Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Г. Н. Шилова, Абсолютная полнота систем экспонент на выпуклых компактах, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 12, 85–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:32:23

УДК 517.53

И. Ф. Красичков-Терновский, Г. Н. Шилова

Абсолютная полнота систем экспонент на выпуклых компактах

Рассматривается задача аппроксимации линейными комбинациями экспонент со специальными ограничениями на коэффициенты. В простых геометрических терминах сформулировано достаточное условие такой аппроксимации.

Библиография: 20 названий.

Введение

Настоящая статья посвящена исследованию полноты системы экспонент

$$\{e^{\lambda_k z}\}$$

на выпуклых компактах комплексной плоскости с учетом ограничений на рост коэффициентов аппроксимирующих линейных комбинаций этих экспонент. Такой тип полноты в пространствах $A(K)$ функций, непрерывных на компакте K комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и аналитических в его внутренности, с $\sup$ -нормой занимает промежуточное положение между обычной полнотой системы экспонент и такими ее аппроксимационными свойствами, как базисность, представимость рядами экспонент и т.п. Актуальность исследования подчеркивает то, что “жесткие” (в отношении топологии) банаховы пространства $A(K)$ в зависимости от геометрии компакта K нередко обеднены отсутствием базисов из экспонент или возможностью представить *каждую* функцию из $A(K)$ рядом экспонент с фиксированной последовательностью показателей. В таких случаях на первый план выдвигаются различные типы аппроксимации линейными комбинациями экспонент, один из которых – абсолютная полнота системы экспонент (определение – в § 1).

Теория полноты, учитывающая коэффициенты, имеет достаточно давнюю историю и была начата в работах Ф. Дейвиса и Ки Фана [1] и С. Я. Хавинсона [2]. Конкретные результаты о такого рода полноте в пространстве $C[a, b]$, где $[a, b]$ – отрезок на вещественной прямой, получены в работах [3]–[14]. В работе [12] условие полноты в $C[a, b]$ сформулировано в геометрической форме. В настоящей статье, используя идеи и терминологию статьи [12], мы формулируем в геометрической форме достаточное условие полноты системы $\{e^{\lambda_k z}\}$, учитывающее рост коэффициентов, в пространстве $A(K)$, где K – выпуклый компакт, отличный от отрезка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00030) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1528.2003.1).

§ 1. Определения и формулировка основного результата

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность точек в комплексной области, K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, $A(K)$ – нормированное пространство функций, аналитических внутри компакта K и непрерывных вплоть до его границы с нормой $\|f\| = \sup_K |f(z)|$.

Пусть далее $\{M_k\}$ – последовательность положительных чисел. Рассмотрим систему

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{M_k} \right\}. \quad (1)$$

Система (1) называется *абсолютно полной* в $A(K)$, если любую функцию $f \in A(K)$ можно аппроксимировать по норме $A(K)$ конечными линейными комбинациями вида

$$\sum \frac{a_k e^{\lambda_k z}}{M_k},$$

где $\sum |a_k| \leq c_f$, c_f зависит только от f . Последовательность $\{M_k\}$ можно представить как множество значений положительной функции $M(\lambda)$, заданной на $\{\lambda_k\}$. Таким образом, $M_k = M(\lambda_k)$ и система (1) приобретает вид

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{M(\lambda_k)} \right\}. \quad (2)$$

Пусть $\Gamma = \{\gamma_k\}$ – непустая последовательность точек в комплексной плоскости. Обозначим через $n(t)$ число точек γ_k в круге $|z| \leq t$, а через $n_\sigma(t)$ число точек γ_k в кольце $t(1 - \sigma) \leq |z| \leq t(1 + \sigma)$. Предел $\lim_{t \rightarrow \infty} (n(t)/t)$, если он существует, называется *плотностью* (обыкновенной) *последовательности* Γ и обозначается $O(\Gamma)$. Предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_\sigma(t)}{2\sigma t}$$

называется *минимальной плотностью* (по По́йа) *последовательности* Γ (см. [15]). Эту величину будем обозначать $O_i(\Gamma)$. По теореме По́йа из последовательности Γ всегда можно извлечь подпоследовательность Γ' , имеющую плотность $O(\Gamma') = O_i(\Gamma)$.

Будем говорить, что последовательность $\Gamma = \{\gamma_k\}$ *вполне сгущается в направлении* θ , если выполняются следующие два условия:

- 1) $\arg \gamma_k \rightarrow \theta$ при $k \rightarrow \infty$, $\gamma_k \in \Gamma$;
- 2) $O_i(\Gamma) > l(-\theta)/(2\pi)$, где $l(-\theta)$ – длина проекции компакта K на прямую, перпендикулярную лучу $\arg z = -\theta$.

Далее, θ – *направление полного сгущения последовательности* Λ , если существует подпоследовательность $\Lambda' \subset \Lambda$, вполне сгущающаяся в направлении θ . Обозначим через S_θ совокупность всех подпоследовательностей $\Lambda' \subset \Lambda$, вполне сгущающихся в направлении θ . Пусть $\Lambda' \subset S_\theta$. Обозначим

$$H_{\Lambda'}(\theta) = \overline{\lim_{\substack{|\lambda_k| \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda'}}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}, \quad H(\theta) = \inf \{H_{\Lambda'}(\theta) : \Lambda' \in S_\theta\}.$$

Если S_θ пусто, полагаем $H(\theta) = \infty$. Следуя [12], функцию $H(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, будем называть *индикатором существенного роста*, а замкнутое выпуклое множество

$$D = \bigcap_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \{z : \operatorname{Re} z e^{-i\theta} \leq H(\theta)\}$$

– *диаграммой существенного роста функции $M(\lambda)$* . Отметим, что диаграмма существенного роста может быть пустой.

