Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Х. Муртазин, Э. Ю. Фазуллин, Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 12, 123–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:43:30

УДК 517.94

Х. Х. Муртазин, З. Ю. Фазуллин

Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов

В работе получена формула следов для неограниченных дискретных операторов, возмущенных оператором Гильберта–Шмидта, которая может быть названа дискретным аналогом формулы М. Г. Крейна для ядерных возмущений. Также доказана формула регуляризованного следа типа М. Г. Крейна для возмущений из класса S^p , $2 < p \in \mathbb{N}$, для произвольных компактных и относительно компактных возмущений в зависимости от поведения функции распределения спектра возмущенного оператора на бесконечности.

Библиография: 25 названий.

Введение

В настоящей работе изучается вопрос о регуляризованных следах возмущений самосопряженного оператора T с дискретным спектром в сепарабельном гильбертовом пространстве H .

Пусть T – самосопряженный неограниченный дискретный оператор в H , $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – собственные числа оператора T , пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей, $\{f_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – ортонормированный базис из собственных функций оператора T . Пусть, далее, V – симметрический T -компактный оператор, $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – собственные числа оператора $L = T + V$, занумерованные в порядке роста с учетом кратностей. Каким условиям должна удовлетворять функция распределения спектра $N(\lambda)$ оператора T в зависимости от возмущения V , чтобы существовали подпоследовательности натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{l_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-l_m}^{n_m} (\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k) = 0? \quad (0.1)$$

Отметим, что в случае ядерности V М. Г. Крейном в работе [1] для достаточно широкого класса функций (см. [2]) была получена формула следа

$$\text{Sp}(\varphi(T + V) - \varphi(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(t) \xi(t) dt, \quad (0.2)$$

где Sp – след ядерного оператора, $\xi(t)$ – так называемая *функция спектрального сдвига*. Там же установлено равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) dt = \text{Sp } V,$$

которое означает справедливость формулы (0.2) для $\varphi(t) = t$ (см. [2; §3, п. 4]), откуда для дискретного оператора T из (0.2) вытекает, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mu_k - \lambda_k) = \operatorname{Sp} V. \quad (0.3)$$

Аналогичный результат для диссипативных ядерных операторов получен в [3], при этом никаких условий на функцию распределения спектра $N(\lambda)$ дискретного оператора T не налагается.

Регуляризованные следы неядерных возмущений дискретных операторов в абстрактной постановке изучались с конца 70-х годов; пионерской здесь была работа [4]. Наиболее сильный результат для конечномерных возмущений был получен в [5], где были охвачены некоторые специальные классы неограниченных возмущений при $N(\lambda) = C\lambda + O(\lambda^p)$, $0 < p < 1$, C – постоянная. Далее, доказательству формулы (0.1) (или более общей формулы, регуляризованной несколькими поправками теории возмущений) были посвящены работы многих математиков, среди которых особо следует отметить работы [6]–[8]. В работе [6] при $N(\lambda) = O(\lambda^p)$, $0 < p < 1$, и ограниченном V получены формулы следов для степени n собственных чисел, регуляризованные $l - 1$ поправкой теории возмущений, где $l \geq n/(1 - p)$. В частности, формула (0.1) для ограниченного возмущения была доказана при $0 < p \leq 1/2$, а для возмущения из класса Гильберта–Шмидта – при $0 < p \leq 1$. В работе [7] формула (0.1) доказана для ограниченных возмущений V при $0 < p < 2/3$ и

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_k} = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Наиболее сильный результат был получен в одной из центральных работ по этой тематике [8], где для доказательства формулы (0.1) для ограниченного, необязательно самосопряженного, возмущения требовалась лишь ядерность резольвенты оператора T . Пусть S^p , $p > 0$, – множество компактных операторов V таких, что $\|V\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^p < \infty$, где s_k – s -числа оператора V . В этой же работе [8] для возмущений из класса S^p , $2 \leq p \in \mathbb{N}$, была получена формула следов, регуляризованная с $p - 1$ поправкой теории возмущений, при условии, что оператор T имеет подпоследовательность собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. В частности, отсюда следовала справедливость формулы (0.1) для возмущений из класса Гильберта–Шмидта.

Далее, там же [8; теорема 4] последний результат был усилен, а именно, для компактных возмущений таких, что оператор VT^δ , $\delta \geq 0$, может быть продолжен до ограниченного, а оператор $T^{-(1+\delta)}$ ядерный, была установлена справедливость формулы (0.1).

Отметим также, что в работах [9], [10] изучались обобщения формулы (0.2) для возмущений из класса S^2 .

В [10] доказано, что для каждой функции $\varphi(t)$ из класса

$$M_2 = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t^\nu g(t)| dt < \infty, \quad \nu = 0, 1, 2 \right\}$$

существует функция ограниченной вариации $\eta(t)$:

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \eta \leq \frac{\|V\|_2^2}{2},$$

такая, что справедлива формула

$$\operatorname{Sp} \left(\varphi(T + V) - \varphi(T) - \frac{d\varphi(T + xV)}{dx} \Big|_{x=0} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(t) d\eta(t). \quad (0.4)$$

В настоящей работе развивается новая техника исследований дискретного спектра в случае самосопряженного возмущения, которая приводит к существенно более сильным результатам абстрактного характера, чем в указанных выше работах.

В первом параграфе рассматриваются возмущения полуограниченного снизу дискретного оператора T . Главным результатом п. 1.1 является основная теорема о возмущениях (теорема 1.3), где получено интегральное представление следа резольвентного уравнения возмущенного оператора L . Далее, на основе этой теоремы в п. 1.2 получена формула следов для возмущений Гильберта–Шмидта (теорема 1.4). При этом никаких условий на функцию $N(\lambda)$ не налагается, и из этой теоремы вытекают справедливость формулы (0.1), а также формула следов второго порядка для возмущений Гильберта–Шмидта (следствие 1.1). Утверждения следствия 1.1 сильнее соответствующих результатов [6] и теоремы 4 работы [8] для возмущений Гильберта–Шмидта (см. замечание 1.2). Отметим также, что $\varphi(t) = t^2 \notin M_2$, и поэтому следствие 1.1 (см. первую из формул (1.57)) расширяет класс функций $\varphi(t)$ и усиливает результаты вышеупомянутых работ [9], [10] для дискретных операторов в том смысле, что при $\varphi(t) = t^2$ с учетом условия на функцию $\eta(t)$ из (0.4) следует лишь неравенство. Это замечание позволяет заключить, что формула следов для возмущений Гильберта–Шмидта из теорем 1.4, 2.2 может быть названа аналогом формулы М. Г. Крейна (0.3) для ядерных возмущений.

Для компактных и произвольных ограниченных возмущений при доказательстве формулы (0.1) приходится налагать определенные условия на рост функции распределения спектра $N(\lambda)$ невозмущенного оператора T . Этому вопросу посвящен п. 1.3. Основным результатом этого пункта является теорема 1.5.

Условие 1) этой теоремы для справедливости формулы (0.1) является довольно универсальным в том смысле, что из него можно получить утверждения как для компактных (следствие 1.3), ограниченных (замечание 1.6) возмущений, так и для T -компактных возмущений (следствие 1.2). Следствие 1.3 сильнее теоремы 4 работы [8] в случае самосопряженных возмущений; утверждение следствия 1.2 сильнее теоремы 5 из [7] и совпадает с утверждением теоремы 1 работы [8] (относительно справедливости формулы (0.1)) для самосопряженных возмущений.

Условия 2)–4) теоремы 1.5 устанавливают порядок роста функции $N(t)$ невозмущенного оператора T в зависимости от конкретных классов возмущений, что является важным для приложений к дифференциальным операторам.

Особо отметим утверждение п. 3) теоремы 1.5 для ограниченных возмущений, которое перекрывает все ранее известные результаты, в том числе и результаты работы [8] (см. замечание 1.6). Примеры, рассмотренные в п. 3.3, позволяют заключить, что условие 3) теоремы 1.5 “ $N(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ ” нельзя ослабить.

Заметим, что следствие 1.3 (как и теорема 4 работы [8]) предполагает определенные ограничения на скорость стремления к нулю последовательности собственных чисел компактного возмущения V в зависимости от T ($V^2 T^\delta$ продолжается до ограниченного оператора, $T^{-(1+\delta)}$ ядерный, $\delta > 0$), следовательно, существует компактный оператор V , для которого следствие 1.3 неприменимо. Например,

$$Vf = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} (f, f_k) f_k,$$

где f_k – собственные функции оператора T , соответствующие собственным значениям $\lambda_k = k$.

В отличие от этого замечания в п. 2) теоремы 1.5 содержатся лишь ограничения на рост собственных чисел оператора T в виде оценок снизу, а V – *произвольное компактное возмущение*. Утверждения такого типа ранее нам не были известны.

Отметим, что результаты, относящиеся к возмущениям Гильберта–Шмидта и ограниченным возмущениям, были анонсированы в работе [11].

Во втором параграфе часть результатов, полученных в §1 для полуограниченных операторов, обобщается на случай неограниченных дискретных операторов.

В §3 рассматриваются приложения полученных результатов, а также обсуждаются вопросы дальнейшего развития формулы следов.

Авторы выражают благодарность В.Е. Подольскому за полезные обсуждения и замечания.

§1. Возмущения полуограниченных операторов

1.1. Основная теорема о возмущениях. Пусть $T = T^*$ – полуограниченный снизу дискретный оператор в гильбертовом пространстве H , V – симметрический T -ограниченный с нулевой T -гранью оператор в H . Тогда известно [12; гл. V, §4, п. 4], что $L = T + V$ – самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор в H . Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные числа операторов T и L соответственно, пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в H из ортонормированных собственных функций оператора T , соответствующих собственным числам λ_k , т.е.

$$Tf_k = \lambda_k f_k, \quad (f_k, f_m) = \delta_{km}.$$

Определим операторы проектирования Q_n , которые будут использоваться в дальнейшем:

$$Q_n h = \sum_{k=1}^n (h, f_k) f_k. \quad (1.1)$$

Пусть

$$G(-\lambda) = (T + \lambda I)^{-1}, \quad R(-\lambda) = (L + \lambda I)^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Так как операторы T и L полуограничены снизу, то без ограничения общности можем считать их положительными, поэтому $G(-\lambda) > 0$ и $R(-\lambda) > 0$. Справедлива

ЛЕММА 1.1. Пусть оператор V T -ограничен. Тогда для всех $\lambda > 0$ и $\beta \in [0, 1]$ оператор $G^\beta(-\lambda)VG^{1-\beta}(-\lambda)$ ограничен и

$$\|G^\beta(-\lambda)VG^{1-\beta}(-\lambda)\| \leq \|VG(-\lambda)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $n \in \mathbb{N}$ Q_nV – ограниченный оператор в пространстве $H_n = Q_nH$. Проектор Q_n определен в (1.1), причем

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} Q_n = I, \quad H_n^\perp = (I - Q_n)H. \quad (1.2)$$

Отметим, что для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ оператор Q_nVQ_n отличен от тождественного нуля (если $V \neq 0$). Действительно, допустим, что $Q_nVQ_nf = 0$ для всех $f \in H$ и всех $n \geq n_0$. Тогда $VQ_nf \in H_n^\perp$; так как $Q_nf = g \in H_n$, имеем

$$V(H_n) \subset H_n^\perp, \quad n \geq n_0.$$

Откуда в силу (1.2) следует, что $\ker V = H$, т.е. V – нулевой оператор.

