Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Исковских, О критерии рациональности для расслоений на коники, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 75–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:27:27

УДК 512.6

В. А. Исковских

О критерии рациональности для расслоений на коники

Для трехмерного многообразия X , являющегося расслоением на коники $\pi: X \rightarrow S$ в смысле Мори, предполагается, что база имеет не более чем двойные рациональные особенности типа A_n . По модулю этого предположения доказывается критерий рациональности в случае достаточно большой дискриминантной кривой $C \subset S$, например, с $p_a(C) > 18$.

Библиография: 17 названий.

Введение

В этой заметке мы продолжаем изучение проблемы рациональности над $\mathbb{C}$ трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на коники, начатое в [10] и [9]. Напомним, что *стандартным расслоением на коники* называется морфизм $\pi: X \rightarrow S$ гладкого 3-мерного многообразия X на гладкую поверхность S , каждый слой $X_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, которого изоморфен конике в $\mathbb{P}^2$ и $\text{Pic } X = \pi^* \text{Pic } S + \mathbb{Z}$. Пусть $C \subset S$ — подмножество вырождения морфизма π . Если $C \neq \emptyset$, то это приведенная кривая с нормальными пересечениями (дискриминантная кривая). Если X рационально, то необходимо S — рациональная поверхность и дискриминантная кривая C связна.

В [10] и [9] обсуждается следующий гипотетический критерий рациональности для X .

ГИПОТЕЗА I. Пусть $\pi: X \rightarrow S$ — стандартное расслоение на коники над рациональной поверхностью S со связной дискриминантной кривой $C \subset S$. Тогда X рационально, если и только если выполняется одно из следующих двух условий:

(i) существует бирациональный морфизм $\alpha: S' \rightarrow S$ и стандартное расслоение на коники $\pi': X' \rightarrow S'$ с дискриминантной кривой $C' \subset S'$, бирационально эквивалентное (как расслоение) $\pi: X \rightarrow S$, и такое, что на S' имеется свободный (т.е. без базисных точек и неподвижных компонент) пучок рациональных кривых L' такой, что $L'C' \leq 3$;

(ii) существует бирациональный морфизм $\alpha_0: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ и стандартное расслоение $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$, где X_0 является раздутием $\mathbb{P}^3$ вдоль неособой кривой Y рода 5 и степени 7, бирационально эквивалентное $\pi: X \rightarrow S$, т.е. следующая диаграмма

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00820) и Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации (грант № M90300).

коммутативна

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi_0} & X_0 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_0 \\ S & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где χ_0 — некоторое бирациональное отображение.

Отметим, что в случае (ii) образы слоев морфизма $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$ высекаются двумерной линейной системой кубических поверхностей, проходящих через Y , и дискриминантная кривая $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ в этом случае имеет степень 5, как и для расслоения на коники, возникающее при проекции гладкой 3-мерной кубики $V_3 \subset \mathbb{P}^3$ из некоторой прямой. Так как кубика не рациональна, то эти два типа расслоений на коники (с дискриминантной кривой степени 5) различны. Они отличаются по типу соответствующих двойных накрытий $\tilde{\pi}: \tilde{C} \rightarrow C$, где $\tilde{C}$ — кривая, параметризующая компоненты слоев распадающихся (на две прямые) коник над точками из C : для расслоения на коники, возникающего из кубической гиперповерхности, это накрытие определяется нечетной тэта-характеристикой, а для расслоения $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — четной.

В [10] доказана достаточность условий (i) и (ii). Необходимость доказана только при дополнительном предположении, что для рационального X существует бирациональное отображение на $\mathbb{P}^3$, переводящее слои $X_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, в коники в $\mathbb{P}^3$. В силу этих результатов гипотеза I оказывается эквивалентной следующей классической гипотезе.

ГИПОТЕЗА II (С. Кантор, 1901). Любое двумерное семейство (конгруэнция индекса 1) рациональных кривых в $\mathbb{P}^3$ такое, что через общую точку проходит только одна кривая семейства, бирациональными преобразованиями $\mathbb{P}^3$ отображается в двумерное семейство коник или связку прямых.

Отметим, что в случае, когда $S = \mathbb{P}^2$ или $S = \mathbb{F}_N$ — геометрически линейчатая поверхность, необходимость условий (i) и (ii) доказана В. В. Шокуровым [18]. Кроме того В. В. Шокуров предположил, что условие (i) можно заменить на следующее:

(i') дивизор $C + 2K_S$ не эффективен.

В [9] доказано, что кроме случая (ii) условие (i') эквивалентно условию (i). Кроме того, в [9] получены следующие результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (а) *Предположим, что для стандартного расслоения на коники $\pi: X \rightarrow S$ над рациональной поверхностью S с дискриминантной кривой $C \subset S$ выполнено условие (i'), тогда существует бирациональный морфизм $\alpha: S \rightarrow S'$, где $S' = \mathbb{P}^2$ или $\mathbb{F}_N$, и стандартное расслоение на коники $\pi': X' \rightarrow S'$ с $C' = \alpha(C)$, бирационально эквивалентное $\pi: X \rightarrow S$ такое, что $C'L' \leq 5$ для $S' = \mathbb{P}^2$ и $L' \subset \mathbb{P}^2$ — прямая и $C'L' \leq 3$, $C'L' \neq 1$, для $S' = \mathbb{F}_N$ и L' — слой $\mathbb{F}_N \rightarrow \mathbb{P}^1$;*

(б) *если X рационально, то выполняется одно из следующих (более слабых, чем (i) и (ii)) условий:*

(i'') *существует свободный пучок кривых рода нуль L на S такой, что $CL \leq 7$;*

- (ii'') *существует бирациональный морфизм $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ такой, что $\varphi(C) = C' \subset \mathbb{P}^2$ — кривая, не обязательно с нормальными пересечениями, степени $\deg C' \leq 11$.*

Хотя гипотеза I сформулирована в терминах неособых X и S , в процессе ее изучения мы будем пользоваться результатами и методами работы Корти [6] о факторизации бирациональных отображений между $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенными пространствами размерности 3, которые, вообще говоря, допускают терминальные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Морфизм $\pi: X \rightarrow S$ называется *$\mathbb{Q}$ -Мори расслоенным пространством в размерности 3*, если X — $\mathbb{Q}$ -факториальное 3-мерное проективное многообразие с не более чем терминальными особенностями, а S — либо точка, либо неособая кривая, либо нормальная проективная поверхность, и морфизм $\pi: X \rightarrow S$ является экстремальным стягиванием в смысле Мори, т.е. $-K_X$ относительно обильно и относительное число Пикара $\rho(X/S) = 1$.

В зависимости от $\dim S$ мы придерживаемся следующих определений:

X — *$\mathbb{Q}$ -Фано*, если S — точка;

$\pi: X \rightarrow S$ — *$\mathbb{Q}$ -Дель Пеццо расслоение*, если S — кривая;

$\pi: X \rightarrow S$ — *$\mathbb{Q}$ -Мори расслоение на коники*, если S — поверхность.

Известно, что в последнем случае S имеет не более чем лог-терминальные особенности (см., например, [12]).

Однако следующее предположение кажется очень правдоподобным.

ГИПОТЕЗА III. Если $\pi: X \rightarrow S$ — $\mathbb{Q}$ -Мори расслоение на коники, то S имеет не более чем двойные рациональные (т.е. дювалевские) особенности типа A_n .

Известно, что если X горенштейново, то S неособо [7]; если индекс горенштейновости X не превосходит 5, то гипотеза III верна [15]. Кроме того, гипотеза III выводится из общей гипотезы Рида о существовании хороших дивизоров (локально) в антиканонической линейной системе (так называемой гипотезы о “слоне”), см. [14].

