Общероссийский математический портал

В. Г. Лысов, Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стильесовских функций с весом Лагерра, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 12, 99–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 08:22:37

УДК 517.53

В. Г. Лысов

Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра

Рассматриваются аппроксимации Эрмита–Паде с общим знаменателем для двух стилтьесовских функций с весами $x^\alpha e^{-\beta_1 x}$ и $x^\alpha e^{-\beta_2 x}$, где $\alpha > -1$, $\beta_2 > \beta_1 > 0$. Методом матричной задачи Римана–Гильберта получена сильная асимптотика этих аппроксимаций в случае $\beta_2/\beta_1 < 3 + 2\sqrt{2}$. Показано, что предельное распределение нулей знаменателей аппроксимаций Эрмита–Паде есть равновесная мера для некоторой системы Никишина.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $(f_1, \dots, f_r)$ – набор степенных рядов с центром в бесконечной точке:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.1)$$

Аппроксимациями Эрмита–Паде (второго рода), соответствующими векторному индексу $\vec{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r$, называются рациональные функции с общим знаменателем

$$P_{\vec{n},j} = \frac{p_{\vec{n},j}}{q_{\vec{n}}}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.2)$$

такие, что

$$\deg q_{\vec{n}} \leq n_1 + \dots + n_r \quad (1.3)$$

и

$$r_{\vec{n},j} := (q_{\vec{n}} f_j - p_{\vec{n},j})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.4)$$

Исследование сходимости и асимптотического поведения аппроксимаций (1.2) является сложной задачей с богатым содержанием. В работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [1] была изучена сходимость аппроксимаций для системы марковских функций

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_j} \frac{d\sigma_j(x)}{x-z}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00522), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1551.2003.1), Отделения математических наук РАН (программа № 1) и фонда INTAS (грант № 03-516637).

где Δ_j – попарно не пересекающиеся отрезки на вещественной оси. Одним из главных выводов работы [1] явилось то, что сходимость, расходимость, предельное распределение полюсов существенно зависят от “геометрии” особенностей функций (1.5) (т.е. расположения отрезков Δ_j).

В настоящей работе мы рассматриваем асимптотику аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций стильтесовского типа

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{w_j(x) dx}{x - z}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.6)$$

где $(w_1, \dots, w_r)$ – система весов Лагерра:

$$w_j(x) = x^\alpha e^{-\beta_j x}, \quad j = 1, \dots, r, \quad \alpha > -1, \quad \beta_r > \dots > \beta_1 > 0. \quad (1.7)$$

При $r = 1$ знаменатели $l_{\vec{n}} := q_{\vec{n}}$ являются классическими полиномами Лагерра. При $r > 1$ эти полиномы являются полиномами совместной ортогональности:

$$\int_0^\infty l_{\vec{n}}(x) x^k w_j(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.8)$$

Известно (см. [2]), что полином $l_{\vec{n}}$ определен однозначно с точностью до нормировочной постоянной. Все нули $l_{\vec{n}}$ простые и лежат в интервале $(0, \infty)$. Аналогично классическим полиномы совместной ортогональности Лагерра могут быть представлены формулой Родрига (см. [2; гл. 4, §6]):

$$l_{\vec{n}}(x) = x^{-\alpha} \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{\beta_j} \frac{d}{dx} \right)^{n_j} x^{|\vec{n}|+\alpha}, \quad (1.9)$$

где произведение дифференциальных операторов можно брать в любом порядке, и старший коэффициент $l_{\vec{n}}$ равен единице.

Алгебраические свойства полиномов совместной ортогональности для классических весов, удовлетворяющих уравнению Пирсона, недавно были изучены в работе [3]. В частности, там были получены рекуррентные соотношения и линейное дифференциальное уравнение для полиномов совместной ортогональности Лагерра $l_{\vec{n}}(x)$.

Вопросы сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для системы (1.6), (1.7) были рассмотрены В. Н. Сорокиным в [4]. Свое внимание мы сконцентрируем на асимптотическом поведении $l_{\vec{n}}$, $r_{\vec{n},j}$, в частности на описании предельного поведения полюсов аппроксимаций. Как уже отмечалось выше, нули $l_{\vec{n}}$ плотны в $[0, \infty]$. Для более точного описания их предельного распределения полезно изменить масштаб задачи, так чтобы они заматали компакте. В настоящей работе изучается асимптотика масштабированных полиномов с единичным старшим коэффициентом:

$$L_n(x) = n^{-2n} l_{\vec{n}}(nx), \quad (1.10)$$

в случае двух весов ($r = 2$) и диагональных индексов (n, n) . Полиномы $L_n(x)$ удовлетворяют соотношениям ортогональности с переменным весом

$$\int_0^\infty L_n(x) x^{k+\alpha} e^{-n\beta_1 x} dx = 0, \quad \int_0^\infty L_n(x) x^{k+\alpha} e^{-n\beta_2 x} dx = 0. \quad (1.11)$$

Рассматривается случай малого отношения параметров $\beta_2/\beta_1 < 3 + 2\sqrt{2}$.

Автор выражает благодарность В. Н. Сорокину за постановку задачи и А. И. Аптекареву за полезные обсуждения в процессе работы.

1.2. Риманова поверхность. В задачах об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде ключевую роль играют алгебраические функции, определяющие главный член асимптотики (см. [5]). В этом пункте мы опишем соответствующую алгебраическую функцию и ее риманову поверхность. Предполагаем, что после сжатия плоскости нули полиномов $L_n(x)$ заматают некоторый компакт и можно ожидать асимптотику вне этого компакта в виде

$$L_n(z) = F(z) \Phi^n(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(z)$ является ветвью некоторой трехзначной аналитической функции. Явный вид этой функции можно найти следующим образом. Используя результаты работы [3], после некоторых преобразований получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет полином $L_n(z)$:

$$\begin{aligned} z^2 L_n'''(z) - z[nz(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha + 1)]L_n''(z) \\ + [\beta_1\beta_2 n^2 z^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\alpha + 1 - n)nz + \alpha(\alpha + 1)]L_n'(z) \\ - n^2[2\beta_1\beta_2 nz + \alpha(\beta_1 + \beta_2)]L_n(z) = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя асимптотическую формулу в это уравнение и приравнявая коэффициенты при старшем члене по n , получаем алгебраическое уравнение для логарифмической производной $\psi(z) = \Phi'/\Phi(z)$ функции Φ :

$$z\psi^3(z) - (\beta_1 + \beta_2)z\psi^2(z) + (\beta_1\beta_2 z + \beta_1 + \beta_2)\psi(z) - 2\beta_1\beta_2 = 0, \quad (1.13)$$

или равносильно

$$z = \frac{2}{\psi(z)} - \frac{1}{\psi(z) - \beta_1} - \frac{1}{\psi(z) - \beta_2}. \quad (1.14)$$

