функции η_S как

$$D\hat{p}(\eta_S) = \check{h}[V_S], \quad V_S(\chi) = V_0 + \int_0^\chi \eta_S(\xi) d\xi \text{ в } J, \quad (120)$$

$$\hat{p}(\eta_S(M)) = p_{\Gamma, S}, \quad (121)$$

где $\hat{p}(\zeta) = p(1/\zeta)$ и $\check{h}[V_S](\chi) := h(V_S(\chi), \chi)$ (см. (55)).

Приведем сначала иное доказательство существования положительного решения, данного в замечании 1. Для стационарной задачи в форме (120), (121) с функцией h , не зависящей от χ , результат следует из [17], [24]. Воспользуемся теми же рассуждениями, немного упростив их.

Введем нелинейный оператор $\mathcal{A}: \mathcal{K}^+ \rightarrow C^1(\overline{J})$, где $\mathcal{K}^+ := \{p_S \in C(\overline{J}) : (p_S)_{\min} > 0\}$, положив

$$(\mathcal{A}p_S)(\chi) := p_{\Gamma,S} - \int_{\chi}^M \check{h}[V_S](\xi) d\xi$$

$$\text{с } V_S(\chi) = V_0 + \int_0^{\chi} \widehat{p}^{-1}(p_S(\xi)) d\xi \quad \text{при } \chi \in \overline{J},$$

где $\widehat{p}^{-1}$ — обратная функция к $\widehat{p}$, и переформулируем задачу (120), (121) как задачу о неподвижной точке

$$p_S = \mathcal{A}p_S \quad (122)$$

относительно функции $p_S := \widehat{p}(\eta_S)$. Можно непосредственно проверить, что $\mathcal{A}$ — компактный оператор на $\mathcal{K}_{\delta}^+ := \{p_S \in C(\overline{J}) : (p_S)_{\min} \geq \delta\}$ при любых $\delta > 0$.

В силу условий (22) и (13) имеем

$$(\mathcal{A}p_S)(\chi) \geq p_{\Gamma,S} - f_0(M - \chi) \geq N^{-1} \quad \text{на } \overline{J}.$$

Кроме того, если $(p_S)_{\min} \geq N^{-1}$, то $V_S \leq \overline{V}_S := V_0 + M\widehat{p}^{-1}(N^{-1})$ и, следовательно,

$$(\mathcal{A}p_S)(\chi) \leq p_{\Gamma,S} + N_0(M - \chi) \leq p_{\Gamma,S} + N_0M \quad \text{на } \overline{J}$$

с $N_0 := \|h\|_{C([V_0, \overline{V}_S] \times \overline{J})}$. Это означает, что

$$\mathcal{A}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$$

для

$$\mathcal{K} := \{p_S \in C(\overline{J}) : p_{\Gamma,S} - f_0(M - \chi) \leq p_S(\chi) \leq p_{\Gamma,S} + N_0(M - \chi) \quad \text{на } \overline{J}\} \subset \mathcal{K}_{N^{-1}}.$$

Поскольку $\mathcal{K}$ — выпуклое замкнутое ограниченное непустое подмножество в $C(\overline{J})$, то задача (122) имеет решение $p_S \in \mathcal{K}$ согласно теореме Шаудера о неподвижной точке.

Сформулируем аналог утверждения 2. Пусть $\overline{V}_S(\alpha) := \overline{R}_S^{k+1}(\alpha)/(k+1) = V_0 + M/\alpha$ (см. замечание 2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. 1) Если $h(\nu, \chi)$ не возрастает по $\nu \geq V_0$ при всех $\chi \in \overline{J}$, то лагранжева стационарная задача имеет не более одного решения.

2) Пусть $\delta_S > 0$ и h удовлетворяет условию

$$h(\tilde{\nu}, \chi) - h(\nu, \chi) \leq \varphi(\chi)(\tilde{\nu} - \nu) \quad \text{при всех } V_0 \leq \nu < \tilde{\nu} \leq \overline{V}_S(\delta_S), \quad \chi \in \overline{J} \quad (123)$$

с некоторой функцией $\varphi \in L^1(J)$, $\varphi \geq 0$, такой, что

$$\frac{M}{C^{(2)}(\delta_S)} \int_J \varphi d\chi \leq q \quad \text{при некотором } 0 \leq q \leq 1, \quad (124)$$

где $C^{(2)}(\delta_S) := \inf_{\zeta \leq \delta_S^{-1}} (-\widehat{p}'(\zeta)) = \inf_{s \geq \delta_S} s^2 p'(s) > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}(\eta_1, \eta_2) &:= \int_J \{(\widehat{p}(\eta_2) - \widehat{p}(\eta_1))(\eta_1 - \eta_2) + (\check{h}[V_2] - \check{h}[V_1])(V_1 - V_2)\} d\chi \\ &\geq C^{(2)}(\delta_S)(1 - q)\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(J)}^2 \end{aligned} \quad (125)$$

при всех $\eta_j \in C(\bar{J})$, $0 < \eta_j \leq \delta_S^{-1}$ и $V_j = V_0 + \int_0^x \eta_j(\xi) d\xi$ с $j = 1, 2$; более того, это неравенство является строгим при условии, что $\eta_1(M) = \eta_2(M)$, но $\eta_1 \neq \eta_2$.

Как следствие при выполнении условий (123) и (124) с $q = 1$ лагранжева стационарная задача имеет не более одного решения $\eta_S \in C(\bar{J})$ такого, что $\eta_S \leq \delta_S^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях п. 2) получим

$$\tilde{\mathcal{B}}(\eta_1, \eta_2) \geq C^{(2)}(\delta_S) \|\eta_1 - \eta_2\|_J^2 - \|\varphi\|_{L^1(J)} \|V_1 - V_2\|_{C(\bar{J})}^2.$$

Поскольку $\|V_1 - V_2\|_{C(\bar{J})}^2 \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^1(J)}^2 \leq M \|\eta_1 - \eta_2\|_J^2$, то справедливо неравенство (125); более того, последнее неравенство для $\eta_1 - \eta_2$ является строгим при условии, что $(\eta_1 - \eta_2)(M) = 0$, но $\eta_1 - \eta_2 \neq 0$.

Задаче (120), (121) отвечает интегральное тождество

$$\int_J \{ (p_{\Gamma, S} - \hat{p}(\eta_S)) D\varphi - \check{h}[V_S]\varphi \} d\chi = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(J), \quad \varphi(0) = 0. \quad (126)$$

Следовательно, для любых двух решений η_S и $\tilde{\eta}_S$ этой задачи верно равенство $\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\eta}_S, \eta_S) = 0$. Но если $\eta_S \neq \tilde{\eta}_S$, то $\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\eta}_S, \eta_S) > 0$ как при $h(\nu, \chi)$, не возрастающей по ν , так и в условиях п. 2) в силу (125) при условии, что $\eta_S \leq \delta_S^{-1}$ и $\tilde{\eta}_S \leq \delta_S^{-1}$. Поэтому $\eta_S \equiv \tilde{\eta}_S$.

Пункт 1) обобщает соответствующие утверждения в [17], [24]. В случае $f_S = f_G$, $k = 2$ условия (123) и (124) сводятся к

$$\frac{4GM^2(M_0 + 0.5M)}{r_0^7 C^{(2)}(\rho_{\Gamma, S})} \leq q.$$

Применив равенство $\eta_S = DV_S$, можно исключить функцию η_S из стационарной задачи (120), (121) и получить эквивалентную краевую задачу для нелинейного ОДУ второго порядка:

$$D\hat{p}(DV_S) = \check{h}[V_S] \quad \text{на } J, \quad (127)$$

$$V_S(0) = V_0, \quad \hat{p}(DV_S)|_{\chi=M} = p_{\Gamma, S}, \quad (128)$$

относительно функции $V_S \in C^1(\bar{J})$ такой, что $(DV_S)_{\min} > 0$.

Следуя методу малых возмущений, можно заменить V_S на $V = V_S + W$ с малым W и линеаризовать оператор последней задачи:

$$D\hat{p}(DV) - \check{h}[V] = D(\hat{p}'(DV_S)DW) - \check{h}_\nu[V_S]W + \dots \quad \text{на } J, \\ V(0) = V_0 + W(0), \quad \hat{p}(DV)|_{\chi=M} - p_{\Gamma, S} = (\hat{p}'(V_S)DW)|_{\chi=M} + \dots,$$

с точностью до членов второго порядка малости по отношению к W . Введем ассоциированную задачу на собственные значения для линеаризованного оператора:

$$-D(-\hat{p}'(\eta_S)DW) - \check{h}_\nu[V_S]W = \lambda \tilde{a}_0 W \quad \text{на } J, \quad (129)$$

$$W(0) = 0, \quad (\hat{p}'(\eta_S)DW)|_{\chi=M} = 0, \quad (130)$$

и назовем стационарное решение *статически устойчивым*, если

$$\bar{\lambda}_{\min}\{\bar{\rho}_S\} > 0, \quad (131)$$

где $\bar{\lambda}_{\min}\{\bar{\rho}_S\}$ – минимальное собственное число этой самосопряженной задачи на собственные значения для ОДУ второго порядка. Конечно, здесь функции $\bar{\rho}_S$, η_S и V_S связаны последними равенствами (118) и (120); кроме того, $\tilde{a}_0 \in C(\bar{J})$ – некоторая функция такая, что $(\tilde{a}_0)_{\min} > 0$. В связи с работами [17], [24] отметим, что условие (131) очевидным образом выполнено в частном случае, когда $\check{h}_\nu \leq 0$.