Теперь сформулируем основной результат этой заметки.

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow S$ — стандартное расслоение на коники с дискриминантной кривой $C \subset S$. Если X рационально, кривая C достаточно большая, например, $p_a(C) > 18$, и гипотеза III верна, то выполняется условие (i) гипотезы I, где $p_a(C)$ — арифметический род C .

Таким образом, по модулю гипотезы III критерий рациональности (гипотеза I, а следовательно, и гипотеза Кантора II) выполняется для расслоений на коники с дискриминантной кривой рода больше 18.

Эта заметка написана во время пребывания в Англии в университете Варвика в ноябре–декабре 1995 г. Я благодарю М. Рида за приглашение и живое участие в обсуждении результатов этой статьи. Приношу также глубокую благодарность Институту математики варвикского университета за гостеприимство.

§ 1. Леммы

ЛЕММА 1. Для любого $\mathbb{Q}$ -Мори расслоения на коники $\pi: X \rightarrow S$ существует бирациональный морфизм $\alpha: S' \rightarrow S$ и стандартное расслоение на коники $\pi': X' \rightarrow S'$ бирационально эквивалентное $\pi: X \rightarrow S$, т.е. коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array} \quad (1)$$

где ψ – некоторое бирациональное отображение.

Доказательство см. в [16], [13] для любого отображения $g: Y \rightarrow T$ с общим слоем – неприводимой рациональной кривой и $\dim T = 2$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{H}_X \equiv -\mu K_X + \pi^* A$ – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор на $\mathbb{Q}$ -Мори расслоении на коники $\pi: X \rightarrow S$. Тогда

$$\Gamma := \pi_*(\mathcal{H}_X^2) \equiv 4\mu A - \mu^2(4K_S + C), \quad (2)$$

где “ $\equiv$ ” обозначает численную эквивалентность циклов над $\mathbb{Q}$, K_S – канонический дивизор (Вейля) на S , C – дискриминантная кривая – приведенный дивизор Вейля на S , Γ – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор Вейля.

Более того, если $\mathcal{H}_X$ – подвижная линейная система без неподвижных компонент, то Γ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [16]). Достаточно показать, что равны пересечения левой и правой части в (2) с любым очень обильным дивизором D на S . Выберем очень обильный дивизор Картье D на S так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) D – неособая неприводимая кривая (следовательно, она не проходит через особые точки S);

2) поверхность $F = \pi^{-1}(D)$ – неособая линейчатая поверхность (следовательно, F не проходит через особые точки X , и D пересекает C трансверсально, так что число вырожденных слоев (распадающихся на две прямые коники) линейчатой поверхности $\pi: F \rightarrow D$ равно пересечению CD).

По формуле проекции

$$\begin{aligned} \Gamma D &= \mathcal{H}_X^2 F = (-\mu K_X + \pi^* A)^2 F \\ &= \mu^2 K_X^2 F - 2\mu K_X \pi^* A \pi^* D + \pi^* A^2 \pi^* D \\ &= \mu^2 K_X^2 F + 4\mu AD, \end{aligned}$$

так как $\pi^* A^2 \pi^* D = \pi^*(A^2 D) = 0$ и $K_X \pi^*(AD) = -2AD$, поскольку пересечение K_X с общим слоем $f_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, равно по формуле присоединения $\deg K_{f_s} = -2$.

Отметим, что все рассматриваемые пересечения имеют смысл, поскольку X имеет не более чем $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные (изолированные) особенности, а S – лог-терминальные, которые есть не что иное, как изолированные факторособенности и, следовательно, S также $\mathbb{Q}$ -факториально. Стало быть, на X и $\mathbb{Q}$ существует теория пересечений над $\mathbb{Q}$.

Вычислим $K_X^2 F$. Имеем:

$$\begin{aligned} K_X^2 F &= (K_X F)_F^2 = (K_F - F^2)_F^2 = K_F^2 + 4D^2 \\ &= K_{D \times \mathbb{P}^1}^2 - CD + 4D^2 = -4 \deg K_D - CD + 4D^2 \\ &= -4(K_S + D)D - CD + 4D^2 = -4(K_S + C)D. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Gamma D = 4\mu AD - \mu^2(4K_S + C)D,$$

что доказывает формулу (2).

Если $\mathcal{H}_X$ – подвижная линейная система дивизоров Вейля, не имеющая неподвижных компонент, то некоторая ее кратность $m\mathcal{H}_X$ содержится в классе дивизоров Картье и ее пересечение представлено эффективным 1-циклом, образ которого при π_* также является эффективным 1-циклом и после деления на m^2 дает эффективный 1-цикл Γ над $\mathbb{Q}$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi': X' \rightarrow S'$ – $\mathbb{Q}$ -Мори расслоения на коники, $C \subset S$, $C' \subset S'$ – соответствующие дискриминантные кривые. Предположим, что существует бирациональный морфизм $\alpha: S \rightarrow S'$ и бирациональное отображение $\varphi: X \dashrightarrow X'$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\alpha} & S' \end{array} \quad (3)$$

коммутативна. Тогда $C' = \alpha(C)$ и $h^1(\mathcal{O}_C) \leq h^1(\mathcal{O}_{C'})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{I}_C$ – пучок идеалов кривой C на S , так что имеет место точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

Применим к ней функтор $R\alpha_*$ и рассмотрим отрезок точной последовательности

$$0 = R^1\alpha_*\mathcal{O}_S \rightarrow R^1\alpha_*\mathcal{O}_C \rightarrow R^2\alpha_*\mathcal{I}_C = 0.$$

Здесь справа стоит нуль, поскольку слои α не более чем одномерны, а слева – поскольку особенности S и S' не более чем лог-терминальны и, следовательно, рациональны. Морфизм α индуцирует бирациональный морфизм $\alpha|_C: C \rightarrow C'$, так как диаграмма (3) коммутативна. По предыдущему спектральная последовательность Лере для $\alpha|_C$ вырождается и, стало быть, $h^i(\mathcal{O}_C) = h^i(\alpha_*\mathcal{O}_C)$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow \alpha_*\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность когомологий:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{K}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow H^1(\alpha_*\mathcal{O}_C) \rightarrow 0.$$

Отсюда $h^1(\mathcal{O}_C) = h^1(\alpha_*\mathcal{O}_C) \leq h^1(\mathcal{O}_{C'})$, что и утверждалось.

ЛЕММА 4. Пусть в коммутативной диаграмме (1) $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi': X' \rightarrow S'$ – стандартные расслоения на коники над гладкими рациональными поверхностями S и S' , соответственно. Тогда для любого целого $m \geq 1$

$$|mK_S + C| = \emptyset \Leftrightarrow |mK_{S'} + C'| = \emptyset$$

$$\text{и } p_a(C) = p_a(C').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение доказано в [9, лемма 1]. Второе утверждение следует из того, что бирациональная эквивалентность стандартных расслоений на коники, как в диаграмме (1), является композицией элементарных бирациональных перестроек, описанных в [16, предложение 2.4]. Если эта элементарная бирациональная перестройка над базой S , то C не меняется. Если $\varphi: S' \rightarrow S$ – раздутие точки $s \in S$ и $\pi': X' \rightarrow S'$ получено одной из элементарных перестроек, то

$$C = \begin{cases} \varphi^*C, & \text{если } s \in S \setminus C, \\ \varphi^*C - E, & \text{если } s \in C, \end{cases}$$

где $E = \varphi^{-1}(s)$ – исключительный дивизор. Так как $K_{S'} = \varphi^*K_S + E$, то по формуле арифметического рода $p_a(C) = p_a(C')$.