Алгебраическая функция $\psi(z)$ допускает выделение трех голоморфных ветвей при $z \rightarrow \infty$:

$$\psi_0(z) = \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (1.15)$$

$$\psi_1(z) = \beta_1 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (1.16)$$

$$\psi_2(z) = \beta_2 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (1.17)$$

Найдем теперь выражение для Φ :

$$\Phi(z) = c_0 e^{\int \psi dz} = c_0 e^{z\psi - \int z d\psi} = c_0 e^{z\psi} (\psi - \beta_1)(\psi - \beta_2)\psi^{-2}.$$

Выберем постоянную $c_0 = (\beta_1\beta_2 e^2/4)^{-1}$. Тогда соответствующие ветви функции Φ имеют следующее поведение в окрестности бесконечности:

$$\Phi_0(z) = z^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (1.18)$$

$$\Phi_1(z) = c_1 e^{\beta_1 z} \frac{1}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (1.19)$$

$$\Phi_2(z) = c_2 e^{\beta_2 z} \frac{1}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (1.20)$$

где

$$c_1 = \left(\frac{\beta_1^3 \beta_2 e^3}{4(\beta_2 - \beta_1)} \right)^{-1}, \quad c_2 = \left(\frac{\beta_2^3 \beta_1 e^3}{4(\beta_1 - \beta_2)} \right)^{-1}.$$

Нас интересует множество, где равны по модулю различные ветви функции Φ :
 $M = \{z \in \mathbb{C} : |\Phi_j(z)| = |\Phi_k(z)|, j \neq k\}.$

Рис. 1. Множество M при $\varkappa_N < \beta_2/\beta_1 < \varkappa_A$

Рис. 2. Множество M при $\beta_2/\beta_1 > \varkappa_A$

Структура этого множества зависит от отношения β_2/β_1 (см. рис. 1–4). Введем обозначения

$$\varkappa_N = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \varkappa_A = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{36 + 21\sqrt{3}}{2}} = 12.1136 \dots \quad (1.21)$$

При $\beta_2/\beta_1 < \varkappa_A$ функция $\Phi(z)$ имеет четыре простые точки ветвления, две из которых вещественные 0 и d ($d > 0$), другие две комплексно сопряженные s и $\bar{s}$

Рис. 3. Множество M при $\varkappa_{NN} < \beta_2/\beta_1 < \varkappa_N$ Рис. 4. Множество M при $\beta_2/\beta_1 < \varkappa_{NN}$ Рис. 5. Риманова поверхность функции ψ

($\operatorname{Im} c < 0$). При $\beta_2/\beta_1 < \varkappa_N$ множеству $\{z \in \mathbb{C} : |\Phi_j(z)| = |\Phi_k(z)|, j \neq k\}$ принадлежит простая аналитическая кривая Γ , соединяющая точки c и $\bar{c}$ и пересекающая действительную ось в отрицательной точке, а также отрезок $\Delta = [0, d]$. Делая разрезы вдоль этих кривых, выделяем голоморфные ветви функции ψ (и Φ):

$$\psi_0(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad (1.22)$$

$$\psi_1(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta \cup \Gamma), \quad (1.23)$$

$$\psi_2(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma). \quad (1.24)$$

Риманова поверхность функции ψ изображена на рис. 5.

1.3. Формулировка результатов. Как будет показано ниже, в случае малого отношения параметров нули полиномов $L_n(x)$ замечают отрезок Δ . Мы получим асимптотические формулы для $L_n(x)$ вне Δ , внутри Δ и в окрестности концов Δ .

ТЕОРЕМА 1.1. *Для полиномов совместной ортогональности Лагерра $L_n(z)$ в случае $\beta_2/\beta_1 < 3 + 2\sqrt{2}$ справедливы следующие асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$:*

1) *равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus \Delta$*

$$L_n(z) = F(z, \psi_0(z)) \Phi_0^n(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.25)$$

где

$$F(z, \psi) = \frac{2^\alpha \psi^{-\alpha} z^{-\alpha} (\psi - \beta_1)(\psi - \beta_2)}{\sqrt{D(\psi)}}, \quad (1.26)$$

$$D(\psi) = -4(\beta_1 + \beta_2)\psi^3 + 2(\beta_1^2 + 8\beta_1\beta_2 + \beta_2^2)\psi^2 - 8(\beta_1 + \beta_2)\beta_1\beta_2\psi + 4\beta_1^2\beta_2^2; \quad (1.27)$$

2) *равномерно на компактных подмножествах $(0, d)$*

$$L_n(x) = (F(x, \psi_{0+}(x)) \Phi_{0+}^n(x) + F(x, \psi_{0-}(x)) \Phi_{0-}^n(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \quad (1.28)$$

3) *равномерно в достаточно малой окрестности точки 0*

$$L_n(z) = (\Phi_1 \Phi_0)^{n/2} \sqrt{-\pi n \varphi} \left(I_\alpha \left(-\frac{n\varphi}{2} \right) (N_{00}(z) + iN_{01}(z)(-z)^{-\alpha}) \right. \\ \left. + I'_\alpha \left(-\frac{n\varphi}{2} \right) (-N_{00}(z) + iN_{01}(z)(-z)^{-\alpha}) \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \quad (1.29)$$

4) *равномерно в достаточно малой окрестности точки d*

$$L_n(z) = (\Phi_1 \Phi_0)^{n/2} \sqrt{\pi} \left(\left(\frac{3}{2} n \varphi \right)^{1/6} \operatorname{Ai} \left(\left(\frac{3}{2} n \varphi \right)^{2/3} \right) (N_{00}(z) + iN_{01}(z)z^{-\alpha}) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} n \varphi \right)^{-1/6} \operatorname{Ai}' \left(\left(\frac{3}{2} n \varphi \right)^{2/3} \right) (-N_{00}(z) + iN_{01}(z)z^{-\alpha}) \right) \\ \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.30)$$

где $\varphi = \ln(\Phi_1/\Phi_0)$, $I_\alpha(\zeta)$ – функция Бесселя, $\text{Ai}(\zeta)$ – функция Эйри,

$$N_{00}(z) = \frac{2^\alpha(\psi_0 - \beta_1)(\psi_0 - \beta_2)\psi_0^{-\alpha}z^{-\alpha}}{\sqrt{D(\psi_0)}}, \quad (1.31)$$

$$N_{01}(z) = \frac{2^\alpha(\psi_1 - \beta_1)(\psi_1 - \beta_2)\psi_1^{-\alpha}}{\sqrt{D(\psi_1)}}. \quad (1.32)$$

Теорема будет доказана методом, основанным на рассмотрении некоторой матричной краевой задачи Римана–Гильберта. Этот метод изучения асимптотики ортогональных многочленов был предложен П. Дейфтом и Х. Чжу в работе [6]. Для многочленов совместной ортогональности соответствующая задача Римана–Гильберта была сформулирована в работе [7]. В этой работе мы используем задачу Римана–Гильберта, естественную для полиномов совместной ортогональности для системы Никишина.