Чтобы прояснить вариационный смысл этого определения, напомним выражение для статической потенциальной энергии, отвечающей задаче (118), (119):

$$\bar{\mathcal{F}}_S[\bar{\rho}_S] := \int_J (\hat{P}_0(\eta_S) + p_{\Gamma,S}\eta_S - \check{F}[r_S]) d\chi = \mathcal{F}_S\{\rho_S, R_S\},$$

где

$$\hat{P}_0(s) := P_0\left(\frac{1}{s}\right) = - \int_1^s \hat{p}(\zeta) d\zeta, \quad \check{F}[r_S](\chi) := F(r_S(\chi), \chi).$$

Положим также $\check{H}[V_S](\chi) := H(V_S(\chi), \chi)$ (см. (55)) и перепишем потенциальную энергию в форме

$$\bar{\mathcal{F}}_S[\bar{\rho}_S] = \mathcal{P}[V_S] := \int_J (\hat{P}_0(DV_S) + p_{\Gamma,S}DV_S - \check{H}[V_S]) d\chi.$$

Определим подпространство $\tilde{C}^1(\bar{J}) := \{W \in C^1(\bar{J}) : W(0) = 0\}$ и открытое множество $\mathcal{S}_0 := \{V \in C^1(\bar{J}) : V(0) = V_0, (DV)_{\min} > 0\}$ на гиперплоскости в $C^1(\bar{J})$ и рассмотрим $\mathcal{P}[V]$ на $\mathcal{S}_0$. Для $V \in \mathcal{S}_0$ и $W \in \tilde{C}^1(\bar{J})$ первая и вторая вариация $\mathcal{P}$ даются формулами

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}[V](W) &:= \frac{d}{d\tau} \mathcal{P}[V + \tau W] \Big|_{\tau=0} = \int_J \{ (p_{\Gamma,S} - \hat{p}(DV))DW - \check{h}[V]W \} d\chi, \\ \delta^2 \mathcal{P}[V](W) &:= \frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{P}[V + \tau W] \Big|_{\tau=0} = \int_J \{ -\hat{p}'(DV)(DW)^2 - \check{h}_\nu[V]W^2 \} d\chi, \end{aligned}$$

в последней предполагается выполненным условие $h_\nu \in L^1(J; C[V_0, V(M) + \varepsilon])$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Стандартным образом стационарная задача в форме (127), (128) эквивалентна соотношению

$$\delta \mathcal{P}[V_S](W) = 0 \quad \forall W \in \tilde{C}^1(\bar{J}), \quad (132)$$

ср. с (126), т.е. решения V_S задачи (127), (128), и только они, являются стационарными точками $\mathcal{P}$. Более того, следующее условие (ср. с [4])

$$\bar{\mathcal{J}}[W] := \delta^2 \mathcal{P}[V_S](W) > 0 \quad \forall W \in \tilde{C}^1(\bar{J}), \quad W \neq 0, \quad (133)$$

эквивалентно условию статической устойчивости (131), и $\bar{\mathcal{J}}[W]$ является энергетическим функционалом, отвечающим задаче на собственные значения (129), (130).

Установим непосредственную связь с соответствующими понятиями из § 2 и, в частности, эквивалентность двух определений статической устойчивости (35) и (131).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть справедливы свойства $(f_S)_\chi \in L^1((r_0, R_S); C(\bar{J}))$ и $(f_S)_r, (f_S)_\chi \in L^1(J; C[r_0, R_S])$. Тогда

$$\mathcal{J}_{R_S}[w] = \bar{\mathcal{J}}[\eta_S \bar{w}] \quad \forall w \in \tilde{H}^1(\Omega_S),$$

где $\bar{w}(\chi) = w(r_S(\chi))$ на J . Как следствие

$$\lambda_{\min}\{\rho_S, R_S\} = \bar{\lambda}_{\min}\{\bar{\rho}_S\}$$

при условии, что $\lambda_{a_0}/\rho_S = \tilde{a}_0(m_S)$ в эйлеровом и лагранжевом уравнениях на собственные значения (33) и (129).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены переменной $\chi = m_S(r)$, используя функцию h вместо f_S , получаем

$$\mathcal{J}_{R_S}[w] = \int_J \left\{ p'(\bar{\rho}_S)(D\bar{w})^2 + \frac{\check{h}_\chi[V_S]}{\bar{\rho}_S} \bar{w}^2 \right\} d\chi - \left(\frac{\check{h}[V_S]}{\bar{\rho}_S} \bar{w}^2 \right) \Big|_{\chi=M},$$

где $w(r) = \bar{w}(m_S(r))$ на $\bar{\Omega}_S$. Положим $W := \eta_S \bar{w}$ и выполним преобразования

$$\begin{aligned} p'(\bar{\rho}_S)(D\bar{w})^2 &= \bar{\rho}_S^2 p'(\bar{\rho}_S)(DW)^2 + \bar{\rho}_S(Dp(\bar{\rho}_S))D(W^2) + (D\bar{\rho}_S)(Dp(\bar{\rho}_S))(DW)^2 \\ &= -\hat{p}'(\eta_S)(DW)^2 + D(\bar{\rho}_S \check{h}[V_S]W^2) - \bar{\rho}_S(D\check{h}[V_S])W^2, \end{aligned}$$

применив уравнение $Dp(\bar{\rho}_S) = \check{h}[V_S]$. Поэтому

$$\mathcal{J}_{R_S}[w] = \int_J \{ -\hat{p}'(\eta_S)(DW)^2 - \bar{\rho}_S(D\check{h}[V_S] - \check{h}_\chi[V_S])W^2 \} d\chi = \bar{\mathcal{J}}[W].$$

Поскольку

$$\int_{\Omega_S} a_0 w^2 dr = \int_J \frac{\bar{\rho}_S}{r_S^k} \bar{a}_0 W^2 d\chi$$

с $a_0 = \bar{a}_0(m_S)$, то доказательство завершено.

Покажем, что статически устойчивые решения изолированы в сильном смысле.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Предположим, что $p' > 0$ и

$$\|(f_S)_r\|_{L^1(J; C[r_0, R_S + \varepsilon_S])} \leq N, \quad (134)$$

$$\|\tilde{\theta}(\cdot)[\delta]\|_{L^1(J)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0^+ \quad (135)$$

для

$$\tilde{\theta}(\chi)[\delta] := \sup_{0 < \Delta \leq \delta} \|(f_S)_r(r + \Delta, \chi) - (f_S)_r(r, \chi)\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon_S - \Delta]}$$

с некоторым $\varepsilon_S > 0$. Если стационарное решение $\bar{\rho}_S$ статически устойчиво, то при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ не существует другого решения $\bar{\rho}_S^{(1)}$ такого, что $|R_S - R_S^{(1)}| < \varepsilon_0$, где R_S и $R_S^{(1)}$ — соответствующие радиусы свободных границ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения аналогичны примененным в утверждении 4 и даже проще (поскольку теперь область J фиксирована). Они базируются на изучении вспомогательной задачи Коши

$$Dp_S = \check{h}[V_S], \quad DV_S = \widehat{p}^{-1}(p_S) \quad \text{на } J, \quad (136)$$

$$p_S(M) = p_{\Gamma, S}, \quad V_S(M) = \nu \quad (137)$$

для функций $p_S = \widehat{p}(\eta_S)$ и V_S с заданным $\nu > V_0$ и выводе соотношений

$$\int_J \{ -\widehat{p}'(DV_S + \varepsilon W)(DW)^2 - \check{h}_\nu[V_S + \varepsilon W]W^2 \} d\chi = (1 + o(\varepsilon)) \overline{\mathcal{J}}[W] \geq \delta_0 \|W\|_{H^1(J)}^2 \quad (138)$$

при любых $W \in \tilde{C}^1(\overline{J})$, $\|W\|_{C^1(\overline{J})} = 1$ и с $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\delta_0 > 0$.

Отметим, что в силу второго соотношения (120) условие $|R_S - R_S^{(1)}| < \varepsilon_0$ может быть эквивалентным образом заменено на

$$\left| \int_J (\eta_S - \eta_S^{(1)}) d\chi \right| < \varepsilon_1$$

с $\eta_S^{(1)} := 1/\overline{p}_S^{(1)}$ и достаточно малым $\varepsilon_1 > 0$.

Назовем $V \in \mathcal{S}_0$ точкой *локального квадратичного минимума* $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P}[V + W] - \mathcal{P}[V] \geq \delta_0 \|W\|_{H^1(J)}^2 \quad \forall W \in \tilde{C}^1(\overline{J}), \quad \|W\|_{C^1(\overline{J})} \leq \varepsilon_0, \quad (139)$$

при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Предположим, что выполнены условие $p' > 0$ вместе с (134) и (135). Функция $V \in \mathcal{S}_0$ является точкой локального квадратичного минимума $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $V_S = V$ является решением задачи (127), (128), удовлетворяющим условию статической устойчивости (133).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in \mathcal{S}_0$ и $\|W\|_{C^1(\overline{J})} = 1$. По формуле Тейлора

$$\mathcal{P}[V + \varepsilon W] = \mathcal{P}[V] + \delta \mathcal{P}[V](\varepsilon W) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{P}[V + \tau \varepsilon W] \Big|_{\tau=\tilde{\tau}}$$

при всех $0 < \varepsilon < [(DV)_{\min}]^{-1}$ и некотором $\tilde{\tau} \in [0, 1]$. Поскольку аналогично равенству в (138)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{P}[V + \tau \varepsilon DW] \Big|_{\tau=\tilde{\tau}} &= \varepsilon^2 \int_J \{ -\widehat{p}'(DV + \tilde{\tau} \varepsilon W)(DW)^2 - \check{h}_\nu[V + \tilde{\tau} \varepsilon W]W^2 \} d\chi \\ &= (1 + o(\varepsilon)) \delta^2 \mathcal{P}[V](\varepsilon W), \end{aligned}$$

то условие (139) эквивалентно (132) вместе с

$$(1 + o(\varepsilon)) \overline{\mathcal{J}}[W] \geq 2\delta_0 \|W\|_{H^1(J)}^2 \quad \forall W \in \tilde{C}^1(\overline{J}), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