ЛЕММА 5 (откручивание максимальных особенностей, см. [6]). Пусть $\pi: X \rightarrow S$ – стандартное расслоение на коники с дискриминантной кривой $C \subset S$ и $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение на некоторое $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенное пространство $\pi': X' \rightarrow S'$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & & S' \end{array} \quad (4)$$

Предположим, что χ не замыкается до коммутативной диаграммы, т.е. не существует бирационального отображения $\beta: S \dashrightarrow S'$, делающего эту диаграмму коммутативной (в терминологии [6] эта диаграмма не является квадратом). Пусть $\mathcal{H}' = -\mu'K_{X'} + \pi'^*A'$ – очень обильная линейная система на X' и $\mathcal{H}_X = -\mu K_X + \pi^*A = \chi_{\text{соб}}^{-1}(\mathcal{H}_{X'})$ – собственный прообраз ее на X , где $\mu \in \mathbb{Z} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mu > 0$, $A' \in \text{Pic } S'$ ($A' = 0$, если $S' = \text{Spec } \mathbb{C}$ – точка), A – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор на S . Тогда существует конечная последовательность элементарных бирациональных преобразований (линков типа I и II, в терминологии [6]) $(\Phi_1, \alpha_1), \dots, (\Phi_m, \alpha_m)$:

$$\begin{array}{ccccccc} X_m & \xrightarrow{\Phi_m} & X_{m-1} & \xrightarrow{\Phi_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\Phi_2} & X_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & X \\ \pi_m \downarrow & & \pi_{m-1} \downarrow & & & & \pi_1 \downarrow & & \pi \downarrow \\ S_m & \xrightarrow{\alpha_m} & S_{m-1} & \xrightarrow{\alpha_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_2} & S_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & S \end{array} \quad (5)$$

такая, что α_i – бирациональные морфизмы или изоморфизмы, каждый из квадратов (Φ_i, α_i) коммутативен, собственные прообразы $\mathcal{H}_{X_i}$ линейной

системы $\mathcal{H}_X$ имеют вид $\mathcal{H}_{X_i} \equiv -\mu K_{X_i} + \pi_i^* A_i$, где A_i – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор на S_i , $\mathcal{H}_{X_m}$ не имеет максимальных особенностей в смысле неравенства Нётера–Фано (т.е. $K_{X_m} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{X_m}$ канонично в смысле [6]), $\mathbb{Q}$ -дивизор A_m численно не эффективен и, если $C_i \subset S_i$ – дискриминантная кривая, то

$$h^1(\mathcal{O}_{C_i}) = h^1(\mathcal{O}_C) = p_a(C) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним [6], что линк типа I между $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенными пространствами $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi_1: X_1 \rightarrow S_1$ – это коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ X_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & S \end{array}$$

где $p: Z \rightarrow X$ – дивизориальное экстремальное стягивание в смысле Мори, $Z \dashrightarrow X_1$ – конечная последовательность лог-флипов, так что q – изоморфизм вне коразмерности два, $\alpha_1: S_1 \rightarrow S$ – сюръективный морфизм. В нашем случае p – раздутие максимальной особенности в $\mathcal{H}_X$ (если она существует; если ее нет, то $X_m = X$), морфизм α_1 является бирациональным стягиванием неприводимой кривой (так как $\rho(S_1/S) = 1$) на S_1 , так что $\pi_1: X_1 \rightarrow S_1$ – $\mathbb{Q}$ -Мори расслоение на коники.

Линк типа II – это коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} & Z' \dashrightarrow Z & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ X_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_1 & \xlongequal{\quad} & S \end{array}$$

над $S = S_1$, где p – Мори-дивизориальное стягивание, $Z \dashrightarrow Z'$ – конечная последовательность лог-флипов и $q: Z' \rightarrow X_1$ тоже Мори-дивизориальное стягивание. Для расслоений на коники – это бирациональное преобразование над базой S типа элементарного преобразования для $\mathbb{P}^1$ -расслоений (раздутие кривой с последующим стягиванием собственного прообраза линейчатой поверхности, на которой эта кривая лежит).

Начиная с раздутия максимальной особенности и применяя подходящий линк типа I и II, мы приходим к другому $\mathbb{Q}$ -Мори расслоению на коники с линейной системой $\mathcal{H}_{X_1} \equiv -\mu K_{X_1} + \pi_1^* A_1$, у которой либо уменьшилась максимальная кратность особенности, либо уменьшилось число максимальных особенностей одинаковой кратности. Как показано в [6, теорема 4.1], через конечное число шагов, скажем на X_m/S_m , все максимальные особенности будут откручены, и тогда в $\mathcal{H}_{X_m} \equiv -\mu K_{X_m} + \pi_m^*(A_m)$ $\mathbb{Q}$ -дивизор A_m численно не эффективен в силу неравенства Нётера–Фано. Здесь используется предположение, что бирациональное отображение (4) не замыкается до коммутативной диаграммы.

Докажем последнее утверждение. Пусть $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$ – стандартное расслоение на коники, бирационально эквивалентное $\pi_m: X_m \rightarrow S_m$ в смысле леммы 1, $C^* \subset S^*$ – соответствующая дискриминантная кривая. Тогда по лемме 3

$$p_a(C^*) = h^1(\mathcal{O}_{C^*}) \leq h^1(\mathcal{O}_{C_m}) \leq \dots \leq h^1(\mathcal{O}_C) = p_a(C),$$

но $p_a(C) = p_a(C^*)$ по лемме 4. Это завершает доказательство леммы 5.

ЛЕММА 6 [6, теорема 4.2]. В условиях и обозначениях леммы 5 существует конечная последовательность элементарных бирациональных отображений (линков типа III в смысле [6]) $(\Psi_m, \beta_m), (\Psi_{m+1}, \beta_{m+1}), \dots, (\Psi_{n-1}, \beta_{n-1})$:

$$\begin{array}{ccccccc} X_m & \xrightarrow{\Psi_m} & X_{m+1} & \xrightarrow{\Psi_{m+1}} & \dots & \xrightarrow{\Psi_{n-1}} & X_n \\ \pi_m \downarrow & & \pi_{m+1} \downarrow & & & & \pi_n \downarrow \\ S_m & \xrightarrow{\beta_m} & S_{m+1} & \xrightarrow{\beta_{m+1}} & \dots & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & S_n \end{array} \quad (6)$$

такая, что все β_{m+i} , $i = 0, \dots, n - m - 1$, бирациональные морфизмы, $\rho(S_{m+i}/S_{m+i+1}) = 1$, каждый из квадратов $(\Psi_{m+1}, \beta_{m+1})$ коммутативен, собственные образы $\mathcal{H}_{X_m}$ на X_{m+i} имеют вид $\mathcal{H}_{X_{m+i}} \equiv -\mu K_{X_{m+i}} + \pi_{m+i}^*(A_{m+i})$, где A_{m+i} – некоторый численно не эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на S_{m+i} , $\mathcal{H}_{X_{m+i}}$ не имеет максимальных особенностей (т.е. $K_{X_{m+i}} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{X_{m+i}}$ канонично), $h^1(\mathcal{O}_{C_m}) \leq h^1(\mathcal{O}_{C_n})$, где $C_{m+i} \subset S_{m+i+1}$ – дискриминантная кривая, и $\rho(S_n) = 1$ или 2.

