Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Матвеев, О связи неприводимых представлений алгебр Ли с неприводимыми представлениями p -групп, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:56:10

УДК 512

А. В. Матвеев

О связи неприводимых представлений алгебр Ли с неприводимыми представлениями p -групп

В работе доказывается теорема о соответствии между неприводимыми комплексными представлениями конечной p -группы и неприводимыми представлениями ассоциированной с ней нильпотентной алгебры Ли над полем характеристики p . В качестве следствия получается совпадение множеств степеней неприводимых представлений.

Библиография: 4 названия.

В этой заметке изучается вопрос о связи между неприводимыми представлениями p -группы и ассоциированной с ней алгебры Ли над полем $\mathbb{Z}_p$. Постановка такой задачи принадлежит А. И. Кострикину. Существует предположение, что наборы размерностей неприводимых представлений p -группы и ассоциированной с ней алгебры Ли совпадают. Некоторые результаты по этому поводу были получены в [3]. Здесь эти результаты обобщаются.

Пусть L – конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{Z}_p$, класса нильпотентности $c < p$. Определим на L с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа групповую операцию и обозначим полученную группу L° . Очевидно, что L° – p -группа (конечная) экспоненты p и класса нильпотентности c , если степень нильпотентности L есть $c - 1$. Очевидно также, что если P – подалгебра в L , то P° – подгруппа в L° , причем, если P – идеал, то P° – нормальная подгруппа в L° . Верно также и обратное утверждение. Кроме того, для членов нижнего центрального ряда алгебры Ли L и группы L° имеем $(L^k)^\circ = \gamma_k(L^\circ)$ (см. [2]).

Нам потребуются некоторые понятия и утверждения из [1]. Пусть L – конечномерная разрешимая p -алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики, большей двух, L^* – пространство линейных функций на L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $l \in L^*$, тогда p -подалгебра Ли P называется *поляризацией* для l , если:

- (a) $l(P^2) = \{0\}$,
- (b) P имеет наибольшую размерность среди всех подалгебр, удовлетворяющих пункту (a).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $l \in L^*$, то p -подалгебра Ли P в L называется *V -поляризацией* для l , когда существует цепь подалгебр

$$\{0\} \subset K_0 \subset \dots \subset K_n = P = G_n \subset \dots \subset G_0 = L$$

таких, что

- (a) $K_i \triangleleft G_i$ и $l(K^2) = \{0\}$,
- (b) $G_{i+1} = \{g \in G_i \mid l([f, g]) = 0 \forall f \in K_i\}$.

Пусть $P(l)$ – множество поляризаций для l , $P_V(l)$ – множество V -поляризаций для l . Пусть $s \in L^*$, тогда через $P(l, s)$ обозначим множество $\{P \in P(l) \mid l^P(f) - l(f^{[p]}) = s^P(f) \forall f \in P\}$; $P_V(l, s) \stackrel{\text{def}}{=} P(l, s) \cap P_V(l)$. Верно, что для любой $P \in P_V(l)$, $P(l)$ существует $s \in L^*$ такая, что $P \in P_V(l, s)$, $P(l, s)$, соответственно. В [1] доказаны следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $P_V(l) \neq \emptyset$ и $P_V(l) \subset P(l)$ для любой формы $l \in L^*$. Пусть $\widetilde{M}(l, s, P) \stackrel{\text{def}}{=} U(L, s) \otimes_{U(P, s|_P)} (Ku)^\lambda$ – подкрученный индуцированный L -модуль, где $\lambda = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad } L/P)$, а $(Ku)^\lambda$ – одномерный P -модуль, определяемый следующим образом:

$$f \circ u \stackrel{\text{def}}{=} (l(f) + \lambda(f))u \text{ для любого элемента } f \in P.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.

- (а) Если $P \in P_V(l, s)$, то $\widetilde{M}(l, s, P)$ – неприводимый L -модуль такой, что $\dim \widetilde{M}(l, s, P) = p^{\dim(L/P)}$.
- (б) Если M – неприводимый L -модуль, то существуют $l, s \in L^*$ и $P \in P_V(l, s)$ такие, что $M \cong \widetilde{M}(l, s, P)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $P \in P(l, s)$ и $Q \in P_V(l, s)$, то $\widetilde{M}(l, s, P) \cong \widetilde{M}(l, s, Q)$.

