Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Казарян, Об одной проблеме Ульянова, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 95–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:36:20

УДК 517.518.3

К. С. Казарян

Об одной проблеме Ульянова

В работе построена такая полная ортонормированная система функций $\Omega = \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Omega_n \in L_{[0,1]}^{\infty}$, что любой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Omega_n$ сходится п.в. на $[0, 1]$, если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, и для произвольного $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \notin l^2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Omega_n$ расходится п.в. Это дает полный ответ на проблему, поставленную П. Л. Ульяновым.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система (ОНС) функций, определенная на замкнутом интервале $[a, b]$. Будем говорить, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *системой расходимости*, если для произвольной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \notin l^2$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \quad (1.1)$$

расходится почти всюду (п.в.) на $[a, b]$. ОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой сходимости*, если ряд (1.1) сходится п.в. для любой $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$. Наконец, ОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой расходимости в слабом смысле*, если для произвольной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \notin l^2$ ряд (1.1) расходится на некотором множестве положительной меры. В работе [1] автор построил первую полную ортонормированную систему (ПОНС) функций, которая является системой расходимости. Полная ортонормированная система, которая является системой расходимости в слабом смысле, была впервые построена Б. С. Кашиным [2], [3]. Вопрос о существовании таких систем был поставлен П. Л. Ульяновым в докладе на Четвертом Всесоюзном математическом съезде [4], который состоялся летом 1961 года, потом эта проблема была сформулирована также в широко известной обзорной работе [5]. Приведем формулировку проблемы, следуя работе [5]: существует ли ортонормированная полная на $[0, 1]$ система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что всякий ряд вида (1.1) п.в. на $[0, 1]$ (или на множестве положительной меры) сходится, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty;$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Испании (грант № MTM2004-00678).

если же

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty,$$

то ряд (1.1) п.в. на $[0, 1]$ (или на множестве положительной меры) расходится.

Отметим, что Б. С. Капшин доказал [2], [6], что существует полная ОНС, которая одновременно является системой сходимости и системой расходимости в слабом смысле. Он же в работе [2] отметил, что проблема Ульянова остается открытой.

В настоящей статье дается окончательное положительное решение проблемы П. Л. Ульянова.

Будем говорить, что ОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *евклидовой системой*, если она одновременно является системой сходимости и системой расходимости. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует полная ОНС $\Omega = \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Omega_n \in L_{[0,1]}^{\infty}$, которая является евклидовой системой.*

Одной из принципиальных проблем теории ортогональных рядов является описание класса коэффициентов, для которых данная ортонормированная система сходится в определенном смысле. Построенная система $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет следующее свойство: любой ряд по системе Ω сходится на множестве положительной меры тогда и только тогда, когда его коэффициенты принадлежат l^2 , кроме того, если некоторый ряд по системе Ω сходится на множестве положительной меры, он сходится п.в. Заметим, что вышеуказанное свойство было известно только для некоторых лакунарных ортонормированных систем.

Существование систем расходимости приводит к некоторым следствиям, представляющим интерес в теории представления функций рядами (см. [7], [1]). В частности, оказывается, что любой нетривиальный ряд по системе Ω расходится п.в., если он сходится по мере к нулю. В то же время указанный факт показывает разницу между представлением функций сходящимися по мере рядами с одной стороны и представлением в смысле сходимости п.в., или на заданных фиксированных подмножествах положительной меры, с другой стороны. Вместо сходимости по мере можно рассматривать также сходимость по некоторым другим топологиям (см. [8]–[10]).

Будем говорить, что система определенных на $[0, 1]$ функций $\{f_n\}_1^{\infty}$ является *системой m -представления* для заданного F -пространства функций $\mathcal{F}$, если для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ можно найти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, который сходится к f по мере. Будем говорить, что пространство $\mathcal{F}$ является *R -пространством*, если любая система m -представления пространства $\mathcal{F}$ является системой m -представления для пространства $L_{[0,1]}^0$. В работе [8] было дано описание широкого класса F -пространств функций, которые являются R -пространствами. В указанный класс, в частности, входят все пространства $L_{[0,1]}^p$, $0 < p < \infty$.

Существование евклидовой ОНС показывает, что описанный выше феномен для пространств $L_{[0,1]}^p$, $2 \leq p < \infty$, не имеет места, когда рассматривается

представление функций в смысле поточечной сходимости на фиксированном множестве положительной меры.

Об идеях конструкции. Автор понимает, какая это непростая задача говорить об идеях конструкции и методах доказательства. Читатель может спросить, какой смысл говорить об идеях, если через несколько страниц можно найти полное доказательство и самому сделать выводы о них. Разделяя эту точку зрения, автор считает необходимым прояснить некоторые моменты доказательства, в частности, идя навстречу пожеланию рецензента предыдущей работы [1].