Кроме того, существует линк (Ψ_n, β_n) типа III или IV (в смысле [6]) на некоторое $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенное пространство $\pi_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$ с $\mathcal{H}_{X_{n+1}} \equiv -\mu_{n+1} K_{X_{n+1}} + \pi_{n+1}^*(A_{n+1})$:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\Psi_n} & X_{n+1} \\ \pi_n \downarrow & & \pi_{n+1} \downarrow \\ S_n & & S_{n+1} \\ & \searrow \delta & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

такой, что $\mu_{n+1} < \mu$, и:

(i) если $\rho(S_n) = 1$, то $T = \text{Spec } \mathbb{C}$ – точка,

$$\Gamma_n = \pi_{n,*}(\mathcal{H}_{X_n}^2) \equiv 4\mu A_n - \mu^2(4K_{S_n} + C_n),$$

$\mathbb{Q}$ -дивизоры $-A_n$, $-(4K_n + C_n)$ обильны, значит, $C_n < -4K_{S_n}$;

(ii) если $\rho(S_n) = 2$, то T – неособая кривая, Ψ_n – бирациональное преобразование над T , $\delta: S_n \rightarrow T$ – линейчатая (вообще говоря, с лог-терминальными особенностями) поверхность с общим слоем L_n и $\rho(S_n/T) = 1$, и в предыдущих обозначениях

$$L_n \Gamma_n \geq 0, \quad L_n A_n < 0, \quad 2 \leq L_n C_n < -4L_n K_{S_n} = 8.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что линк типа III – это бирациональное преобразование, обратное к бирациональному преобразованию, задаваемому линком типа I. Линк типа IV (переход к другой структуре $\mathbb{Q}$ -Мори расслоения) – это коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & Z = X_1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ S & & S_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

где $X \dashrightarrow Z$ – конечная последовательность лог-флипов над T , $S \rightarrow T$ – морфизм, $\rho(S/T) = 1$, $\dim T < \dim S$. Если S – поверхность, а T – точка, тогда $\rho(S) = 1$, S_1 – либо поверхность с $\rho(S_1) = 1$, либо неособая кривая (в этом случае $\pi_1: X_1 \rightarrow S_1$ – $\mathbb{Q}$ -Дель Пешо расслоение). Если S – поверхность, а T – кривая, тогда или $S_1 = T$ и $\pi_1: X_1 \rightarrow S_1$ – $\mathbb{Q}$ -Дель Пешо расслоение, или $S_1 \rightarrow T$ – линейчатая поверхность, $\rho(S_1) = 2$ и над общей точкой $\tau \in T$ преобразование является тождественным, просто выбирается другая структура расслоения на коники на поверхности над незамкнутым полем функций $\mathbb{C}(T) = k(\tau)$.

В нашей ситуации, поскольку $\mathcal{H}_{X_m}$ не имеет максимальных особенностей и A_m не nef, то по [6] существует линк типа III или IV, индуцирующий морфизм $\delta: S_m \rightarrow T$, который является либо стягиванием неприводимой кривой на поверхность T , тогда $T = S_{m+1}$ и $\delta = \beta_m$, для $\pi_{m+1}: X_{m+1} \rightarrow S_m$ выполняются те же условия, что и для $\pi_m: X_m \rightarrow S_m$; $h^1(\mathcal{O}_{C_m}) \leq h^1(\mathcal{O}_{C_{m+1}})$ и процесс можно продолжить, либо через конечное число шагов линк (Ψ_n, β_n) определяет морфизм $\delta: S_n \rightarrow T$, понижающий размерность T . Тогда по [6] линк (Ψ_n, β_n) уменьшает коэффициент μ , т.е. $\mu_{n+1} < \mu$.

По конструкции линков $\rho(S_n/T) = 1$, следовательно, имеются только две возможности, указанные в формулировке леммы, причем A_n не nef, так как по предположению в лемме χ не замыкается до коммутативной диаграммы и, следовательно, последовательность линков $(\Psi_{m+i}, \beta_{m+i})$, $i = 0, \dots, n-m-1$, не обрывается на изоморфизме. Поскольку все эти линки являются коммутативными диаграммами, то следующий линк (Ψ_n, β_n) не может быть изоморфизмом, тогда по неравенству Нётера–Фано A_n не nef, так как $\mathcal{H}_{X_n} \equiv -\mu K_{X_n} + \pi_n^* A_n$ не имеет максимальных особенностей.

Теперь по лемме 2 цикл

$$\Gamma_n \equiv 4\mu A_n - \mu^2(4K_{X_n} + C_n)$$

представлен эффективным $\mathbb{Q}$ -дивизором, следовательно, Γ_n обилен в случае (i) и $L_n \Gamma_n \geq 0$, $L_n A_n < 0$ в случае (ii). Отсюда немедленно следуют все остальные утверждения в (i) и (ii). Доказательство леммы закончено.

СЛЕДСТВИЕ 1 (теорема Саркисова [16]). В условиях и обозначениях леммы 5 дивизор $4K_S + C$ не эффективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $4K_S + C$ эффективен, тогда по лемме 4 дивизор $4K_{S^*} + C^*$ на стандартной модели $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$ из доказательства леммы 5 также эффективен. Его образы при бирациональных морфизмах $4K_{S_i} + C_i$, $i = 1, \dots, t, t+1, \dots, n$, также эффективны $\mathbb{Q}$ -дивизоры, в частности, для $i = n$, что противоречит утверждениям (i) и (ii) леммы 6.

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях леммы 5 расслоение на коники $\pi: X \rightarrow S$ бирационально эквивалентно расслоению на коники $\pi_n: X_n \rightarrow S_n$, где S_n как в лемме 6.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $\pi: X \rightarrow S$ – стандартное расслоение на коники с дискриминантной кривой $C \subset S$ и X рационально. Тогда S – рациональная поверхность и, если $C = \emptyset$, то $\pi: X \rightarrow S$ – локально тривиальное $\mathbb{P}^1$ -расслоение и доказывать нечего.

Пусть $C \neq \emptyset$ и $\chi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – бирациональное отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{P}^3 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ S & & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array} \quad (7)$$

$\mathcal{H}_X \equiv -\mu K_X + \pi^* A$ – собственный прообраз на X линейной системы плоскостей на $\mathbb{P}^3$. Так как $C \neq \emptyset$, то $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \geq 1$, и диаграмма не замыкается до коммутативной, т.е. выполнены предположения лемм 5 и 6 и, следовательно, диаграммы (5) и (6) со всеми требуемыми свойствами имеют место.

Предположим теперь, что бирациональное отображение χ выбрано так, что μ наименьшее из возможных. Если $\mu = 1$, то критерий рациональности для расслоений на коники доказан в [10]. Поэтому мы можем сделать индуктивное предположение:

(*) для всех стандартных расслоений на коники над рациональной поверхностью, для которых существует бирациональное отображение на $\mathbb{P}^3$ с $\mu' < \mu$ гипотеза I справедлива.

Мы воспользуемся этим предположением, если случится найти на X (бирационально) другую структуру расслоения на коники, в терминах которого отображение χ имеет степень $\mu' < \mu$.

Шаг 1. Пусть после откручивания максимальных особенностей, как в лемме 5, и последовательности линков, как в лемме 6, мы получим случай (i), т.е. $\rho(S_n) = 1$, $-K_{S_n}$ обилен. Покажем, что в предположениях теоремы он не реализуется.