§ 2. Критические траектории и равновесные меры

В этом параграфе мы докажем необходимые свойства кривых, принадлежащих множеству M , и рассмотрим равновесные меры на них.

2.1. Критические траектории. Из определения ψ легко видеть, что множество M есть объединение критических траекторий квадратичных дифференциалов $(\psi_j - \psi_k)^2 dz^2$, т.е. траекторий, выходящих из нулей или полюсов $(\psi_j - \psi_k)^2$ (точек ветвления ψ), таких, что $(\psi_j - \psi_k)^2 dz^2 < 0$. Трехзначная алгебраическая функция $\psi(z)$ имеет четыре простые точки ветвления: две вещественные 0 и d ($d > 0$) и две комплексно сопряженные s и $\bar{s}$ ($\text{Im } s < 0$). Эти точки являются значениями рациональной функции $z(\psi)$ в критических точках ($z'(\psi) = 0$) ∞ , ψ_d , ψ_s , $\psi_{\bar{s}}$, или равносильно нулями дискриминанта

$$\begin{aligned} & \beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1 - \beta_2)^2 z^4 - 6\beta_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2)^2 (\beta_1 + \beta_2) z^3 \\ & + (\beta_1^4 + 28\beta_1^3 \beta_2 - 54\beta_1^2 \beta_2^2 + 28\beta_1 \beta_2^3 + \beta_2^4) z^2 - 4(\beta_1 + \beta_2)^3 z. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Чтобы выделить голоморфные ветви функции $\psi(z)$, в плоскости $\mathbb{C}$ сделаем два разреза Δ и Γ , где Δ есть отрезок $[0, d]$, а Γ – жорданова кривая, соединяющая точки s и $\bar{s}$ и пересекающая вещественную ось один раз (в отрицательной точке). Ниже мы однозначно определим эту кривую, а пока считаем ее произвольной. Пронумеруем три ветви функции $\psi(z)$ согласно их поведению в окрестности точки $z = \infty$:

$$\psi_0(z) = \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.2)$$

$$\psi_1(z) = \beta_1 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.3)$$

$$\psi_2(z) = \beta_2 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (2.4)$$

Тогда соответствующие ветви функции $\Phi(z)$ будут иметь следующую асимптотику в окрестности бесконечности:

$$\Phi_0(z) = z^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (2.5)$$

$$\Phi_1(z) = c_1 e^{\beta_1 z} \frac{1}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (2.6)$$

$$\Phi_2(z) = c_2 e^{\beta_2 z} \frac{1}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad (2.7)$$

где

$$c_1 = \left(\frac{\beta_1^3 \beta_2 e^3}{4(\beta_2 - \beta_1)} \right)^{-1}, \quad c_2 = \left(\frac{\beta_2^3 \beta_1 e^3}{4(\beta_1 - \beta_2)} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Как легко видеть из графика рациональной функции $z(\psi)$ при вещественных ψ (см. рис. 6), эти ветви допускают голоморфные продолжения в следующие области:

$$\psi_0, \Phi_0 \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad (2.9)$$

$$\psi_1, \Phi_1 \in H(\mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma)), \quad (2.10)$$

$$\psi_2, \Phi_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma). \quad (2.11)$$

Рис. 6. График ветвей функции $\psi(z)$, $z \in \mathbb{R}$

В точке ветвления $z = 0$ функция $\psi(z)$ имеет полюс и разложение ветвей имеет следующий вид:

$$\psi_0(z) = -\frac{i\sqrt{\beta_1 + \beta_2}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\beta_1 + \beta_2} + O(\sqrt{z}), \quad (2.12)$$

$$\psi_1(z) = \frac{i\sqrt{\beta_1 + \beta_2}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\beta_1 + \beta_2} + O(\sqrt{z}), \quad (2.13)$$

$$\psi_2(z) = \frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} + O(z). \quad (2.14)$$

Нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 2.1. Множество $\{x \in \mathbb{R} : |\Phi_1(x)| = |\Phi_2(x)|\}$ состоит из двух точек b_- и b_+ . При этом $b_- < 0$, а $b_+ > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\varphi_{21}(x) := \ln |\Phi_2/\Phi_1|(x)$. Из асимптотики Φ_1, Φ_2 в окрестности бесконечности (2.6), (2.7) следует, что

$$\varphi_{21}(+\infty) = +\infty, \quad \varphi_{21}(-\infty) = -\infty.$$

Можно выбрать разрез Γ так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $b < 0$ такой, что

$$\varphi_{21}(x) < 0, \quad x \in (-\infty, b). \quad (2.15)$$

На $(b, +\infty)$ функция φ_{21} непрерывна. На интервале $(b, 0)$ функция $\varphi_{21}(x)$ монотонно убывает: $\varphi'_{21} = \psi_2 - \psi_1 < 0$, а в концах этого интервала принимает значения разных знаков:

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(b+) &= -\varphi_{21}(b-) > 0, \\ \varphi_{21}(0) &= \ln \frac{(\beta-1)^2(\beta+1)^2}{4\beta} < 0, \quad \beta < 3 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Поэтому существует единственная точка $b_- < 0$ такая, что $\varphi_{21}(b_-) = 0$. Далее, так как $\varphi_{21}(+\infty) = +\infty$, то существует точка $b_+ > 0$: $\varphi_{21}(b_+) = 0$. Так как на отрезке $(0, d)$ φ_{21} выпукла: $\varphi''_{21} = (\psi_2 - \operatorname{Re} \psi_1)' = 3\psi'_2/2 > 0$, а на (d, ∞) возрастает, то точка b_+ единственна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Нетрудно показать, что существует единственная постоянная $\varkappa_{NN} = 1.26\dots$ такая, что если $\beta_2/\beta_1 > \varkappa_{NN}$, то $b_+ < d$, а если $\beta_2/\beta_1 < \varkappa_{NN}$, то $b_+ > d$. Критическое значение $\varkappa_{NN}$ определяется из условия $\varphi_{21}(d) = 0$ однозначно, поскольку производная $\varphi_{21}(d)$ по отношению β_2/β_1 положительна.

Аналогично доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. Множество $\{x \in \mathbb{R} : |\Phi_0(x)| = |\Phi_1(x)|\}$ совпадает с отрезком Δ . При $x > d$ $|\Phi_1(x)| > |\Phi_0(x)|$.