Прочитав формулировку проблемы Ульянова и зная элементарные свойства системы Радемахера $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, нетрудно заключить, что ключевым свойством является свойство полноты искомой ортонормированной системы. Хорошо известно, что система Радемахера обладает требуемыми условиями, но не является полной системой; более того, она неполна даже на подмножествах положительной меры. Наверняка у многих специалистов возникнет следующая мысль: дополнить систему Радемахера до полной ортонормированной системы, скажем, некоторыми функциями $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, а потом попытаться “растворить” функции $\psi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, в подходящим образом подобранных наборах функций Радемахера с помощью ортогональных преобразований. Хорошей иллюстрацией этого подхода может послужить работа А. М. Олевского [11], где строится равномерно ограниченная полная ортонормированная система, которая является системой сходимости. Кстати, это дает ответ на другую проблему Ульянова, поставленную в упомянутой выше обзорной работе [5].

Но в нашем случае легко убедиться, что этот подход ничего нового не даст. Например, если мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k$, который сходится п.в. и $\sum_1^{\infty} \alpha_k^2 = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, то, как бы мы ни выбирали наборы функций $r_{n_k}, r_{n_k+1}, \dots, r_{n_{k+1}}$ для $k \in \mathbb{N}$ и как бы ни преобразовывали функции $\psi_k, r_{n_k}, r_{n_k+1}, \dots, r_{n_{k+1}}$ с помощью ортогональных матриц, полученная полная ортонормированная система не будет ни системой расходимости, ни системой сходимости в слабом смысле. Это наталкивает на мысль вместо наборов функций Радемахера использовать наборы функций Меньшова, которые дают наибольшую осцилляцию, в частности, когда коэффициенты равны между собой. Конечно, задача намного усложняется, если не знать о существовании системы Меньшова. Отметим, что в работах [2], [6] независимо строится система, обладающая свойствами системы Меньшова, но впоследствии в комментариях в книге [3] приоритет построения подобной системы признается за Д. Е. Меньшовым.

Заметим, что после нахождения правильной первоначальной стратегии для решения проблемы остается еще много работы. Уже на следующем шаге подход, примененный нами, отличается от пути, избранного Б. С. Капиным. Мы отсылаем читателя к работе Б. С. Кашина [2] для дальнейших деталей построения ПОНС расходимости в слабом смысле. Отметим, что в последующей работе [6], где с помощью ПОНС расходимости в слабом смысле строится ПОНС, которая одновременно является системой сходимости, существенно используется теорема П. Шелина [12], утверждающая, что система Уолша является

системой сходимости. Используется также доказанная там же теорема о том, что в любом замкнутом бесконечномерном подпространстве L^2 функций, определенных на конечном интервале, можно найти полную ортонормированную систему сходимости. Отметим, что такой подход никак не может привести к построению евклидовой системы даже в том случае, когда мы знаем, как построить полную ортонормированную систему расходимости.

В отличие от Б. С. Кашина, который после построения системы, подобной системе Меньшова, дополнял ее до полной ортонормированной системы, автор, говоря несколько упрощенно, рассматривает дополнения наборов функций Меньшова в соответствующих конечномерных пространствах, прямая сумма которых дает все пространство L^2 . Этот подход позволяет “контролировать” все остальные функции и дает намного больше свободы, чтобы добиться расходимости рядов п.в., когда их коэффициенты не из l^2 . Более того, технически все становится прозрачно. Например, для того, чтобы показать, что построенная система является системой сходимости, нужен единственный нетривиальный результат – это теорема об ограниченности максимального оператора Харди–Литтлвуда для двоичных интервалов.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 2 приводятся некоторые определения и вспомогательные результаты, которые нам необходимы для доказательства теоремы 1.1. В § 3 мы строим вспомогательные ортонормированные системы и доказываем, что эти системы являются системами сходимости. В § 4 определяем систему $\Omega = \{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ и доказываем, что она является системой расходимости. То, что Ω является системой сходимости, следует из результатов, доказанных в § 3.

Автор признателен рецензенту за указанные недостатки в оформлении первоначального варианта работы.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Обозначим через $\mathcal{E}_{[a,b]}^k$ линейное пространство ступенчатых функций со скалярным произведением,

$$\mathcal{E}_{[a,b]}^k = \{f : f(x) = a_i, x \in [a, b]_{ki}, 1 \leq i \leq 2^k\},$$

где скалярное произведение определено так же, как в пространстве $L_{[a,b]}^2$, и

$$[a, b]_{ki} = \left(a + (i-1) \frac{b-a}{2^k}, a + i \frac{b-a}{2^k} \right).$$

В настоящей работе значения функций $f \in \mathcal{E}_{[a,b]}^k$ в точках разрыва произвольны, так как вопросы сходимости и расходимости рассматриваются п.в. В статье используется также следующее обозначение:

$$\mathcal{E}_{[a,b]}^{k,j} = \mathcal{E}_{[a,b]}^j \overset{L_{[a,b]}^2}{\ominus} \mathcal{E}_{[a,b]}^k,$$

где $j > k$. Обозначим через $I_E(x)$ характеристическую функцию измеримого множества E . Лебегова мера измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ будет обозначаться через $|E|$.