Обозначим групповой коммутатор $(\cdot, \cdot)$, лиевский $[\cdot, \cdot]$. Пусть $\mu \in L^*$; определим $\tilde{\mu}: P^\circ \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\tilde{\mu}(x) = \varepsilon^{\mu(x)}$ для любого $x \in L^\circ$, где ε – первообразный корень p -й степени из единицы.

ТЕОРЕМА. 1. Если $P \in P_V(\mu)$, то P° – подгруппа в L° такая, что представление L° , индуцированное с $\tilde{\mu}: P^\circ \rightarrow \mathbb{C}^*$, неприводимо.

2. Если M – неприводимый L° -модуль, соответствующий некоторому ненулевому представлению, то существует подалгебра $P \subset L$ такая, что

- (а) M изоморфен модулю, индуцированному с некоторого представления $l: P^\circ \rightarrow \mathbb{C}^*$;
- (б) существует форма $\mu \in P^*$ такая, что $l = \tilde{\mu}$, и для любой $\mu' \in L^*$, являющейся линейным продолжением μ , $P \in P(\mu')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По критерию Макки представление, индуцированное с $\tilde{\mu}$, неприводимо тогда и только тогда, когда для каждого $x \notin P^\circ$ существует элемент $y \in xHx^{-1} \cap H$ такой, что $\tilde{\mu}(y) \neq \tilde{\mu}(x^{-1}yx)$. Предположим, что условия критерия Макки выполнены, а именно, существует $x \in L \setminus P$ такой, что $\tilde{\mu}((x, p)) = 1$ или, что то же самое, $\mu((x, p)) = 0$ для любых $p \in P$ таких, что $(x, p) \in P^\circ$. Тогда существует i такое, что $x \in G_i$, $x \notin G_{i+1}$, и из определения V -поляризации следует, что существует $y \in K_i$ такой, что $\mu([x, y]) \neq 0$.

Поскольку для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = [a_1, a_2, \dots, a_n] + b, \quad b \in L^{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

при одной и той же расстановке скобок, то верно также, что $[x, y] = (x, y) + \sum k_j z_j$, где $k_j \in \mathbb{Z}_p$, z_j – групповые коммутаторы от x, y веса больше 2.

Любой групповой коммутатор от x, y принадлежит K_i , так как $K_i \triangleleft G_i$. Тогда $\mu(z_j) = 0$ для любого коммутатора z_j , у которого ни один из последних сомножителей не есть x , поскольку $\mu(K_i^2) = \{0\}$. В силу предположения $\mu(z_j) = 0$ для остальных коммутаторов z_i и $\mu((x, y)) = 0$.

Так как $\mu((x, y)) = \mu(z_j) = 0$, $\mu([x, y]) \neq 0$, получаем противоречие с полученным выше равенством.

2. Приступим к доказательству части 2 теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЕ. В условиях части 2 теоремы существуют подгруппы $G_0, \dots, G_n; K_0, \dots, K_n; T$ группы L° и представление $l: T \rightarrow \mathbb{C}^*$ такие, что

- (a) $K_n = T = G_n \subset \dots \subset G_0 = L^\circ$,
- (b) $K_i \triangleleft G_i, K_i \subseteq T, i = 0, \dots, n$,
- (c) $l(\gamma_2(K_i)) = \{1\}$,
- (d) $G_{i+1} = \{g \in G_i \mid l((f, g)) = 1 \forall f \in K_i\}$,
- (e) M изоморфен модулю, индуцированному с l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [4, с. 530]. Пусть G – неабелева сверхразрешимая группа, тогда существует нормальная абелева подгруппа, которая собственным образом содержит центр.

Построим подгруппы G_1 и K_0 .

Предположим вначале, что представление, соответствующее модулю M , – точное. Пусть K_0 – нормальная абелева подгруппа, собственным образом содержащая центр группы L° . Рассмотрим M как K_0 -модуль. Модуль M является прямой суммой одномерных K_0 -модулей. Обозначим через M_ψ подпространство, порожденное всеми одномерными K_0 -подмодулями, имеющими характер ψ . Тогда получаем разложение в прямую сумму подпространств $M = \sum M_\psi$.

Пусть $v \in M_\psi$, тогда для любых $f \in K_0, g \in L^\circ$ имеем:

$$f(gv) = g(g^{-1}fg)v = g\psi(g^{-1}fg)v = \psi_g(f)gv,$$

где ψ_g – функция на K_0 , определяемая равенством $\psi_g(f) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(g^{-1}fg)$.

Пользуясь тем, что представление точное, можно показать, как в [4, с. 532], что $M \neq M_\psi$. Несложно показать также, что элементы L° транзитивно переставляют подпространства M_ψ .