Изучим критические траектории квадратичного дифференциала $(\psi_2 - \psi_1)^2 dz^2$ в верхней полуплоскости. Этот дифференциал имеет ровно одну особую точку c , которая является простым нулем. Поэтому из нее выходят три траектории. Эти траектории не имеют других точек пересечения в замыкании верхней полуплоскости (иначе противоречие с принципом максимума) и могут заканчиваться либо в бесконечности, либо на вещественной прямой. Согласно лемме 2.3 на вещественной оси есть только две точки b_- и b_+ , в которых могут заканчиваться траектории. Значит, из трех траекторий, выходящих из c , по одной идет в каждую из точек ∞, b_-, b_+ . В силу комплексной сопряженности ветвей ψ поведение траекторий в нижней полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. Таким образом, множество $\{z \in \mathbb{C} : |\Phi_1(z)| = |\Phi_2(z)|\}$ описано. Пользуясь разложением Φ в окрестности бесконечности, нетрудно восстановить знак выражения $|\Phi_1(z)| - |\Phi_2(z)|$ в каждой из трех областей, на которые критические траектории разбивают комплексную плоскость: $|\Phi_1(z)| < |\Phi_2(z)|$ в области, расположенной справа.

2.2. Равновесные меры. Определим две меры на отрезке Δ и кривой Γ соответственно:

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg}(\Phi_1 - \Phi_0)_+(\zeta), \quad \zeta \in \Delta, \quad (2.16)$$

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg}(\Phi_2 - \Phi_1)_+(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Функции λ и μ являются функциями распределения положительных мер на Δ и Γ . Масса меры λ равна 2, масса меры μ равна 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для меры μ . Вначале покажем, что функция μ монотонна вдоль ориентированной кривой Γ . Действительно, производная μ вдоль кривой Γ отлична от нуля:

$$\frac{d\mu(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\zeta} (\ln \Phi_2 - \ln \Phi_1)_+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} (\psi_2 - \psi_1)_+(\zeta) \neq 0. \quad (2.18)$$

Для нахождения полной вариации меры μ воспользуемся последней формулой:

$$\int_{\Gamma} d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\psi_2 - \psi_1)_+(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\psi_2^+ - \psi_2^-)(\zeta) d\zeta, \quad (2.19)$$

так как в силу условий склейки $\psi_1^+ = \psi_2^-$ на кривой Γ . Далее, рассмотрим контур δ , обходящий кривую Γ по часовой стрелке. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\psi_2^+ - \psi_2^-)(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \psi_2(z) dz = \operatorname{Res}_{\infty} \psi_2(z) = 1 \quad (2.20)$$

по теореме Коши о вычетах.

Аналогично доказывается утверждение для λ .

Рассмотрим теперь комплексные логарифмические потенциалы мер λ и μ :

$$\mathcal{V}_{\lambda}(z) = \int_{\Delta} \ln \frac{1}{\zeta - z} d\lambda(\zeta), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{V}_{\mu}(z) = \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta), \quad (2.22)$$

определенные в $\mathbb{C} \setminus \Delta$ и $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ по модулю $4\pi i$ и $2\pi i$ соответственно. Данные потенциалы выражаются через ветви функции Φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Комплексные потенциалы $\mathcal{V}_{\lambda}$ и $\mathcal{V}_{\mu}$ имеют явные представления в терминах Φ :*

$$\mathcal{V}_{\lambda}(z) = -\ln \Phi_0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad (2.23)$$

и

$$\mathcal{V}_{\mu}'(z) = \ln \Phi_2(z) - \beta_2 z - \ln c_2, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова проведем доказательство только для потенциала меры μ . Производная $\mathcal{V}_\mu$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ равна

$$\mathcal{V}'_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\psi_2 - \psi_1)_+(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{\psi_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2.25)$$

где δ – контур, обходящий Γ по часовой стрелке и такой, что точка z находится слева от δ . Далее,

$$\mathcal{V}'_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{\psi_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \operatorname{Res}_z \frac{\psi_2(\zeta)}{\zeta - z} + \operatorname{Res}_\infty \frac{\psi_2(\zeta)}{\zeta - z} = \psi_2(z) - \beta_2. \quad (2.26)$$

Интегрируя последнее выражение и учитывая поведение Φ в бесконечности, получаем требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. При $z \in \mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma)$ имеем

$$2\mathcal{V}_\lambda(z) - \mathcal{V}_\mu(z) = \ln \frac{\Phi_1}{\Phi_0}(z) - \beta_1 z - \ln c_1, \quad (2.27)$$

$$2\mathcal{V}_\mu(z) - \mathcal{V}_\lambda(z) = \ln \frac{\Phi_2}{\Phi_1}(z) - (\beta_2 - \beta_1)z - \ln \frac{c_2}{c_1}. \quad (2.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Из соотношений (2.27), (2.28) следует, что (λ, μ) – векторная равновесная мера для системы Никишина с внешним полем $(\beta_1 \operatorname{Re} z, (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{Re} z)$, т.е. их логарифмические потенциалы $(V := \operatorname{Re} \mathcal{V})$ удовлетворяют следующим условиям равновесия:

$$2V^\lambda(z) - V^\mu(z) + \beta_1 z = -\ln |c_1|, \quad z \in \Delta, \quad (2.29)$$

$$2V^\mu(z) - V^\lambda(z) + (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{Re} z = \ln |c_1| - \ln |c_2|, \quad z \in \Gamma. \quad (2.30)$$

Подробнее о векторных задачах равновесия см. [2] и [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Легко видеть, что условия, наложенные нами на кривые Δ и Γ :

$$|\Phi_0(z)| = |\Phi_1(z)|, \quad z \in \Delta, \quad (2.31)$$

$$|\Phi_1(z)| = |\Phi_2(z)|, \quad z \in \Gamma, \quad (2.32)$$

эквивалентны свойству симметрии (S -свойству):

$$\frac{\partial}{\partial n_+} W^\lambda(z) = \frac{\partial}{\partial n_-} W^\lambda(z), \quad z \in \Delta, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_+} W^\mu(z) = \frac{\partial}{\partial n_-} W^\mu(z), \quad z \in \Gamma, \quad (2.34)$$

где $\partial/\partial n_+$ и $\partial/\partial n_-$ – производные вдоль нормали справа и слева от кривых, а

$$W^\lambda(z) = 2V^\lambda(z) - V^\mu(z) + \beta_1 \operatorname{Re} z, \quad (2.35)$$

$$W^\mu(z) = 2V^\mu(z) - V^\lambda(z) + (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{Re} z. \quad (2.36)$$

§ 3. Доказательство теоремы. Метод матричной задачи Римана–Гильберта

3.1. Функции второго рода и соотношения ортогональности. Введем функции второго рода

$$r_{\vec{n},j}(z) = \frac{n^{-\alpha}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{l_{\vec{n}}(x) x^\alpha e^{-\beta_j x} dx}{x-z}, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

которые определены с точностью до нормировки $l_{\vec{n}}(x)$. Пусть γ – произвольная кривая вокруг положительной полупрямой с горизонтальными асимптотами в бесконечности (см. рис. 7). В следующем предложении показано, что функция $r_{\vec{n},1}$ удовлетворяет соотношениям ортогональности на γ .