Пусть $n_z(t)$ – число точек последовательности Λ в круге $|\xi - z| \leq t$. Полагаем $\tilde{n}_z(t) = n_z(t) - 1$, если $n_z(t) > 0$, и $\tilde{n}_z(t) = 0$, если $n_z(t) = 0$. Следуя [16], величину

$$I(\Lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|} \int_0^{\varepsilon|z|} \frac{\tilde{n}_z(t)}{t} dt$$

будем называть *индексом концентрации последовательности Λ* . Последовательность Λ имеет нулевую концентрацию, если $I(\Lambda) = 0$. Теперь мы можем сформулировать основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1 (об абсолютной полноте). *Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, не вырождающийся в отрезок, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – произвольная последовательность точек в комплексной плоскости с нулевой концентрацией, $\{M_k\} = \{M(\lambda_k)\}$ – последовательность положительных чисел.*

Если $D \cap \partial \overline{K} = \emptyset$, где D – диаграмма существенного роста функции $M(\lambda)$, $\overline{K} = \{z : \bar{z} \in K\}$ – компакт, сопряженный с K , то система (2) абсолютно полна в $A(K)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. *Пусть $f(z)$ – целая функция вполне регулярного роста с простыми нулями, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность нулей $f(z)$ и $I(\Lambda) = 0$. Тогда $\ln |f'(\lambda_k)| \geq h(\theta_k) |\lambda_k| - o(|\lambda_k|)$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, где $\theta_k = \arg \lambda_k$, $h(\theta)$ – индикатор функции f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся “скользящей формулой” Иенсена для целой функции F :

$$\int_0^R \frac{n_{z_0}(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(z_0 + R e^{i\theta})| d\theta - \ln |F(z_0)|,$$

где $n_{z_0}(t)$ – число нулей функции $F(z)$ в круге $|\xi - z_0| \leq t$, $F(z_0) \neq 0$. Пусть z_0 – нуль функции $f(z)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(z) = f(z)/(z - z_0)$. Так как $f(z)$ имеет только простые нули, то функция $F(z)$ в точке z_0 в нуль не обращается и в круге $|\xi - z_0| \leq t$ имеет на один нуль меньше, чем функция $f(z)$. Для функции $F(z)$ формула Иенсена принимает вид

$$\int_0^R \frac{\tilde{n}_{z_0}(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + R e^{i\theta})| d\theta - \ln R - \ln |f'(z_0)|.$$

Пусть теперь $R = \varepsilon r_0$, где $r_0 = |z_0|$, $0 < \varepsilon < 1$. Имеем

$$\frac{\ln |f'(z_0)|}{r_0} = -\frac{1}{r_0} \int_0^{\varepsilon r_0} \frac{\tilde{n}_{z_0}(t)}{t} dt - \frac{\ln(\varepsilon r_0)}{r_0} + \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + \varepsilon r_0 e^{i\theta})| d\theta.$$

Оценим последний интеграл снизу. Поскольку $f(z)$ — целая функция вполне регулярного роста, существует исключительное множество, состоящее из объединения кружков $e_i = \{z : |z - z_i| \leq \rho_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, нулевой относительной плотности (см. [17; гл. 3]), вне которого выполняется оценка $\ln |f(z)| \geq h(\theta)|z| - o(|z|)$, $z \rightarrow \infty$. При достаточно большом $r_0 = |z_0|$ сумма радиусов ρ_i исключительных кружков e_i , пересекающих круг $|z| \leq 2r_0$, будет меньше $\varepsilon r_0/6$. Тогда обязательно найдется ε' , $2\varepsilon/3 < \varepsilon' < \varepsilon$, такое, что на окружности $|z - z_0| = \varepsilon' r_0$ не будет точек исключительного множества. Используя субгармоничность функций $\ln |f(z)|$ и $u(z) = h(\theta)|z|$, $\theta = \arg z$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + \varepsilon r_0 e^{i\theta})| d\theta &\geq \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + \varepsilon' r_0 e^{i\theta})| d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon' r_0 e^{i\theta}) d\theta - \frac{o(|z_0|)}{r_0} \geq \frac{u(z_0)}{r_0} - \frac{o(r_0)}{r_0} = h(\theta_0) - o(1) \end{aligned}$$

при $z_0 \rightarrow \infty$. Поскольку по условию леммы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^{\varepsilon r} \frac{\tilde{n}_z(t)}{t} dt = 0, \quad \frac{\ln(\varepsilon r)}{r} = o(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

то, используя только что доказанную оценку, получаем

$$\frac{\ln |f'(z_0)|}{r_0} \geq h(\theta_0) - o(1), \quad z_0 \rightarrow \infty.$$

Если z_0 стремится к ∞ , пробегая последовательность нулей $\{\lambda_k\}$ функции $f(z)$, то $\ln |f'(\lambda_k)| \geq h(\theta_k)|\lambda_k| - o(|\lambda_k|)$, $k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть Φ — целая функция экспоненциального типа, у которой сопряженная диаграмма лежит внутри полосы

$$L = \{z : |\operatorname{Im} z e^{i\theta} - a| < l\},$$

$\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек, удовлетворяющая следующим трем условиям:

- 1) $\arg \lambda_k \rightarrow \theta$ при $k \rightarrow \infty$;
- 2) $O(\Lambda) > l/\pi$;
- 3) $I(\Lambda) = 0$.

Тогда

$$\overline{\lim}_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\lambda_k)|}{|\lambda_k|} = h_\Phi(\theta). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму будем доказывать для случая $\theta = 0$, $a = 0$, общий случай сводится к этому при помощи поворота и сдвига. Итак, мы предполагаем, что сопряженная индикаторная диаграмма лежит в полосе $L = \{z : |\operatorname{Im} z| \leq l\}$, а последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е.

$$\overline{\lim}_{|\lambda_k| \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\lambda_k)|}{|\lambda_k|} = h < h_\Phi(0).$$

Тогда при $h < h' < h_\Phi(0)$ и достаточно больших k справедливо $|\Phi(\lambda_k)| \leq e^{h'|\lambda_k|}$.