Пусть $M_1 = M_{\psi_1}$, где ψ_1 – некоторый фиксированный характер K_0 -модуля M . Определим подгруппу

$$G_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in L^\circ \mid gM_1 = M_1\} = \{g \in L^\circ \mid \psi_1(g^{-1}fg) = \psi_1(f) \forall f \in K_0\}.$$

Предположим теперь, что представление, соответствующее модулю M , не является точным, и $N \triangleleft L^\circ$ – ядро этого представления. Соответствующее представление группы G/N будет точным. Определим для него подгруппы $\tilde{G}_1, \tilde{K}_0$, функцию $\tilde{\psi}_1$ и подпространство M_1 , как мы это сделали в случае точного представления. Возьмем в качестве G_1, K_0, ψ_1 прообразы для $\tilde{G}_1, \tilde{K}_0, \tilde{\psi}_1$ при каноническом гомоморфизме $\varphi: G \rightarrow G/N$.

В любом случае верно следующее: $K_0 \triangleleft L^\circ$, $G_1 = \{g \in L^\circ \mid \psi_1(g^{-1}fg) = \psi_1(f) \forall f \in K_0\}$, $G_1 \neq L^\circ$, M_1 — неприводимый G_1 -модуль, L° -модуль M индуцирован с M_1 (см. [4, с. 532]).

Если $\dim(M_1) \neq 1$, то к G_1, M_1 можно применить те же рассуждения, построив таким образом K_1, G_2, M_2 , и т. д. В итоге получим: $T \stackrel{\text{def}}{=} G_n \subset G_{n-1} \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 \stackrel{\text{def}}{=} L^\circ$, $K_i \triangleleft G_i$, $M_n \subset M_{n-1} \subset \dots \subset M_1 \subset M_0 \stackrel{\text{def}}{=} M$, где $\dim(M_n) = 1$ и L° -модуль M индуцирован с T -модуля M_n .

Для любых $i, j = 0, \dots, n$ имеем $K_i \subseteq G_j$ (для $i \geq j$ это очевидно, для $i < j$ это доказывается индукцией), в частности, $K_i \subseteq T$ для любого i . Пусть $l \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n$. Очевидно, что $\psi_j = l|_{K_{j-1}}$, где $j = 1, \dots, n$, поэтому:

$$\begin{aligned} G_{i+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G_i \mid \psi_{i+1}(g^{-1}fg) = \psi_{i+1}(f) \forall f \in K_i\} \\ &= \{g \in G_i \mid l((f, g)) = 1 \forall f \in K_i\}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим теперь подалгебру Ли P в L такую, что $T = P^\circ$. Пусть $l: P^\circ \rightarrow \mathbb{C}^*$ — одномерное представление, определим функцию $\mu: P \rightarrow \mathbb{Z}_p$ так, что $l(f) = \varepsilon^{\mu(f)}$ для $p \in P$. Легко показать, что функция μ линейна.

Рассмотрим функцию l , построенную в утверждении. Так как $l((f, g)) = 1$ равносильно тому, что $\mu((f, g)) = 0$, то, аналогично доказательству части 1 теоремы, можно показать (поменяв местами групповой и лиевский коммутаторы), что P — максимальное вполне изотропное подпространство относительно билинейной формы $B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mu'([x, y])$. Показывается, что для любого $x \in L \setminus P$ существует элемент $p \in P$ такой, что $[x, y] \in P$ и $\mu([x, y]) \neq 0$.

Таким образом, P — поляризация и теорема доказана.

Используя приведенные выше утверждения из [1] и нашу теорему, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Множество степеней неприводимых представлений над $\mathbb{C}$ группы L° совпадает с множеством степеней абсолютно неприводимых представлений над $\mathbb{Z}_p$ алгебры Ли L .

Пользуясь случаем, я хотел бы выразить благодарность Ю. А. Бахтуруину за помощь в работе над этой заметкой.

Список литературы

1. Strade H. Darstellungen auflösbarer Lie- p -Algebren // Math. Ann. 1978. V. 232. № 1. P. 15–32.
2. Андреев К. К. Некоторые достаточные условия локальной нильпотентности в группах // Труды Моск. ин-та электр. машиностр. 1974. № 30. С. 19–31.
3. Басманова С. А. О связи между неприводимыми представлениями конечной p -группы и ассоциированной с ней алгеброй Ли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. № 5. С. 58–60.
4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.