Рис. 7. Контур $\mathbb{R}_+ \cup \gamma$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеем*

$$\int_\gamma r_{\vec{n},1}(z) z^k e^{-(\beta_2 - \beta_1)z} dz = n^{-\alpha} \int_0^\infty l_{\vec{n}}(x) x^{k+\alpha} e^{-\beta_2 x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.2)$$

В частности,

$$\int_\gamma r_{\vec{n},1}(z) z^k e^{-(\beta_2 - \beta_1)z} dz = 0, \quad k = 0, \dots, n_2 - 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражение (3.1) для $r_{\vec{n},1}$ в интеграл в левой части (3.2) и используя теорему Фубини, получаем

$$n^{-\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z^k e^{-(\beta_2 - \beta_1)z}}{x-z} dz \right) l_{\vec{n}}(x) x^\alpha e^{-\beta_1 x} dx.$$

По формуле Коши, примененной к функции $z^k e^{-(\beta_2 - \beta_1)z}$ при $k \geq 0$, последнее выражение равно

$$n^{-\alpha} \int_0^\infty l_{\vec{n}}(x) x^{k+\alpha} e^{-\beta_2 x} dx.$$

Это дает (3.2). Далее, (3.3) получаем из соотношений ортогональности (1.8) для полиномов Лагерра (при $r = 2$ и $j = 2$).

Рассмотрим также функцию, естественным образом связанную с системой Никишина (см. [8]):

$$\tilde{r}_{\vec{n},2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{r_{\vec{n},1}(x) e^{-(\beta_2 - \beta_1)x} dx}{x - z}. \quad (3.4)$$

Указанные функции второго рода удовлетворяют следующим интерполяционным условиям в бесконечности, эквивалентным соотношениям ортогональности (1.8):

$$r_{\vec{n},j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad j = 1, 2, \quad \tilde{r}_{\vec{n},2}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_2+1}}\right) \quad (3.5)$$

при $z \rightarrow \infty$.

3.2. Постановка задачи Римана–Гильберта. Рассмотрим следующую матричную задачу Римана–Гильберта:

- 1) $Y(z) - (3 \times 3)$ матричнозначная функция, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \gamma)$, имеющая непрерывные граничные значения слева и справа на ориентированных кривых $\mathbb{R}_+$ и γ , связанные матрицей скачка (см. п. 2)); поведение $Y(z)$ в окрестности бесконечности и концевой точки контура (точки 0) задается в пп. 3) и 4);
- 2) $Y(z)$ имеет скачок на $\mathbb{R}_+ \cup \gamma$ в виде $Y_+ = Y_- J_Y$, где

$$\begin{aligned} J_Y(z) &= \begin{pmatrix} 1 & z^\alpha e^{-\beta_1 n z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \in \mathbb{R}_+, \\ J_Y(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-(\beta_2 - \beta_1) n z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \in \gamma; \end{aligned} \quad (3.6)$$

- 3) $Y(z)$ имеет следующее поведение в окрестности бесконечности:

$$Y(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (3.7)$$

- 4) $Y(z)$ имеет следующее поведение в окрестности начала координат:

$$Y(z) = O \begin{pmatrix} 1 & h(z) & 1 \\ 1 & h(z) & 1 \\ 1 & h(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \quad h(z) = \begin{cases} |z|^\alpha, & \text{если } -1 < \alpha < 0; \\ \log |z|, & \text{если } \alpha = 0; \\ 1, & \text{если } 0 < \alpha, \end{cases} \quad (3.8)$$

где условие O понимается поэлементно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Решение этой задачи единственно и равно*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} L_n(z) & R_{n,1}(z) & \tilde{R}_{n,2}(z) \\ l_{(n-1,n)}(nz) & r_{(n-1,n),1}(nz) & \tilde{r}_{(n-1,n),2}(nz) \\ l_{(n,n-1)}(nz) & r_{(n,n-1),1}(nz) & \tilde{r}_{(n,n-1),2}(nz) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где $L_n(z)$ есть полиортогональный полином Лагерра со старшим коэффициентом единица (1.10),

$$R_{n,1}(z) = r_{(n,n),1}(nz), \quad \tilde{R}_{n,2}(z) = \tilde{r}_{(n,n),2}(nz),$$

$r_{(n,n),1}$ и $\tilde{r}_{(n,n),2}$ заданы интегралами (3.1) и (3.4), соответствующими полиномам Лагерра $l_{(n,n)}$ со старшим коэффициентом n^{-2n} , а нормировка полиномов $l_{(n-1,n)}$ и $l_{(n,n-1)}$ выбрана таким образом, чтобы

$$z^n r_{(n-1,n),1}(nz) \rightarrow 1, \quad z^n \tilde{r}_{(n,n-1),2}(nz) \rightarrow 1$$

при $z \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $Y(z)$, заданная (3.9), решает задачу Римана–Гильберта. Очевидно, $Y(z)$ аналитична вне $\mathbb{R}_+ \cup \gamma$. Условия скачка на $\mathbb{R}_+$ для первой и третьей строк Y тривиальны, т.е. эти строки аналитичны на $\mathbb{R}_+$. Для элементов второй строки условия скачка записываются в виде

$$(Y_{k,2})_+(z) = z^\alpha e^{-n\beta_1 z} (Y_{k,1})_-(z) + (Y_{k,2})_-(z),$$

которые вытекают из формулы Сохоцкого–Племеля. Аналогично проверяются условия скачка $Y(z)$ на γ . Поведение $Y(z)$ в бесконечности следует из условий нормальности индексов и условий интерполяции (3.5). Поведение $Y(z)$ в окрестности 0 легко проверяется (см. [9]).

Докажем теперь единственность решения задачи Римана–Гильберта. Пусть $Y(z)$ – какое-нибудь решение. Покажем, что оно равно (3.9). Первая строка $Y(z)$ не имеет скачка на $\mathbb{R}_+ \cup \gamma$. Из поведения матрицы $Y(z)$ в 0 следует, что первая строка состоит из целых функций, а из поведения $Y(z)$ в бесконечности следует, что это полиномы степеней не больше $(2n, 2n-1, 2n-1)$. Далее, из формулы Сохоцкого–Племеля, условия скачка на контуре $\mathbb{R}_+$ и поведения $Y(z)$ в нуле вытекает, что вторая строка есть преобразование Коши первой. Из тех же соображений, примененных к контуру γ , следует, что третья строка – преобразование Коши второй. Поведение второй и третьей строк в бесконечности дают интерполяционные условия (3.5), которые, как уже отмечалось, равносильны определению полиномов Лагерра (1.8). Таким образом, (3.9) – единственное решение задачи Римана–Гильберта.