Функции Хаара определяются следующим образом: $h_1(t) = 1$ для всех $t \in [0, 1]$, для $k = 0, 1, 2, \dots$, при $j = 1, 2, \dots, 2^k$ полагаем

$$h_j^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \frac{2j-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2}, & \text{если } \frac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \frac{2j}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Если $n = 2^k + j$, то $h_n = h_j^{(k)}$ и замыкание носителя функции Хаара h_n обозначим через Δ_n или через $\Delta_j^{(k)}$.

Без труда можно показать, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ функции Хаара $\{h_n\}_{n=1}^{2^k}$ составляют ортонормальный базис в пространстве $\mathcal{E}_{[0,1]}^k$. Также можно легко проверить, что для $i, j \in \mathbb{N}$ и $j > i$ функции Хаара $\{h_n\}_{n=2^i+1}^{2^j}$ составляют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{E}_{[0,1]}^{i,j}$.

Система Радемахера $\{r_n(t)\}_{n=1}^\infty$ — это ортонормированная система функций, определенных на замкнутом интервале $[0, 1]$. Для нас более удобно считать, что функции Радемахера определены на всей действительной оси:

$$r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Одним из важных результатов, касающихся системы Радемахера, является следующее неравенство Хинчина [13]: для произвольного $p > 0$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} \left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right)^{p/2}.$$

Используя неравенство Хинчина для $p = 4$, легко получаем, что

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leq 8 \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^n a_k r_k(t) \right| dt. \quad (2.1)$$

Для нашего построения полезно заметить, что $r_n(\cdot) \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для произвольного натурального числа $k \geq 3$ пусть $M_k \in \mathcal{E}_{[-1,1]}^{k+1}$ — нечетная 2-периодичная функция на действительной оси $\mathbb{R}$, определенная следующими условиями:

$$M_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{8i} \cdot 2^{k/2}, & \text{если } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad 1 \leq |i| \leq 2^k - 1, \\ 0, & \text{если } x \in (-2^{-k}, 0) \cup (1 - 2^{-k}, 1). \end{cases}$$

Назовем M_k , $k \geq 3$, функциями Меньшова, так как идея построения таких функций восходит к Д. Е. Меньшову [14]. Наше построение конструктивное,

и в числе других свойств функций M_k , $k \geq 3$, нам необходимо также следующее свойство:

$$\int_{-1}^1 M_k(x) dx = 0 \quad \forall k \geq 3. \quad (2.2)$$

Обозначим

$$M_{k,i}(x) = M_k(x - i \cdot 2^{-k}) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$S_k^*(\mathbf{a}, \omega)(x) = \sup_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \left| \sum_{i=0}^j a_i (M_{k,i}(x) + \omega) \right|,$$

где $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=0}^{2^k-1}$ – произвольный набор 2^k действительных чисел и $\omega \in \mathbb{R}$.

Нам необходимы следующие леммы 2.1, 2.2, доказательства которых можно найти в работе [1].

ЛЕММА 2.1. Для произвольного $k \geq 2$ и произвольного $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=0}^{2^k-1}$

$$\int_{-1}^1 S_k^*(\mathbf{a}, \omega)(x) dx \geq \frac{1}{6} (k + |\omega|) 2^{-k/2} \left| \sum_{i=0}^{2^k-1} a_i \right|. \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.2. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ существует ортонормированная система $\{f_k^i\}_{i=0}^{2^k-1}$ в $L^2_{[-2,2]}$ такая, что

$$f_k^i(x) = \begin{cases} M_{k,i}(x), & \text{если } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{если } x \in [-2, -1), \end{cases}$$

$$\int_{-2}^2 f_k^i(x) dx = 0 \quad \text{для всех } 0 \leq i \leq 2^k - 1 \quad (2.4)$$

и $f_k^i \in \mathcal{E}_{[-2,2]}^{k+3}$.

Отметим, что свойство (2.2) используется для доказательства условия (2.4).

Доказательство следующей леммы можно найти в [15; с. 8].

ЛЕММА 2.3. Пусть $f \in L^2(G)$ – не эквивалентная нулю функция, где множество G удовлетворяет следующим условиям: $G \subset \mathbb{R}$, $|G| = 1$ и $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$|\{x \in G : |f(x)| \geq \lambda \|f\|_1\}| \geq (1 - \lambda)^2 \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_2} \right)^2.$$

Хорошо известна следующая лемма Бореля–Кантелли.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^\infty$, $E_j \subset G \subset \mathbb{R}^n$, $|G| = 1$, – последовательность независимых множеств и $\sum_{j=1}^\infty |E_j| = +\infty$. Тогда $|\limsup_j E_j| = 1$.