Пусть $f, \varphi \in H$, $\|f\| = \|\varphi\| = 1$. Для достаточно больших n введем аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \|Q_nVQ_nG(-\lambda)\|^{-1}(G^z(-\lambda)Q_nVQ_nG^{1-z}(-\lambda)f, \varphi).$$

Так как

$$\|G(-\lambda)Q_nVQ_n\| = \|Q_nVQ_nG(-\lambda)\|,$$

то для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо $|\Phi(it)| \leq 1$, $|\Phi(1+it)| \leq 1$. Пользуясь хорошо известной теоремой о трех прямых из теории аналитических функций (см., например, [13; гл. III, § 13]), отсюда находим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и для всех z , $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$,

$$|\Phi(z)| \leq 1.$$

Полагая здесь $z = \beta$, получаем неравенство

$$\|G^\beta(-\lambda)Q_nVQ_nG^{1-\beta}(-\lambda)\| \leq \|Q_nVQ_nG(-\lambda)\|. \quad (1.3)$$

В силу T -ограниченности оператора V имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_nVQ_nG(-\lambda)\| = \|VG(-\lambda)\|,$$

следовательно, элементарный предельный переход по n в неравенстве (1.3) доказывает лемму.

Покажем, что имеет место следующая

ЛЕММА 1.2. Пусть V – симметрический T -ограниченный оператор с нулевой относительной гранью. Тогда существуют числа a_1 и a_2 , $0 < a_1 \leq a_2$, такие, что при $\lambda \gg 1$ выполняется двойное неравенство

$$a_1G(-\lambda) \leq R(-\lambda) \leq a_2G(-\lambda), \quad (1.4)$$

справедливое в смысле квадратичных форм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предыдущая лемма позволяет при $\lambda > 0$ записать

$$T + V + \lambda I = (T + \lambda I)^{1/2} [I + G^{1/2}(-\lambda) V G^{1/2}(-\lambda)] (T + \lambda I)^{1/2}, \quad (1.5)$$

откуда

$$R(-\lambda) = G^{1/2}(-\lambda) [I + G^{1/2}(-\lambda) V G^{1/2}(-\lambda)]^{-1} G^{1/2}(-\lambda). \quad (1.6)$$

Поскольку оператор V T -ограничен и имеет относительную грань, равную нулю, то $\|VG(-\lambda)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ (см., например, [12; гл. V, § 4, (4.4)]). Следовательно, по лемме 1.1 также

$$\|G^{1/2}(-\lambda) V G^{1/2}(-\lambda)\| \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Тогда найдутся такие числа a_1 и a_2 , $0 < a_1 \leq a_2$, что при $\lambda \gg 1$

$$a_1 \leq \|[I + G^{1/2}(-\lambda) V G^{1/2}(-\lambda)]^{-1}\| \leq a_2. \quad (1.7)$$

Теперь, так как $G(-\lambda) \geq 0$ и $R(-\lambda) \geq 0$ при $\lambda > 0$, из (1.6), (1.7) для любых $u \in H$ получаем

$$\begin{aligned} a_1 (G(-\lambda)u, u) &= a_1 \|G^{1/2}(-\lambda)u\|^2 \leq (R(-\lambda)u, u) \\ &\leq a_2 \|G^{1/2}(-\lambda)u\|^2 = a_2 (G(-\lambda)u, u). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введем операторы

$$K_0(\lambda) = G(-\lambda) V G(-\lambda) V G(-\lambda), \quad K(\lambda) = G(-\lambda) V R(-\lambda) V G(-\lambda).$$

Ниже нам потребуются условия ядерности операторов $K_0(\lambda)$ и $K(\lambda)$. Поскольку $K_0(\lambda)$ неотрицателен (при $\lambda > 0$), то известно (см., например [13; гл. III, § 8]), что $K_0(\lambda)$ ядерный тогда и только тогда, когда для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} (K_0(\lambda) \varphi_k, \varphi_k) < \infty,$$

причем сумма этого ряда равна спектральному следу $\text{Sp } K_0(\lambda)$. Так что оператор $K_0(\lambda)$ ядерный (при $\lambda > 0$), если

$$\text{Sp } K_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (K_0(\lambda) f_k, f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|(V f_k, f_m)|^2}{(\lambda_k + \lambda)^2 (\lambda_m + \lambda)} < \infty. \quad (1.8)$$

Справедлива

ЛЕММА 1.3. *При $\lambda \gg 1$ оператор $K(\lambda)$ ядерный тогда и только тогда, когда $K_0(\lambda)$ ядерный, причем справедливо*

$$a_1 \text{Sp } K_0(\lambda) \leq \text{Sp } K(\lambda) \leq a_2 \text{Sp } K_0(\lambda), \quad (1.9)$$

где $\text{Sp } K_0(\lambda)$ определяется формулой (1.8), $0 < a_1 \leq a_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно установить справедливость неравенств (1.9).

Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортонормированный базис в H . Тогда из определений операторов $K_0(\lambda)$, $K(\lambda)$ и леммы 1.2 имеем, что

$$a_1(K_0(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) \leq (K(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) \leq a_2(K_0(\lambda)\varphi_k, \varphi_k),$$

откуда с учетом условий леммы вытекает справедливость неравенств (1.9).

Для дальнейших исследований введем операторы

$$T_n = Q_n T Q_n, \quad V_n = Q_n V Q_n, \quad L_n = T_n + V_n, \quad (1.10)$$

где проектор Q_n определяется формулой (1.1). Эти операторы будем рассматривать как операторы в пространстве $H_n = Q_n H$. Через $\sigma(L_n) = \{\mu_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ обозначим спектр оператора L_n , причем $\mu_k^{(n)} \leq \mu_{k+1}^{(n)}$. Имеет место

ЛЕММА 1.4. Для всех $t \in K$ (K – компакт в $\mathbb{R}$) справедливы следующие неравенства:

$$0 \leq \rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_k < t} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k], \quad (1.11)$$

$$0 \leq \rho_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_k < t} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k^{(n)}], \quad (1.12)$$

причем $\rho_n(t) = 0$ при $t \geq \lambda_n$, $\rho_n(t) \leq \rho_{n+1}(t)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = \rho(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из принципа минимакса [14; гл. XIII, § 2] следует, что

$$\mu_k^{(n+1)} \leq \mu_k^{(n)}, \quad \mu_k \leq \mu_k^{(n)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Далее, так как L_n – конечномерный оператор, его спектральный след совпадает с матричным следом:

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} = \sum_{k=1}^n (L_n f_k, f_k) = \sum_{k=1}^n [\lambda_k + (V f_k, f_k)]. \quad (1.14)$$

Откуда в силу неравенства (1.13) имеем

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (\mu_k^{(n)} - \mu_k) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda_n} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k] = \rho(\lambda_n + 0)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, так как

$$\rho(t) = \text{const}, \quad t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}),$$

для всех $t \in K$ (K – компакт в $\mathbb{R}$) справедливо неравенство (1.11).

Теперь из равенства (1.14) и неравенства (1.13) согласно определению функции $\rho_n(t)$ получаем, что

$$0 = \sum_{\lambda_k \leq \lambda_n} [\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k^{(n)}] = \rho_n(\lambda_n + 0) \leq \rho_{n+1}(\lambda_n + 0).$$

Откуда заключаем, что для всех $t \in K$ справедливо $0 \leq \rho_n(t) \leq \rho_{n+1}(t)$ и $\rho_n(t) = 0$ при $t > \lambda_n$. Далее, согласно построению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n f = Lf, \quad f \in \mathcal{D}(T).$$

Поэтому из неравенства (1.13) следует, что $\mu_k^{(n)}$, монотонно убывая, стремятся к μ_k при $n \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\rho_n(t) \nearrow \rho(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Неравенство (1.11) было получено в работе [15].

Пусть $G_n(-\lambda) = (T_n + \lambda I)^{-1}$ и $R_n(-\lambda) = (L_n + \lambda I)^{-1}$ – резольвенты операторов T_n и L_n (см. (1.10)). Тогда из определений операторов T_n , L_n и Q_n легко следует, что

$$G_n(-\lambda) = Q_n G(-\lambda) = G(-\lambda) Q_n, \quad R_n(-\lambda) = Q_n R(-\lambda) = R(-\lambda) Q_n. \quad (1.15)$$

Покажем, что имеет место

ЛЕММА 1.5. При $n \rightarrow \infty$

$$\|G(-\lambda) - G_n(-\lambda)\| \rightarrow 0, \quad \lambda > 0, \quad (1.16)$$

$$\|R(-\lambda) - R_n(-\lambda)\| \rightarrow 0, \quad \lambda \gg 1. \quad (1.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H$ и $\|f\| = 1$, тогда (1.16) следует из неравенства

$$\|(G(-\lambda) - G_n(-\lambda))f\|^2 \leq (\lambda_{n+1} + \lambda)^{-2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(f, f_k)|^2 < \lambda_{n+1}^{-2} \|f\|^2 = \lambda_{n+1}^{-2}.$$

Для доказательства (1.17) в силу T -ограниченности оператора V с нулевой отнесительной гранью заметим, что при $\lambda \gg 1$

$$\|G(-\lambda)V\| < 1, \quad \|R(-\lambda)V\| < 1. \quad (1.18)$$

Далее, учитывая (1.15), имеем

$$\begin{aligned} R_n(-\lambda) + G(-\lambda)V R_n(-\lambda) &= [G(-\lambda) - G_n(-\lambda)]V R_n(-\lambda) + G_n(-\lambda), \\ R(-\lambda) + G(-\lambda)V R(-\lambda) &= G(-\lambda). \end{aligned}$$

Теперь, вычитая из первого равенства второе, получаем

$$R_n(-\lambda) - R(-\lambda) = (I + G(-\lambda)V)^{-1} [G(-\lambda) - G_n(-\lambda)] (V R_n(-\lambda) - I).$$

Из (1.16) и последнего соотношения с учетом ограниченности операторов $(I + G(-\lambda)V)^{-1}$ и $(V R_n(-\lambda) - I)$ при $\lambda \gg 1$ (см. (1.18)) вытекает справедливость соотношения (1.17).

Лемма доказана.