для $V_S = V$ (в последнем неравенстве условие $\|W\|_{C^1(\overline{J})} = 1$ пропадает).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Свойства (12), (13) влекут оценку снизу

$$\mathcal{P}[V] \geq (2N)^{-1}V(M) - K$$

и, в частности, $\mathcal{P}[V] \rightarrow +\infty$ при условии, что $\|V\|_{C(\bar{J})} = V(M) \rightarrow \infty$, для $V \in \mathcal{S}_0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(\zeta) &= \Pi(\zeta, \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)\hat{p}(\zeta_0) + \hat{P}_0(\zeta_0) \\ \text{с } \Pi(\zeta, \zeta_0) &:= \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\hat{p}(\zeta_0) - \hat{p}(\xi)) d\xi \geq 0 \quad \forall \zeta > 0, \quad \zeta_0 > 0; \end{aligned}$$

как следствие имеем соотношения при всех $\zeta_0 > 0, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[V] &\geq \int_J \{ (p_{\Gamma, S} - \hat{p}(\zeta_0))DV - (f_0 + \varepsilon)V - C_{1\varepsilon} \} d\chi - C_0(\zeta_0) \\ &= \{ p_{\Gamma, S} - \hat{p}(\zeta_0) - M(f_0 + \varepsilon) \} V(M) - C \end{aligned}$$

с $C = C(\varepsilon, \zeta_0, p_{\Gamma, S}, V_0, M)$, которые и влекут желаемую оценку при достаточно малых ζ_0^{-1} и ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Функция $\hat{P}_0$ строго выпукла при выполнении первого и второго условий (10), а функция $-H(\nu, \chi)$ выпукла по ν , если $h(\nu, \chi)$ не возрастает по ν при всех $\chi \in \bar{J}$ (в частности, если $h_\nu \leq 0$). Следовательно, при выполнении этих условий и (11) функционал $\mathcal{P}$ является строго выпуклым на $\mathcal{S}_0$ и поэтому он имеет не более одной стационарной точки (фактически точки минимума), ср. с п. 1) в утверждении 5. Более того, при выполнении условий (10), (11), (14) вместе с $p' > 0$ и $h_\nu \leq 0$ получим

$$\delta^2 \mathcal{P}[V](W) \geq \int_J -\hat{p}'(DV)(DW)^2 d\chi \geq c_0(V) \int_J (DW)^2 d\chi, \quad (140)$$

где $c_0(V) := \min_{[\zeta_0, \zeta_1]} |\hat{p}'(\zeta)| > 0$ с $0 < \zeta_0 \leq DV \leq \zeta_1$, и тем самым выполнено условие (133).

Обсудим неравенство (125). В силу равенства

$$\tilde{\mathcal{B}}(\eta_1, \eta_2) = (\delta \mathcal{P}[V_1] - \delta \mathcal{P}[V_2])(V_1 - V_2)$$

неравенство (125) с некоторым $0 \leq q < 1$ обеспечивает строгую монотонность $\delta \mathcal{P}$ на подмножестве $\{V \in \mathcal{S}_0 : DV \leq \delta_S^{-1}\}$. Введем также связанное с этим условие на стационарное решение η_S , которое будет применено в следующем параграфе: для всех достаточно больших N_0

$$\tilde{\mathcal{B}}(\eta_1, \eta_S) \geq \delta_0(N_0) \|\eta_1 - \eta_S\|_J^2 \quad \text{при любых } \eta_1 \in C(\bar{J}), \quad N_0^{-1} \leq \eta_1 \leq N_0, \quad (141)$$

с некоторым $\delta_0(N_0) > 0$. Конечно, при выполнении этого условия других стационарных решений нет; кроме того, используя формулу Ньютона–Лейбница для функционалов и свойство стационарности (132), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[V_1] - \mathcal{P}[V_S] &= \int_0^1 (\delta \mathcal{P}[\alpha V_1 + (1 - \alpha)V_S] - \delta \mathcal{P}[V_S])(V_1 - V_S) d\alpha \\ &= \int_0^1 \tilde{\mathcal{B}}(\alpha \eta_1 + (1 - \alpha)\eta_S, \eta_S) \frac{d\alpha}{\alpha} \\ &\geq \frac{\delta_0(N_0)}{2} \|\eta_1 - \eta_S\|_J^2 = \frac{\delta_0(N_0)}{2} \|D(V_1 - V_S)\|_J^2 \end{aligned} \quad (142)$$

при достаточно больших N_0 (таких, что $N_0^{-1} \leq \eta_S \leq N_0$). Таким образом, V_S является точкой *глобального* квадратичного минимума $\mathcal{P}$ на подмножествах $\{V \in \mathcal{S}_0 : N_0^{-1} \leq DV \leq N_0\}$, а условие (141) обеспечивает строгую монотонность $\delta\mathcal{P}[V_1]$ по отношению к фиксированному $V_1 = V_S$ на этих подмножествах.

В заключение параграфа представим два результата: о статической устойчивости и о единственности стационарных решений без предположения $h_\nu \leq 0$, которые важны, в частности, в астрофизическом контексте. Определим так называемый *первый адиабатический показатель*

$$\Gamma_1(s) := \frac{sp'(s)}{p(s)} = -\frac{\widehat{p}'(\zeta)}{\zeta\widehat{p}(\zeta)} \Big|_{\zeta=1/s} \quad \text{при } s > 0. \quad (143)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Предположим, что $p' > 0$, $(f_S)_r \in C(\overline{\mathbb{R}^+} \times [0, M])$ и функция $h^{(0)}$ удовлетворяет равенству $h_\nu = hh^{(0)}$ (ясно, что $h^{(0)} = h_\nu/h$ на множестве, где $h \neq 0$) и условиям*

$$h^{(0)}, h_\nu^{(0)}, h_\chi^{(0)} \in L^1(J; C[V_0, \nu]) \quad \forall \nu > V_0, \quad (144)$$

$$\frac{(h^{(0)}(\nu, \chi))^2}{\Gamma_1(s)} - h_\nu^{(0)}(\nu, \chi) - sh_\chi^{(0)}(\nu, \chi) \leq 0 \quad \forall s > 0, \nu > V_0, \chi \in J, \quad (145)$$

$$h^{(0)}(\nu, M) \leq 0 \quad \forall \nu > V_0. \quad (146)$$

Тогда условие (133) выполняется для любого стационарного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $h^{(0)} \in C([V_0, \infty) \times [0, M])$ благодаря (144). Применяя соотношения $h_\nu = h^{(0)}h$ и (120) и проинтегрировав по частям, при любых $W \in \tilde{C}^1(\overline{J})$ можно преобразовать второе слагаемое в $\mathcal{J}[W]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} - \int_J \check{h}_\nu[V_S]W^2 d\chi &= - \int_J h^{(0)}[V_S](D\widehat{p}(\eta_S))W^2 d\chi \\ &= \int_J \{2h^{(0)}[V_S]\widehat{p}(\eta_S)(DW)W + (h_\nu^{(0)}[V_S]\eta_S + h_\chi^{(0)}[V_S])\widehat{p}(\eta_S)W^2\} d\chi \\ &\quad - h^{(0)}[V_S](M)p_{\Gamma, S}W^2(M). \end{aligned}$$

В силу условия (145) и формулы (143)

$$\left| \int_J 2h^{(0)}[V_S]\widehat{p}(\eta_S)(DW)W d\chi \right| \leq \int_J -2\widehat{p}'(\eta_S)\sqrt{a}|DW||W| d\chi$$

с $a := -(h_\nu^{(0)}[V_S]\eta_S + h_\chi^{(0)}[V_S])/\widehat{p}'(\eta_S)$. Воспользовавшись также условиями (146) и $p' > 0$, получим

$$\mathcal{J}[W] \geq \int_J -\widehat{p}'(\eta_S)(|DW| - \sqrt{a}|W|)^2 d\chi \geq c_0 \int_J (|DW| - \sqrt{a}|W|)^2 d\chi \geq 0$$

с $c_0 > 0$ (см. (140)). Последний интеграл равен нулю, если и только если $|DW| = \sqrt{a}|W|$ на $\overline{J}$; следовательно, $DW = \sigma_0\sqrt{a}W$ с функцией $\sigma_0(\chi) := 1$ в случаях $DW(\chi) \geq 0$, $W(\chi) \geq 0$ или $DW(\chi) < 0$, $W(\chi) < 0$ и $\sigma_0(\chi) := -1$ в остальных случаях, которая измерима на J . Поскольку $W(0) = 0$, то отсюда $W \equiv 0$.

Отметим, что если $1/\Gamma_1(s) = O(1)$ при $s \rightarrow \infty$, то условие (145) влечет, что $h_\chi^{(0)} \geq 0$. Далее, если условия (145) и (146) выполнены только для $s = \overline{p}_S(\chi)$ и $w = V_S(\chi)$ на J для частного стационарного решения, условие (133) выполнено для этого решения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Предположим, что $p' > 0$, $(f_S)_r \in C(\overline{\mathbb{R}^+} \times [0, M_1])$ и функция $h^{(1)}$ удовлетворяет равенству $h = h_\nu h^{(1)}$ (ясно, что $h^{(1)} = h/h_\nu$ на множестве, где $h_\nu \neq 0$) и условиям*

$$h^{(1)}, h_\nu^{(1)}, h_\chi^{(1)} \in L^1(0, M_1; C[V_0, \nu]) \quad \forall \nu > V_0, \quad (147)$$

$$\frac{1}{\Gamma_1(s)} + h_\nu^{(1)}(\nu, \chi) + s h_\chi^{(1)}(\nu, \chi) \leq 0 \quad \forall s > 0, \nu > V_0, \chi \in (0, M_1), \quad (148)$$

$$\lim_{(\nu, \chi) \rightarrow (V_0^+, 0^+)} h^{(1)}(\nu, \chi) \leq 0. \quad (149)$$

Тогда стационарная задача (118), (119) имеет не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать метод стрельбы и введем задачу Коши

$$Dp_S = \check{h}[V_S], \quad DV_S = \widehat{p}^{-1}(p_S) \quad \text{на } (0, M_1), \quad (150)$$

$$p_S|_{\chi=0} = \lambda, \quad V_S|_{\chi=0} = V_0, \quad (151)$$

с искомыми функциями $p_S(\chi, \lambda)$, $V_S(\chi, \lambda)$ (ср. с (136), (137)). При любом значении параметра стрельбы $\lambda > 0$ существует единственное решение этой задачи, удовлетворяющее неравенству $p_S(\chi, \lambda) > 0$ фактически при $\chi \in [0, \overline{M}(\lambda))$, где либо $p_S|_{\chi=\overline{M}(\lambda)} = 0$ и $0 < \overline{M}(\lambda) < M_1$, либо $\overline{M}(\lambda) = M_1$.