По всей видимости, следующий результат впервые был доказан в [16].

ЛЕММА 2.5. Пусть $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированная система независимых функций на $[0, 1]$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\int_{[0,1]} \sup_k \left| \sum_{i=1}^k a_i \phi_i(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{i=1}^\infty a_i^2$$

для произвольной последовательности $\{a_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$.

Доказательство следующей леммы можно найти в [7].

ЛЕММА 2.6. Пусть $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система независимых функций, определенных на $[0, 1]$ и таких, что

$$\int_{[0,1]} \phi_i(t) dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{[0,1]} |\phi_i(t)| dt > \alpha > 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда существуют постоянные $C_l > 0$, $l = 1, 2$, такие, что

$$\left| \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{i=1}^k a_i \phi_i(x) \right| \geq C_1 \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2} \right\} \right| \geq C_2$$

для произвольных чисел $\{a_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$.

В [3; гл. 2, п. 2] указано, что имеет место результат, подобный лемме 2.6. К сожалению, нам не удалось найти в упомянутой книге какое-либо указание на идею доказательства. После публикации статьи [7] автору стало известно, что подобное утверждение можно получить, применяя результаты работы [16]. Идея следующей леммы, видимо, принадлежит Б. С. Кашину (см. [6]). Мы дадим более общую формулировку с более простым доказательством.

ЛЕММА 2.7. Пусть $f \in L_{[0,1]}^p$, $1 \leq p < \infty$, и $\Lambda_f(t) := |\{x \in [0, 1] : |f(x)| > t\}|$. Положим

$$f_p^\natural(x) = 2^{k/p} f(2^k x - 1), \quad x \in (2^{-k}, 2^{-k+1}], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\Lambda_{f_p^\natural}(t) \leq C_p t^{-p} \|f\|_p^p, \quad C_p = \frac{2^{1/p}}{p(2^{1/p} - 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.5) легко получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_{f_p^\natural}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} |\{x \in (2^{-k}, 2^{-k+1}] : |f_p^\natural(x)| > t\}| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |\{x \in [0, 1] : |f(x)| > 2^{-k/p} t\}| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Lambda_f(2^{-k/p} t). \end{aligned}$$

Так как

$$2^{-k} \Lambda_f(2^{-k/p} t) = t^{-p} (2^{-k/p} t)^{p-1} \Lambda_f(2^{-k/p} t) (2^{-k/p} - 2^{-(k+1)/p}) t \frac{1}{1 - 2^{-1/p}},$$

то легко заканчиваем доказательство, применяя формулу

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \Lambda_f(t) dt.$$

Следующие утверждения (см. [1]) будут использованы при построении системы Ω .

ЛЕММА 2.8. Пусть $\{\bar{F}_j\}_{j=0}^\infty$ – последовательность периодических с периодом 1 не постоянных функций, определенных на действительной оси, и

$$\bar{F}_j(x)|_{[0,1]} \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{n_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}, \quad \text{где } n_j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ – подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_j \geq n_{j-1}^* \quad \text{для всех } j \geq 2,$$

где n_{j-1}^* – минимальное целое число, для которого

$$\bar{F}_{j-1}(2^{\lambda_{j-1}}x)|_{[0,1]} \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{n_{j-1}^*}.$$

Тогда система функций $\{F_j\}_{j=0}^\infty$, где $F_j(x) = \bar{F}_j(2^{\lambda_j}x)|_{[0,1]}$, является системой независимых функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для произвольного натурального числа $N \geq 2$ и $\delta_N = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)$

$$\mathcal{K}_N = (\kappa_{ij}^{(N)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N+1}} & \frac{1}{\sqrt{N+1}} & \frac{1}{\sqrt{N+1}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N+1}} \\ 1 - \delta_N & -\delta_N & \dots & -\delta_N & \frac{1}{\sqrt{N+1}} \\ -\delta_N & 1 - \delta_N & \dots & -\delta_N & \frac{1}{\sqrt{N+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\delta_N & -\delta_N & \dots & 1 - \delta_N & \frac{1}{\sqrt{N+1}} \end{pmatrix}$$

является ортогональной матрицей порядка $N+1$.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{N+1}$ – совокупность определенных на $[0, 1]$ функций таких, что для произвольных $\{a_k\}_{k=1}^{N+1} \subset \mathbb{R}$

$$\int_{[0,1]} \sup_m \left| \sum_{k=1}^m a_k f_k(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{k=1}^{N+1} a_k^2$$

для некоторого $C > 0$. Тогда множество функций

$$\tilde{f}_j(x) = -\delta_N \sum_{i=1}^N f_{i+1}(x) + f_{j+1}(x) + \frac{1}{\sqrt{N+1}} f_1(x), \quad 1 \leq j \leq N,$$