Покажем, что имеет место основная теорема этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть оператор $K_0(\lambda)$ ядерный, т.е. выполнено (1.8). Тогда при $\lambda \gg 1$ справедливо тождество

$$2 \int_0^\infty \frac{\rho(t) dt}{(t+\lambda)^3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\mu_k - \lambda_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^2(\mu_k + \lambda)} = \text{Sp } K(\lambda). \quad (1.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$K_n(\lambda) = G_n(-\lambda)V_n R_n(-\lambda)V_n G_n(-\lambda).$$

Тогда из резольвентного тождества

$$R_n(-\lambda) - G_n(-\lambda) + G_n(-\lambda)V_n G_n(-\lambda) = K_n(\lambda),$$

замечая, что

$$\begin{aligned} \text{Sp } G_n(-\lambda) &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \lambda)^{-1}, \quad \text{Sp } R_n(-\lambda) = \sum_{k=1}^n (\mu_k^{(n)} + \lambda)^{-1}, \\ \text{Sp } G_n(-\lambda)V_n G_n(-\lambda) &= \sum_{k=1}^n \frac{(V f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2}, \\ \frac{1}{\mu_k^{(n)} + \lambda} &= \frac{1}{\lambda_k + \lambda} + \frac{\lambda_k - \mu_k^{(n)}}{(\lambda_k + \lambda)(\mu_k^{(n)} + \lambda)}, \end{aligned}$$

получаем

$$\sum_{\lambda_k \leq \lambda_n} \frac{\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k^{(n)}}{(\lambda_k + \lambda)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^{(n)} - \lambda_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^2(\mu_k^{(n)} + \lambda)} = \text{Sp } K_n(\lambda). \quad (1.20)$$

Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp } K_n(\lambda) = \text{Sp } K(\lambda)$. Так как $K_0(\lambda)$ — ядерный оператор, из леммы 1.3 следует, что $\text{Sp } K(\lambda) < \infty$. Далее, учитывая (1.15), имеем

$$\text{Sp } K_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{(V R_n(-\lambda)V f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2}; \quad (1.21)$$

а из леммы 1.5 следует, что при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V R_n(-\lambda)V f_k, f_k) = (V R(-\lambda)V f_k, f_k), \quad V f_k \in H. \quad (1.22)$$

Так как в силу леммы 1.2

$$a_1 G_n(-\lambda) \leq R_n(-\lambda) \leq a_2 G_n(-\lambda) \leq a_2 G(-\lambda)$$

и

$$\text{Sp } K_0(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(V G(-\lambda)V f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$

$$\sum_{k=N}^n \frac{(VR_n(-\lambda)Vf_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} \leq a_2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(VG(-\lambda)Vf_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} < \varepsilon. \quad (1.23)$$

Теперь из (1.21)–(1.23) легко вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Sp} K_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(VR(-\lambda)Vf_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} = \operatorname{Sp} K(\lambda).$$

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$ левая часть равенства (1.20) стремится к левой части равенства (1.19). С этой целью введем следующие функции:

$$\begin{aligned} n_0(t) &= k, \quad k \leq t < k+1, \\ g_n(t) &= \begin{cases} \frac{(\mu_k^{(n)} - \lambda_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^2(\mu_k^{(n)} + \lambda)}, & k \leq t < k+1, 1 \leq k \leq n; \\ 0, & 0 \leq t < 1, t \geq n+1, \end{cases} \\ g(t) &= \begin{cases} \frac{(\mu_k - \lambda_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^2(\mu_k + \lambda)}, & k \leq t < k+1, 1 \leq k \leq n; \\ 0, & 0 \leq t < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя свойства функции $\rho_n(t)$ из леммы 1.4 и учитывая, что $\rho_n(t) = 0$ при $t \geq \lambda_n$, равенство (1.20) представим в виде

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\rho_n(t) dt}{(t + \lambda)^3} + \int_0^{\infty} g_n(t) dn_0(t) = \operatorname{Sp} K_n(\lambda). \quad (1.24)$$

Оба интеграла в (1.24) неотрицательны и равномерно ограничены по n , так как

$$\operatorname{Sp} K_n(\lambda) < a_2 \operatorname{Sp} K_0(\lambda).$$

Из леммы 1.4 следует, что $\rho_n(t) \nearrow \rho(t)$ при $n \rightarrow \infty$, а при каждом фиксированном k величины $\mu_k^{(n)}$, монотонно убывая, стремятся к μ_k . Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ функции $g_n(t)$ сходятся к $g(t)$ поточечно. Применяя теорему Фату–Лебега об ограниченной сходимости (см., например, [16; гл. V, § 5, пп. 4, 5]) к каждому из интегралов в левой части равенства (1.24), получаем справедливость формулы (1.19).

Теорема доказана.

ЛЕММА 1.6. Пусть оператор V симметричен и T -ограничен с нулевой относительной гранью. Тогда при $\lambda \gg 1$ имеет место равенство

$$\operatorname{Sp} K(\lambda) = \operatorname{Sp} K_0(\lambda)[1 + O(\|G(-\lambda)V\|)]. \quad (1.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из резольвентного тождества

$$R(-\lambda) = G(-\lambda) - G(-\lambda)VG(-\lambda) + G(-\lambda)VR(-\lambda)VG(-\lambda)$$

и определений операторов $K(\lambda)$ и $K_0(\lambda)$ получаем, что

$$\mathrm{Sp} K(\lambda) = \mathrm{Sp} K_0(\lambda) + \mathrm{Sp} K_1(\lambda), \quad (1.26)$$

где

$$K_1(\lambda) = G(-\lambda)V[-G(-\lambda)VG(-\lambda) + G(-\lambda)VR(-\lambda)VG(-\lambda)]VG(-\lambda).$$

Так как $G(-\lambda) \geq 0$ при $\lambda > 0$, то имеем

$$\mathrm{Sp} K_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(VG(-\lambda)Vf_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|G^{1/2}(-\lambda)Vf_k\|^2}{(\lambda_k + \lambda)^2}, \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp} K_1(\lambda) = & \sum_{k=1}^{\infty} \{ [(-G^{1/2}(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) + G^{1/2}(-\lambda)VR(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda)) \\ & \times G^{1/2}(-\lambda)Vf_k, G^{1/2}(-\lambda)Vf_k] \} (\lambda_k + \lambda)^{-2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Далее, воспользовавшись равенством (1.6), неравенством (1.7), а также леммой 1.1, получаем, что при $\lambda \gg 1$

$$\begin{aligned} & \| -G^{1/2}(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) + G^{1/2}(-\lambda)VR(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) \| \\ & \leq \| G^{1/2}(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) \| + a_2 \| G^{1/2}(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) \| \\ & \leq c_1 \| G^{1/2}(-\lambda)VG^{1/2}(-\lambda) \| \leq c_1 \| G(-\lambda)V \|, \end{aligned}$$

где c_1 — положительная постоянная. Из этой оценки и равенств (1.27) и (1.28) заключаем, что

$$|\mathrm{Sp} K_1(\lambda)| \leq c_1 \|G(-\lambda)V\| \mathrm{Sp} K_0(\lambda),$$

откуда в силу (1.26) следует (1.25).

Лемма доказана.

С целью преобразования второго слагаемого в левой части равенства (1.19) докажем, что справедлива

ЛЕММА 1.7. В условиях теоремы 1.1 для $\lambda \gg 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k - \mu_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^2(\mu_k + \lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k - \mu_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^3} [1 + O(\|VG(-\lambda)\|)]. \quad (1.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.5) и леммы 1.1 для $\lambda \gg 1$ получаем оценку

$$[1 - \|VG(-\lambda)\|](T + \lambda) \leq L + \lambda \leq [1 + \|VG(-\lambda)\|](T + \lambda)$$

в смысле квадратичных форм. Следовательно, для всех k

$$[1 - \|VG(-\lambda)\|](\lambda_k + \lambda) \leq (\mu_k + \lambda) \leq [1 + \|VG(-\lambda)\|](\lambda_k + \lambda)$$

и равномерно по k

$$(\mu_k + \lambda)^{-1} = (\lambda_k + \lambda)^{-1}[1 + O(\|VG(-\lambda)\|)],$$

откуда следует (1.29). Лемма доказана.

Теперь из теоремы 1.1 и лемм 1.4, 1.6, 1.7 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть оператор $K_0(\lambda)$ ядерный, а V — симметрический T -ограниченный оператор с нулевой относительной гранью. Тогда

$$2 \int_0^\infty \frac{\rho(t) dt}{(t + \lambda)^3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda_k - \mu_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^3} = \text{Sp } K_0(\lambda)[1 + O(\|VG(-\lambda)\|)]. \quad (1.30)$$

Для дальнейшего нам потребуется интегральное представление $\text{Sp } K_0(\lambda)$. Для этого от сплошной нумерации спектра оператора T перейдем к поточечной нумерации:

$$\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \dots < \bar{\lambda}_n < \bar{\lambda}_{n+1} < \dots \quad (1.31)$$

Пусть P_k — ортогональный проектор на собственное подпространство оператора T , соответствующее собственному значению $\bar{\lambda}_k$, положим

$$a_{km} = \text{Sp } P_k V P_m V P_k. \quad (1.32)$$

Легко видеть, что для всех k и m

$$a_{mk} = a_{km}, \quad a_{km} \geq 0. \quad (1.33)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} a_{km} &= \text{Sp } P_k V P_m V P_k = \text{Sp } P_k V P_m V = \sum_{l=1}^\infty (P_k V P_m V f_l, f_l) \\ &= \sum_{i=1}^{\nu_k} \sum_{j=1}^{\nu_m} |(V f_{k_i}, f_{m_j})|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

так как $P_k(\cdot) = \sum_{j=1}^{\nu_k} (\cdot, f_{k_j}) f_{k_j}$, где f_{k_j} , $j = 1, \dots, \nu_k$, — базис в подпространстве $P_k H$.