Ясно, что для любого решения η_S задачи (120), (121) функции $p_S := \widehat{p}(\eta_S)$ и V_S удовлетворяют (150), (151) при некотором $\lambda > 0$. Покажем, что это возможно только при единственном значении λ .

С этой целью введем также производные по параметру

$$\dot{p}_S = \frac{\partial}{\partial \lambda} p_S, \quad \dot{V}_S = \frac{\partial}{\partial \lambda} V_S,$$

которые корректно определены и удовлетворяют линейной задаче Коши

$$D\dot{p}_S = \check{h}_\nu[V_S]\dot{V}_S, \quad D\dot{V}_S = (\widehat{p}^{-1})'(p_S)\dot{p}_S \quad \text{на } [0, \overline{M}(\lambda)), \quad (152)$$

$$\dot{p}_S|_{\chi=0} = 1, \quad \dot{V}_S|_{\chi=0} = 0 \quad (153)$$

(см., например, [31; раздел V.3]). В силу (153) и $(\widehat{p}^{-1})' < 0$ справедливы неравенства

$$\dot{p}_S(\chi, \lambda) > 0, \quad D\dot{V}_S(\chi, \lambda) < 0, \quad \dot{V}_S(\chi, \lambda) < 0$$

на некотором полусегменте $[0, a(\lambda))$, где либо $\dot{p}_S|_{\chi=a(\lambda)} = 0$ и $0 < a(\lambda) < \overline{M}(\lambda)$, либо $a(\lambda) = \overline{M}(\lambda)$. Докажем, что реализуется только вторая возможность.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi := p_S D\dot{V}_S - \dot{p}_S D(h^{(1)}[V_S])$. В силу вторых уравнений (150) и (152) найдем, что

$$\begin{aligned} \psi &= p_S (\widehat{p}^{-1})'(p_S) \dot{p}_S - \dot{p}_S (h_\nu^{(1)}[V_S] \widehat{p}^{-1}(p_S) + h_\chi^{(1)}[V_S]) \\ &= -\dot{p}_S \widehat{p}^{-1}(p_S) \left\{ \frac{1}{\Gamma_1(\widehat{p}^{-1}(p_S))} + h_\nu^{(1)}[V_S] + \widehat{p}^{-1}(p_S) h_\chi^{(1)}[V_S] \right\}. \end{aligned} \quad (154)$$

Поэтому $\psi \geq 0$ на $(0, a(\lambda))$ согласно условию (148).

С другой стороны, предположим, что $a(\lambda) < \overline{M}(\lambda)$ при некотором λ . В силу первых уравнений (150) и (152) найдем, что $-(Dp_S)V_S + (D\dot{p}_S)h^{(1)}[V_S] = 0$ и, следовательно,

$$\int_0^{a(\lambda)} \psi d\chi = (p_S \dot{V}_S - \dot{p}_S h^{(1)}[V_S])|_0^{a(\lambda)},$$

где $h^{(1)}[V_S]|_{\chi=0} := \lim_{\chi \rightarrow 0+} h^{(1)}[V_S] \leq 0$ по условию (149). В силу соотношений $p_S|_{\chi=a(\lambda)} > 0$, $\dot{p}_S|_{\chi=a(\lambda)} = 0$ и $\dot{V}_S|_{\chi=a(\lambda)} < 0$ и начальных условий (153) выведем

$$\int_0^{a(\lambda)} \psi d\chi = (p_S \dot{V}_S)|_{\chi=a(\lambda)} + h^{(1)}[V_S]|_{\chi=0} \leq p_S|_{\chi=a(\lambda)} \dot{V}_S|_{\chi=a(\lambda)} < 0,$$

что приводит к противоречию.

Наконец, поскольку множество $\{(\chi, \lambda) : 0 < \chi < \overline{M}(\lambda), \lambda > 0\}$ открытое (см. [31]) и как $p_S > 0$, так и $\dot{p}_S > 0$ на нем, то функция $\overline{M}$ не убывает на $\mathbb{R}^+$, и при любом фиксированном $0 \leq \chi < \sup_{\lambda > 0} \overline{M}(\lambda)$ функция $p_S(\chi, \lambda)$ определена на полупрямой $\lambda > \lambda_0(\chi)$ и возрастает на ней. Следовательно, функция p_S может удовлетворять условию $p_S(M, \lambda) = p_{\Gamma, S}$ для не более чем одного значения λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если $h^{(0)}$ не вырождается (в частности, если h не вырождается), то можно положить $h^{(1)} := 1/h^{(0)}$, и условия (144), (145) влекут (147), (148) с M в роли M_1 . Наоборот, если $h^{(1)}$ не вырождается (в частности, если h_ν не вырождается), то можно положить $h^{(0)} := 1/h^{(1)}$, и условия (147), (148) влекут (144), (145).

СЛЕДСТВИЕ 3. В случае $f_S = f_G$, $k = 2$ и $\Gamma_1 \geq 4/3$ стационарная задача имеет единственное решение, более того, оно статически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае $h(\nu, \chi) = -G(M_0 + \chi)/(3\nu)^{4/3}$ и $h^{(1)}(\nu, \chi) = 1/h^{(0)}(\nu, \chi) = -3\nu/4$, поэтому условия следствия 1 выполнены, а условия утверждений 9 и 10 сводятся к $\Gamma_1 \geq 4/3$. Обратим внимание на вырождение $h|_{\chi=0} = \dot{h}_\nu|_{\chi=0} = 0$ в случае $M_0 = 0$.

Отметим, что условие $\Gamma_1 \geq \gamma_0$ с некоторым $\gamma_0 > 0$ эквивалентно условию $(s^{-\gamma_0} p(s))' \geq 0$ при $s > 0$, которое влечет, что $p(s) \leq p(1)s^{\gamma_0}$ при $0 < s \leq 1$ и $p(s) \geq p(1)s^{\gamma_0}$ при $s \geq 1$.

§ 5. Оценки скорости стабилизации в лагранжевых координатах

По ряду причин интересно дополнить эйлеровы оценки скорости стабилизации, данные в § 3, аналогичными лагранжевыми.

Рассмотрев $\chi = m(r, t)$ из уравнения (4) как новую независимую переменную вместе с t и приняв во внимание закон сохранения массы, задачу со свободной границей (1)–(3) можно преобразовать в задачу

$$D_t \check{\eta} = D(\check{\kappa} \check{v}) \quad \text{с} \quad \check{\eta} := \frac{1}{\check{\rho}}, \quad (155)$$

$$D_t \check{v} = \check{\kappa} D[\mu(\check{\rho}) \check{\rho} D(\check{\kappa} \check{v}) - p(\check{\rho})] + \check{f}[\check{r}], \quad (156)$$

$$\check{V} := \frac{1}{k+1} \check{r}^{k+1} = V_0 + \int_0^\chi \check{\eta}(\xi, t) d\xi \quad (157)$$

в фиксированной области $Q_L := J \times \mathbb{R}^+$. Связи между старыми неизвестными $\rho(r, t)$, $v(r, t)$, $m(r, t)$ и новыми $\check{\rho}(\chi, t)$, $\check{v}(\chi, t)$, $\check{r}(\chi, t)$ имеют вид:

$$\rho(r, t) = \check{\rho}(m(r, t), t), \quad v(r, t) = \check{v}(m(r, t), t), \quad r = \check{r}(m(r, t), t) \quad \text{в } \overline{Q},$$

конечно, $\check{\rho} > 0$ и $\check{r} \geq r_0$. Кроме того, теперь D и D_t обозначают частные производные по новым переменным χ и t , а $\check{\varkappa} = \check{r}^k$ и $\check{f}[\check{r}](\chi, t) = f(\check{r}(\chi, t), \chi, t)$. Уравнения дополняются следующими граничными и начальными условиями:

$$\check{v}|_{\chi=0} = 0, \quad \left[\mu(\check{\rho})\check{\rho}D(\check{\varkappa}\check{v}) - 2k\mu_1(\check{\rho})\frac{\check{v}}{\check{r}} - p(\check{\rho}) \right] \Big|_{\chi=M} = -p_\Gamma(t) \quad \text{при } t > 0, \quad (158)$$

$$\check{\rho}|_{t=0} = \check{\rho}^0(\chi), \quad \check{v}|_{t=0} = \check{v}^0(\chi) \quad \text{при } \chi \in J, \quad (159)$$

где $\check{\rho}^0(m^0(r)) = \rho^0(r)$ и $\check{v}^0(m^0(r)) = v^0(r)$ на Ω_0 с $m^0(r) := \int_{r_0}^r (\rho^0 \varkappa)(q) dq$.