Если верна гипотеза III, то для S_n имеется ограниченное число возможностей. Все горенштейновы поверхности S с двойными рациональными особенностями и $\rho(S) = 1$ классифицированы (см., например, [4], [2]). Существует 28 типов таких поверхностей, среди них $\mathbb{P}^2$ и 15 типов поверхностей с особенностями A_n . Следуя [2], приведем их полный список, где запись $(d; mA_n, nA_m, \dots)$ обозначает $d = K_S^2$, m – число точек типа A_n , n – число точек типа A_m :

$$\begin{aligned} & (1; 4A_2), (1; 2A_1, 2A_3), (1; 2A_4), (1; A_1, A_2, A_5), (1; A_1, A_7), \\ & (1; A_8), (2; A_1, 2A_3), (2; A_2, A_5), (2; A_7), (3; 3A_2), (3; A_1, A_5), \\ & (4; 2A_1, A_3), (5; A_4), (6; A_1, A_2), (8; A_1), (9; 0), \end{aligned}$$

последний случай – это $\mathbb{P}^2$.

По лемме 6 (i) $C_n < -4K_{S_n}$, т.е. $-4K_{S_n} - C_n \equiv D_n$ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Дивизор Картье $-K_{S_n}$ обилен и по теореме Римана–Роха $h^0(-K_{S_n}) \geq K_{S_n}^2 + 1$. Ясно, что по модулю гипотезы III для C_n имеются ограниченные возможности. Грубая оценка показывает, что максимальное значение $h^1(\mathcal{O}_C)$ достигается на $\mathbb{P}^2$ для кривой C_n степени 11. В этом случае $p_a(C_n) = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Так как по леммам 5 и 6 $p_a(C^*) \leq h^1(\mathcal{O}_{C_n})$, $C^* \subset S^*$ – дискриминантная кривая стандартного расслоения на коники $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$, бирационально эквивалентного $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi_n: X_n \rightarrow S_n$. Следовательно, если $p_a(C) = p_a(C^*) > 45$, то рассматриваемый случай не реализуется.

Мы можем уточнить оценку для рода, привлекая дополнительные соображения из теории промежуточного якобиана. По предположению X – рациональное многообразие. Тогда по Клеменсу–Гриффитсу его промежуточный якобиан $J_3(X)$ является якобианом некоторой гладкой кривой или суммой якобианов кривых.

Из результатов Бовиля [5], Бельтраметти [3], Канева и Кацаркова [11] получаем, что для стандартного расслоения на коники $\pi: X \rightarrow S$ над гладкой рациональной поверхностью S со связной дискриминантной кривой $C \subset S$ промежуточный якобиан $J_3(X)$ изоморфен многообразию Прима $\text{Pr}(\tilde{C}, C)$, где $\tilde{C} \rightarrow C$ – двойное накрытие, $\tilde{C}$ – кривая, параметризующая компоненты вырожденных слоев морфизма π .

По теореме Мамфорда–Бовиля–Шокурова (см., например, [18]), если $p_a(C) > 6$, то $\text{Pr}(\tilde{C}, C)$ тогда и только тогда является якобианом кривой, когда кривая C тригональна или гиперэллиптическая, т.е. существует конечный морфизм $p: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 3 или 2. Аналогичное отображение $p^*: C^* \rightarrow \mathbb{P}^1$ есть и для C^* на стандартной модели $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$, как в лемме 6.

С другой стороны, если $C_n \subset \mathbb{P}^2$ – кривая степени 11, то пучок прямых, проходящих через достаточно общую точку $s \in C_n \subset \mathbb{P}^2$, отсекает на C_n одномерный линейный ряд степени 10. Этот ряд дает отображение $q_n: C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 10. Так как s достаточно общая, то этот линейный ряд не составлен из гиперэллиптического пучка. Отображение $q_n: C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ для некоторого выбора s поднимается до конечного отображения $q^*: C^* \rightarrow \mathbb{P}^1$ также степени 10 на стандартной модели $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$. Следовательно, существует бирациональное отображение

$$p^* \times q^*: C^* \rightarrow \tilde{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

где $\tilde{C}$ имеет тип $(3, 10)$ или $(2, 10)$, в последнем случае бирациональность отображения следует из того, что q^* не пропускается через гиперэллиптический ряд на C^* . Так как $h^1(\mathcal{O}_{C^*}) \leq h^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \leq 18$, то в предположениях теоремы рассматриваемый случай не реализуется.

Шаг 2. Предположим, что мы имеем случай (ii) из леммы 6. Так как X и S рациональны, то $T \simeq \mathbb{P}^1$ в обозначениях (ii). Пусть $|L^*|$ – прообраз пучка $|L|$ на S^* из леммы 5. Тогда $L^*C^* = L_nC_n \leq 7$. Если $L^*C^* \leq 3$, то утверждение (i) гипотезы I выполнено, что и утверждается в теореме.

Осталось показать, что в предположениях теоремы случаи $L_nC_n = 7, 6, 5, 4$ не реализуются.

Пусть $Y_n = \pi_n^{-1}(L_n)$ – поверхность, расслоенная на коники над общим слоем L_n пучка $\delta: S_n \rightarrow T = \mathbb{P}^1$. Тогда Y_n – гладкая поверхность над незамкнутым полем $K = \mathbb{C}(T) = \mathbb{C}(t)$ рациональных функций на прямой, $\rho(Y_n)$ над K равно 2,

$\text{Pic}_K Y_n = \mathbb{Z}f_n + \mathbb{Z}(-K_{Y_n})$, где f_n – класс слоя $\pi_{Y_n}: Y_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ограничим линейную систему $\mathcal{H}_{X_n}$ на Y_n . Имеем

$$\mathcal{H}_{Y_n} = \mathcal{H}_{X_n} \mid Y_n \equiv -\mu K_{X_n} + \pi_n^*(A_n) \mid Y_n \equiv -\mu K_{Y_n} + a_n f_n,$$

где $a_n = A_n L_n < 0$.

Покажем, что $-K_{Y_n}$ обилён. Так как линейная система $\mathcal{H}_{X_n}$ подвижна и не имеет неподвижных компонент, то $\mathcal{H}_{Y_n}$ обладает этими же свойствами, следовательно, $\mathcal{H}_{Y_n} - \text{nef}$ и $\mathcal{H}_{Y_n} - a_n f_n \equiv -\mu K_{Y_n}$ тоже nef и пересекается положительно со всеми неприводимыми кривыми, так как $a_n < 0$ и $-K_{Y_n} f_n = 2$. Кроме того,

$$0 \leq \mathcal{H}_{Y_n}^2 = (-\mu K_{Y_n} + a_n f_n)^2 = 4a_n \mu + \mu^2 K_{Y_n}^2 < \mu^2 K_{Y_n}^2,$$

т.е. $K_{Y_n}^2 > 0$, стало быть, по численному критерию обильности $-K_{Y_n}$ обилён.

Отметим, что $K_{Y_n}^2 = 8 - L_n C_n$.

Случай $K_{Y_n}^2 = 1$. Здесь Y_n – поверхность Дель Пеццо степени 1 с пучком рациональных кривых [8]. На ней действует (бирегулярная) инволюция Бертини β по формулам:

$$\beta(f_n) = f'_n = -4K_{Y_n} - f_n, \quad \beta(-K_{Y_n}) = -K_{Y_n},$$

где f'_n – класс слоя другого пучка коник на Y_n .

Инволюция β продолжается до бирациональной инволюции $\beta_{X_n}: X_n \dashrightarrow X_n$ над $T = \mathbb{P}^1$. Поскольку

$$\beta(\mathcal{H}_{Y_n}) \equiv \beta(-\mu K_{Y_n} + a_n f_n) \equiv -(\mu + 4a_n)K_{Y_n} - a_n f_n = -\mu' K_{Y_n} - a_n f_n,$$

то

$$\beta_{X_n}(\mathcal{H}_{X_n}) \equiv -\mu' K_{X_n} + \pi^*(A'_n),$$

где $\mu' = \mu + 4a_n < \mu$. Следовательно, композиция бирациональных отображений

$$\chi' = \chi \Phi_1 \cdots \Phi_m \Psi_m^{-1} \cdots \Psi_{n-1}^{-1} \beta_{X_n}, \quad (8)$$

задаваемая линейной системой $\mathcal{H}'_X \equiv -\mu' K_X + \pi^*(A')$, бирационально отображает X в $\mathbb{P}^3$ с $\mu' < \mu$, что противоречит выбору исходного отображения χ с μ минимальным. Следовательно, этот случай $K_{Y_n}^2 = 1$, т.е. $L_n C_n = 7$, не реализуется. Мы не использовали здесь предположения теоремы.