где δ_N определено как в предложении 1, будет удовлетворять следующему условию: для произвольных чисел $\{b_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$

$$\int_{[0,1]} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=1}^m b_k \tilde{f}_k(x) \right|^2 dx \leq 14C \sum_{k=1}^N b_k^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующие неравенства дают нам нужную оценку:

$$\begin{aligned}
 \int_{[0,1]} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=1}^m b_k \tilde{f}_k(x) \right|^2 dx &\leq \frac{3C}{N+1} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=1}^m b_k \right|^2 \\
 &+ 3 \int_{[0,1]} \left| \sum_{k=1}^N \delta_N^{1/2} f_{1+k}(x) \right|^2 dx \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=1}^m \delta_N^{1/2} b_k \right|^2 \\
 &+ 3 \int_{[0,1]} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=1}^m b_k f_{1+k}(x) \right|^2 dx \\
 &\leq 3C \sum_{k=1}^N b_k^2 + 8C \sum_{k=1}^N b_k^2 + 3C \sum_{k=1}^N b_k^2 \leq 14C \sum_{k=1}^N b_k^2.
 \end{aligned}$$

§ 3. Построение евклидовой ПОНС

Для построения евклидовой системы Ω мы сначала построим две вспомогательные полные ортонормированные системы.

3.1. Построение первой вспомогательной ПОНС. Предположим, что функции $\{f_k^i\}_{i=0}^{2^k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, которые определены на замкнутом интервале $[-2, 2]$, продолжены с периодом 4 на всю действительную ось, и определим

$$g_1^i(x) = \begin{cases} 2f_2^i(8x-2), & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ r_{9+i}(x)I_{(1/2, 1]}, & \text{если } x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

для $0 \leq i \leq 2^2 - 1$. Легко проверить, что функции $\{g_1^i(x)\}_{i=0}^3$ ортонормированные в пространстве $L_{[0,1]}^2$. Пусть k_1 – наименьшее натуральное число такое, что

$$g_1^i \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_1}, \quad 0 \leq i \leq 2^2 - 1.$$

Возьмем множество ортонормированных функций

$$\psi_\nu \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_1+1}, \quad 1 \leq \nu \leq 2^{k_1+1} - 5 = m_1, \quad k_1 \geq 2,$$

где $\psi_1(t) = 1$, если $t \in [0, 1]$. Они ортогональны в $L_{[0,1]}^2$ к функциям

$$g_1^i, \quad 0 \leq i \leq 2^2 - 1, \quad h_1^{(k_1)}, \quad (3.1)$$

где $h_1^{(k_1)}$ – функция Хаара. Отметим, что

$$h_1^{(k_1)} \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_1, k_1+1}.$$

Следовательно, функции (3.1) являются ортонормированным набором функций. Таким образом, построенные функции

$$\{g_1^i(x)\}_{i=0}^3 \cup \{h_1^{(k_1)}\} \cup \{\psi_\nu(x)\}_{\nu=1}^{m_1}$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{E}_{[0,1]}^{k_1+1}$.

На n -м шаге, $n > 1$, нашего построения определим

$$\widehat{g}_n^i(x) = \begin{cases} n^{-1} 2^n f_{2n}^i(2^{2n^2+2}(x - 2^{-2n^2})), & \text{если } x \in [0, 2^{-2n^2}], \\ n^{-1} 2^{k/2} f_{2n}^i(2^{k+2}(x - 2^{-k})), & \text{если } x \in (2^{-k}, 2^{-k+1}], \ 2 \leq k \leq 2n^2, \\ r_{k_{n-1}+3+i}(x) I_{(1/2, 1]}, & \text{если } x \in (1/2, 1], \ 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1. \end{cases}$$

Тогда, как и выше, продолжим функции $\widehat{g}_n^i$, $0 \leq i \leq 2^{2n} - 1$, периодически с периодом 1 на всю вещественную ось и обозначим

$$g_n^i(x) = \widehat{g}_n^i(2^{k_{n-1}+2n^2+1}x) \quad \text{для всех } 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что функции $\{g_n^i(x) : 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1\}$ ортонормированные в пространстве $L_{[0,1]}^2$. Если k_n – наименьшее натуральное число такое, что

$$g_n^i \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_n}, \quad 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1,$$

то согласно (3.2) и лемме 2.2

$$g_n^i \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_{n-1}+1, k_n}, \quad 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1.$$

Возьмем множество ортонормированных функций

$$\psi_\nu \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_{n-1}+1, k_n+1}, \quad m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq 2^{k_n+1} - 2^{2n} - 1 = m_n,$$

которые вместе с функциями

$$g_n^i, \quad 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1, \quad h_1^{(k_{n+1})}$$

образуют ортонормированную систему в $L_{[0,1]}^2$. Как и выше, заключаем, что множество функций

$$\{g_n^i(x)\}_{i=0}^{2^{2n}-1} \cup \{h_1^{(k_n)}(x)\} \cup \{\psi_\nu(x)\}_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}$$