В обозначениях (1.32) соотношение (1.8) переписывается в виде

$$\text{Sp } K_0(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{a_{km}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2 (\bar{\lambda}_m + \lambda)}. \quad (1.34)$$

Имеет место

ЛЕММА 1.8. Если $K_0(\lambda)$ – ядерный оператор, то

$$\operatorname{Sp} K_0(\lambda) = 2 \int_0^\infty \frac{\tau(t) dt}{(t + \lambda)^3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{a_{kk}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^3}, \quad (1.35)$$

где

$$\tau(t) = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \alpha_k, \quad \alpha_k = \sum_{m \neq k} \frac{a_{km}}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k}, \quad (1.36)$$

причем $\tau(t)$ представляется также в виде

$$\tau(t) = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \sum_{\bar{\lambda}_m \geq t} \frac{a_{km}}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k} \quad (1.37)$$

(откуда, в частности, следует, что $\tau(t) \geq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом натуральном N имеем

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{a_{km}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2 (\bar{\lambda}_m + \lambda)} = \sum_{k=1}^N \frac{a_{kk}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^3} + \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^{(N)}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2}, \quad (1.38)$$

где $\alpha_k^{(N)} = \sum_{m=1, m \neq k}^N a_{km} (\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k)^{-1}$, так как в силу (1.33)

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1, m \neq k}^N \frac{a_{km}}{(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k)(\bar{\lambda}_k + \lambda)(\bar{\lambda}_m + \lambda)} = 0.$$

Равенство (1.38) переписется в виде

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{a_{km}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^2 (\bar{\lambda}_m + \lambda)} = \sum_{k=1}^N \frac{a_{kk}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^3} + 2 \int_0^{\lambda_N} \frac{\tau^{(N)}(t)}{(t + \lambda)^3} dt, \quad (1.39)$$

где

$$\tau^{(N)}(t) = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \alpha_k^{(N)} = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \sum_{t \leq \bar{\lambda}_m \leq \bar{\lambda}_N} \frac{a_{km}}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k}. \quad (1.40)$$

Заметим, что $\tau^{(N)}(t)$ – ступенчатая функция, причем

$$\int_0^{\bar{\lambda}_N} \frac{\tau^{(N)}(t)}{(t + \lambda)^3} dt = \sum_{k=1}^{N-1} \tau^{(N)}(\bar{\lambda}_k + 0) \int_{\bar{\lambda}_k}^{\bar{\lambda}_{k+1}} \frac{dt}{(t + \lambda)^3} \leq \frac{1}{2} \operatorname{Sp} K_0(\lambda)$$

согласно (1.30). Отсюда видно, что для всех k при $N \rightarrow \infty$ существует конечный предел $\tau^{(N)}(\bar{\lambda}_k + 0)$, равный $\tau(\bar{\lambda}_k + 0)$ (иначе говоря, функция $\tau(t)$ в формуле (1.36) определена корректно). Теперь легко обосновать предельный переход при $N \rightarrow \infty$ в равенстве (1.39), в результате, учитывая (1.34), получаем (1.35).

Лемма доказана.

Теперь покажем, что справедлива основная теорема о возмущениях.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть V – симметричный T -компактный оператор в H и $\text{Sp } K_0(\lambda) < \infty$. Тогда при $\lambda \gg 1$

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{(t+\lambda)^4} dt = \int_0^\infty \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^4} dt [1 + O(\|G(-\lambda)V\|)], \quad (1.41)$$

где

$$\omega(t) = 2 \int_0^t \rho(t) dt + \sum_{\lambda_k < t} (\lambda_k - \mu_k)^2, \quad (1.42)$$

$$\nu(t) = 2 \int_0^t \tau(t) dt + \sum_{\bar{\lambda}_k < t} a_{kk}. \quad (1.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функции $\tau(t)$, $\rho(t)$ и числа a_{kk} , $(\lambda_k - \mu_k)^2$ неотрицательны, применяя интегрирование по частям, в силу (1.42) ($\omega(t) = 0$ при $t \leq 0$) имеем, что

$$2 \int_0^r \frac{\rho(t)}{(t+\lambda)^3} dt + \sum_{\lambda_k \leq r} \frac{(\lambda_k - \mu_k)^2}{(\lambda_k + \lambda)^3} = \frac{\omega(r)}{(r+\lambda)^3} + 3 \int_0^r \frac{\omega(t)}{(t+\lambda)^4} dt.$$

Аналогично в силу (1.43) ($\nu(t) = 0$ при $t \leq 0$) получаем

$$2 \int_0^r \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^3} dt + \sum_{\bar{\lambda}_k \leq r} \frac{a_{kk}}{(\bar{\lambda}_k + \lambda)^3} = \frac{\nu(r)}{(r+\lambda)^3} + 3 \int_0^r \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^4} dt. \quad (1.44)$$

Справедливость (1.41) будет следовать из равенств (1.30) и (1.35), если покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu(r)}{(r+\lambda)^3} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega(r)}{(r+\lambda)^3} = 0. \quad (1.45)$$

Проверим справедливость первого соотношения в (1.45). Из соотношения (1.44) заключаем, что его правая часть монотонно возрастает по r , поэтому в силу (1.35) для любого конечного r выполнено

$$\frac{\nu(r)}{(r+\lambda)^3} + 3 \int_0^r \frac{\nu(t) dt}{(t+\lambda)^4} \leq \text{Sp } K_0(\lambda) < \infty. \quad (1.46)$$

Допустим противное, т.е. что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu(r)}{(r+\lambda)^3} = a > 0.$$

Тогда при $r \gg 1$

$$\nu(r) \geq (a - \varepsilon)(r + \lambda)^3, \quad 0 < \varepsilon < \frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\nu(t) dt}{(t+\lambda)^4} = +\infty,$$

что противоречит неравенству (1.46). Аналогично доказывается справедливость второго соотношения в (1.45).

Теорема доказана.

Отметим, что если оператор $K_0(\lambda)$ ядерный, то из соотношений (1.35), (1.44), (1.45) заключаем, что

$$f(\lambda) = \text{Sp } K_0(\lambda) = 3 \int_0^\infty \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^4} dt. \quad (1.47)$$

1.2. Формулы следов для возмущений Гильберта–Шмидта. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.4. *Оператор V является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда $f(\lambda) = O(\lambda^{-3})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. При этом имеет место формула следов*

$$2 \int_0^\infty \rho(t) dt + \sum_{k=1}^\infty (\mu_k - \lambda_k)^2 = \text{Sp } V^2. \quad (1.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\lambda) = O(\lambda^{-3})$. Тогда в силу монотонности $\nu(t)$

$$f(\lambda) \geq 3 \int_\lambda^\infty \frac{\nu(t)}{(t+\lambda)^4} dt \geq \frac{\nu(\lambda)}{8\lambda^3},$$

следовательно,

$$\sup_{\lambda > 0} \nu(\lambda) < \infty.$$

Так что существует конечный предел

$$\nu(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = 2 \int_0^\infty \tau(t) dt + \sum_{k=1}^\infty a_{kk}. \quad (1.49)$$

Покажем, что V есть оператор Гильберта–Шмидта и выполнено соотношение

$$\nu(\infty) = \text{Sp } V^2. \quad (1.50)$$

Для этого сначала, интегрируя по частям в (1.43), получаем

$$\nu(\bar{\lambda}_n + 0) = 2 \int_0^{\bar{\lambda}_n} \tau(t) dt + \sum_{k=1}^n a_{kk} = 2\bar{\lambda}_n \tau(\bar{\lambda}_n + 0) - 2 \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \alpha_k + \sum_{k=1}^n a_{kk}, \quad (1.51)$$

где α_k определяются второй из формул (1.36). Далее, в силу положительности функции $\tau(t)$ и чисел a_{kk} интеграл и ряд в (1.49) сходятся абсолютно, поэтому из (1.49) и (1.51) заключаем, что

$$\begin{aligned} \nu(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \int_0^{\bar{\lambda}_n} \tau(t) dt + \sum_{k=1}^n a_{kk} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2\bar{\lambda}_n \tau(\bar{\lambda}_n + 0) - 2 \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \alpha_k + \sum_{k=1}^n a_{kk} \right], \end{aligned} \quad (1.52)$$

где α_k определяются второй из формул (1.36).

Так как $a_{mk} = a_{km}$, то легко показать, что

$$2\bar{\lambda}_n \rho(\bar{\lambda}_n + 0) - 2 \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \alpha_k + \sum_{k=1}^n a_{kk} = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}, \quad (1.53)$$

где

$$d_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{km}, \quad d_n^{(2)} = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_k}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k} a_{mk}.$$

Поскольку $a_{km} \geq 0$, то $d_n^{(1)}$ – монотонно не убывающая последовательность и $d_n^{(2)} \geq 0$. Следовательно, согласно (1.52) и (1.53) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} < \infty. \quad (1.54)$$

Так как

$$d_n^{(2)} \leq 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{mk},$$

то в силу (1.54)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(2)} = 0. \quad (1.55)$$

Таким образом, из (1.52), (1.54), (1.55) заключаем, что

$$\nu(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} a_{km}. \quad (1.56)$$

Остается заметить, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{km} = \text{Sp } P_k \sum_{m=1}^{\infty} V P_m V P_k = \text{Sp } P_k V^2 P_k.$$

Отсюда по хорошо известному утверждению из теории операторов [13; гл. III, § 8, лемма 8.1] следует, что V^2 есть ядерный оператор и

$$\nu(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp } \sum_{k=1}^n P_k V^2 P_k = \text{Sp } V^2,$$

что совпадает с (1.50). Отсюда по теореме 1.3 легко заключить, что существует конечный предел

$$\omega(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 2 \int_0^{\infty} \rho(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)^2 = \text{Sp } V^2,$$

что совпадает с (1.48).

Обратно, если V есть оператор Гильберта–Шмидта, то согласно (1.34)

$$f(\lambda) = \text{Sp } K_0(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^3} \text{Sp } V^2.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если V – самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта, то существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n_k} [\lambda_m^2 + 2\lambda_m(Vf_m, f_m) - \mu_m^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n_k} (V^2 f_m, f_m) = \operatorname{Sp} V^2, \quad (1.57)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} \rho(\lambda_{n_k} + 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} [\lambda_j + (Vf_j, f_j) - \mu_j] = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\lambda_{n_k} + 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} [\lambda_j + (Vf_j, f_j) - \mu_j] = 0. \quad (1.58)$$

Кроме того, выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)^2 < \infty. \quad (1.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального n имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n [-\mu_m^2 + \lambda_m^2 + 2\lambda_m(Vf_m, f_m) - (V^2 f_m, f_m)] \\ &= 2 \sum_{m=1}^n \lambda_m [\lambda_m + (Vf_m, f_m) - \mu_m] - \sum_{m=1}^n (\mu_m - \lambda_m)^2 + \sum_{m=1}^n (V^2 f_m, f_m) \\ &= 2\lambda_n \rho(\lambda_n + 0) - 2 \int_0^{\lambda_n} \rho(s) ds - \sum_{m=1}^n (\mu_m - \lambda_m)^2 + \sum_{m=1}^n (V^2 f_m, f_m). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Мы здесь воспользовались равенством

$$\sum_{m=1}^n \lambda_m [\lambda_m + (Vf_m, f_m) - \mu_m] = \int_0^{\lambda_n} t d\rho(t).$$

Сумма последних трех слагаемых в (1.60) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю в силу теоремы 1.4. С другой стороны, так как интеграл $\int_0^{\infty} \rho(t) dt$ сходится и $\rho(t) \geq 0$, заключаем, что существует последовательность $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} \rho(\lambda_{n_k} + 0) = 0,$$

т.е. верно второе соотношение в (1.57). Отсюда получаем формулу (1.58) и в силу (1.60) – первое соотношение в (1.57). Сходимость ряда в (1.59) непосредственно вытекает из формулы (1.48).