Случай $K_{Y_n}^2 = 2$. Этот случай полностью аналогичен предыдущему. В тех же обозначениях Y_n – поверхность Дель Пеццо степени 2 с пучком коник $|f_n|$. На ней действует (бирегулярно) инволюция Гейзера γ :

$$\gamma(f_n) = f'_n = -2K_{Y_n} - f_n, \quad \gamma(-K_{Y_n}) = -K_{Y_n}.$$

Она продолжается до бирациональной инволюции $\gamma_{X_n}: X_n \dashrightarrow X_n$ над T и уменьшает μ : $\mu' = \mu + 2a_n < \mu$.

Случай $K_{Y_n}^2 = 3$. Здесь Y_n – поверхность Дель Пеццо степени 3 с пучком коник. На ней существует единственная (-1) -кривая $E_n \sim -K_{Y_n} - f_n$, определенная

над K (см. [8]). Стягивание этой кривой на Y_n продолжается до бирационального линка (Ψ_n, β_n) типа III над $T = \mathbb{P}^1$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Psi_n & & \\
 & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & \\
 X_n & \dashrightarrow & Z_n & \xrightarrow{\sigma_n} & X_{n+1} \\
 \pi_n \downarrow & & & & \downarrow \pi_{n+1} \\
 S_n & \xrightarrow{\beta_n} & T & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1
 \end{array} \tag{9}$$

где $X_n \dashrightarrow Z_n$ — конечная последовательность $(K_{X_n} + \frac{1}{\mu} \mathcal{H}_{X_n})$ -флипов над T , в частности, изоморфизм на общем слое Y_n , $\sigma_n: Z_n \rightarrow X_{n+1}$ — Мори экстремальное дивизориальное стягивание, индуцирующее на общем слое Y_n стягивание (-1) -кривой E_n , $\pi_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ — $\mathbb{Q}$ -Дель Пеццо расслоение степени $K_{Y_{n+1}}^2 = 4$, где Y_{n+1} — образ Y_n при стягивании E_n . Собственный образ линейной системы $\mathcal{H}_{X_{n+1}}$ на X_{n+1} имеет вид $\mathcal{H}_{X_{n+1}} \equiv -\mu' K_{X_{n+1}} + \pi_{n+1}^*(A_{n+1})$, где $\mu' = \mu + a_n < \mu$.

Если $\mathcal{H}_{X_{n+1}}$ имеет максимальные особенности, то по [6] линками типа I и II над T их можно открутить.

Пусть $\pi_{n+2}: X_{n+2} \rightarrow S_{n+2}$ — $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенное пространство, полученное после откручивания максимальных особенностей. При этом μ' не увеличится и может возникнуть один из случаев:

- а) $\pi_{n+2}: X_{n+2} \rightarrow S_{n+2}$ — расслоение на коники над линейчатой поверхностью $S_{n+2} \rightarrow T$ с $\mathcal{H}_{X_{n+2}} \equiv -\mu'' K_{X_{n+2}} + \pi_{n+2}^*(A_{n+2})$, $\mu'' \leq \mu' < \mu$ и A_{n+2} не nef;
- б) $\pi_{n+2}: X_{n+2} \rightarrow T$ — $\mathbb{Q}$ -Дель Пеццо расслоение степени 4 с $\mathcal{H}_{X_{n+2}} \equiv -\mu'' K_{X_{n+2}} + a_{n+2} F_{n+2}$, где $\mu'' \leq \mu' < \mu$, $F_{n+2} = \pi^{-1}(\text{pt})$ — слой π_{n+2} и $a_{n+2} < 0$.

В случае а) общий слой Y_{n+2} над общей точкой T является гладкой поверхностью с пучком коник, бирациональной эквивалентной поверхности Y_n . В [8] доказано, что все пучки рациональных кривых на кубической поверхности с пучком коник как Y_n , бирационально эквивалентны. Так как на Y_{n+2} мы имеем

$$\mathcal{H}_{Y_{n+2}} \equiv -\mu'' K_{Y_{n+2}} + a_{n+2} f_{n+2}$$

с $\mu'' < \mu$, и существует бирациональное отображение, переводящее пучок $|f_n|$ в пучок $|f_{n+2}|$, то, как и в случаях $K_{Y_n}^2 = 1$ и 2, существует бирациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ с $\mu'' < \mu$, что противоречит предположению о минимальности μ .

В случае б) по общей теории [6] на X_{n+2} должна существовать (после конечного числа лог-флипов) другая структура $\mathbb{Q}$ -Мори расслоенного пространства с меньшим, чем μ'' коэффициентом при $-K_{X_{n+2}}$. Однако, пока исследован только случай неособого X_{n+1} (или X_{n+2}): в [1] получены необходимые и достаточные условия рациональности в этом случае. Для X_{n+1} (или X_{n+2}), обладающего $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, теория промежуточного якобиана еще не развита.

Поэтому, используя предположения теоремы о роде дискриминантной кривой, мы исключим этот случай с помощью уже однажды примененного трюка. А именно, на C_n , а следовательно, и на C^* из леммы 5 существует линейный ряд степени 5:

$q^*: C^* \rightarrow \mathbb{P}^1$. Из рациональности X^* , как и выше, получаем морфизм $p^*: C^* \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 3 или 2. Следовательно, существует бирациональное отображение

$$p^* \times q^*: C^* \rightarrow \tilde{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

где $\tilde{C}$ имеет тип $(3, 5)$ или $(2, 5)$. Отсюда $h^1(\mathcal{O}_{C^*}) \leq 8$, так что в предположениях теоремы рассматриваемый случай $L_n C_n = 5$ также не реализуется.

Случай $K_{Y_n}^2 = 4$. На Y_n существует другой пучок коник со слоем $f'_n \sim -K_{Y_n} - f$. Пучок $|f'_n|$ бирационально не эквивалентен, вообще говоря, пучку $|f_n|$, т.е. их общие слои могут быть не изоморфными. В терминах пучка $|f'_n|$ имеем

$$\mathcal{H}_{Y_n} \equiv -\mu K_{Y_n} + a_n f_n = -\mu' K_{Y_n} + a'_n f'_n,$$

где $\mu' = \mu + a_n < \mu$, $a'_n = -a_n > 0$. Пучок $|f'_n|$ на Y_n определяет (бирационально) на X_n другую структуру расслоения на коники, которая после конечного числа лог-флипов $X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ над T превращается в $\mathbb{Q}$ -Мори расслоение на коники $\pi_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$ с $\mathcal{H}_{X_{n+1}} \equiv -\mu_{n+1} K_{X_{n+1}} + \pi_{n+1}^*(A_{n+1})$, $\mu_{n+1} = \mu' < \mu$. Так как пучки $|f_n|$ и $|f'_n|$ не изоморфны, то из $\mu' < \mu$ мы не можем получить противоречие с предположением о выборе χ с минимальным μ , так как этот выбор делается в заданной структуре расслоения на коники.

По индуктивному предположению (*) критерий рациональности (гипотеза I) справедлив для стандартной модели, эквивалентной $\pi_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$. Покажем, что тогда $p_a(C) \leq 6$, так что в предположениях теоремы этот случай также не реализуется.