Метод доказательства формул сильной асимптотики ортогональных полиномов, основанный на рассмотрении матричной краевой задачи, был предложен П. Дейфтом и Х. Чжу в работе [6]. Следуя этому подходу, мы посредством цепочки обратимых преобразований $Y \rightarrow U \rightarrow T \rightarrow S$ придем к некоторой задаче Римана–Гильберта для матричной функции S . Матрица скачка этой функции J_S будет иметь равномерную асимптотику на соответствующей системе контуров Σ_S вида $J_S(z) = I + O(1/n)$, $z \in \Sigma_S$. Отсюда следует, что и сама матрица S асимптотически равна $S(z) = I + O(1/n)$ равномерно на компактах из $\overline{\mathbb{C}}$. Обращая цепочку преобразований, получаем асимптотику Y и, в частности, асимптотику ортогональных полиномов Лагерра.

3.3. Нормировка задачи Римана–Гильберта. Целью первого преобразования является нормировка матричной задачи Римана–Гильберта в бесконечности. Для этого от краевой задачи на Y мы перейдем к задаче на U , решение которой будет вести себя как единичная матрица в окрестности $z = \infty$. Рассмотрим матричную функцию

$$U(z) = C^n Y(z) \tilde{\Phi}^{-n}(z), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{\Phi}(z) = \text{diag}(\Phi_0(z), \Phi_1(z)e^{-\beta_1 z}, \Phi_2(z)e^{-\beta_2 z}), \quad C = \text{diag}(1, c_1, c_2). \quad (3.11)$$

Матричная функция $U(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \gamma)$, так как ветви $\Phi_j(z)$ голоморфны в $\Delta \cup \Gamma$ и не имеют нулей. Учитывая поведение $\Phi_j(z)$ в окрестности бесконечности, заключаем, что

$$U(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

т.е. $U(z)$ нормирована в бесконечности. Так как $\Phi_j(z)$ ограничены сверху и снизу в окрестности нуля, то $U(z)$ имеет то же поведение в нуле, что и $Y(z)$. Функции скачка имеют вид:

$$\begin{aligned} J_U &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\Phi_{0-}}{\Phi_{0+}}\right)^n & z^\alpha & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_{1-}}{\Phi_{1+}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta, \\ J_U &= \begin{pmatrix} 1 & z^\alpha \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}_+ \setminus \Delta, \\ J_U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_{1-}}{\Phi_{1+}}\right)^n & 1 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\Phi_{2-}}{\Phi_{2+}}\right)^n \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma, \\ J_U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \gamma \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Итак, функция U является единственным решением следующей задачи Римана–Гильберта:

- 1) $U(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \gamma)$;
- 2) $U(z)$ имеет непрерывные граничные значения на $\mathbb{R}_+ \cup \gamma$ такие, что $U_+ = U_- J_U$;

3) $U(z)$ имеет следующее поведение в окрестности бесконечности:

$$U(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (3.12)$$

4) $U(z)$ имеет то же поведение в нуле, что и $Y(z)$, см. (3.8).

Матрица скачка $J_U(z)$ с геометрической скоростью стремится к единичной при $n \rightarrow \infty$ для $z \in \mathbb{R}_+ \setminus \Delta$ и $z \in \gamma \setminus \Gamma$. При $z \in \Delta$ и $z \in \Gamma$ матрица $J_U(z)$ имеет осциллирующие диагональные элементы, но допускает удачную факторизацию, которая лежит в основе следующего преобразования.

3.4. Факторизация матрицы скачка. Раскрытие линзы. Второе преобразование основано на следующей факторизации матрицы скачка $J_U(z)$ на отрезке Δ и аналогичной на кривой Γ :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\Phi_{0-}}{\Phi_{0+}}\right)^n & z^\alpha & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_{1-}}{\Phi_{1+}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_{1-}}{\Phi_{0-}}\right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z^\alpha & 0 \\ -z^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_{1+}}{\Phi_{0+}}\right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Как видим, центральная матрица не зависит от n , а первая и последняя матрицы допускают аналитическое продолжение в области, расположенные соответственно справа и слева от отрезка Δ . Введем дополнительные контуры. Пусть Δ_+ и Δ_- — дуги, соединяющие концы отрезка Δ и лежащие соответственно слева и справа от Δ в области, где $|\Phi_0| < |\Phi_1|$. Аналогично, Γ_+ и Γ_- — дуги, соединяющие концы Γ и лежащие соответственно слева и справа от Γ в области, где $|\Phi_1| < |\Phi_2|$ (см. рис. 8).

Рис. 8. Контур для T

Определим матрицу $T(z)$ следующим образом:

$$T(z) = U(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^n (z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в области между } \Delta_+ \text{ и } \Delta, \quad (3.14)$$

$$T(z) = U(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в области между } \Delta_- \text{ и } \Delta, \quad (3.15)$$

$$T(z) = U(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^n (z) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в области между } \Gamma_+ \text{ и } \Gamma, \quad (3.16)$$

$$T(z) = U(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^n (z) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в области между } \Gamma_- \text{ и } \Gamma \quad (3.17)$$

и $T(z) = U(z)$ в двух оставшихся областях.

Тогда легко проверить, что $T(z)$ является решением следующей задачи Римана–Гильберта:

- 1) T аналитична в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \gamma \cup \Delta_{\pm} \cup \Gamma_{\pm})$;
- 2) T имеет следующие скачки на контурах:

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 0 & z^{\alpha} & 0 \\ -z^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta, \quad (3.18)$$

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & z^{\alpha} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{-n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}_+ \setminus \Delta, \quad (3.19)$$

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta_{\pm}, \quad (3.20)$$

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma, \quad (3.21)$$

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right)^{-n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \gamma \setminus \Gamma, \quad (3.22)$$

$$T_+(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^n & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma_{\pm}; \quad (3.23)$$

3) $T(z)$ имеет следующее поведение в бесконечности:

$$T(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right); \quad z \rightarrow \infty; \quad (3.24)$$

4) поведение $T(z)$ в окрестности начала координат зависит от α следующим образом:

при $-1 < \alpha < 0$

$$T(z) = O \begin{pmatrix} 1 & |z|^\alpha & 1 \\ 1 & |z|^\alpha & 1 \\ 1 & |z|^\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \quad (3.25)$$

при $\alpha = 0$

$$T(z) = O \begin{pmatrix} \log |z| & \log |z| & 1 \\ \log |z| & \log |z| & 1 \\ \log |z| & \log |z| & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

при $0 < \alpha$

$$T(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow 0 \text{ вне линзы;} \\ O \begin{pmatrix} |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \\ |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \\ |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow 0 \text{ внутри линзы.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Матрицы скачка $T(z)$ не зависят от n на контурах Δ и Γ и стремятся к единичным с геометрической скоростью при $n \rightarrow \infty$ во внутренних точках остальных контуров. Чтобы осуществить переход к краевой задаче относительно S со скачками, равномерно стремящимися к единичным, нам понадобится решить ряд вспомогательных задач.