есть ортонормированный базис в $\mathcal{E}_{[0,1]}^{k_{n-1}+1, k_n+1}$. Следовательно,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_n^i(x)\}_{i=0}^{2^{2n}-1} \cup \{h_1^{(k_n)}(x)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\psi_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$$

является полной ОНС в $L_{[0,1]}^2$. Из построения непосредственно следует, что

$$\int_{\Delta_\nu^{(k)}} \left(\sum_{i=0}^{2^{2n}-1} a_i g_n^i(x) \right)^2 dx = |\Delta_\nu^{(k)}| \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} a_i^2$$

для произвольного двоичного интервала

$$\Delta_\nu^{(k)} = \left(\frac{\nu-1}{2^k}, \frac{\nu}{2^k} \right), \quad 1 \leq \nu \leq 2^k, \quad 1 \leq k \leq k_{n-1} + 2n^2 + 1.$$

Кроме того, из условия (2.4) леммы 2.2 получим, что для произвольного $\omega \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Delta_\nu^{(k)}} \left(\omega + \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} a_i g_{n+1}^i(x) \right)^2 dx = |\Delta_\nu^{(k)}| \left(\omega^2 + \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} a_i^2 \right). \quad (3.3)$$

Имеем также, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\|\psi_\nu\|_\infty \leq \sqrt{2^{k_n+1}} \quad \text{для всех } m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq m_n, \quad m_0 = 0, \quad (3.4)$$

так как эти функции принадлежат пространству $\mathcal{E}_{[0,1]}^{k_n+1}$. Заметим, что

$$m_n < 2^{k_n+1} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Для доказательства нам необходимо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для произвольной последовательности $\{c_\nu\}_{\nu=1}^\infty \in l^2$

$$\int_{[0,1]} \sup_n \left| \sum_{\nu=1}^{m_n} c_\nu \psi_\nu(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{\nu=1}^\infty c_\nu^2$$

для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(x) = \sum_{\nu=1}^\infty c_\nu \psi_\nu(x)$. Тогда ортогональная проекция $P(f)$ на подпространство $\mathcal{E}_{[0,1]}^{k_n+1}$ равна

$$|\Delta_\nu^{(k_n+1)}|^{-1} \int_{\Delta_\nu^{(k_n+1)}} f(t) dt$$

на двоичном интервале $\Delta_\nu^{(k_n+1)}$, $1 \leq \nu \leq 2^{k_n+1}$. Таким образом, $|\sum_{\nu=1}^{m_n} c_\nu \psi_\nu(x)|$ можно оценить с помощью максимальной функции Харди–Литтлвуда от f . Следовательно, мы закончим доказательство, применив ограниченность в $L_{[0,1]}^2$ указанного оператора (см. [17; с. 33]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Система функций $\{g_n^i(x) : 0 \leq i \leq 2^{2n^2} - 1\}_{n=1}^\infty$, пронумерованная в естественном порядке, является ортонормированной в $L_{[0,1]}^2$ системой сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, как и при доказательстве предложения 2, мы легко получаем, что для произвольной последовательности чисел $\{c_n^i : 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1\}_{n=1}^\infty$ такой, что

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} |c_n^i|^2 < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\int_{[0,1]} \sup_n \left| \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} c_n^i g_n^i(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} |c_n^i|^2$$

для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от коэффициентов. Из теоремы Меньшова–Радемахера (см. [3; гл. 8, п. 1, лемма 1]) получим, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[0,1]} \max_{0 \leq m < 2^{2n}} \left| \sum_{i=0}^m n^{-1} c_n^i f_{2n^2}^i(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{i=0}^{2^{2n^2}-1} |c_n^i|^2$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Следовательно, согласно определению функций $\{\hat{g}_n^i(x) : 0 \leq i \leq 2^{2n} - 1\}$, условию (3.2) и лемме 2.7 мы легко заканчиваем доказательство.

3.2. Построение второй вспомогательной ПОНС. В этом пункте с помощью ортогональных матриц $\mathcal{H}_N$ мы преобразуем множество ортонормированных функций

$$\{h_1^{(k_n)}(x)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\psi_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$$

в ортонормированную систему сходимости $\{\xi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$. Кроме того, мы получаем некоторые оценки для $\|\xi_l\|_{L_{[\eta_l,1]}^\infty}$, где $\eta_l \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$.