Пусть $l' = \pi O(\Lambda)$. По условию $l' > l$. Предполагая без ограничения общности, что $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, рассмотрим произведение Вейерштрасса

$$W(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right).$$

Известно, что это произведение сходится и представляет собой целую функцию экспоненциального типа с индикатором $h_W(\theta) = l' |\sin \theta|$ [17; гл. 2], $W(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста и ее нули образуют правильно распределенное множество [17; гл. 3]. Кроме того, последовательность Λ имеет нулевую концентрацию, и поэтому по лемме 1 справедлива оценка

$$\ln |W'(\lambda_k)| \geq (h_W(\arg \lambda_k) - o(1)) |\lambda_k|, \quad \lambda_k \rightarrow \infty.$$

Так как $h_W(\theta) = l' |\sin \theta|$, то $\ln |W'(\lambda_k)| \geq -o(1) |\lambda_k|$, $\lambda_k \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь интерполяционный ряд Лагранжа

$$\Phi_\alpha(\lambda) = W(\lambda) e^{\alpha \lambda} \sum \frac{\Phi(\lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k) W'(\lambda_k) e^{\alpha \lambda_k}}. \quad (4)$$

Здесь вещественное число α выбираем так, чтобы выполнялось $h' < \alpha < h_\Phi(0)$. Из оценки

$$\left| \frac{\Phi(\lambda_k)}{W'(\lambda_k) e^{\alpha \lambda_k}} \right| \leq \exp(h' |\lambda_k| - \alpha \operatorname{Re} \lambda_k + o(1) |\lambda_k|) = \exp((h' - \alpha) |\lambda_k|)$$

и условия $h' - \alpha < 0$ следует, что ряд (4) сходится к функции $\Phi_\alpha(\lambda)$.

Рассмотрим кружки $e_k = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-2}\}$. Поскольку последовательность Λ имеет конечную плотность, сумма d диаметров кружков e_k конечна. Вне кружков $\{e_k\}$ имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_\alpha(\lambda)| &\leq |W(\lambda) e^{\alpha \lambda}| \sum \frac{|\Phi(\lambda_k)|}{|\lambda_k|^2 |W'(\lambda_k)| |e^{\alpha \lambda_k}|} \\ &\leq |W(\lambda)| |e^{\alpha \lambda}| \sum \exp((h' - \alpha) |\lambda_k|) \\ &\leq \operatorname{const} |W(\lambda)| |e^{\alpha \lambda}| \leq \operatorname{const} \exp(l' |\sin \theta| |\lambda| + \alpha \operatorname{Re} \lambda + o(1) |\lambda|). \end{aligned} \quad (5)$$

Фиксируем кружок e_{k_0} . В круге $E_{k_0} = \{\lambda : |\lambda - \lambda_{k_0}| \leq 2d\}$ содержится окружность $C = \{\lambda : |\lambda - \lambda_{k_0}| = r\}$ радиуса $r \geq d$, которая не пересекается ни с каким из кружков e_k . На окружности C выполняется оценка (5). По принципу максимума модуля подобная же оценка будет выполняться и в круге $\widehat{E} = \{\lambda : |\lambda - \lambda_{k_0}| \leq r\}$, а поскольку $r \geq |\lambda_{k_0}|^{-2}$, оценка (5) будет выполняться в кружке e_{k_0} . Это верно для любого кружка e_k . Тем самым оценка (5) распространяется на всю комплексную плоскость.

Из оценки (5) следует, что индикаторная диаграмма функции Φ_α — вертикальный отрезок длины меньшей или равной $2l'$, расположенный на прямой $x = \alpha$. Рассмотрим функцию

$$\Psi_\alpha(\lambda) = \Phi(\lambda) - \Phi_\alpha(\lambda). \quad (6)$$

Очевидно, что Ψ_α — целая функция экспоненциального типа и $\Psi(\lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Функция $L(\lambda) = \Psi_\alpha(\lambda)/W(\lambda)$ является аналитической в любом угле

$|\arg z| < \pi - \delta$, $\delta > 0$, кроме, может быть, его ограниченной части и имеет в этом угле экспоненциальный рост [17; гл. 1, § 9]. Пусть $h_L(\theta)$ – индикатор функции L . Поскольку $W(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, то $h_{\Psi_\alpha}(\theta) = h_W(\theta) + h_L(\theta)$, $|\theta| < \pi$ (см. [17; гл. 3]). Следовательно, сопряженная диаграмма D_{Ψ_α} функции $\Psi_\alpha(\lambda)$ получается из сопряженной диаграммы D_L функции $L(\lambda)$ вздутием последней на вертикальный отрезок $[-il', il']$, т.е. $D_{\Psi_\alpha} = \bigcup \{\lambda + [-il', il'] : \lambda \in D_L\}$.

Пусть $\varphi, \psi_\alpha, \varphi_\alpha$ – функции, ассоциированные по Борелю с функциями $\Phi, \Psi_\alpha, \Phi_\alpha$. Соотношение (6) влечет $\psi_\alpha = \varphi - \varphi_\alpha$, или $\varphi = \varphi_\alpha + \psi_\alpha$. Пусть $D_\varphi, D_{\varphi_\alpha}, D_{\psi_\alpha}$ – наименьшие выпуклые компакты, содержащие особые точки функций $\varphi, \varphi_\alpha, \psi_\alpha$. По теореме По́я [17; гл. 1] $D_\varphi, D_{\varphi_\alpha}, D_{\psi_\alpha}$ совпадают с сопряженными диаграммами соответственно $\Phi, \Phi_\alpha, \Psi_\alpha$. Особые точки φ_α лежат на отрезке прямой $x = \alpha$, где $\alpha < h_\Phi(0)$. Поэтому прямая $x = h_\Phi(0)$ является опорной одновременно для D_Φ и D_{Ψ_α} . Более того, особые точки φ и ψ_α , расположенные на этой прямой, совпадают. В силу того что D_{Ψ_α} есть вздутие D_L на отрезок $[-il', il']$, прямая $x = h_\Phi(0)$ пересекается с D_{ψ_α} по отрезку длины большей или равной $2l'$, причем крайние точки этого отрезка (скажем z_1, z_2) будут особыми для ψ_α . Эти же точки будут особыми и для φ и поэтому $z_1, z_2 \in D_\varphi$. Таким образом, получаем, что D_φ содержит вертикальный отрезок $[z_1, z_2]$ длины большей или равной $2l'$. Это невозможно, так как D_φ содержится внутри открытой вертикальной полосы ширины $2l$, где $l < l'$. Значит, наше предположение неверно и соотношение (3) имеет место.