3.5. Проблема Римана–Гильберта с не зависящими от n скачками. Рассмотрим краевую задачу, имеющую те же матрицы скачков, что и T на контурах Δ и Γ , и не имеющую других скачков (можно ожидать, что решение этой задачи дает основной вклад в асимптотику T вне точек $0, d, c, \bar{c}$):

1) $N(z)$ аналитична $\mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma)$;

2) $N(z)$ имеет такие же скачки, как и $T(z)$, на Δ и Γ :

$$N_+(z) = N_-(z) \begin{pmatrix} 0 & z^\alpha & 0 \\ -z^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta, \quad (3.28)$$

$$N_+(z) = N_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma; \quad (3.29)$$

3) $N(z)$ ведет себя в бесконечности как единичная матрица

$$N(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Мы решаем эту проблему аналогично [10] (см. также [11]). Идея состоит в том, чтобы свести матричную краевую задачу к трем скалярным, используя биективное отображение римановой поверхности на сферу ψ . Будем искать решение в виде

$$N(z) = \begin{pmatrix} N_0(\psi_0(z)) & N_0(\psi_1(z)) & N_0(\psi_2(z)) \\ N_1(\psi_0(z)) & N_1(\psi_1(z)) & N_1(\psi_2(z)) \\ N_2(\psi_0(z)) & N_2(\psi_1(z)) & N_2(\psi_2(z)) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Введем ориентированные кривые на сфере (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} \Sigma_1^- &= \psi_1^-(\Delta), & \Sigma_1^+ &= \psi_1^+(\overleftarrow{\Delta}), & \Sigma_1 &= \Sigma_1^- \cup \Sigma_1^+, \\ \Sigma_2^- &= \psi_2^-(\Gamma), & \Sigma_2^+ &= \psi_2^+(\overleftarrow{\Gamma}), & \Sigma_2 &= \Sigma_2^- \cup \Sigma_2^+. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Рис. 9. Образ разрезов римановой поверхности при отображении ψ

Тогда матричная задача относительно N перейдет в скалярные задачи для функций $N_0(\psi)$, $N_1(\psi)$ и $N_2(\psi)$:

- 1) N_j аналитичны в $\mathbb{C} \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$;
- 2) N_j имеют скачки

$$N_j^+(\psi) = N_j^-(\psi) \begin{cases} -z^{-\alpha}(\psi), & \psi \in \Sigma_1^-; \\ z^{-\alpha}(\psi), & \psi \in \Sigma_1^+; \\ -1, & \psi \in \Sigma_2^-; \\ 1, & \psi \in \Sigma_2^+, \end{cases} \quad (3.33)$$

где $z(\psi) = 2/\psi - 1/(\psi - \beta_1) - 1/(\psi - \beta_2)$;

- 3) N_j имеют следующие нули и нормировку:

$$\begin{aligned} N_0(0) &= 1, & N_0(\beta_1) &= 0, & N_0(\beta_2) &= 0, \\ N_1(0) &= 0, & N_1(\beta_1) &= 1, & N_1(\beta_2) &= 0, \\ N_2(0) &= 0, & N_2(\beta_1) &= 0, & N_2(\beta_2) &= 1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Решение этих задач легко находятся:

$$N_0(\psi) = \frac{2^{\alpha-1/2} i (\psi - \beta_1)(\psi - \beta_2) g(\psi)}{\sqrt{D(\psi)}}, \quad (3.35)$$

$$N_1(\psi) = \frac{\beta_1^\alpha \psi (\psi - \beta_2) g(\psi)}{\sqrt{D(\psi)}}, \quad (3.36)$$

$$N_2(\psi) = \frac{\beta_2^\alpha \psi (\psi - \beta_1) g(\psi)}{\sqrt{D(\psi)}}, \quad (3.37)$$

где $D(\psi) = 2(\beta_1 + \beta_2)\psi^3 - (\beta_1^2 + 8\beta_1\beta_2 + \beta_2^2)\psi^2 + 4(\beta_1 + \beta_2)\beta_1\beta_2\psi - 2\beta_1^2\beta_2^2$ и

$$g(\psi) = \begin{cases} \psi^{-\alpha} z^{-\alpha}, & z \text{ слева от } \Sigma_1; \\ \psi^{-\alpha}, & z \text{ справа от } \Sigma_1. \end{cases} \quad (3.38)$$

3.6. Параметризация в окрестности концевых точек. Теперь матрицы скачков функции TN^{-1} стремятся к единичным всюду кроме концевых точек 0 , d , s , $\bar{c}$. В этом пункте будут рассмотрены локальные краевые задачи в окрестностях этих точек. В окрестности точки 0 равновесная мера ведет себя как $1/\sqrt{z}$. Параметризация в окрестности таких точек была построена в работе [9] с помощью функций Бесселя. В точке d , где равновесная мера ведет себя как $\sqrt{z-d}$, параметризация может быть построена аналогично работе [6] с помощью функций Эйри. Параметризация в окрестности точек s и $\bar{c}$ проводится так же.

Пусть U_0 — достаточно маленькая окрестность нуля. Обозначим $\Delta_0 = \Delta \cap U_0$, $\Delta_{0\pm} = \Delta_{\pm} \cap U_0$. Рассмотрим следующую краевую задачу в U_0 :

- 1) P_0 аналитична в $U_0 \setminus \Delta_0 \cup \Delta_{0\pm}$;
 2) P_0 имеет такие же скачки на Δ_0 и $\Delta_{0\pm}$, как и T :

$$P_{0+}(z) = P_{0-}(z) \begin{pmatrix} 0 & z^\alpha & 0 \\ -z^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta_0, \quad (3.39)$$

$$P_{0+}(z) = P_{0-}(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha} \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta_{0+} \cup \Delta_{0-}; \quad (3.40)$$

- 3) P_0 имеет следующее поведение на границе U_0 :

$$P_0(z) = N \left(I + O \left(\frac{1}{n} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty \text{ на } \partial U_0; \quad (3.41)$$

- 4) P_0 ведет себя в окрестности начала координат так же, как T :
 при $\alpha < 0$

$$P_0 = O \begin{pmatrix} 1 & |z|^\alpha & 1 \\ 1 & |z|^\alpha & 1 \\ 1 & |z|^\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \quad (3.42)$$

при $\alpha = 0$

$$P_0(z) = O \begin{pmatrix} \log |z| & \log |z| & 1 \\ \log |z| & \log |z| & 1 \\ \log |z| & \log |z| & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \quad (3.43)$$

при $0 < \alpha$

$$P_0(z) = \begin{cases} O \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow 0 \text{ вне линзы;} \\ O \begin{pmatrix} |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \\ |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \\ |z|^{-\alpha} & 1 & 1 \end{pmatrix}, & z \rightarrow 0 \text{ внутри линзы.} \end{cases} \quad (3.44)$$