Пусть

$$q_0 = 0, \quad q_n = (2^{2(k_n+1)} - 1)(m_n - m_{n-1}) \quad \text{для произвольного } n \in \mathbb{N}.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\begin{aligned} p(n) &= 2^{2(k_n+1)}, \\ q_\nu(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} q_i + (\nu - m_{n-1} - 1)(2^{2(k_n+1)} - 1), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq m_n$. Далее, для произвольного ν , $m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq m_n$, определим

$$\phi_j^\nu(x) = \kappa_{1j}^{(p(n))} \psi_\nu(x) + \sum_{i=2}^{p(n)} \kappa_{ij}^{(p(n))} h_1^{k_{q_\nu(n)}+i-1}(x), \quad 1 \leq j \leq p(n). \quad (3.7)$$

Согласно (3.4), (3.6) и (3.7) получим, что для произвольного натурального числа $\nu \in [m_{n-1} + 1, m_n] \cap \mathbb{N}$

$$|\phi_j^\nu(x)| \leq \sqrt{2^{-k_n-1}} \quad \forall x \in [2^{-k_{q_\nu(n)}}, 1] \quad \text{и} \quad \forall j \in [1, p(n)] \cap \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Согласно условиям (3.4), (3.5) и (3.7) получим, что для произвольного натурального числа $\nu \in [m_{n-1} + 1, m_n] \cap \mathbb{N}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_j^\nu \cdot I_{[2^{-k_n-1}, 1]} \in \mathcal{E}_{[0,1]}^{k_n+1} \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq p(n). \quad (3.9)$$

Чтобы пронумеровать полученные функции, положим

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_n = \sum_{j=1}^n 2^{2(k_j+1)}(m_j - m_{j-1}) \quad (3.10)$$

и

$$\rho_\nu(n) = \rho_{n-1} + (\nu - m_{n-1} - 1)2^{2(k_n+1)}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq m_n$. Пусть $\xi_l(x) = \phi_j^\nu(x)$, если $l = \rho_\nu(n) + j$, $1 \leq j \leq p(n)$ и $m_{n-1} + 1 \leq \nu \leq m_n$. Отсюда и из (3.9) следует, что для произвольного $l \in \mathbb{N}$

$$\rho_{n-1} < l \leq \rho_n \quad (3.11)$$

и для произвольного двоичного интервала

$$\Delta_\nu^{(k_n+1)} = \left(\frac{\nu-1}{2^{k_n+1}}, \frac{\nu}{2^{k_n+1}} \right), \quad 2 \leq \nu \leq 2^{k_n+1},$$

функция ξ_l постоянна на $\Delta_\nu^{(k_n+1)}$:

$$\xi_l(x) = \omega_\nu^l \quad \text{для } x \in \Delta_\nu^{(k_n+1)}, \quad 2 \leq \nu \leq 2^{k_n+1}. \quad (3.12)$$

Таким образом, построенное множество функций

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_n^i(x)\}_{i=0}^{2^{2n}-1} \cup \{\xi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$$

является ПОНС в $L^2_{[0,1]}$. Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для произвольной последовательности $\{c_l\}_{l=1}^{\infty} \in l^2$

$$\int_{[0,1]} \sup_n \left| \sum_{l=1}^{m_n} c_l \xi_l(x) \right|^2 dx \leq C \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2$$

для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсистема $\{h_1^{(k_n)}(x)\}_{n=1}^{N+1} = \{h_{2^{k_n}+1}(x)\}_{n=1}^{N+1}$ системы Хаара удовлетворяет условиям леммы 2.9 при любом натуральном N (см. [3; гл. 3, п. 2, теорема 4 для $p = 2$]). Поэтому предложение 4 вытекает из предложения 2 и леммы 2.9.

§ 4. Построение евклидовых ПОНС

В этом параграфе мы построим евклидову систему, преобразовав конечные ортонормированные наборы функций

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_n^i(x)\}_{i=0}^{2^{2n}-1} \cup \{\xi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$$

с помощью ортогональных матриц $\mathcal{K}_N$, $N = 2^{2n}$. Пусть

$$\Omega_j^n(x) = \kappa_{1j}^{(2n+1)} \xi_n(x) + \sum_{i=2}^{2^{2n}+1} \kappa_{ij}^{(2n+1)} g_n^{i-2}(x), \quad 1 \leq j \leq 2^{2n} + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что полученная система функций

$$\left\{ \left\{ \Omega_j^n(x) \right\}_{j=1}^{2^{2n}+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

снова является ортонормированной системой. Пронумеруем эти функции в естественном порядке: пусть $\mu_0 = 0$, $\mu_m = \mu_{m-1} + 2^{2m} + 1$, тогда

$$\Omega_k(x) = \Omega_j^m(x), \quad \text{если } k = \mu_{m-1} + j, \quad \text{где } 1 \leq j \leq 2^{2m} + 1.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *ОНС $\{\Omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости.*

Теорема 4.1 непосредственно следует из леммы 2.9 и предложений 3 и 4.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.2. *ОНС $\{\Omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой расходимости.*

Основные этапы доказательства теоремы 4.2 совпадают с этапами доказательства основной теоремы работы [1]. Для удобства читателя дадим некоторые подробности доказательства.