§ 3. Доказательство основного результата

3.1. Для доказательства основной теоремы воспользуемся критерием абсолютной полноты в банаховом пространстве, принадлежащим первому из авторов (см. [12]).

КРИТЕРИЙ. Пусть $\{e_i\}$, $i \in I$, – система элементов в банаховом пространстве X , где индексное множество I не обязательно счетно. Для того чтобы система $\{e_i\}$ была абсолютно полна в X , необходимо и достаточно, чтобы $\sup_S \{\|S\| : |\langle S, e_i \rangle| \leq 1\} = l < \infty$, где точная верхняя грань берется по линейным непрерывным функционалам S на X . При этом для любого положительного $l' \geq l$ каждый элемент x можно аппроксимировать линейными комбинациями так, что $\sum |c_i| \leq l' \|x\|$.

Применительно к нашему случаю критерий принимает следующую форму: система

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{M(\lambda_k)} \right\} \quad (7)$$

абсолютно полна в $A(K)$, если и только если

$$\sup_S \{\|S\| : |\langle S, e^{\lambda_k z} \rangle| \leq M(\lambda_k)\} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по линейным непрерывным функционалам S на $A(K)$.

3.2. Пусть S – линейный непрерывный функционал на $A(K)$ такой, что

$$|\langle S, e^{\lambda_k z} \rangle| \leq M(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Чтобы установить абсолютную полноту системы (7) в пространстве $A(K)$, достаточно показать, что $\|S\| < l$, где l не зависит от функционала S . Линейный непрерывный функционал S на $A(K)$ допускает представление

$$\langle S, f \rangle = \int_K f d\mu,$$

где μ – комплекснозначная счетно-аддитивная мера ограниченной вариации с $\text{supp } \mu \subset K$. Рассмотрим характеристическую функцию функционала S :

$$\Phi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle = \int_K e^{\lambda z} d\mu,$$

$\Phi(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа, ее сопряженная индикаторная диаграмма $\overline{D}_\Phi$ лежит в компакте K : $\overline{D}_\Phi \subset K$. Кроме того, в силу (8)

$$|\Phi(\lambda_k)| \leq M(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Пусть θ – направление полного сгущения последовательности Λ . Это означает, что существует $\Lambda' = \{\lambda'_k\} \subset \Lambda$ такая, что

- 1) $\arg \lambda'_k \rightarrow \theta, \lambda'_k \rightarrow \infty$;
- 2) $O_i(\Lambda') > l(-\theta)/(2\pi)$, где $l(-\theta)$ – длина проекции компакта K на прямую, перпендикулярную лучу $\arg z = -\theta$.

Согласно Пойа (см. [15]) из последовательности Λ' можно извлечь подпоследовательность $\Lambda'' = \{\lambda''_k\}$ такую, что $\pi O(\Lambda'') = l'$, где $l' > l(-\theta)$. По лемме 2

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda''_k \rightarrow \infty \\ \lambda''_k \in \Lambda''}} \frac{\ln |\Phi(\lambda''_k)|}{|\lambda''_k|} = h_\Phi(\theta).$$

Отсюда в силу (9)

$$h_\Phi(\theta) = \overline{\lim}_{\substack{\lambda''_k \rightarrow \infty \\ \lambda''_k \in \Lambda''}} \frac{\ln |\Phi(\lambda''_k)|}{|\lambda''_k|} \leq \overline{\lim}_{\substack{\lambda'_k \rightarrow \infty \\ \lambda'_k \in \Lambda'}} \frac{\ln |\Phi(\lambda'_k)|}{|\lambda'_k|} \leq \overline{\lim}_{\substack{\lambda'_k \rightarrow \infty \\ \lambda'_k \in \Lambda'}} \frac{\ln M(\lambda'_k)}{|\lambda'_k|} = H_{\Lambda'}(\theta).$$

Следовательно, $h_\Phi(\theta) \leq H_{\Lambda'}(\theta)$. Это имеет место для любой $\Lambda' \in S_\theta$. Поэтому $h_\Phi(\theta) \leq \inf \{H_{\Lambda'}(\theta) : \Lambda' \in S_\theta\}$ и, значит, $h_\Phi(\theta) \leq H(\theta)$. Отсюда следует, что индикаторная диаграмма D_Φ функции Φ содержится в D :

$$D_\Phi \subset D. \quad (10)$$

3.3. Обратимся к условию $D \cap \partial \overline{K} = \emptyset$. Возможны два случая:

- I) $D \subseteq \overline{K}$;
- II) $D \cap \overline{K} = \emptyset$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\gamma(z)$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\Phi(\lambda)$. По теореме Пойа наименьший выпуклый компакт, содержащий все особые точки функции γ , совпадает с $\overline{D}_\Phi$. Поскольку $D_\Phi \subset D$, а $D \subseteq \overline{K}$, то $\overline{D}_\Phi \subseteq K$ и, значит, γ аналитична на ∂K . Функцию $\gamma(z)$ можно представить в следующем виде:

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\langle S, \frac{1}{\xi - z} \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{1}{\xi - z} d\mu_\xi.$$