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для возмущений Гильберта–Шмидта полуограниченных снизу дискретных операторов в работе [6] формула (1.58) была доказана в предположении, что

$$\lambda \sim cn^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \quad c > 0.$$

В теореме 4 работы [8] формула (1.58) доказана при условиях, что оператор VT^δ продолжается до ограниченного при некотором $\delta > 0$ и при этом оператор $T^{-(1+\delta)}$ ядерный. Покажем, что существуют полуограниченный снизу оператор T и возмущение V из класса Гильберта–Шмидта S^2 , к которым теорема 4 из [8] не применима. Пусть $\lambda_n = cn^{1/\alpha}$, $\alpha \geq 3$, $c > 0$, – собственные числа оператора T и $V = T^{-\gamma}$. Такой V будет оператором Гильберта–Шмидта, если $2\gamma = \alpha(1 + \varepsilon)$ (где ε удовлетворяет, например, ограничениям $0 < c_0 \leq \varepsilon < 1/3$). Оператор VT^δ ограничен, если $\gamma \geq \delta$. Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha(1 + \varepsilon)}{2\alpha} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < 1,$$

т.е. оператор $T^{-(1+\delta)}$ неядерный.

В нашей работе для самосопряженных возмущений Гильберта–Шмидта в отличие от вышеперечисленных работ ограничения на рост собственных чисел невозмущенного (полуограниченного снизу) оператора сняты.

Соотношения (1.57) и последнее утверждение (1.59) следствия для абстрактных дискретных операторов ранее не были известны.

1.3. Формулы следов для относительно компактных возмущений.

Пусть V – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $N(t) = \sum_{\lambda_k < t} \dim P_k$ – функция распределения собственных значений оператора T .

Для доказательства формулы следов (1.58), когда V – оператор Гильберта–Шмидта, на рост функции $N(t)$ мы никаких условий не налагали. То же самое справедливо в случае ядерности оператора V (см., например, [15]). Для получения формул следов для произвольных ограниченных возмущений приходится налагать определенные условия на функцию $N(t)$. С этой целью сначала покажем, что справедлива

ЛЕММА 1.9. Пусть $V = V^*$ – произвольный ограниченный оператор в H . Тогда имеет место неравенство

$$\nu(t) \leq 3\|V\|^2 N(t). \quad (1.61)$$

В частности, если $V = V^* \in S^p$, $2 < p \in \mathbb{N}$, то

$$\nu(t) \leq 3(\operatorname{Sp} |V|^p)^{2/p} (N(t))^{(p-2)/p}, \quad (1.62)$$

где $\nu(t)$ определена формулой (1.43).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (1.61) заметим, что из (1.43), (1.51) и (1.53) имеем

$$\nu(t) = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \sum_{\bar{\lambda}_m < t} a_{km} + 2 \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \sum_{\bar{\lambda}_m \geq t} \frac{t - \bar{\lambda}_k}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k} a_{km}. \quad (1.63)$$

Откуда, так как

$$0 < (t - \bar{\lambda}_k)(\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_k)^{-1} \leq 1, \quad a_{km} \geq 0,$$

используя тождество

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{km} = \sum_{m=1}^{\infty} \text{Sp } P_k V P_m V P_k = \text{Sp } P_k V^2 P_k$$

и обозначая через $E_t = \sum_{\bar{\lambda}_k < t} P_k$, получаем

$$\nu(t) \leq 3 \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \text{Sp } P_k V^2 P_k = 3 \text{Sp } E_t V^2 E_t \leq 3 \|V\|^2 \text{Sp } E_t = 3 \|V\|^2 N(t). \quad (1.64)$$

Докажем теперь (1.62).

Пусть Ψ_t – спектральная функция оператора V и $\|f\| = 1$, тогда по неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} (V^2 f, f) &= \int_{\mathbb{R}} t^2 d(\Psi_t f, f) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |t|^p d(\Psi_t f, f) \right)^{2/p} \|f\|^{1/q} = (|V|^p f, f)^{2/p}, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Далее, из неравенства (1.64) вытекает, что

$$\nu(t) \leq 3 \text{Sp } E_t V^2 E_t = 3 \sum_{\lambda_k < t} (V^2 f_k, f_k),$$

откуда в силу (1.65) и неравенства Гёльдера получаем справедливость неравенства (1.62).

Лемма доказана.

Основным результатом этого пункта является

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $T = T^*$ – дискретный полуограниченный снизу, а V – симметрический T -компактный операторы в гильбертовом пространстве H . И пусть выполнено одно из нижеследующих условий:

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} < \infty$;
- 2) V – компактный оператор и $N(t) = O(t)$ при $t \rightarrow \infty$;
- 3) V – ограниченный оператор и $N(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$;
- 4) $V \in S^p$, $2 < p \in \mathbb{N}$, и $N(t) = o(t^{p/(p-2)})$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(n_m + 0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k) = 0. \quad (1.66)$$

Сначала покажем, что имеет место следующая

ЛЕММА 1.10. *Формула (1.66) справедлива, если*

$$f(\lambda) = o(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.67)$$

где $f(\lambda)$ определена формулой (1.47).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $f(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (1.67), а оператор V является T -компактным, с учетом равенств (1.41) и (1.47) имеем, что при $\lambda \gg 1$

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{(t+\lambda)^4} dt = o(\lambda^{-2}).$$

Откуда, так как функция $\omega(t)$ монотонна и неотрицательна (см. (1.42)), следует, что

$$\frac{\omega(\lambda)}{24\lambda^3} \leq \int_\lambda^\infty \frac{\omega(t)}{(t+\lambda)^4} dt = o(\lambda^{-2}).$$

Следовательно, из (1.42) вытекает, что при $\lambda \gg 1$

$$\int_0^\lambda \rho(t) dt = o(\lambda). \quad (1.68)$$

Теперь легко убедиться в справедливости равенства (1.66). Действительно, так как $\rho(t) \geq 0$, то предположение о существовании числа $c_0 > 0$ такого, что $\rho(t) \geq c_0$ при всех $t \gg 1$, противоречит (1.68).

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Покажем, что при выполнении одного из условий 1)–4) теоремы имеет место соотношение (1.67). Тогда из леммы 1.10 будет вытекать справедливость утверждений теоремы 1.5.

Итак, пусть выполнено условие 1). Покажем, что $f(\lambda) = o(\lambda^{-2})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Действительно, используя формулы (1.47) и (1.8) и равенство Бесселя по переменной m в (1.8) и учитывая, что $\lambda_k > 0$, имеем

$$f(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{(V^2 f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)}. \quad (1.69)$$

Теперь легко видеть, что при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k + \lambda} = o(1),$$

так как ряд в правой части равенства (1.69) сходится равномерно для всех $\lambda \geq 0$ в силу условия 1).

Пусть теперь выполнено условие 2). Так как V – компактный оператор, то существует последовательность конечномерных операторов V_{1n} такая, что $V = V_{1n} + V_{2n}$, причем $\|V_{2n}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [17; гл. IX, лемма 9.11]).

Далее, заметим, что

$$(V f_k, f_m)^2 = ((V_{1n} f_k, f_m) + (V_{2n} f_k, f_m))^2 \leq 2((V_{1n} f_k, f_m)^2 + (V_{2n} f_k, f_m)^2).$$

Используя это неравенство для оценки правой части в формуле (1.8) и равенство Парсеваля по переменной t для функции $f(\lambda)$ (см. (1.8) и (1.47)), получаем, что

$$f(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V_{1n}^2 f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V_{2n}^2 f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} \right). \quad (1.70)$$

Для оценки правой части (1.70) обозначим через $\{\varphi_l\}_{l=1}^{\infty}$ ортонормированный базис из собственных функций, а через s_l — собственные числа оператора V . Тогда (см. [17; гл. IX, лемма 9.11]) оператор V_{1n} можно представить в виде $V_{1n}(\cdot) = \sum_{l=1}^n s_l(\cdot, \varphi_l)\varphi_l$. Следовательно, для первого слагаемого в правой части (1.70), используя равенство Парсеваля по системе $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, будем иметь оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V_{1n}^2 f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{l=1}^n s_l^2. \quad (1.71)$$

Для второго слагаемого в правой части (1.70) в силу условия 2) получим следующую оценку:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V_{2n}^2 f_k, f_k)}{(\lambda_k + \lambda)^2} \leq \|V_{2n}\|^2 \int_0^{\infty} \frac{N(t)}{(t + \lambda)^3} dt \leq C \|V_{2n}\|^2 \int_0^{\infty} \frac{t}{(t + \lambda)^3} dt = \frac{C \|V_{2n}\|^2}{\lambda}. \quad (1.72)$$

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует λ_{ε} такое, что при $\lambda > \lambda_{\varepsilon}$

$$f(\lambda) < \frac{\varepsilon}{\lambda^2}, \quad (1.73)$$

т.е. выполнено условие (1.67). Действительно, так как $\|V_{2n}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$C \|V_{2n}\|^2 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad n \geq n_0(\varepsilon). \quad (1.74)$$

Положим $n = n_0(\varepsilon)$ в правой части (1.71). Тогда, так как $|s_l| < C_1, l = 1, \dots, n_0(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^{n_0(\varepsilon)} s_l^2 < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1.75)$$

для всех $\lambda > \lambda_{\varepsilon} = C_1^2 n_0(\varepsilon)/\varepsilon$.

Теперь легко заметить, что из неравенств (1.71)–(1.75) и оценки (1.70) вытекает неравенство (1.73).

Теперь покажем, что если выполнено одно из условий 3) или 4), то $f(\lambda)$ (см. (1.47)) тоже имеет порядок роста $o(\lambda^{-2})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Действительно, поскольку $\nu(t)$ монотонна и неотрицательна, в силу неравенства (1.61) и условия 3) при $\lambda \gg 1$ получаем, что

$$f(\lambda) = 3 \int_0^{\infty} \frac{\nu(t)}{(t + \lambda)^4} dt \leq \frac{7}{8} \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^3} + 9 \|V\|^2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{N(t)}{(t + \lambda)^4} dt = o(\lambda^{-2}).$$

Аналогично, из неравенства (1.62) и условия 4) при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$f(\lambda) \leq \frac{7}{8} \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^3} + 3(\operatorname{Sp} |V|^p)^{2/p} \int_0^\infty \frac{o(t)}{(t+\lambda)^4} dt = o(\lambda^{-2}).$$

Теорема доказана.