Приведем решение этой задачи (доказательство аналогично [9]):

$$P_0 = E_0 \tilde{P}_0 D_0, \quad (3.45)$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2} N \operatorname{diag}((-z)^{\alpha/2}, (-z)^{-\alpha/2}, 1) \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \times \operatorname{diag} \left(\sqrt{-\pi n \varphi}, \frac{1}{\sqrt{-\pi n \varphi}}, 1 \right), \quad (3.46)$$

$$\tilde{P}_0 = \begin{cases} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e^{-\alpha\pi i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в области между } \Delta_0 \text{ и } \Delta_{0+}; \\ B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{\alpha\pi i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в области между } \Delta_0 \text{ и } \Delta_{0-}; \\ B & \text{в области между } \Delta_{0+} \text{ и } \Delta_{0-}, \end{cases} \quad (3.47)$$

$$B = \begin{pmatrix} I_\alpha\left(-\frac{n\varphi}{2}\right) & -\frac{i}{\pi}K_\alpha\left(-\frac{n\varphi}{2}\right) & 0 \\ -n\pi i\varphi I'_\alpha\left(-\frac{n\varphi}{2}\right) & -n\varphi K'_\alpha\left(-\frac{n\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$D_0 = \text{diag}\left((-z)^{-\alpha/2}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{n/2}, (-z)^{\alpha/2}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{-n/2}, 1\right), \quad (3.49)$$

$$\varphi = \ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right). \quad (3.50)$$

Пусть теперь U_d — достаточно малая окрестность точки d . Обозначим $\Delta_d = \Delta \cap U_d$, $\Delta_{d\pm} = \Delta_\pm \cap U_d$, $\tilde{\Delta}_d = [d, \infty] \cap U_d$. Рассмотрим следующую краевую задачу в U_d :

- 1) P_d аналитична в $U_d \setminus \Delta_d \cup \Delta_{d\pm} \cup \tilde{\Delta}_d$;
- 2) P_d имеет такие же скачки на Δ_d , $\Delta_{d\pm}$ и $\tilde{\Delta}_d$, как и T :

$$P_{d+}(z) = P_{d-}(z) \begin{pmatrix} 0 & z^\alpha & 0 \\ -z^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta_d, \quad (3.51)$$

$$P_{d+}(z) = P_{d-}(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z^{-\alpha}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta_{d\pm}, \quad (3.52)$$

$$P_{d+}(z) = P_{d-}(z) \begin{pmatrix} 1 & z^\alpha\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{-n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \tilde{\Delta}_d; \quad (3.53)$$

- 3) P_d имеет следующую асимптотику на границе U_d :

$$P_d(z) = N(z) \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty \text{ на } \partial U_d. \quad (3.54)$$

Решение этой задачи может быть найдено по формуле (см. [6])

$$P_d = E_d \tilde{P}_d D_d, \quad (3.55)$$

где

$$E_d = -\sqrt{\pi}e^{i\pi/6}N \operatorname{diag}(z^{\alpha/2}, z^{-\alpha/2}, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-i\pi/6} \end{pmatrix} \\ \times \operatorname{diag}\left(\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{1/6}, \left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{-1/6}, 1\right), \quad (3.56)$$

$$\tilde{P}_d = \begin{cases} A\tilde{\sigma} & \text{в области между } \tilde{\Delta}_d \text{ и } \Delta_{d+}; \\ A\tilde{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в области между } \Delta_d \text{ и } \Delta_{d+}; \\ A'\tilde{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{в области между } \Delta_d \text{ и } \Delta_{d-}; \\ A'\tilde{\sigma} & \text{в области между } \tilde{\Delta}_d \text{ и } \Delta_{d-}; \end{cases} \quad (3.57)$$

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Ai}\left(\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & \operatorname{Ai}\left(\varepsilon_3^2\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & 0 \\ \operatorname{Ai}'\left(\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & \varepsilon_3^2 \operatorname{Ai}'\left(\varepsilon_3^2\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

$$A' = \begin{pmatrix} \operatorname{Ai}\left(\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & -\varepsilon_3^2 \operatorname{Ai}\left(\varepsilon_3\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & 0 \\ \operatorname{Ai}'\left(\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & -\operatorname{Ai}'\left(\varepsilon_3\left(\frac{3}{2}n\varphi\right)^{2/3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\tilde{\sigma} = \operatorname{diag}(e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/6}, 1), \quad (3.60)$$

$$D_d = \operatorname{diag}\left(z^{-\alpha/2}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{n/2}, z^{\alpha/2}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{-n/2}, 1\right), \quad (3.61)$$

$$\varphi = \ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right), \quad (3.62)$$

$$\varepsilon_3 = e^{2\pi i/3}. \quad (3.63)$$

Краевые задачи для построения локальной параметризации в окрестностях точек s и $\bar{s}$ формулируются и решаются так же, как в окрестности точки d .

3.7. Последнее преобразование. Окончание доказательства.

Определим матричную функцию S (см. рис. 10):

$$S = \begin{cases} TN^{-1}, & z \notin \bigcup_{j \in \{0, d, c, \bar{c}\}} U_j; \\ TP_j^{-1}, & z \in U_j, j \in \{0, d, c, \bar{c}\}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Рис. 10. Контур для S

Настоящая матрица имеет скачки, асимптотически равные единичным. Обращая цепочку преобразований $Y \rightarrow U \rightarrow T \rightarrow S$, получаем утверждения основной теоремы.

Список литературы

1. Гончар А. А., Разманов Е. А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
2. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
3. Aptekarev A. I., Branquinho A., Van Assche W. Multiple orthogonal polynomials for classical weights // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355. P. 3887–3914.
4. Сорокин В. Н. Сходимость совместных аппроксимаций Паде к функциям стильесовского типа // Изв. вузов. Сер. матем. 1987. № 7. С. 48–56.
5. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. № 4. P. 299–386.
6. Deift P., Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for MKdV equation // Ann. of Math. (2). 1993. V. 137. № 2. P. 295–368.
7. Van Assche W., Geronimo J. S., Kuijlaars A. B. J. Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials // Special functions 2000: Current perspective and future directions (Tempe, AZ) / ed. J. Bustoz et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 23–59.
8. Гончар А. А., Разманов Е. А., Сорокин В. Н. Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
9. Kuijlaars A. B. J., McLaughlin K. T.-R., Van Assche W., Vanlessen M. The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ // Adv. Math. 2004. V. 188. P. 337–398.
10. Aptekarev A. I., Van Assche W. Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight // J. Approx. Theory. 2004. V. 129. P. 129–166.
11. Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F. Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hilbert approach // Constr. Approx. 2005. V. 21. № 3. P. 351–412.