Действие функционала S на функцию f , голоморфную в некоторой окрестности компакта K , можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}\langle S, f \rangle &= \int_K f d\mu_z = \int_K \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi d\mu_z \\ &= \int_C f(\xi) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\mu_z}{\xi - z} \right) d\xi = \int_C \gamma(\xi) f(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Здесь контур C охватывает K , но расположен в области аналитичности f . Поскольку функция γ аналитична на ∂K , получаем

$$\langle S, f \rangle = \int_{\partial K} \gamma(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Итак, для функции f , голоморфной в окрестности компакта K , верно соотношение (11). Поскольку любую функцию $f \in A(K)$ мы можем аппроксимировать функциями, голоморфными в окрестности компакта K , то (11) верно для любой функции $f \in A(K)$. В силу этого соотношения

$$\|S\| = \sup\{|\langle S, f \rangle| : f \in A(K), \|f\| \leq 1\} \leq \int_{\partial K} |\gamma(z)| dS.$$

Таким образом, задача сводится к оценке $|\gamma(z)|$ на ∂K . Запишем $\gamma(z)$ через интеграл Лапласа:

$$\gamma(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda} \Phi(\lambda) d\lambda,$$

где интеграл взят по лучу $\arg \lambda = \theta$, а z принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} z e^{i\theta} > h_\Phi(\theta)$.

3.4. Для того чтобы оценить $|\gamma(z)|$ на ∂K , нужно оценить $|\Phi(\lambda)|$. Для этой цели мы представим $\Phi(\lambda)$ в виде интерполяционного ряда Лагранжа:

$$\Phi(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{\lambda_k \in \Lambda'} \frac{\Phi(\lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k) \sigma'(\lambda_k)}, \quad (12)$$

где σ — подходяще подобранная функция. Покажем построение функции $\sigma(\lambda)$.

ЛЕММА 3. *Существует целая функция $\sigma(\lambda)$ со следующими свойствами:*

- 1) нулевое множество $\sigma(\lambda)$ представляет собой подпоследовательность Λ' последовательности Λ ;
- 2) $\sigma(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста;
- 3) для индикаторной диаграммы D_σ функции $\sigma(\lambda)$ справедливы включения

$$D \Subset D_\sigma \Subset \overline{K}; \quad (13)$$

- 4) при $\lambda_k \rightarrow \infty$, $\lambda_k \in \Lambda'$, выполняется асимптотическое соотношение

$$\ln |\sigma'(\lambda_k)| = (h_\sigma(\theta_k) + o(1)) |\lambda_k|, \quad \theta_k = \arg |\lambda_k|; \quad (14)$$

- 5) при $\lambda_k \rightarrow \infty$, $\lambda_k \in \Lambda'$, имеет место асимптотическое неравенство

$$\ln M(\lambda_k) \leq H(\theta_k) |\lambda_k| + o(|\lambda_k|), \quad \theta_k = \arg \lambda_k. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_m$ – конечная система направлений полного сгущения последовательности Λ . Рассмотрим многоугольник

$$\widehat{D} = \bigcap_{\nu=1}^m \{z : \operatorname{Re} z e^{-i\theta_\nu} \leq h_\nu\}.$$

Очевидно, что при $h_\nu > H(\theta_\nu)$ этот многоугольник содержит диаграмму существенного роста D . В силу того что $D \subseteq \overline{K}$, систему направлений $\theta_1, \dots, \theta_m$ и числа $h_1 > H(\theta_1), \dots, h_m > H(\theta_m)$ можно подобрать таким образом, что выполняются условия:

- i) $D \subseteq \widehat{D} \subseteq \widehat{K}$;
- ii) длины $l_1, \dots, l_m$ сторон многоугольника $\widehat{D}$, перпендикулярные лучам $\arg z = \theta_1, \dots, \arg z = \theta_m$, положительны.

В силу компактного вложения $D \subseteq \widehat{D}$ многоугольник $\widehat{D}$ имеет непустую внутренность. Фиксируем индекс $\nu = 1, \dots, m$. Утверждаем, что существует подпоследовательность $\Lambda^{(\nu)} = \{\lambda_j\}$ последовательности Λ такая, что

- i') $\arg \lambda_j \rightarrow \theta_\nu$ при $\lambda_j \rightarrow \infty$;
- ii') $O(\Lambda^{(\nu)}) = l_\nu / (2\pi)$;
- iii') при $\lambda_j \rightarrow \infty, \lambda_j \in \Lambda^{(\nu)}$, имеет место асимптотическое неравенство (15).

Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует последовательность $\Lambda_n \in S_{\theta_\nu}$, удовлетворяющая условиям:

- i'') $\arg \lambda_j \rightarrow \theta_\nu$ при $\lambda_j \rightarrow \infty, \lambda_j \in \Lambda_n$;
- ii'') $O_i(\Lambda_n) > l(-\theta_\nu) / (2\pi)$;
- iii'') при $\lambda_i \rightarrow \infty, \lambda_i \in \Lambda_n$, имеет место асимптотическое неравенство

$$\ln M(\lambda_i) \leq H(\theta_i)|\lambda_i| + \varepsilon_n|\lambda_i|, \quad \theta_i = \arg \lambda_i.$$

Так как $\widehat{D} \subset \overline{K}$, то $l(-\theta_\nu) \geq l_\nu$, тем более $O_i(\Lambda_n) > l_\nu / (2\pi)$, и поэтому по теореме По́йа [15] из последовательности Λ_n можно извлечь подпоследовательность Λ'_n , которая по-прежнему удовлетворяет условиям i''), iii''), а условие ii'') заменено на $O(\Lambda'_n) = l_\nu / (2\pi)$. Из конечных кусков последовательностей Λ'_n достаточно больших протяженностей составляем последовательность $\Lambda^{(\nu)}$, удовлетворяющую условиям i')–iii').