Шаг 3. Предположим, что в предыдущих обозначениях для $\mathbb{Q}$ -Мори расслоения на коники $\pi_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$ существует бирациональный морфизм $\bar{\alpha}: \bar{S} \rightarrow S_{n+1}$ и стандартная модель $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S} \supset \bar{C}$, на которой есть свободный пучок рациональных кривых $\bar{L}$ на $\bar{S}$ с $\bar{L}\bar{C} \leq 3$, т.е. выполнено условие (i) гипотезы I. Положим $\bar{M} = \bar{\alpha}^*(L_{n+1})$, где L_{n+1} – свободный пучок рациональных кривых на S_{n+1} , образ пучка L_n при отображении $X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ над T . Тогда $\bar{M}\bar{C} = L_n C_n = L_{n+1} C_{n+1} = 4$. В [10] показано, что в такой ситуации для кривой $\bar{C}$ имеется очень мало возможностей. Мы воспроизведем здесь рассуждения из [10] с некоторыми уточнениями.

Так как $\bar{X}$ рационально и для $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ выполнены условия (i) или (ii), то по [9] для него выполнено также условие $|2K_{\bar{S}} + \bar{C}| = \emptyset$. Тогда по той же теореме из [9] существует бирациональный морфизм $\sigma: \bar{S} \rightarrow \bar{S}_0$, где $\bar{S}_0 = \mathbb{F}_N$ – геометрически линейчатая поверхность или $\mathbb{P}^2$, и стандартное расслоение на коники $\bar{\pi}_0: \bar{X}_0 \rightarrow \bar{S}_0 \supset \bar{C}_0$, бирационально эквивалентное $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ с $\mathcal{H}_{\bar{X}_0} \equiv -\mu' K_{\bar{X}_0} + \bar{\pi}_0^*(\bar{A}_0)$ такое, что выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) $\bar{L}_0 \bar{C}_0 \leq 3$, где $L_0 \sim f_N$ – слой линейчатой поверхности 1 $\bar{S}_0 = \mathbb{F}_N \rightarrow \mathbb{P}^1$;
- 2) $\bar{C}_0 \subset \mathbb{P}^2$, $\deg \bar{C}_0 = 5$ и $\bar{X}_0 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие неособой кривой степени 7 и рода 5 в $\mathbb{P}^3$.

В случае 1) оценим сверху арифметический род $p_a(\bar{C}_0)$, учитывая, что на $\bar{C}_0$, точнее на $\bar{C}$, имеется линейный ряд степени 4, высекаемый пучком $\bar{M} = \alpha^*(L_{n+1})$. В случае 2) мы знаем, что $p_a(C_0) = 6$.

Пусть $\overline{M}_0$ – бирациональный образ пучка $\overline{M}$ на $\overline{S}_0$:

$$\begin{aligned}\overline{M}_0 &\sim af_N + bS_N; \\ \overline{M} &= af_N + bS_N - \sum \nu_i s_i, \quad a, b, \nu_i \in \mathbb{Z}, \quad a \geq bN, \quad b > 0, \quad \nu_i \geq 0,\end{aligned}\tag{10}$$

где s_i – базисные точки (возможно и бесконечно близкие, как обычно), ν_i – их кратности, S_N – класс исключительного сечения на $\mathbb{F}_N$:

$$\begin{aligned}\overline{C}_0 &\sim cf_N + dS_N; \\ \overline{C} &= cf_N + dS_N - \sum \varepsilon_i s_i, \quad c, d, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}, \quad d = 2, 3, \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1,\end{aligned}\tag{11}$$

где полные прообразы f_N , S_N и s_i на S обозначены теми же буквами. Неравенства для ε_i возникают из того, что кривая $\overline{C}_0$ на базе стандартной модели является приведенным дивизором с нормальными пересечениями, стандартная модель $\overline{\pi}: \overline{X} \rightarrow \overline{S}$ может быть получена из $\overline{\pi}_0: \overline{X}_0 \rightarrow \overline{S}_0$ с помощью последовательности элементарных преобразований, описанных в [16], [9]. Каждое такое элементарное преобразование происходит либо над базой, либо на ее раздутии в неособой точке $s \in S$. Пусть $\varphi: S' \rightarrow S$ такое раздутие, $C \subset S$, $C' \subset S'$ – дискриминантные кривые, тогда

$$C' = \begin{cases} \varphi^* C, & \text{если } s \in S \setminus C; \\ \varphi^* C - E, & \text{если } s \in C; \end{cases}$$

где $E = \varphi^{-1}(s)$ – исключительный дивизор.

Для канонического дивизора на разрешении $\sigma: \overline{S} \rightarrow \overline{S}_0$ базисных точек пучка

$$K_{\overline{S}} = -(N+2)f_N - 2S_N + \sum s_i.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned}\overline{C}\overline{M} &= ad + bc - bdN - \sum \nu_i \varepsilon_i = 4; \\ \overline{M}^2 &= 2ab - b^2N - \sum \nu_i^2 = 0; \\ -K_{\overline{S}}\overline{M} &= 2a + 2b - bN - \sum \nu_i = 2;\end{aligned}\tag{12}$$

поскольку $\overline{M}$ – свободный пучок кривых рода нуль на $\overline{S}$. Из последнего равенства находим $\sum \nu_i = 2a + 2b - bN - 2$. Подставляя в первое равенство (12) и полагая $\varepsilon_i = 1 \forall i$, получаем неравенство:

$$(d-2)a + b(c - (d-1)N - 2) \leq 2,$$

поскольку $\sum \nu_i \varepsilon_i \leq \sum \nu_i$. Но так как $0 \leq MS_N = a - bN$, то $a \geq bN$, так что

$$b(c - N - 2) \leq 2.$$

Здесь $b \geq 1$, поскольку пучок $\overline{M}_0$ отличен от пучка $|f_N|$ (они имеют различные пересечения с C_0). Следовательно,

$$c \leq N + 4.\tag{13}$$

С другой стороны, $\overline{C}_0$ – связная приведенная кривая с нормальными пересечениями, поэтому она либо не содержит кривую S_N и тогда

$$0 \leq C_0 S_N = (cf_N + dS_N)S_N = c - dN \Rightarrow c \geq dN,$$

либо $S_N \subset \overline{C}_0$ с кратностью 1 и $(\overline{C}_0 - S_N)S_N \geq 2$ (поскольку любая рациональная компонента дискриминантной кривой на стандартной модели пересекает остальную часть кривой по четному числу точек) $\Rightarrow c \geq (d-1)N + 2$. Отсюда

$$\begin{aligned} dN \leq c \leq N + 4, & \quad S_N \not\subset \overline{C}_0; \\ (d-1)N + 2 \leq c \leq N + 4, & \quad S_N \subset \overline{C}_0, \end{aligned} \quad (14)$$

и, следовательно, при $d = 3$: $N = 0, c = 2, 3, 4$; $N = 1, c = 3, 4, 5$; $N = 2, c = 6$; а при $d = 2$: $0 \leq N \leq 4, 2 \leq c \leq 4$, если $S_N \not\subset \overline{C}$ ($c \neq 1$, потому что на стандартной модели дискриминантная кривая не может иметь род нуль), и $N + 2 \leq c \leq N + 4, N \geq 0$ – любое, если $S_N \subset \overline{C}_0$.