Условие 1) теоремы 1.5 является довольно универсальным в том смысле, что из него следует справедливость формулы (1.66) как для неограниченных T -компактных возмущений (следствие 1.2 ниже), так и для ограниченных и компактных возмущений (см. следствие 1.3 и замечание 1.6 ниже). Условия 2)–4) теоремы 1.5 устанавливают порядок роста функции распределения $N(t)$ невозмущенного оператора T в зависимости от конкретных классов возмущений, что важно для приложений к дифференциальным операторам. В связи с этим особо отметим условие 3) (см. замечание 1.6).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть симметрический оператор V таков, что $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V)$, и существует число β , $0 \leq \beta < 1/2$, такое, что оператор $VT^{-\beta}$ продолжается до ограниченного, а оператор $T^{-(1-2\beta)}$ ядерный. Тогда имеет место формула (1.66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что оператор V является T -компактным. Покажем, что из условий следствия вытекает справедливость п. 1) теоремы 1.5. Действительно, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|VT^{-\beta} f_k\|^2}{\lambda_k^{1-2\beta}} \leq C_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{1-2\beta}} < \infty$$

в силу ядерности оператора $T^{-(1-2\beta)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В работе [10; теорема 5] формула (1.66) была доказана при следующих более жестких условиях:

- а) $\lambda_{k+1} - \lambda_k \sim \operatorname{const} k^{1/\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1/2$;
- б) $\|Vf\| \leq C_0 \|T^\beta f\|$, $0 \leq \beta < 1/2 - \alpha$, $\ker T = \{0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть существует $\delta \geq 0$ такое, что оператор $V^2 T^\delta$ продолжается до ограниченного, а оператор $T^{-(1+\delta)}$ ядерный. Тогда справедлива формула (1.66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий следствия легко вытекает справедливость условия п. 1) теоремы 1.5. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 T^\delta T^{-\delta} f_k, f_k)}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 T^\delta f_k, f_k)}{\lambda_k^{1+\delta}} \\ &\leq \operatorname{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{1+\delta}} < \infty. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Следствие 1.3 сильнее теоремы 4 работы [8] в случае самосопряженных возмущений V . Там для справедливости формулы (1.66) вместо ограниченности $V^2 T^\delta$ требовалась ограниченность VT^δ .

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Формула (1.66) имеет место, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $V \in S^2$;
- 2) $V \in S^p$, $p > 2$, $G(z) = (T - zI)^{-1} \in S^{p/(p-2)}$, $\text{Im } z \neq 0$, здесь I – тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при выполнении одного из условий следствия выполнено условие 1) теоремы 1.5.

Действительно, если V – оператор Гильберта–Шмидта, в силу того, что $\lambda_k > 0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} \leq c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|V f_k\|^2 < +\infty.$$

Пусть теперь выполнено условие 2). Тогда из неравенства (1.65) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(V^2 f_k, f_k)}{\lambda_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|V|^p f_k, f_k)^{2/p}}{\lambda_k} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|V|^p f_k, f_k) \right)^{1/p_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{q_0}} \right)^{1/q_0} < +\infty, \end{aligned}$$

где $p_0 = p/2$, $1/p_0 + 1/q_0 = 1$, т.е. $q_0 = p/(p-2)$.

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Условие 4) теоремы 1.5 слабее условия 2) следствия 1.4. Например, если

$$N(t) \sim \frac{t^{p/(p-2)}}{\ln t}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

условие 4) теоремы выполнено, но резольвента $G(z)$ оператора T не принадлежит классу $S^{p/(p-2)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Формула (1.66) для ограниченных возмущений (не обязательно самосопряженных) в работе [8] (теорема 1) доказана при условии ядерности резольвенты оператора T . Из п. 1) нашей теоремы 1.5, в частности, вытекает достаточность условия ядерности резольвенты оператора T для справедливости формулы (1.66).

Очевидно, что наше условие “ $N(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ ” из п. 3) теоремы 1.5 слабее условия ядерности резольвенты оператора T , так как из условия п. 3) нашей теоремы следует, что для справедливости формулы (1.66) достаточно, чтобы выполнялось $1/\lambda_n = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

§ 2. Неполугограниченные операторы

Целью настоящего параграфа является обобщение предыдущих результатов на случай неполугограниченных дискретных операторов.

Пусть T – дискретный самосопряженный оператор в H с множеством собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, пронумерованных в неубывающем порядке с учетом кратностей, причем $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_{-1} < 0$; $\{f_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – соответствующий ортонормированный базис из собственных векторов. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением ограниченных самосопряженных возмущений V .

Вначале нам предстоит получить нумерацию спектра возмущенного оператора $L = T + V$, которая бы соответствовала нумерации спектра невозмущенного оператора T . С этой целью для $n, l \in \mathbb{N}$ введем ортогональные проекторы

$$\begin{aligned} Q^{(n,l)}h &= \sum_{k=-n}^l (h, f_k) f_k, & Q^{(n)}h &= \sum_{k=-n}^{\infty} (h, f_k) f_k, \\ Q_1^{(l)}h &= \sum_{k=0}^l (h, f_k) f_k, & Q_2^{(n)}h &= \sum_{k=-n}^{-1} (h, f_k) f_k, \\ Q_1h &= \sum_{k=0}^{\infty} (h, f_k) f_k, & Q_2 &= I - Q_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и операторы

$$\begin{aligned} L^{(n,l)} &= Q^{(n,l)} L Q^{(n,l)}, & L_k^{(l)} &= Q_k^{(l)} L Q_k^{(l)}, \\ L^{(n)} &= Q^{(n)} L Q^{(n)}, & L_k &= Q_k L Q_k, \end{aligned} \quad (2.2)$$

рассматриваемые как операторы, действующие соответственно в подпространствах $Q^{(n,l)}H$, $Q_k^{(l)}H$, $Q^{(n)}H$ и Q_kH . Если определим ортогональные суммы операторов

$$L_0^{(n,l)} = L_1^{(l)} \oplus L_2^{(n)}, \quad L_0^{(n)} = L_1 \oplus L_2^{(n)}, \quad L_0 = L_1 \oplus L_2, \quad (2.3)$$

то будем иметь

$$L^{(n,l)} = L_0^{(n,l)} + \Phi^{(n,l)}, \quad L^{(n)} = L_0^{(n)} + \Phi^{(n)}, \quad L = L_0 + \Phi, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^{(n,l)} &= Q_2^{(n)} V Q_1^{(l)} + Q_1^{(l)} V Q_2^{(n)}, & \Phi^{(n)} &= Q_1 V Q_2^{(n)} + Q_2^{(n)} V Q_1, \\ \Phi &= Q_1 V Q_2 + Q_2 V Q_1. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \{\mu_k^{(n,l)}\}_{k=-n}^l, \quad \{\mu_{k1}^{(l)}\}_{k=0}^l, \quad \{\mu_{k2}^{(n)}\}_{k=-n}^{-1}, \\ \{\mu_k^{(n)}\}_{k=-n}^{\infty}, \quad \{\mu_{k1}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{-1} \end{aligned}$$

– собственные числа операторов $L^{(n,l)}$, $L_1^{(l)}$, $L_2^{(n)}$, $L^{(n)}$, L_1 и L_2 соответственно, пронумерованные в неубывающем порядке с учетом кратностей. Очевидно, имеют место утверждения:

- 1) для каждого k , $-n \leq k < \infty$, $\mu_k^{(n,l)} \searrow \mu_k^{(n)}$ при $l \rightarrow \infty$;
- 2) для каждого $k \geq 0$ $\mu_{k1}^{(l)} \searrow \mu_{k1}$ при $l \rightarrow \infty$;
- 3) для каждого $k \leq -1$ $\mu_{k2}^{(n)} \nearrow \mu_{k2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как согласно вариационному принципу для каждого l при $k = -n, -n+1, \dots, l$ справедливо $\mu_k^{(n+1,l)} \geq \mu_k^{(n,l)}$, то в результате предельного перехода по l имеем

$$\mu_k^{n+1} \geq \mu_k^{(n)}, \quad k \geq -n. \quad (2.5)$$

Предельные значения

$$\mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

и задают упомянутую выше, подходящую для наших целей, нумерацию собственных чисел оператора L .

ЛЕММА 2.1. *Существуют натуральные числа n_k , $k = 1, 2$, не зависящие от l и n , такие, что для $n \gg 1$, $l \gg 1$ справедливы утверждения:*

1) *при $k \geq n_1$*

$$\mu_k^{(n,l)} \geq \mu_{k1}^{(l)}, \quad \mu_k^{(n)} \geq \mu_{k1}, \quad \mu_k \geq \mu_{k1};$$

2) *при $k \leq -n_2$*

$$\mu_k^{(n,l)} \leq \mu_{k2}^{(n)}, \quad \mu_k^{(n)} \leq \mu_{k2}^{(n)}, \quad \mu_k \leq \mu_{k2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектральная задача $L^{(n,l)}u = zu$ равносильна спектральной задаче для системы

$$\begin{cases} L_1^{(l)}u_1 + Q_1^{(l)}VQ_2^{(n)}u_2 = zu_1; \\ L_2^{(n)}u_2 + Q_2^{(n)}VQ_1^{(l)}u_1 = zu_2, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $u_1 = Q_1^{(l)}u$, $u_2 = Q_2^{(n)}u$. Так как

$$L_2^{(n)} = Q_2^{(n)}TQ_2^{(n)} + Q_2^{(n)}VQ_2^{(n)}$$

и $Q_2^{(n)}TQ_2^{(n)} \leq 0$ в смысле квадратичных форм, то $L_2^{(n)} \leq \|V\|Q_2^{(n)}$. Следовательно, при $z > \|V\|$ в подпространстве $Q_2^{(n)}H$ существует резольвента $R_2^{(n)}(z) = (L_2^{(n)} - z)^{-1}$, причем

$$R_2^{(n)}(z) \leq 0 \quad (2.8)$$

в смысле квадратичных форм. Так что из второго уравнения системы (2.7) следует, что

$$u_2 = -R_2^{(n)}(z)Q_2^{(n)}VQ_1^{(l)}u_1.$$

Следовательно, из первого уравнения вытекает, что u_1 есть решение уравнения

$$A_2^{(n,l)}(z)u_1 = zu_1, \quad (2.9)$$

где $A_2^{(n,l)}(z) = L_1^{(n)} - Q_1^{(l)}VQ_2^{(n)}R_2^{(n)}(z)Q_2^{(n)}VQ_1^{(l)}$. Ясно, что $A_2^{(n,l)}(z)$ дифференцируем по z в равномерной операторной топологии и

$$\frac{d}{dz}A_2^{(n,l)}(z) = -Q_1^{(l)}VQ_2^{(n)}[R_2^{(n)}(z)]^2Q_2^{(n)}VQ_1^{(l)}. \quad (2.10)$$

Пусть $\{s_{k2}^{(n,l)}(z)\}_{k=0}^{l+1}$ – собственные значения оператора $A_2^{(n,l)}(z)$, пронумерованные в порядке роста с учетом кратностей и дифференцируемые по z . Легко показать, что если $\{f_{k2}^{(n,l)}(z)\}_{k=0}^{l+1}$ – соответствующая нормированная последовательность собственных векторов, сильно дифференцируемых по z , то из (2.10) следует

$$\frac{d}{dz}s_{k2}^{(n,l)}(z) = -(VQ_2^{(n)}[R_2^{(n)}(z)]^2Q_2^{(n)}Vf_{k2}^{(n,l)}(z), f_{k2}^{(n,l)}(z)). \quad (2.11)$$