Рассмотрим теперь последовательность $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{\nu=1}^m \Lambda^{(\nu)}$. Утверждаем, что $\tilde{\Lambda}$ имеет угловую плотность. Пусть I – дуга единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$ с концами $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$, $\alpha, \beta \neq \theta_1, \dots, \theta_m$, $\tilde{n}(t, I)$ – число точек последовательности $\tilde{\Lambda}$ в секторе $\{z = re^{i\theta} : e^{i\theta} \in I, r \leq t\}$. Легко видеть, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{n}(t, I)}{t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta_i \in I} l_i = \frac{s(I)}{2\pi},$$

где $s(I)$ – длина границы $\widehat{D}$ между точками опоры опорных прямых L_α, L_β , перпендикулярных лучам $\arg z = \alpha, \arg z = \beta$. Построенная таким образом аддитивная функция s , заданная на множестве дуг с концами, отличными от точек $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m}$, определяет борелевскую меру на $\partial\mathbb{D}$. Это и означает, что $\tilde{\Lambda}$ имеет угловую плотность. Из простых геометрических соображений нетрудно установить, что

$$\int_{\partial\mathbb{D}} e^{i\theta} ds = 0.$$

Кроме того, поскольку компакт $\widehat{D}$ содержит внутренние точки, существует α , $0 < \alpha < \pi$, такое, что для любой дуги $I \subset \partial\mathbb{D}$ длины α выполняется $s(I) > 0$. Теорема из [18] утверждает, что в этой ситуации из последовательности $\tilde{\Lambda}$ можно выбросить подпоследовательность нулевой линейной плотности такую, что оставшаяся последовательность Λ' будет правильно распределенной, при этом угловая плотность Λ' будет прежней. Рассмотрим каноническую функцию $\sigma(\lambda)$ последовательности Λ' :

$$\sigma(\lambda) = e^{\tau\lambda} \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\lambda/\lambda_n},$$

где комплексное число τ подбираем таким образом, чтобы индикаторная диаграмма функции $\sigma(\lambda)$ совпадала с многоугольником $\widehat{D}$ (см. [17; гл. 2]).

Функция $\sigma(\lambda)$ искомая. Действительно, согласно теории Левина–Пфлюгера (см. [17], [19], [20]) $\sigma(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост; нулевое множество $\sigma(\lambda)$ есть подпоследовательность Λ' последовательности Λ ; поскольку $D_\sigma = \widehat{D}$, имеет место включение (13); подпоследовательность Λ' имеет нулевую концентрацию вместе с Λ ; по лемме 1 имеет место асимптотическое соотношение (14); наконец, для последовательности Λ' выполняется асимптотическое неравенство (15), так как для каждой из подпоследовательностей $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(m)}$ выполняется подобное же условие. Лемма доказана.

Обратимся к интерполяционному ряду (12). Включения (10) и (13) влекут $D_\Phi \subseteq D_\sigma$; это значит, что $h_\varphi(\theta) - h_\sigma(\theta) \leq -\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Этот факт и оценка (14) для $\sigma'(\lambda)$ позволяют заключить, что ряд (12) сходится; полная регулярность роста функции σ обеспечивает сходимость ряда (12) именно к Φ . Таким образом, имеет место представление

$$\Phi(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{\lambda_k \in \Lambda'} \frac{\Phi(\lambda_k)}{\sigma'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Из этого представления следует, что

$$|\Phi(\lambda)| \leq |\sigma(\lambda)| \sum \frac{|\Phi(\lambda_k)|}{|\lambda - \lambda_k| |\sigma'(\lambda_k)|} \leq |\sigma(\lambda)| \sum \frac{M(\lambda_k)}{|\lambda - \lambda_k| |\sigma'(\lambda_k)|}.$$

Рассмотрим множество кружков $e_k = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-2}\}$, $k = 1, 2, \dots$, где $\lambda_k \in \Lambda'$. Так как последовательность Λ' имеет конечную верхнюю плотность, сумма радиусов этих кружков конечна. Вне кружков e_k имеем

$$|\Phi(\lambda)| \leq |\sigma(\lambda)| \sum \frac{M(\lambda_k)}{|\lambda_k|^2 |\sigma'(\lambda_k)|}.$$

Далее, в силу включения $D \subseteq D_\sigma$ существует $\delta > 0$ такое, что $H(\theta) - h_\sigma(\theta) \leq -\delta$; отсюда, учитывая (14), получаем

$$|\Phi(\lambda)| \leq |\sigma(\lambda)| \sum \exp(-\delta|\lambda_k| + o(|\lambda_k|)).$$

Таким образом, вне множества кружков e_k справедлива оценка $|\Phi(\lambda)| \leq c|\sigma(\lambda)|$, где константа c не зависит от Φ . Так как индикаторная диаграмма функции $\sigma(\lambda)$

совпадает с $\widehat{D}$, т.е. $D_\sigma = \widehat{D}$, а $\widehat{D} \subseteq \overline{K}$, то при некотором достаточно малом ε будет выполняться

$$|\Phi(\lambda)| \leq c \exp((H_K(-\theta) - \varepsilon)|\lambda|), \quad (16)$$

где $H_K(\theta)$ — опорная функция компакта K , константы c и ε не зависят от Φ . Эта оценка верна вне кружков e_k , $k = 1, 2, \dots$. Однако, поскольку сумма радиусов кружков e_k конечна, подходящее применение принципа максимума модуля распространяет оценку (16) на всю комплексную плоскость.