Применив D_t к (157) и воспользовавшись (155) вместе с $\check{v}|_{\chi=0} = 0$, получим стандартное уравнение, связывающее $\check{r}$ и $\check{v}$:

$$D_t \check{r} = \check{v}. \quad (160)$$

Стационарная задача, отвечающая задаче (155)–(159), это задача (118), (119). Введем функции

$$A(s) := \int_1^s \frac{\mu(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad \widehat{A}(s) := A\left(\frac{1}{s}\right) = - \int_1^s \mu\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Лагранжева форма закона сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\check{\mathcal{E}} + \check{\mathcal{F}}[\check{\rho}]) + \int_J \mu(\check{\rho})\check{\rho}(D(\check{\varkappa}\check{v}))^2 d\chi - 2k \left(\mu_1(\check{\rho}) \frac{\check{\varkappa}\check{v}^2}{\check{r}} \right) \Big|_{\chi=M} \\ = \int_J \Delta \check{f}[\check{r}] \check{v} d\chi - \Delta p_\Gamma(\check{\varkappa}\check{v}) \Big|_{\chi=M} \end{aligned} \quad (161)$$

с функционалами

$$\check{\mathcal{E}} := \frac{1}{2} \int_J \check{v}^2 d\chi = \mathcal{E}, \quad \check{\mathcal{F}}[\check{\rho}] := \int_J (\widehat{P}_0(\check{\eta}) + p_{\Gamma, S} \check{\eta} - \check{F}[\check{r}]) d\chi = \mathcal{F}[\rho]$$

и функциями $\check{F}[\check{r}](\chi, t) = F(\check{r}(\chi, t), \chi)$, $\Delta \check{f}[\check{r}](\chi, t) = \Delta f(\check{r}(\chi, t), \chi, t)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. 1) Пусть выполнены условия теоремы 1, п. 1) и п. 2) вместе с $N^{-1} \leq \rho^0$ и

$$\begin{aligned} \text{существует постоянная } \delta_S > 0 \text{ такая,} \\ \text{что любое эйлерово стационарное решение } \{\rho_S, R_S\} \\ \text{удовлетворяет оценке снизу } \delta_S \leq \rho_S \text{ на } \overline{\Omega}_S. \end{aligned} \quad (162)$$

Тогда справедлива оценка снизу (70) для ρ и для любой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ существует подпоследовательность θ_n такая, что

$$\check{\eta}(\cdot, \theta_n) \rightarrow \eta_*(\cdot) \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(J). \quad (163)$$

Более того, для любой последовательности $\theta_n \rightarrow \infty$, $\theta_n \geq 0$, удовлетворяющей этому свойству, фактически $\bar{\rho}_S := 1/\eta_*$ служит лагранжевым стационарным решением, удовлетворяющим равенству $\bar{\mathcal{F}}_S[\bar{\rho}_S] = \mathcal{F}^{(S)}$, и справедливо предельное соотношение

$$\check{\rho}(\cdot, \theta_n) \rightarrow \bar{\rho}_S(\cdot) \quad \text{в } L^\lambda(J) \quad \forall 1 \leq \lambda < \infty. \quad (164)$$

2) Пусть дополнительно $p' > 0$ на $\mathbb{R}^+$. Предположим, что среди стационарных решений, удовлетворяющих (164) с $\lambda = 1$ для некоторой последовательности $\theta_n \rightarrow \infty$, $\theta_n \geq 0$, и равенству $\bar{\mathcal{F}}_S[\bar{\rho}_S] = \mathcal{F}^{(S)}$, существует статически устойчивое решение, а также выполнены условия на f_S

$$\|(f_S)_r\|_{L^1(J; C[r_0, R_S + \varepsilon_S])} \leq N, \quad \|\tilde{\theta}(\cdot)[\delta]\|_{L^1(J)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0^+$$

для

$$\tilde{\theta}(\chi)[\delta] = \sup_{0 < \Delta \leq \delta} \|(f_S)_r(r + \Delta, \chi) - (f_S)_r(r, \chi)\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon_S - \Delta]}$$

с некоторым $\varepsilon_S > 0$, т.е. условия (134) и (135). Тогда это решение является единственным, удовлетворяющим (164), и поэтому

$$\check{\rho}(\cdot, t) \rightarrow \bar{\rho}_S(\cdot) \quad \text{в } L^\lambda(J) \quad \forall 1 \leq \lambda < \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (165)$$

3) Пусть выполнены условия пп. 1) и 2) вместе с условием (72). Тогда справедливы равномерная H^1 -оценка (73) для ρ и C -стабилизация для $\check{\rho}$:

$$\|\check{\rho}(\cdot, t) - \bar{\rho}_S(\cdot)\|_{C(\bar{J})} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (166)$$

Если дополнительно выполнены условия (75), то справедливы также оценки (76) и (77).

Справедливость этих результатов следует из [10; теоремы 1, 5 и утверждение 3], см. также [10; следствие 5]. Для вывода п. 2) используется также утверждение 7 настоящей статьи, гарантирующее то, что ω -предельное множество для $\check{\rho}$ сводится к единственной точке $\bar{\rho}_S$.

Теперь обратимся к основному результату параграфа.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть выполнены условия пп. 1) и 2) утверждения 11 вместе с условиями (72). Тогда справедливы следующие оценки скорости стабилизации при $t \geq t_0$ с достаточно большим t_0 :

а) $L^2(J)$ -оценка

$$\check{\delta}_0(t) := \|\check{\rho}(\cdot, t) - \bar{\rho}_S(\cdot)\|_{L^2(J)} + \|\check{v}(\cdot, t)\|_{L^2(J)} \leq \check{d}_0(t, t_0); \quad (167)$$

б) комбинированная оценка

$$\check{\delta}_1(t) := \|\check{\rho}(\cdot, t) - \bar{\rho}_S(\cdot)\|_{H^1(J)} + \|\check{v}(\cdot, t)\|_{L^2(J)} \leq \check{d}_1(t, t_0) \quad (168)$$

в предположении, что

$$p'' \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+), \quad \|(f_S)_r\|_{L^2(J; C[r_0, \bar{R}])} \leq C_1(N); \quad (169)$$

в) $H^1(J)$ -оценка

$$\check{\delta}_2(t) := \|\check{\rho}(\cdot, t) - \bar{\rho}_S(\cdot)\|_{H^1(J)} + \|\check{v}(\cdot, t)\|_{H^1(J)} \leq \check{d}_2(t, t_0) \quad (170)$$

в предположении, что справедливы условия (169) и (75).

Здесь $\check{d}_i(t, t_0)$, $i = 0, 1, 2$, представляют собой модифицированные правые части оценок (79)–(81) соответственно с $\check{\delta}_i(t_0)$ в роли $\delta_i(t_0)$, а также с $\|\Delta \check{f}[\check{r}](\cdot, \tau)\|_{L^2(J)}$ в роли $\|\Delta f[m](\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_+)}$.

2) Пусть $\bar{p}_S$ – любое статически устойчивое стационарное решение (в отличие от условий на него в утверждении 11, п. 2)). Если данные удовлетворяют следующему условию близости к стационарным:

$$\|\check{p}^0 - \bar{p}_S\|_{L^2(J)} + \|\check{v}^0\|_{L^2(J)} + \|\bar{f}_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} + \|\bar{f}_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|\Delta p_\Gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \varepsilon_0 \quad (171)$$

с достаточно малым $\varepsilon_0 > 0$, то п. 1) справедлив при $t_0 = 0$, т.е. при любых $t \geq 0$, причем входящие в $\check{d}_i(t, t_0)$ величины K и a_i , $i = 0, 1, 2$, не зависят от данных; в этом смысле $\bar{p}_S$ динамически устойчиво.

Этот результат верен также при немонотонной функции состояния p (опуская второе условие (10)) при условии, что значения $\bar{p}_S$ на $\bar{J}$ принадлежат какому-либо интервалу устойчивости p .

3) Пусть выполнены условия п. 1 утверждения 11 вместе с $p' > 0$, (72) и (141) (с $C(\bar{J})$ суженным до $H^1(J)$). Тогда все подпункты а)–в) в п. 1) верны при любых $t \geq 0$ без условия близости (171) (кроме того, оценка (72) не требуется в подпункте а)). Дополнительно при сужении условия (162) до (22) все оценки в подпунктах справедливы равномерно относительно данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Будем применять подход из [25], [24]. Фактически рассуждения близки к соответствующим в доказательстве теоремы 2. Возвратившись к лагранжеву закону сохранения энергии (161), сначала преобразуем член

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\check{\rho}] = \int_J \{ (p_{\Gamma, S} - \hat{p}(\check{\eta})) D(\check{\varepsilon} \check{v}) - \check{h}[\check{V}] \check{\varepsilon} \check{v} \} d\chi$$

в силу уравнений (155) и (160). Воспользовавшись интегральным тождеством (126), найдем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\check{\rho}] = \int_J \{ (\hat{p}(\eta_S) - \hat{p}(\check{\eta})) D(\check{\varepsilon} \check{v}) + (\check{h}[V_S] - \check{h}[\check{V}]) \check{\varepsilon} \check{v} \} d\chi = \frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{U}} \quad (172)$$

с

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}[\check{\eta}, \eta_S] := \int_J (\Pi(\check{\eta}, \eta_S) + H[\check{V}, V_S]) d\chi$$

и $H[\check{V}, V_S](\chi, t) = H(\check{V}(\chi, t), V_S(\chi, \chi))$,

$$\Pi(\check{\eta}, \eta_S) = \int_{\eta_S}^{\check{\eta}} (\hat{p}(\eta_S) - \hat{p}(\zeta)) d\zeta, \quad H(W, W_S, \chi) := \int_{W_S}^W (h(W_S, \chi) - h(\nu, \chi)) d\nu$$

снова в силу уравнений (155) и (160).