Далее, согласно (2.9) собственные числа оператора $L^{(n,l)}$ определяются как решения уравнений

$$s_{k2}^{(n,l)}(z) = z \quad (2.12)$$

для всех k , для которых $\mu_{k1}^{(l)} > \|V\|$. Поэтому из (2.8) следует, что в смысле квадратичных форм $L_1^{(n)} \leq A_2^{(n,l)}(z)$ при $z > \|V\|$, так что

$$\mu_{k1}^{(l)} \leq s_{k2}^{(n,l)}(z), \quad k = 0, \dots, l. \quad (2.13)$$

Ввиду (2.11), (2.13) для таких k уравнения (2.12) имеют единственные решения $\mu_k^{(n,l)}$ такие, что $\mu_k^{(n,l)} \geq \mu_{k1}^{(l)}$. Это доказывает первое неравенство п. 1). Остальные два неравенства этого пункта получим предельными переходами сначала по l при $l \rightarrow \infty$, затем – по n при $n \rightarrow \infty$. Пункт 2) леммы 2.1 доказывается совершенно аналогично.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть возмущение V таково, что

$$\sum_{|\lambda_k| > 0} \|Vf_k\|^2 |\lambda_k|^{-1} < \infty.$$

Тогда существует постоянная $a > 0$, не зависящая от l и n , такая, что при $n \gg 1, l \gg 1$

$$\sum_{k=n_1}^l (\mu_k^{(n,l)} - \mu_{k1}^{(l)}) \leq a, \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} (\mu_k^{(n)} - \mu_{k1}) \leq a, \quad (2.15)$$

$$\sum_{k=-n}^{n_2} (\mu_{k2}^{(n)} - \mu_k^{(n,l)}) \leq a. \quad (2.16)$$

Также имеют место неравенства

$$\sum_{k=-\infty}^{n_2} (\mu_{k2} - \mu_k) \leq a, \quad \sum_{k=n_1}^{\infty} (\mu_k - \mu_{k1}) \leq a. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} R^{(n,l)}(z) &= [L^{(n,l)} - z]^{-1}, \quad R_0^{(n,l)}(z) = [L_0^{(n,l)} - z]^{-1}, \quad R_1^{(l)}(z) = [L_1^{(l)} - z]^{-1}, \\ R_2^{(n)}(z) &= [L_2^{(n)} - z]^{-1}, \quad R(z) = (L - z)^{-1}, \\ R_0(z) &= (L_0 - z)^{-1}, \quad R_k(z) = (L_k - z)^{-1}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Согласно (2.3), (2.4) имеем

$$\begin{aligned} R^{(n,l)}(z) - R_0^{(n,l)}(z) &= -R_0^{(n,l)}\Phi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z) \\ &\quad + R_0^{(n,l)}(z)\Phi^{(n,l)}R^{(n,l)}(z)\Phi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

причем

$$R_0^{(n,l)}(z) = G_0^{(n,l)}(z)[I - \Psi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z)] = [I - R_0^{(n,l)}\Psi^{(n,l)}]G_0^{(n,l)}(z), \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^{(n,l)} &= Q_2^{(n)}VQ_2^{(n)} \oplus Q_1^{(l)}VQ_1^{(l)}, \quad G_0^{(n,l)}(z) = (T^{(n,l)} - z)^{-1}, \\ T^{(n,l)} &= T_2^{(n)} \oplus T_1^{(l)}, \quad T_k^{(s)} = Q_k^{(s)}TQ_k^{(s)}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Легко показать существование чисел $z_1 > 0$ и $\delta > 0$, не зависящих от n и l , таких, что при всех $n \gg 1$, $l \gg 1$ для всех операторов, заданных в (2.3), (2.4), расстояние от спектров до точки z_1 больше или равняется δ . Зафиксировав z_1 , возьмем замкнутый прямоугольный контур $\Gamma^{(n,l)}$, проходящий через точку z_1 и охватывающий собственные числа операторов $L^{(n,l)}$ и $L_0^{(n,l)}$, расположенные правее точки z_1 . Легко видеть, что

$$\text{Sp } R_0^{(n,l)}(z)\Phi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z) \equiv 0, \quad (2.20)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(n,l)}} z \text{Sp}[R^{(n,l)}(z) - R_0^{(n,l)}(z)] dz = \sum_{\mu_k^{(n,l)} > z_1} \mu_k^{(n,l)} - \sum_{\mu_{k0}^{(n,l)} > z_1} \mu_{k0}^{(n,l)}, \quad (2.21)$$

где $\mu_{k0}^{(n,l)}$ — собственные числа оператора $L_0^{(n,l)}$.

Поэтому из (2.18), (2.20), (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu_k^{(n,l)} > z_1} \mu_k^{(n,l)} - \sum_{\mu_{k0}^{(n,l)} > z_1} \mu_{k0}^{(n,l)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(n,l)}} z \text{Sp } R_0^{(n,l)}(z)\Phi^{(n,l)}R^{(n,l)}(z)\Phi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z) dz. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Очевидно, здесь интегрирование по контуру $\Gamma^{(n,l)}$ можно заменить интегрированием по вертикальной прямой $\{z_1 + it, \quad t \in \mathbb{R}\}$. Тогда правая часть (2.22) равна

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} t \text{Sp } R_0^{(n,l)}(z_1 + it)\Phi^{(n,l)}R^{(n,l)}(z_1 + it)\Phi^{(n,l)}R_0^{(n,l)}(z_1 + it) dt, \quad (2.23)$$

где учтено, что интеграл от $\text{Sp } R_0^{(n,l)}(z) \Phi^{(n,l)} R^{(n,l)}(z) \Phi^{(n,l)} R_0^{(n,l)}(z)$ равен нулю, причем согласно (2.19) можно записать

$$\begin{aligned} & \text{Sp } R_0^{(n,l)}(z_1 + it) \Phi^{(n,l)} R^{(n,l)}(z_1 + it) \Phi^{(n,l)} R_0^{(n,l)}(z_1 + it) \\ &= \sum_{k=-n}^l \frac{1}{(\lambda_k - z_1 + it)^2} ([I - \Psi^{(n,l)} R_0^{(n,l)}(z_1 + it)] \Phi^{(n,l)} R(z_1 + it) \Phi^{(n,l)} \\ & \quad \times [I - R_0^{(n,l)}(z_1 + it) \Psi^{(n,l)}] f_k, f_k). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отметим, что в силу выбора z_1 имеем

$$\|R_0^{(n,l)}(z_1 + it)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + t^2}}, \quad \|R^{(n,l)}(z_1 + it)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + t^2}}, \quad (2.25)$$

$|\lambda_k - z_1| \geq \delta$ для всех k . Поэтому из (2.24), (2.25) следует, что модуль интеграла в (2.22) оценивается сверху величиной

$$A \sum_{k=-n}^l \|V f_k\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|\lambda_k - z_1|^2 + t^2} = A\pi \sum_{k=-n}^l \frac{\|V f_k\|^2}{|\lambda_k - z_1|},$$

где число A не зависит от n и l . Отсюда и из (2.22) следует (2.14). Неравенство (2.15) получим из (2.14) предельным переходом по $l \rightarrow \infty$, который можно совершить ввиду справедливости леммы 2.1 и монотонности последовательностей $\{\mu_k^{(n,l)}\}$ и $\{\mu_{k1}^{(l)}\}$. Аналогично доказываются неравенства (2.16), (2.17).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\{\mu_k^\circ\}_{k=-\infty}^\infty$ — упорядоченный набор из чисел $\{\mu_{k1}\}_{k=0}^\infty$ и $\{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{-1}$. Тогда если выполнено условие леммы 2.2, то ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mu_k^\circ - \mu_k)$$

абсолютно сходится и его сумма равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Phi^{(n)}$ — конечномерный оператор и $\text{Sp } \Phi^{(n)} = 0$, то согласно [1] и (2.4)

$$\sum_{k=-n}^{\infty} (\mu_k^{(n)} - \mu_{k0}^{(n)}) = 0, \quad (2.26)$$

причем ряд сходится абсолютно, здесь $\{\mu_{k0}^{(n)}\}_{k=-n}^\infty$ — упорядоченный набор из чисел $\{\mu_{k2}^{(n)}\}_{k=-n}^{-1}$ и $\{\mu_{k1}\}_{k=0}^\infty$, т.е. $\{\mu_{k0}^{(n)}\}_{k=-n}^\infty$ — спектр оператора $L_0^{(n)}$. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться леммами 2.1, 2.2 и монотонностью последовательностей $\{\mu_k^{(n)}\}$ и $\{\mu_{k2}^{(n)}\}$ (для предельного перехода в (2.26)).

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнено условие леммы 2.2. Тогда существуют две последовательности $\{l_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-n_m}^{l_m} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.5 из §1 существуют последовательности натуральных чисел $\{l_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{l_m} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_{k1}] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-n_m}^0 [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_{k2}] = 0.$$

Остается заметить, что при $l_m \gg 1$ и $n_m \gg 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n_m}^{l_m} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k] &= \sum_{k=0}^{l_m} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_{k1}] \\ &+ \sum_{k=-n_m}^{-1} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_{k2}] + \sum_{k=-n_m}^{l_m} (\overset{\circ}{\mu}_k - \mu_k), \end{aligned}$$

и воспользоваться леммой 2.3.

Теорема доказана.

Для возмущений Гильберта–Шмидта имеет место более сильное утверждение. Для формулировки нам потребуется аналог функции $\rho(t)$ из §1. Положим

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{\lambda_k < t} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k] \\ &= \sum_{\lambda_k < t} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \overset{\circ}{\mu}_k] + \sum_{\lambda_k < t} (\overset{\circ}{\mu}_k - \mu_k), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где в правой части сходимость первого ряда понимается как сходимость со скобками (вторая сумма абсолютно сходится).

Имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть V – самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта. Тогда $\rho(t) \geq 0$ и

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)^2 = \text{Sp } V^2. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.4 из § 1 при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$2 \int_{\lambda_{-n}}^{\infty} \rho_n(t) dt + \sum_{k=-n}^{\infty} (\mu_k^{(n)} - \lambda_k)^2 = \text{Sp}[Q^{(n)} V Q^{(n)}]^2, \quad (2.29)$$

где

$$\rho_n(t) = \sum_{\lambda_{-n} \leq \lambda_k < t} [\lambda_n + (V f_k, f_k) - \mu_k^{(n)}].$$

В смысле сходимости со скобками $\rho_n(t)$ можно представить в виде

$$\rho_n(t) = \sum_{\lambda_k \geq t} [\mu_k^{(n)} - \lambda_k - (V f_k, f_k)]. \quad (2.30)$$

Из (2.5) и (2.30) получаем при $t \geq \lambda_{-n}$

$$\rho_{n+1}(t) - \rho_n(t) = \sum_{\lambda_k \geq t} [\mu_k^{(n+1)} - \mu_k^{(n)}] \geq 0.$$

Из монотонности $\mu_k^{(n)}$ и $\rho_n(t)$ непосредственно следует, что имеет место (2.28), если только заметить, что $\rho_n(t)$ можно представить в виде

$$\rho_n(t) = \sum_{\lambda_{-n} \leq \lambda_k < t} [\lambda_k + (V f_k, f_k) - \mu_k] + \sum_{\lambda_{-n} \leq \lambda_k < t} (\mu_k - \mu_k^{(n)}),$$

откуда вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = \rho(t)$, где $\rho(t)$ определена в (2.27).

Теорема доказана.

§3. Примеры

В этом параграфе мы укажем класс конкретных операторов, к которым применимы полученные в предыдущих параграфах результаты, рассмотрим один важный пример и обсудим дальнейшее развитие формул следов (см. п. 3.3).

3.1. В силу известной асимптотической формулы Г. Вейля для функции $N(t)$ (см., например, [18; гл. II, § 15, теорема 15.2]) теорема 1.5 применима для широкого класса эллиптических самосопряженных дифференциальных операторов на компактном многообразии. Условие 3) теоремы 1.5 выполнено для ограниченных возмущений в случае, когда порядок дифференциального оператора больше размерности многообразия. Для произвольных компактных возмущений (условие 2) теоремы 1.5), порядок дифференциального оператора может быть равен, а для возмущений из класса S^p , $2 < p \in \mathbb{N}$ (условие 4) теоремы 1.5) порядок дифференциального оператора может быть и меньше размерности многообразия.

3.2. Рассмотрим оператор $Tu = (-\Delta)^s u(x, y)$ в $L^2(K)$, где Δ — оператор Лапласа задачи Дирихле, K — квадрат $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Известно, что T имеет собственные числа $\lambda_{km} = (k^2 + m^2)^s$ и собственные функции $f_{km} = (2/\pi) \sin kx \sin my$. Пусть $L = T + V$, V — оператор умножения на вещественную функцию $v(x, y)$ из $W_2^2(K)$. Тогда для $s > 1$ имеем $N(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно, по теореме 1.5 имеет место формула (1.66).

Этот результат в 1999 г. был получен в работе [19] для степени $s > 93/80$, и доказательство опиралось на тонкие результаты теории чисел. В том же году он был анонсирован нами для $s > 1$ и вещественных $v(x, y)$ в работе [11], а для комплекснозначных $v(x, y)$ и $s > 1$ доказан в работе [8] в 2002 г.

3.3. В связи с приложениями к дифференциальным операторам особый интерес представляет случай, когда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{N(t)}{t} = c > 0. \quad (3.1)$$

В этом случае для произвольного ограниченного возмущения формула (1.66) уже может не выполняться. Более того, функция $\rho(t)$ (см. (1.11)) при $t \rightarrow \infty$ может вообще не иметь определенного предела. Мы здесь проанализируем два примера.

В пространстве $L^2(0, \pi)$ рассмотрим оператор

$$Tf = \sum_{k=1}^{+\infty} k(f, f_k) f_k, \quad f_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx.$$

Пусть V – оператор умножения на вещественную функцию $v(x)$ из класса $W_1^2(0, \pi)$, $L = T + V$, $\sigma(L) = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Заметим, что здесь выполнено (3.1) при $c = 1$. Тогда нами в работе [11] была получена следующая формула регуляризованного следа:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k + (Vf_k, f_k) - \mu_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi v^2(x) dx - \frac{c_0^2}{2}, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(x) dx. \quad (3.2)$$

Из формулы следов (3.2) легко вытекает аналог формулы следов Гельфанда–Левитана для оператора L :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k + c_0 - \mu_k) = \frac{1}{4} (v(0) + v(\pi)) - \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi v^2(x) dx - \frac{c_0^2}{2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим оператор L из п. 3.2 при $s = 1$, т.е. оператор Лапласа задачи Дирихле, возмущенный оператором умножения на вещественную функцию $v(x, y)$ из класса $W_2^2(K)$. Отметим, что для этой задачи выполнено (3.1) при $c = \pi/4$. В силу тауберовой теоремы типа Келдыша из соотношения (1.41) при $t \rightarrow +\infty$ имеем $\omega(t) = \nu(t)(1 + o(1))$. Откуда, воспользовавшись формулами (1.42), (1.43) и равенством Парсеваля по m , для первого слагаемого в правой части равенства (1.63) получаем

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^t \rho(\tau) d\tau + \sum_{\lambda_k < t} (\mu_k - \lambda_k)^2 \\ &= \left(\sum_{\bar{\lambda}_k < t} \text{Sp } P_k V^2 P_k + \sum_{\bar{\lambda}_k < t} \sum_{\bar{\lambda}_m \geq t} \left(\frac{2(t - \bar{\lambda}_k)}{\bar{\lambda}_m - \lambda_k} - 1 \right) a_{km} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Теперь в правой части этого равенства, используя собственные функции

$$f_{ij}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin ix \sin jy, \quad i^2 + j^2 = k = \bar{\lambda}_k,$$

оператора Лапласа задачи Дирихле, после несложных, но довольно громоздких вычислений заключаем, что

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \rho(\tau) d\tau + \sum_{\lambda_k < t} (\mu_k - \lambda_k)^2 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi v^2(x, y) dx dy N(t)(1 + o(1)) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi v^2(x, y) dx dy (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что функция $\rho(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет сходящиеся частичные пределы. Однако ожидать, что $\rho(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет определенный предел, не приходится. Действительно, пусть $v(x, y) = q_1(x) + q_2(y)$, тогда в уравнении

$$-\Delta u + vu = \lambda u$$

переменные разделяются и задача сводится к изучению спектра обыкновенных дифференциальных операторов в $L^2(0, \pi)$:

$$L_i f(t) = -f''(t) + q_i(t)f(t), \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\sigma(L_i) = \{\mu_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ – спектр оператора L_i , $i = 1, 2$, $f_k(t) = \sqrt{2/\pi} \sin kx$ – ортонормированные собственные функции оператора $Tf(t) = -f''(t)$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Покажем, что справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $v(x, y) = q_1(x) + q_2(y)$, $q_i \in W_1^2(0, \pi)$. Тогда

а) при каждом фиксированном натуральном z

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbb{N} \ni l \rightarrow \infty} \rho(l^2 + z + 0) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{[\sqrt{z}]} (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi v^2(x, y) dx dy - c_0^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{где } [\sqrt{z}] - \text{целая часть числа } \sqrt{z}, \quad c_0 = \int_0^\pi \int_0^\pi v(x, y) dx dy;$$

б) при $\mathbb{N} \ni z_l \rightarrow \infty$, $z_l \leq 2l + 1$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \rho(l^2 + z_l + 0) = \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi v^2(x, y) dx dy - c_0^2 \right). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^\infty (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) = 0 \quad (3.6)$$

и что для $k \gg 1$

$$\mu_k^{(i)} = k^2 + (q_i f_k, f_k) + \frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4}),$$

где

$$c_i = \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^\pi q_i^2(t) dt - \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_i(t) dt \right)^2 \right), \quad i = 1, 2$$

(см., например, [20]). Поэтому, полагая $1 \leq m \leq l$, $k = [\sqrt{l^2 + z - m^2}]$ (z — фиксированное натуральное число), имеем

$$\begin{aligned} \rho(l^2 + z + 0) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^l \sum_{k=1}^{[\sqrt{l^2 + z - m^2}]} (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{[\sqrt{z}]} (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{[\sqrt{l^2 + z - m^2}]} (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{[\sqrt{z}]} (k^2 + (q_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=[\sqrt{l^2 + z - m^2}] + 1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Откуда следует тождество (3.4), так как легко убедиться, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=[\sqrt{l^2 + z - m^2}] + 1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4}) \right) = \frac{\pi c_i}{2}.$$

Справедливость п. б) утверждения вытекает из соотношения (3.7), если в нем положить $z = z_l$, $0 < z_l \leq 2l + 1$, $\mathbb{N} \ni z_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, и воспользоваться тождеством (3.6).

Данное утверждение показывает, что изучение поведения $\rho(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в общем случае представляет собой весьма трудную математическую задачу. Мы ожидаем, что должны быть справедливы формулы вида (3.4), (3.5). Отметим также, что прослеживается определенная аналогия между формулами (3.2) и (3.5). В связи с этим заметим, что аналогичная формула справедлива для следа возмущения оператора Лапласа–Бельтрами на двумерной сфере S^2 (при этом в формуле (3.1) $c = 1$), изученного в других терминах в работах [21]–[24], и для следа возмущения двумерного гармонического осциллятора, для которого она получена в работе [25].

Список литературы

1. Крейн М. Г. О формуле следов в теории возмущений // Матем. сб. 1953. Т. 33(75). №3. С. 597–626.
2. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р. Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №5. С. 1–44.
3. Адамян В. М., Павлов Б. С. Формула следов для диссипативных операторов // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. 1979. №2. С. 5–9.
4. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №7. С. 1264–1271.
5. Садовничий В. А., Любишкин В. А. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формула следов // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №3. С. 55–65.
6. Дубровский В. В. Формулы регуляризованных следов операторов с компактной резольвентой // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №12. С. 2046–2051.
7. Dostanic M. Trace formula for nonnuclear perturbations of selfadjoint operators // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 1993. V. 54(68). P. 71–79.
8. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // Матем. сб. 2002. Т. 193. №2. С. 129–152.
9. Коплиенко Л. С. О формуле следов для возмущений неядерного типа // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25. №5. С. 62–71.
10. Dostanic M. Trace formulas of Gelfand–Levitan type // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 1994. V. 55(69). P. 51–63.
11. Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю. О формулах следов для неядерных возмущений // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №4. С. 442–444.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
13. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, Физматлит, 1965.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
15. Гасымов М. Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. №6. С. 1202–1205.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
17. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966.
18. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, Физматлит, 1978.
19. Дубровский В. В., Пузанкова Е. А. Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате в L^p , $1 \leq p \leq 2$ // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №4. С. 552–555.
20. Дикий Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // УМН. 1958. Т. 13. №3. С. 111–143.
21. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. №1. С. 61–62.
22. Подольский В. Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №1. С. 71–77.
23. Фазуллин З. Ю. Формула регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Международная конференция по комплексному анализу и смежным вопросам (2–5 июня 1997, Нижегородский государственный университет). Тезисы докладов. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1997. С. 80–81.
24. Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю. Формула первого регуляризованного следа для оператора Лапласа–Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. №3. С. 402–409.
25. Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сб. 2001. Т. 192. №5. С. 87–124.