3.5. Чтобы оценить $\gamma(z)$ вдоль ∂K , воспользуемся интегральным представлением

$$\gamma(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda} \Phi(\lambda) d\lambda, \quad \operatorname{Re} z e^{-i\theta} \geq h_\Phi(-\theta),$$

где интеграл берется по лучу $\arg \lambda = -\theta$. При $\operatorname{Re} z e^{-i\theta} \geq H_K(\theta)$, используя (16), имеем

$$|\gamma(z)| \leq \int_0^\infty |e^{-z\lambda}| |\Phi(\lambda)| |d\lambda| \leq c \int_0^\infty e^{-H_K(\theta)|\lambda|} e^{(H_K(\theta) - \varepsilon)|\lambda|} |d\lambda| \leq \frac{c}{\varepsilon}.$$

Эта оценка верна в любой замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z e^{-i\theta} \geq H_K(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Отсюда заключаем, что

$$|\gamma(z)| \leq \frac{c}{\varepsilon}, \quad z \in \partial K. \quad (17)$$

Ранее было установлено неравенство $\|S\| \leq \int_{\partial K} |\gamma(z)| dS$. Это неравенство и оценка (17) дают $\|S\| \leq Lc/\varepsilon$, где L — длина ∂K . Такая оценка верна для любого функционала S , удовлетворяющего условию (8). Поэтому

$$\sup\{\|S\| : |\langle S, e^{\lambda_k z} \rangle| \leq M(\lambda_k)\} = l < \infty,$$

где $l = Lc/\varepsilon$. В случае I) теорема доказана.

3.6. Рассмотрим второй случай: $D \cap \overline{K} = \emptyset$. Ранее были получены включения $D_\Phi \subseteq D$, $D_\Phi \subseteq \overline{K}$. Отсюда следует, что $D_\Phi = \emptyset$. Это возможно только тогда, когда $\Phi \equiv 0$. Соответствующий функционал S будет нулевым. Следовательно,

$$\sup\{\|S\| : |\langle S, e^{\lambda_k z} \rangle| \leq M_k, \quad k = 1, 2, \dots\} = 0 < \infty.$$

Теорема полностью доказана.

3.7. Контрпример. Покажем, что условие $D \cap \partial \overline{K} = \emptyset$ существенно, т.е. при нарушении этого условия утверждение теоремы, вообще говоря, неверно. Рассмотрим прямоугольник

$$K = \{z : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, |\operatorname{Im} z| \leq c\},$$

где $0 < c \leq \pi$; $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность всех целых чисел. Эта последовательность имеет нулевую концентрацию и вполне сгущается (относительно K) в двух направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Пусть

$$a \leq h_- \leq h_+ \leq b. \quad (18)$$

Определим на Λ функцию $M(\lambda)$, полагая

$$M(\lambda_k) = \begin{cases} e^{h_+|\lambda_k|}, & \lambda_k \geq 0; \\ e^{h_-|\lambda_k|}, & \lambda_k < 0. \end{cases}$$

Диаграмма D существенного роста функции $M(\lambda)$ есть вертикальная полоса $D = \{z : h_- \leq \operatorname{Re} z \leq h_+\}$. Эта полоса в силу условия (18) пересекается с ∂K . С другой стороны, отрезок $[a, b]$ пересекается с D более чем в одной точке. По теореме 1 из [12] система (7) не является абсолютно полной в $C[a, b]$. Тем более эта система не будет абсолютно полной в $A(K)$.

§ 4. Примеры применения теоремы 1

4.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел нулевой концентрации такая, что $O(\Lambda) = \sigma$. Далее, пусть $\{M_k\} = \{M(\lambda_k)\}$ — последовательность положительных чисел, для которой существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\lambda_k)}{\lambda_k} = \Delta.$$

Сразу же отметим, что последовательность Λ имеет только одно направление сгущения $\theta = 0$, а индикатор $H(\theta)$ существенного роста функции $M(\lambda)$ равен ∞ для всех θ , кроме $\theta = 0$. Диаграмма D существенного роста функции $M(\lambda)$ представляет собой замкнутую полуплоскость $D = \{z : \operatorname{Re} z \leq \Delta\}$. Нас интересует вопрос: каким должен быть компакт K , чтобы система

$$\left\{ \frac{e^{\lambda_k z}}{M(\lambda_k)} \right\} \quad (19)$$

была абсолютно полна в пространстве $A(K)$?

Чтобы последовательность Λ вполне сгущалась в направлении $\theta = 0$, должно выполняться неравенство $\sigma > l(0)/(2\pi)$, где $l(0)$ — проекция компакта K на прямую, перпендикулярную лучу $\arg z = 0$. Из этого условия получаем

$$l(0) < 2\pi\sigma, \quad (20)$$

и, следовательно, компакт K лежит внутри открытой горизонтальной полосы ширины $2\pi\sigma$. Применяя теорему, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть последовательность Λ имеет нулевую концентрацию и выполняется условие (20). Если компакт K лежит в пересечении открытой горизонтальной полосы ширины $2\pi\sigma$ и открытой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то система (19) абсолютно полна в $A(K)$.

Как следствие получаем результат В. В. Напалкова [11]: если $\Delta = -\infty$ и $\sigma = 1$, то система (19) абсолютно полна в $A(K)$ для любого выпуклого компакта K , лежащего в открытой горизонтальной полосе ширины 2π .

4.2. Усложним задачу. Пусть последовательность Λ имеет нулевую концентрацию и расщепляется на две подпоследовательности Λ^+ и Λ^- с направлениями сгущения $\theta = 0$, $\theta = \pi$ соответственно. Предположим, что выполняются условия

$$1) \quad O(\Lambda^+) = O(\Lambda^-) = \sigma, \quad (21)$$

$$2) \quad h_- \leq h_+, \quad (22)$$

где

$$h_+ = \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda^+}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}, \quad h_- = \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda^-}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}.$$

Диаграмма существенного роста представляет собой вертикальную полосу $D = \{z : h_- \leq \operatorname{Re} z \leq h_+\}$. Так же как и в предыдущем случае, нас интересует вопрос: каким должен быть компакт K , чтобы система (19) была абсолютно полна в пространстве $A(K)$? Чтобы последовательность Λ вполне сгущалась (относительно компакта K) в направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, должны выполняться неравенства $\sigma > l(0)/(2\pi)$, $\sigma > l(\pi)/(2\pi)$, где $l(0) = l(\pi)$ — длина проекции компакта K на вертикальную прямую. Отсюда делаем вывод, что компакт K должен содержаться в открытой горизонтальной полосе ширины $2\pi\sigma$. Привлекая теорему, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность вещественных чисел — имеет нулевую концентрацию и удовлетворяет условиям (21), (22). Если выпуклый компакт K содержится в открытой горизонтальной полосе ширины $2\pi\sigma$ и его граница не пересекается с вертикальной полосой $\{h_- \leq \operatorname{Re} z \leq h_+\}$, то система (19) абсолютно полна в $A(K)$.