Теперь из лагранжева закона сохранения энергии (161) выведем (ср. с (85))

$$\frac{d}{dt} (\check{\mathcal{E}} + \widetilde{\mathcal{U}}) + K^{-1} \|D(\check{\varepsilon} \check{v})\|_J^2 \leq K (\|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J \check{\mathcal{E}}^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2). \quad (173)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Pi(\check{\eta}, \eta_S) + H[\check{V}, V_S] &= - \int_0^1 \hat{p}'((1-\alpha)\eta_S + \alpha\check{\eta})(1-\alpha) d\alpha (\check{\eta} - \eta_S)^2 \\ &\quad - \int_0^1 \check{h}_\nu[(1-\alpha)V_S + \alpha\check{V}](1-\alpha) d\alpha (\check{V} - V_S)^2 \end{aligned}$$

и

$$\|\check{V} - V_S\|_{C(\mathcal{J})} = \left\| \int_0^x (\check{\eta} - \eta_S) d\xi \right\|_{C(\mathcal{J})} \leq \sqrt{M} \|\check{\eta} - \eta_S\|_J. \quad (174)$$

Следовательно, в силу условий (10) и (134)

$$\widetilde{\mathcal{U}} \leq \|\widehat{p}'\|_{C[\bar{p}^{-1}, \underline{p}^{-1}]} \|\check{\eta} - \eta_S\|_J^2 + \|h_\nu\|_{L^1(J; C[V_0, \bar{V}])} \|\check{V} - V_S\|_{C(\mathcal{J})}^2 \leq K \|\check{\eta} - \eta_S\|_J^2,$$

где $\bar{V} := \bar{R}^{k+1}/(k+1)$, ср. с (88). С другой стороны, сначала непосредственной проверкой с учетом тождества (126), а затем применением свойства (139) при $V = V_S$ получим

$$\widetilde{\mathcal{U}}[\check{\eta}, \eta_S] = \mathcal{P}[\check{V}] - \mathcal{P}[V_S] \geq K^{-1} \|\check{\eta} - \eta_S\|_J^2 \quad (175)$$

при достаточно больших $t \geq t_1$. Поэтому

$$\check{\mathcal{E}} + \widetilde{\mathcal{U}} \asymp \|\check{v}\|_J^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_J^2. \quad (176)$$

Шаг 2. Перепишем уравнение импульса (156) в виде

$$\frac{1}{\check{\chi}} D_t \check{v} = D[\mu(\check{\rho}) \check{\rho} D(\check{\chi} \check{v}) - \widehat{p}(\check{\eta}) + \widehat{p}(\eta_S)] + \check{h}[\check{V}] - \check{h}[V_S] + \frac{1}{\check{\chi}} \Delta \check{f}[\check{r}]$$

при помощи стационарного уравнения (120). Взяв $L^2(J)$ -скалярное произведение с $\check{V} - V_S$ и используя граничные условия (158) и (121), найдем

$$\begin{aligned} & \int_J \left\{ \frac{1}{\check{\chi}} (D_t \check{v})(\check{V} - V_S) + [\mu(\check{\rho}) \check{\rho} D(\check{\chi} \check{v}) - (\widehat{p}(\check{\eta}) - \widehat{p}(\eta_S))] (\check{\eta} - \eta_S) \right\} d\chi \\ &= \int_J \left(\check{h}[\check{V}] - \check{h}[V_S] + \frac{1}{\check{\chi}} \Delta \check{f}[\check{r}] \right) (\check{V} - V_S) d\chi \\ &+ \left[\left(\tilde{\mu}_1(\check{\rho}) \frac{\check{v}}{\check{r}} - \Delta p_\Gamma \right) (\check{V} - V_S) \right] \Big|_{\chi=M}. \end{aligned}$$

Теперь применим формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\check{\chi}} (D_t \check{v})(\check{V} - V_S) &= D_t \left[\frac{\check{v}}{\check{\chi}} (\check{V} - V_S) \right] - \frac{\check{v}^2}{k+1} \left(1 + k \frac{V_S}{\check{V}} \right), \\ \mu(\check{\rho}) \check{\rho} D(\check{\chi} \check{v})(\check{\eta} - \eta_S) &= \mu(\check{\rho}) \left(1 - \frac{\eta_S}{\check{\eta}} \right) D_t \check{\eta} = D_t \mathcal{M}(\check{\eta}, \eta_S) \end{aligned}$$

с $\mathcal{M}(\check{\eta}, \eta_S) := \int_{\eta_S}^{\check{\eta}} \mu\left(\frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\eta_S}{\zeta}\right) d\zeta$, которые уже использовались в [25] и возникают в результате применения уравнений (155) и (160). Как следствие установим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_J \left(\mathcal{M}(\check{\eta}, \eta_S) + \frac{\check{v}}{\check{\chi}} (\check{V} - V_S) \right) d\chi + \widetilde{\mathcal{B}}(\check{\eta}, \eta_S) \\ &= \widetilde{b} := \int_J \left[\frac{\check{v}^2}{k+1} \left(1 + k \frac{V_S}{\check{V}} \right) + \frac{1}{\check{\chi}} \Delta \check{f}[\check{r}] (\check{V} - V_S) \right] d\chi \\ &+ \left[\left(\tilde{\mu}_1(\check{\rho}) \frac{\check{\chi} \check{v}}{(k+1)\check{V}} - \Delta p_\Gamma \right) (\check{V} - V_S) \right] \Big|_{\chi=M}; \quad (177) \end{aligned}$$

напомним, что форма $\widetilde{\mathcal{B}}(\cdot, \cdot)$ была введена в (125).

Справедливы следующие соотношения и оценки:

$$\mathcal{M}(\dot{\eta}, \eta_S) \asymp (\dot{\eta} - \eta_S)^2, \quad (178)$$

$$\left| \int_J \frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} (\ddot{V} - V_S) d\chi \right| \leq K \|\ddot{v}\|_J \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J, \quad (179)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(\dot{\eta}, \eta_S) \geq \mathcal{J}[\ddot{V} - V_S] + o(\|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2) \geq K^{-1} \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2 \quad (180)$$

при достаточно больших $t \geq t_2$ и

$$\begin{aligned} |\tilde{b}| &\leq K (\|\ddot{v}\|_J^2 + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J \|\ddot{V} - V_S\|_J + (\|\dot{\chi} \ddot{v}\|_{C(\bar{J})} + |\Delta p_\Gamma|) \|\ddot{V} - V_S\|_{C(\bar{J})}) \\ &\leq \varepsilon \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2 + K_1 (\varepsilon^{-1} \|\dot{\chi} \ddot{v}\|_{C(\bar{J})}^2 + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J + (\Delta p_\Gamma)^2) \end{aligned}$$

при любых $\varepsilon \in (0, 1]$. Следовательно, равенство (177) влечет неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_J \left(\mathcal{M}(\dot{\eta}, \eta_S) + \frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} (\ddot{V} - V_S) \right) d\chi + K^{-1} \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2 \\ \leq K (\|\dot{\chi} \ddot{v}\|_{C(\bar{J})}^2 + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J + (\Delta p_\Gamma)^2). \end{aligned}$$

Скомбинировав его с неравенством (173) и применив соотношения (176), (178) и (179), найдем

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{V}}_0 + K^{-1} (\|D(\dot{\chi} \ddot{v})\|_J^2 + \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2) \leq K (\|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J \tilde{\mathcal{V}}_0^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2) \quad (181)$$

вместе с

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 := \tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{U}} + \varepsilon_0 \int_J \left(\mathcal{M}(\dot{\eta}, \eta_S) + \frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} (\ddot{V} - V_S) \right) d\chi \asymp \|\ddot{v}\|_J^2 + \|\dot{\eta} - \eta_S\|_J^2 \quad (182)$$

при достаточно малом $\varepsilon_0 := 1/K$. Поэтому $\tilde{\mathcal{V}}_0$ является функционалом Ляпунова и справедлива оценка (167).

Шаг 3. Чтобы доказать оценки (168) и (170), несколько модифицируем рассуждения из [25], [24]. Сначала преобразуем уравнение импульса (156) с учетом уравнений (155), (160) и (118) следующим образом:

$$D_t \left[\frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} + D(\hat{A}(\dot{\eta}) - \hat{A}(\eta_S)) \right] + D(\hat{p}(\dot{\eta}) - \hat{p}(\eta_S)) = \frac{\check{f}[\check{r}]}{\dot{\chi}} - \check{h}[V_S] - \frac{k}{k+1} \frac{\ddot{v}^2}{\dot{V}}.$$

Положив $\Delta \omega(\dot{\eta}) = \omega(\dot{\eta}) - \omega(\eta_S)$ для $\omega = \hat{A}, \hat{p}$ и т.д. и взяв $L^2(J)$ -скалярное произведение последнего уравнения с $\ddot{v}/\dot{\chi} + D\Delta \hat{A}(\dot{\eta})$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{Y}} + \int_J (D\Delta \check{p}(\dot{\eta})) D\Delta \hat{A}(\dot{\eta}) d\chi = - \int_J (D\Delta \check{p}(\dot{\eta})) \frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} d\chi \\ + \int_J \left(\check{h}[\ddot{V}] - \check{h}[V_S] + \frac{\Delta \check{f}[\check{r}]}{\dot{\chi}} - \frac{k}{k+1} \frac{\ddot{v}^2}{\dot{V}} \right) \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} + D\Delta \hat{A}(\dot{\eta}) \right) d\chi, \end{aligned}$$

$$\text{где } \tilde{\mathcal{Y}} := \frac{1}{2} \int_J \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{\chi}} + D\Delta \hat{A}(\dot{\eta}) \right)^2 d\chi.$$

Далее, воспользуемся формулой $D\Delta\omega(\check{\eta}) = \omega'(\check{\eta})D\Delta\check{\eta} + (\Delta\omega')(\check{\eta})D\eta_S$ для $\omega = \widehat{A}, \widehat{p}$, применим условия (169) вместе с оценками

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|D\check{\eta}\|_J &\leq K, \quad \|D\eta_S\|_{L^\infty(J)} \leq K, \\ \|\check{v}^2\|_J &\leq \|\check{v}\|_J \|\check{v}\|_{L^\infty(J)} \leq K \|D(\check{\varkappa}\check{v})\|_J \end{aligned}$$

(которые следуют из оценок (73), (43) и (71) соответственно). Поэтому (воспользовавшись также неравенством Коши с ε) найдем

$$\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}} + K^{-1} \|D\Delta\check{\eta}\|_J^2 \leq K [\|\Delta\check{\eta}\|_J^2 + \|D(\check{\varkappa}\check{v})\|_J^2 + \|\Delta\check{f}[\check{r}]\|_J (\|\check{v}\|_J + \|\Delta\check{\eta}\|_{H^1(J)})] \quad (183)$$

вместе с

$$K^{-1} \|D\Delta\check{\eta}\|_J^2 - K (\|\Delta\check{\eta}\|_J^2 + \|\check{v}\|_J^2) \leq \widetilde{\mathcal{Y}} \leq K (\|\Delta\check{\eta}\|_{H^1(J)}^2 + \|\check{v}\|_J^2). \quad (184)$$

Скомбинирав (181) с (183) и применив (182) и (184), получим

$$\frac{d}{dt} \widetilde{\mathcal{Y}}_1 + K^{-1} (\|D(\check{\varkappa}\check{v})\|_J^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_{H^1(J)}^2) \leq K (\|\Delta\check{f}[\check{r}]\|_J \widetilde{\mathcal{Y}}_1^{1/2} + (\Delta p_\Gamma)^2) \quad (185)$$

вместе с

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_1 := \widetilde{\mathcal{Y}}_0 + \varepsilon_1 \widetilde{\mathcal{Y}} \asymp \|\check{v}\|_J^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_{H^1(J)}^2 \quad (186)$$

при достаточно малом $\varepsilon_1 := K^{-1}$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{Y}}_1$ является функционалом Ляпунова и справедлива оценка (168).