Таким образом, всегда

$$p_a(\overline{C}_0) \leq 6.$$

Осталось заметить, что для исходной стандартной модели $\pi: X \rightarrow S \supset C$, в предположении $p_a(C) \geq 2$ справедливо равенство $p_a(C) = p_a(\overline{C}_0)$ несмотря на то, что $\overline{C}_0$ – дискриминантная кривая в другой структуре расслоения на коники на X , вообще говоря, бирационально не эквивалентной исходной.

Для этого привлечем следующие результаты из теории промежуточного якобиана Клеменса–Гриффитса:

- (i) для любого стандартного расслоения на коники $\pi: X \rightarrow S$ над рациональной поверхностью S промежуточный якобиан $J_3(X)$ изоморфен многообразию Прима $\text{Pr}(\tilde{C}, C)$, где $C \subset S$ – дискриминантная кривая и соответствующее $\tilde{C} \rightarrow C$ – двойное накрытие ($\tilde{C}$ параметризует компоненты приводимых слоев морфизма π);
- (ii) $\dim \text{Pr}(\tilde{C}, C) = p_a(C) - 1$;
- (iii) если $\gamma: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение неособых проективных 3-мерных многообразий,

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & \xrightarrow{\gamma} & X' \end{array}$$

– разрешение неопределенностей γ , $\{E_i\}$ – множество исключительных дивизоров для p , $\{F_j\}$ – множество исключительных дивизоров для q , то $J_3(X) \simeq J_3(X')$ при условии, что для всякой нерациональной линейчатой поверхности $E \in \{E_i\}$ существует единственная нерациональная поверхность $F \in \{F_j\}$ и наоборот, такие, что их базисные кривые изоморфны, иначе говоря, якобианы базисных кривых, входящих как прямые слагаемые в $J_3(Z)$ при раздутиях p , должны сокращаться при стягиваниях q , и то же самое для обратного отображения γ^{-1} .

Утверждение (i) доказано Бовилем и многими другими авторами (см., например, [11]). Утверждения (ii) – это результат Мамфорда–Бовиля (см., например, [17]). Утверждение (iii) – основной факт из теории промежуточного якобиана,

используемый в бирациональной геометрии 3-мерных многообразий (см., например, [17]).

Таким образом, для доказательства равенства $p_a(C) = p_a(\overline{C}_0)$ нам надо проверить только утверждение (iii) при отображении $X \dashrightarrow \overline{X}_0$. Мы знаем, что для любых двух стандартных форм $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi': X' \rightarrow S'$ одной и той же структуры расслоения на коники (т.е. с изоморфными общими слоями) $J_3(X) \simeq J_3(X')$, так как бирациональный переход от одной к другой осуществляется элементарными перестройками (см., например, [16]) и для каждой такой перестройки выполняется утверждение (iii).

Отсюда $J_3(X) \simeq J_3(X^*)$, где $\pi^*: X^* \rightarrow S^*$ – стандартная модель для $\mathbb{Q}$ -Мори расслоения на коники $\pi_m: X_m \rightarrow S_m$, а, следовательно, и для $\pi_n: X_n \rightarrow S_n$, использованная в доказательстве леммы 5. Теперь проверим, что $J_3(X^*) \simeq J_3(\overline{X}) \simeq J_3(\overline{X}_0)$. Бирациональные отображения $X^* \dashrightarrow X_m$ и $\overline{X} \dashrightarrow X_{n+1}$ – это обычные процедуры приведения к стандартным формам, которые в нашей ситуации являются последовательностью бирациональных преобразований, состоящих из разрешения терминальных особенностей, раздутия точек на базе с последующей заменой базы и элементарных перестроек (линков типа II) над вклеенными рациональными кривыми при раздутии не более чем лог-терминальных точек на базе. В любом случае в качестве исключительных дивизоров не могут появиться нерациональные поверхности. Бирациональное отображение $X_m \dashrightarrow X_n$ – это последовательность линков типа III, которые состоят из конечного числа флипов, флопов и антифлипов в смысле Мори (значит, здесь не возникают нерациональные исключительные дивизоры) и дивизориальных стягиваний в терминальные точки и на компоненты слоев расслоений на коники, стало быть, стягиваний рациональных поверхностей. Отображение $X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ – это линк типа IV, который является ни чем иным, как последовательностью флипов, флопов и антифлипов, и, как выше, не может иметь нерациональных исключительных дивизоров. Наконец, отображение $\overline{X} \dashrightarrow \overline{X}_0$ задается явной конструкцией, описанной в [9], и состоит из последовательности элементарных перестроек с рациональными исключительными дивизорами.

Таким образом, $J_3(X) \simeq J_3(\overline{X}_0)$ и $p_a(C) = p_a(\overline{C}_0)$, что и утверждалось. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При оценке рода $p_a(C) \leq 6$ мы использовали только неравенство (13). Дальнейшие рассуждения и последующие неравенства (14) могут пригодиться, когда условие на род $p_a(C) > 18$ в теореме будет снято. Приведенные соображения и неравенства (14) с помощью элементарных вычислений на линейчатых поверхностях позволяют получить полную классификацию всех возможностей для N, a, b, c, d, ν_i и ε_i . Отсюда можно извлечь, что если условия (i) и (ii) гипотезы I выполняются для стандартного расслоения на коники $\overline{\pi}: \overline{X} \rightarrow \overline{S}$, то они выполняются также и для $\pi: X \rightarrow S$, что дает возможность сделать индуктивный шаг в этом случае без предположения $p_a(C) > 18$. Мы не приводим здесь эти вычисления потому, что пока не удастся освободиться от этого ограничения на род в других местах, а именно, в шаге 1 и в шаге 2, случай $K_{Y_n}^2 = 3$.

Список литературы

1. Алексеев В. А. Условия рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхнос-

- тей Дель Пеццо степени 4 // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 724–730.
2. Алексеев В. А., Никулин В. В. Классификация поверхностей Дель Пеццо с лог-терминальными особенностями индекса 2, инволюции на поверхностях КЗ и группы отражений в пространствах Лобачевского // Доклады по математике и ее приложениям. Т. 2. № 2: Изд-во Москва–Тула, 1988. С. 51–150.
 3. Beltrametti M. On the Chow group and the intermediate Jacobian of conic bundle // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1985. V. 141. P. 331–351.
 4. Bindschadler D., Brenton L., Drucker D. Rational mappings of Del Pezzo surfaces, and singular compactifications of two-dimensional affine varieties // Tôhoku Math. J. 1984. V. 36. № 4. P. 519–609.
 5. Beauville A. Varieties de Prym et Jacobiennes intermediares // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1977. V. 10. № 3. P. 309–399.
 6. Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
 7. Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein threefolds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.
 8. Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125). № 1. С. 90–119.
 9. Исковских В. А. К проблеме рациональных расслоений на коники // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 1. С. 114–121.
 10. Iskovskikh V. A. On the rationality problem for conic bundle // Duke Math. J. 1987. V. 54. № 2. P. 271–294.
 11. Kanev V. I., Katsarkov L. V. Universal properties of Prym varieties of singular curves // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1988. V. 41. № 10. P. 25–27.
 12. Kollar J., Miyaoka Y., Mori S. Rational connected varieties // J. Algebraic Geom. 1992. V. 1. P. 429–448.
 13. Miyanishi M. Algebraic varieties and Analytic varieties // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 71. P. 69–99.
 14. Prokhorov Yu. On the $\mathbb{Q}$ -Fano fiber spaces with two-dimensional base // Preprint MPI 95/33, 1995.
 15. Prokhorov Yu. On extremal contractions from threefolds to surfaces // Preprint of Univ. Warwick, 1995.
 16. Саркисов В. Г. Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 918–945.
 17. Шокуров В. В. Многообразия Прима: теория и приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 4. С. 785–855.

Москва

Поступила в редакцию
25.01.1996