Отметим, что если плотности последовательностей Λ^+ и Λ^- различны, скажем равны соответственно σ_1 и σ_2 , и при этом $\sigma_1 < \sigma_2$, то следует рассматривать горизонтальную полосу ширины $2\pi\sigma_1$.

4.3. Пусть Λ есть объединение четырех последовательностей нулевой концентрации $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, сгущающихся в направлениях $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \theta_3 = \pi/2, \theta_4 = 3\pi/2$ соответственно. Предположим, что $O(\Lambda_1) = \sigma_1, O(\Lambda_2) = \sigma_2, O(\Lambda_3) = \sigma_3, O(\Lambda_4) = \sigma_4$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 > 0$. Далее, пусть

$$\begin{aligned} H_1 &= \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_1}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}, & H_2 &= \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_2}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}, \\ H_3 &= \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_3}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}, & H_4 &= \overline{\lim}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda_4}} \frac{\ln M(\lambda_k)}{|\lambda_k|}. \end{aligned}$$

Где должен быть расположен выпуклый компакт K , чтобы система (19) была абсолютно полна в $A(K)$? Диаграмма существенного роста представляет собой прямоугольник

$$D = \{z : H_2 \leq \operatorname{Re} z \leq H_1, H_4 \leq \operatorname{Im} z \leq H_3\}. \quad (23)$$

Далее, для того чтобы последовательность Λ вполне сгущалась (относительно компакта K) в направлениях $\theta = 0, \theta = \pi$, требуется, чтобы

$$\frac{l_1}{2\pi} < \sigma_1, \quad \frac{l_1}{2\pi} < \sigma_2, \quad (24)$$

где l_1 — длина проекции компакта K на вертикальную прямую. Аналогично, чтобы последовательность Λ сгущалась в направлениях $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, требуется, чтобы

$$\frac{l_2}{2\pi} < \sigma_3, \quad \frac{l_2}{2\pi} < \sigma_4, \quad (25)$$

где l_2 — длина проекции компакта K на горизонтальную прямую. Согласно теореме получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть последовательность Λ имеет нулевую концентрацию и выполняются условия (24), (25). Если граница выпуклого компакта K не пересекается с прямоугольником (23), то система (19) является абсолютно полной в $A(K)$.

Список литературы

1. *Davis Ph., Fan Ky.* Complete sequences and approximation in normed linear spaces // *Duke Math. J.* 1957. V. 24. №2. P. 183–192.
2. *Хавинсон С. Я.* Некоторые вопросы полноты систем // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 137. №4. С. 793–796.
3. *Stafney J. A.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$ // *Duke Math. J.* 1967. V. 3. №3. P. 393–396.
4. *Хавинсон С. Я.* Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций // *Матем. заметки.* 1969. Т. 6. №5. С. 619–625.
5. *Хавинсон С. Я.* О понятии полноты, учитывающей величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов // *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.* 1971. Т. 6. №2–3. С. 221–233.
6. *Гуракий В. И., Мелетиди М. А.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // *Функц. анализ и его прилож.* 1971. Т. 5. №1. С. 73–75.
7. *Мурадян О. А.* О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца // *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.* 1973. Т. 8. №1. С. 70–87.
8. *Мурадян О. А., Хавинсон С. Я.* О величинах коэффициентов многочленов в аппроксимационной теореме Вейерштрасса // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22. №2. С. 269–276.
9. *Golitschek M., Leviatan D.* Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials with real or complex exponents // *J. Math. Anal. Appl.* 1977. V. 60. №1. P. 123–128.
10. *Тригуб Р. М.* О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1977. №1. С. 93–99.
11. *Напалков В. В.* Аппроксимация функций многих переменных с учетом роста коэффициентов аппроксимирующих агрегатов // *Матем. сб.* 1980. Т. 111. №1. С. 144–156.
12. *Красичков-Терновский И. Ф.* Об абсолютной полноте системы экспонент на интервале // *Матем. сб.* 1986. Т. 131. №3. С. 309–322.
13. *Хавинсон С. Я.* Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области, и применение этих задач к вопросам аппроксимации // *Докл. АН СССР.* 1960. Т. 135. №2. С. 270–273.
14. *Хавинсон С. Я.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов // *Труды МИАН.* 1961. Т. 60. С. 304–324.
15. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // *Math. Z.* 1929. V. 29. P. 549–640.
16. *Пасечник Г. М.* Геометрическая характеристика множества показателей представляющей системы экспонент для пространства $H(G)$ // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 252. №3. С. 553–555.
17. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
18. *Шилова Г. Н.* Теорема о делителях целых функций конечного порядка // *Матем. заметки.* 1990. Т. 48. №2. С. 128–136.
19. *Pfluger A.* Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktion. I // *Comment Math. Helv.* 1938. V. 11. P. 180–213.
20. *Pfluger A.* Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktion. II // *Comment Math. Helv.* 1939. V. 12. P. 25–69.

Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа
 Вологодский государственный
 педагогический университет
E-mail: kra@imat.rb.ru
 shgn@mail.ru

Поступила в редакцию
 01.11.2004 и 23.05.2005