Шаг 4. Преобразуем теперь уравнение импульса (156) к виду

$$D_t(\check{\varkappa}\check{v}) - k\check{r}^{k-1}\check{v}^2 = \check{\varkappa}^2 D\{\mu(\check{\rho})\check{\rho}D(\check{\varkappa}\check{v}) - \widehat{p}(\check{\eta}) + \widehat{p}(\eta_S)\} + \check{\varkappa}(\check{f}[\check{r}] - \check{\varkappa}\check{h}[V_S]). \quad (187)$$

Далее положим $\check{\sigma} := \mu(\check{\rho})\check{\rho}D(\check{\varkappa}\check{v}) - \widetilde{\mu}_1(\check{\rho})\check{v}/\check{r} - \widehat{p}(\check{\eta})$,

$$\widetilde{\Phi} := \frac{\check{\sigma} + \widehat{p}(\eta_S) + \Delta p_\Gamma}{\mu(\check{\rho})\check{\rho}} = D(\check{\varkappa}\check{v}) - \omega_2(\check{\rho}) \frac{\check{v}}{\check{r}} - \frac{\widehat{p}(\check{\eta}) - \widehat{p}(\eta_S) - \Delta p_\Gamma}{\mu(\check{\rho})\check{\rho}}$$

(значит, $\widetilde{\Phi}|_{\chi=M} = 0$) и

$$\widetilde{b}_3 := \check{\varkappa}\{D(\mu(\check{\rho})\check{\rho})\}\widetilde{\Phi} + \frac{k}{\check{r}} \check{v}^2 + \check{\varkappa}D\left(\widetilde{\mu}_1(\check{\rho}) \frac{\check{v}}{\check{r}}\right) + \check{\varkappa}(\check{h}[\check{V}] - \check{h}[V_S]) + \Delta\check{f}[\check{r}].$$

Это позволяет переписать уравнение (187) следующим образом:

$$D_t(\check{\varkappa}\check{v}) = \check{\varkappa}^2 \mu(\check{\rho})\check{\rho}D\widetilde{\Phi} + \check{\varkappa}\widetilde{b}_3. \quad (188)$$

Последнее уравнение влечет равенство (ср. с (106))

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_J \widetilde{\Phi}^2 d\chi + \int_J \check{\varkappa}^2 \mu(\check{\rho})\check{\rho}(D\widetilde{\Phi})^2 d\chi \\ &= - \int_J \left\{ D_t\left(\omega_2(\check{\rho}) \frac{\check{v}}{\check{r}}\right) + D_t \frac{\widehat{p}(\check{\eta}) - \widehat{p}(\eta_S) - \Delta p_\Gamma}{\mu(\check{\rho})\check{\rho}} \right\} \widetilde{\Phi} + \check{\varkappa}\widetilde{b}_3 D\widetilde{\Phi} \Big\} d\chi. \end{aligned} \quad (189)$$

Подобно (107) (с учетом (155) и (188)) имеем

$$\left| D_t \left(\omega_2(\check{\rho}) \frac{\check{v}}{\check{r}} \right) \right| \leq K \left(|D(\check{\kappa}\check{v})| |\check{v}| + \left| \check{\kappa}\mu(\check{\rho}) \check{\rho} D\tilde{\Phi} + \tilde{b}_3 - (k+1) \frac{\check{v}^2}{\check{r}} \right| \right),$$

кроме того,

$$\left| D_t \frac{\hat{p}(\check{\eta}) - \hat{p}(\eta_S) - \Delta p_\Gamma}{\mu(\check{\rho}) \check{\rho}} \right| \leq K(|D(\check{\kappa}\check{v})| + |p'_\Gamma|).$$

Применив оценку $\|\check{v}\|_{C_b(\overline{Q}_L)} \leq K$ (см. (76)), получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_J \tilde{\Phi}^2 d\chi + K^{-1} \|D\tilde{\Phi}\|_J^2 \\ & \leq K \{ (\|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J + \|D\tilde{\Phi}\|_J + |p'_\Gamma|) \|\tilde{\Phi}\|_J + (\|\tilde{b}_3\|_J + \|\check{v}\|_J) \|D\tilde{\Phi}\|_J \}. \end{aligned} \quad (190)$$

По аналогии с (108) и (105) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}_3\|_J & \leq \varepsilon \|D\tilde{\Phi}\|_J + K(\varepsilon^{-1} \|\tilde{\Phi}\|_J + \|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J \\ & \quad + \|\check{h}_\nu\|_{L^2(J; C[V_0, \overline{V}])} \|\check{V} - V_S\|_{C(\overline{J})} + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J) \end{aligned}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned} & \|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J - K(\|\check{v}\|_J + \|\check{\eta} - \eta_S\|_J + |\Delta p_\Gamma|) \\ & \leq \|\tilde{\Phi}\|_J \leq K(\|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J + \|\check{\eta} - \eta_S\|_J + |\Delta p_\Gamma|). \end{aligned} \quad (191)$$

Следовательно, (190) приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_J \tilde{\Phi}^2 d\chi + K^{-1} \|D\tilde{\Phi}\|_J^2 \\ & \leq K(\|\tilde{\Phi}\|_J^2 + \|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J^2 + |p'_\Gamma| \|\tilde{\Phi}\|_J + \|\check{V} - V_S\|_{C(\overline{J})}^2 + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J^2) \\ & \leq K_1(\|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_J^2 + \|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + |p'_\Gamma| \|\tilde{\Phi}\|_J). \end{aligned}$$

Скомбинировав результат с соотношениями (185) и (110) и воспользовавшись (186) и (191), выведем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{V}}_2 + K^{-1} (\|D(\check{\kappa}\check{v})\|_J^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_{H^1(J)}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + \|D\tilde{\Phi}\|_J^2) \\ & \leq K(\|\Delta \check{f}[\check{r}]\|_J^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 + |p'_\Gamma| \tilde{\mathcal{V}}_2^{1/2}) \end{aligned}$$

вместе с

$$\tilde{\mathcal{V}}_2 := \tilde{\mathcal{V}}_1 + \varepsilon_2 \|\tilde{\Phi}\|_J^2 + (\Delta p_\Gamma)^2 \asymp \|\check{v}\|_{H^1(J)}^2 + \|\check{\eta} - \eta_S\|_{H^1(J)}^2 + (\Delta p_\Gamma)^2$$

при достаточно малом $\varepsilon_2 := K^{-1}$. Таким образом, последняя из оценок в п. 1), а именно (170), также справедлива. Пункт 1) доказан.

Шаг 5. Пункт 2) доказывается аналогично и немного проще, чем соответствующий п. 2) в теореме 2.

В случае, когда выполнены условия п. 3), оценка снизу (175) верна при всех $t \geq 0$, см. неравенство (142). Промежуточное соотношение в оценке снизу (180) может быть опущено в силу условия (141), и эта оценка также выполняется при любых $t \geq 0$. Поскольку теперь нет необходимости в свойстве стабилизации (166), условие (72) и оценка (73) не требуются для доказательства оценки (167). В заключение напомним, что при выполнении условия (22) имеем $\underline{\rho} = K^{-1}$ (см. [10; теорема 1, п. 3]) и, таким образом, величины K и K_i в оценках скорости стабилизации не зависят от данных.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Неравенство (174) позволяет добавить слагаемое $|R(t) - R_S|$ в левую часть оценки (167). Кроме того, дополнительно к этой оценке имеем

$$\tilde{\delta}_0(t) := \check{\delta}_0(t) + |\check{\rho}(M, t) - \bar{\rho}_S(M)| \leq \tilde{d}_0(t, t_0),$$

где $\tilde{d}_0(t, t_0)$ отличается от $\check{d}_0(t, t_0)$ слагаемым $\tilde{\delta}_0(t_0)$ в роли $\check{\delta}_0(t_0)$. Эта оценка возникает в результате комбинирования (181) и (93), а также применения равенств $(\check{\rho} - \bar{\rho}_S)|_{\chi=M} = \rho_R - \rho_{\Gamma, S}$ и $\|v\|_{C(\bar{\Omega}_t)} = \|\check{v}\|_{C(\bar{J})}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Пусть верны равномерные оценки $\underline{\rho} \leq \rho(\cdot, t) \leq K$. Тогда ясно, что $\|v(\cdot, t)\|_{H^j(\Omega_t)} \asymp \|\check{v}(\cdot, t)\|_{H^j(J)}$ при $j = 0, 1$, где, например, $H^0(J) = L^2(J)$. Более того, если $R(t) \leq R_S + \varepsilon_S$, то также

$$\|\rho(\cdot, t) - \rho_S(\cdot)\|_{H^j(\Omega_t)} \asymp \|\check{\rho}(\cdot, t) - \bar{\rho}_S(\cdot)\|_{H^j(J)} \quad \text{при } j = 0, 1$$

при условии, что в случае $j = 1$ выполняются (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\check{\rho}_S := \rho_S(\check{r})$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\check{\rho}_S - \bar{\rho}_S\|_{C(\bar{J})} &\leq \|(\rho_S)_r\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon_S]} \Delta, \\ \Delta &:= \|\check{r} - r_S\|_{C(\bar{J})} \leq K \|\check{V} - V_S\|_{C(\bar{J})} \leq K_1 \|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_J, \end{aligned}$$

см. (174). Более того, $D(\check{\rho}_S - \bar{\rho}_S) = ((\rho_S)_r(\check{r}) - (\rho_S)_r(r_S))D\check{r} + (\rho_S)_r(r_S)D(\check{r} - r_S)$ и

$$|D(\check{r} - r_S)| = \left| \frac{1}{\check{\rho}\check{r}^k} - \frac{1}{\bar{\rho}_S r_S^k} \right| \leq K(|\check{r} - r_S| + |\check{\rho} - \bar{\rho}_S|).$$

При выполнении условий (17) имеем

$$|(\rho_S)_r(\check{r}) - (\rho_S)_r(r_S)| \leq \int_{\max\{\check{r}-\Delta, r_0\}}^{\min\{\check{r}+\Delta, R_S+\varepsilon_S\}} |(\rho_S)_{rr}(q)| dq,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|D(\check{\rho}_S - \bar{\rho}_S)\|_J &\leq 2\Delta \|(\rho_S)_{rr}\|_{(r_0, R_S + \varepsilon_S)} \|D\check{r}\|_{L^\infty(J)} \\ &\quad + \|(\rho_S)_r\|_{C[r_0, R_S + \varepsilon_S]} \|D(\check{r} - r_S)\|_J \\ &\leq K(\Delta + \|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_J) \leq K_1 \|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_J. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\rho - \rho_S\|_{H^j(\Omega_t)} \asymp \|\check{\rho} - \check{\rho}_S\|_{H^j(J)}$, то по неравенству треугольника

$$\|\rho - \rho_S\|_{H^j(\Omega_t)} \leq K \|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_{H^j(J)}$$

при $j = 0, 1$.

С другой стороны, аналогичным образом можно установить оценки

$$\begin{aligned} \|\bar{\rho}_S(m) - \bar{\rho}_S(m_S)\|_{C(\bar{\Omega}_t)} &\leq \|D\bar{\rho}_S\|_{C(\bar{J})} \|m - m_S\|_{C(\bar{\Omega}_t)} \leq K \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}, \\ \|(\bar{\rho}_S(m) - \bar{\rho}_S(m_S))_r\|_{\Omega_t} &\leq \|D^2\bar{\rho}_S\|_J \|m - m_S\|_{C(\bar{\Omega}_t)} \|m_r\|_{C(\bar{\Omega}_t)} \\ &\quad + \|D\bar{\rho}_S\|_{C(\bar{J})} \|m - m_S\|_{\Omega_t} \leq K \|\rho - \rho_S\|_{\Omega_t}. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_{H^j(J)} \asymp \|\rho - \bar{\rho}_S(m)\|_{H^j(\Omega_t)}$ и $\bar{\rho}_S(m_S) = \rho_S$, то получим $\|\check{\rho} - \bar{\rho}_S\|_{H^j(J)} \leq K \|\rho - \rho_S\|_{H^j(\Omega_t)}$ при $j = 0, 1$, что завершает доказательство.

Результат п. 2) в теореме 3 в случае немонотонной функции p улучшает соответствующий ему в [35] (устранением априорного условия на $p(\rho)$). Результат п. 3) восходит к работам [18], [17], [24]. Замечание 10 и утверждение 12 позволяют установить непосредственную связь между оценками скорости стабилизации в эйлеровых координатах в теореме 2 и соответствующих им в лагранжевых координатах в теореме 3.

Существенная часть этой работы была выполнена в течение визита А. А. Злотника осенью 2003 г. в Отделение теоретической и прикладной физики Комиссариата по атомной энергии Франции в Иль де Франс (г. Брюйер-ле-Шатель), которому он признателен за гостеприимство.

Список литературы

1. Чандрасекхар С. Введение в учение о строении звезд. М.: ИЛ, 1950.
2. Ledoux P. Stellar stability // Handbuch der Physik. V. 51. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 605–688.
3. Ledoux P. Stellar stability // Stars and stellar structure / ed. L.H. Aller et al. Chicago: Univ. Chicago Press, 1965. P. 499–574.
4. Chiu H.-Y. Stellar physics. V. I. Blaisdell: Waltham, 1968.
5. Huntley J. M., Saslaw W. C. The distribution of stars in galactic nuclei: loaded polytropes // Astrophys. J. 1975. V. 199. P. 328–335.
6. Kimura H. A study of simple polytropes. Parts I, II // Publ. Astron. Soc. Japan. 1981. V. 33. P. 273–298; 299–312.
7. Ducomet B. Hydrodynamical models of gaseous stars // Rev. Math. Phys. 1996. V. 8. P. 957–1000.
8. Lin S. S. Stability of gaseous stars in spherically symmetric motions // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28. P. 539–569.
9. Heinzle J. M., Uggle C. Newtonian stellar models // Ann. Physics. 2003. V. 308. №1. P. 18–61.
10. Ducomet B., Zlotnik A. Viscous compressible barotropic symmetric flows with free boundary under general mass force. Part I: Uniform-in-time bounds and stabilization // Math. Methods Appl. Sci. 2005. V. 28. P. 827–863.
11. Злотник А. А., Дюкоме Б. Глобальное поведение симметричных течений вязкой сжимаемой баротропной жидкости со свободной границей для общей массовой силы // Докл. РАН. 2004. Т. 398. №4. С. 444–448.
12. Kuan W. C., Lin S. S. Numbers of equilibria for the equation of self-gravitating isentropic gas surrounding a solid ball // Japan J. Indust. Appl. Math. 1996. V. 13. P. 311–331.
13. Fu C. C., Lin S. S. On the critical mass of the collapse of a gaseous star in spherically symmetric and isentropic motion // Japan J. Indust. Appl. Math. 1998. V. 15. P. 461–469.
14. Strömer G., Zajackowski W. On the existence and properties of the rotationally symmetric equilibrium states of compressible barotropic self-gravitating fluids // Indiana Univ. Math. J. 1997. V. 46. P. 1181–1220.
15. Злотник А. А., Дюкоме Б. Задача симметричного равновесия сжимаемой баротропной жидкости со свободной границей для общей массовой силы // Докл. РАН. 2005. Т. 401. №2. С. 154–159.
16. Злотник А. А., Дюкоме Б. Функционалы Ляпунова симметричных течений вязкой сжимаемой баротропной жидкости со свободной границей для общей массовой силы // Докл. РАН. 2005. Т. 402. №1. С. 14–19.
17. Злотник А. А., Нгуен Жа Бао. Свойства и асимптотическое поведение решений одной задачи одномерного движения вязкого баротропного газа // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №5. С. 51–68.
18. Злотник А. А. Об уравнениях одномерного движения вязкого баротропного газа при наличии массовой силы // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. №5. С. 62–79.
19. Mucha P. Compressible Navier–Stokes system in 1-D // Math. Methods Appl. Sci. 2001. V. 21. P. 607–622.

20. *Matsumura A., Yanagi S.* Uniform boundedness of the solutions for a one-dimensional isentropic model system of a compressible viscous gas // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 175. P. 259–274.
21. *Straškraba I., Zlotnik A.* Global behavior of 1d-viscous compressible barotropic fluid with a free boundary and large data // *J. Math. Fluid Mech.* 2003. V. 5. P. 119–143; Erratum 2004. V. 6. P. 249–250.
22. *Zlotnik A.* Global behaviour of 1-D viscous compressible barotropic flows with free boundary and self-gravitation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2003. V. 26. P. 671–690.
23. *Злотник А. А.* Об одной задаче Нишида // *ЖВМ и МФ.* 1998. Т. 38. № 8. С. 1279–1286.
24. *Злотник А. А., Нгуен Жа Бао.* Глобальные свойства симметричных решений задачи движения вязкого баротропного газа со свободной границей // *Вестн. МЭИ.* 1998. Т. 5. № 6. С. 52–61.
25. *Злотник А. А.* Равномерные оценки и стабилизация симметричных решений одной квазилинейной системы уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36. № 5. С. 634–646.
26. *Zlotnik A. A.* Global properties of a difference approximation of the free boundary problem for a symmetric motion of a viscous barotropic gas // *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1999. V. 14. P. 527–548.
27. *Matsumura A.* Large-time behavior of the spherically symmetric solutions of an isothermal model of compressible viscous gas // *Transp. Theory Statist. Phys.* 1992. V. 21. P. 579–592.
28. *Yanagi S.* Asymptotic stability of the spherically symmetric solutions for an isentropic model of compressible viscous gas // *Japan J. Indust. Appl. Math.* 1997. V. 14. P. 215–243.
29. *Matušu-Nečasova Š., Okada M., Makino T.* Free boundary problem for the equation of spherically symmetric motion of a viscous gas. III // *Japan J. Indust. Appl. Math.* 1997. V. 14. P. 199–213.
30. *Ducomet B.* Some asymptotics for a reactive Navier–Stokes–Poisson system // *Math. Models Methods. Appl. Sci.* 1999. V. 9. P. 1039–1076.
31. *Хартман П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
32. *Penel P., Straškraba I.* Global behavior of compressible fluid with a free boundary and large data // *Applied nonlinear analysis* / ed. A. Sequeira et al. New York: Kluwer Academic, 1999. P. 427–442.
33. *Zlotnik A. A., Maksimov M. V.* On symmetric equilibrium of an isothermal gas with free boundary and mass force // *Abstr. Appl. Anal.* 2006 (to appear).
34. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
35. *Ducomet B., Zlotnik A.* Remark on the stabilization of a viscous barotropic medium with a nonmonotone equation of state // *Appl. Math. Lett.* 2001. V. 14. P. 921–928.

Московский энергетический институт;
 Département de Physique Théorique et Appliquée,
 CEA/DAM Ile de France, France
E-mail: zlotnik@apmsun.mpei.ac.ru
 bernard.ducomet@cea.fr

Поступила в редакцию
 25.06.2004 и 25.04.2005