4.1. Доказательство теоремы 4.2. Предположим, что задан некоторый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Omega_k(x), \quad \text{где } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = +\infty.$$

Положим

$$\alpha_j^m = \alpha_k, \quad \text{если } k = \mu_{m-1} + j, \quad \text{где } 1 \leq j \leq 2^{2m} + 1.$$

Согласно построению имеем

$$\sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \alpha_k \Omega_k(x) = \sum_{j=1}^{2^{2m}+1} \alpha_j^m \Omega_j^m(x) = \beta_m \xi_m(x) + \sum_{i=0}^{2^{2m}-1} \gamma_m^i g_m^i(x)$$

и

$$\mathcal{M}_m^2 = \sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \alpha_k^2 = \beta_m^2 + \sum_{i=0}^{2^{2m}-1} (\gamma_m^i)^2.$$

Кроме того,

$$\beta_m = \frac{1}{\sqrt{2^{2m}+1}} \sum_{j=1}^{2^{2m}+1} \alpha_j^m = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{2^{2m}+1} \alpha_j^m \Omega_j^m(x) \right] \xi_m(x) dx.$$

Следовательно, согласно неравенству Коши

$$|\beta_m| \leq \mathcal{M}_m \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1]$ обозначим

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{\varepsilon}{4} \mathcal{M}_m \leq |\beta_m| \right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^c = \mathbb{N} \setminus \Omega_\varepsilon = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{\varepsilon}{4} \mathcal{M}_m > |\beta_m| \right\}.$$

Очевидно, $\Omega_\varepsilon \supseteq \Omega_\delta$ для $0 < \varepsilon < \delta \leq 1$. Возможны два случая: $\sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m_s}^2 = +\infty$ для некоторой $\{m_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \Omega_\varepsilon$ или $\sum_{m \in \Omega_\varepsilon} \mathcal{M}_m^2 < +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, 1]$.

4.2. Случай, когда $\sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m_s}^2 = +\infty$ для некоторой $\{m_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \Omega_{\varepsilon}$. Пусть $\{m_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \Omega_{\varepsilon}$ – произвольная подпоследовательность натуральных чисел из Ω_{ε} такая, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m_s}^2 = +\infty. \quad (4.1)$$

Не теряя в общности, можем считать, что

$$2^{-s} \leq \mathcal{M}_{m_s}, \quad (4.2)$$

так как если отбросить члены, которые не удовлетворяют условию (4.2), то условие (4.1) остается справедливым. Положим

$$\begin{aligned} \sigma_m^*(x) &= \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^m \Omega_j^m(x) \right| \\ &= \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^m \left(\frac{1}{\sqrt{2^{2m}+1}} \xi_m + \sum_{i=2}^{2^{2m}} \kappa_{ij}^{(2^{2m}+1)} g_m^{i-2}(x) \right) \right|. \end{aligned}$$

Для

$$\rho_{n-1} < m \leq \rho_n \quad (4.3)$$

согласно (3.11) и (3.12) получим

$$\sigma_m^*(x) \leq \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^m \left(\frac{1}{\sqrt{2^{2m}+1}} \omega_{\nu}^m + \sum_{i=2}^{2^{2m}} \kappa_{ij}^{(2^{2m}+1)} g_m^{i-2}(x) \right) \right|,$$

если $x \in \Delta_{\nu}^{(k_n+1)}$, $2 \leq \nu \leq 2^{k_n+1}$. Легко заметить (см. (3.10), (4.3)), что

$$m > n + 2 \quad \text{для всех } s \geq 4. \quad (4.4)$$

Таким образом, если $x \in \Delta_{\nu}^{(k_{m-1}+1)}$, где $\nu \in [2^{k_{m-1}-k_{n+1}}, 2^{k_{m-1}}] \cap \mathbb{N}$, то

$$\sigma_m^*(x) \leq \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^m \left(\frac{1}{\sqrt{2^{2m}+1}} \omega_{\nu}^* + \sum_{i=2}^{2^{2m}} \kappa_{ij}^{(2^{2m}+1)} g_m^{i-2}(x) \right) \right|,$$

где $\omega_{\nu}^* = \omega_{\nu_1}^m$ и $\Delta_{\nu}^{(k_{m-1}+1)} \subset \Delta_{\nu_1}^{(k_n+1)}$.

Определим $\tau_s \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\sqrt{2^{\tau_s-1}} \mathcal{M}_{m_s} < 1 \leq \sqrt{2^{\tau_s}} \mathcal{M}_{m_s}. \quad (4.5)$$

Согласно (4.2) имеем $2 \leq \tau_s \leq 2s + 1$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$E_{s,\nu} = \{x \in \Delta_{\nu}^{(k_{m_s-1}+1)} : I_{[2^{-\tau_s}, 2^{-\tau_s+1}]}(2^{k_{m_s-1}+2m_s^{2+1}}x) = 1\},$$

где предполагается, что характеристическая функция I_E продолжена периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Очевидно, что

$$|E_{s,\nu}| = 2^{-\tau_s} |\Delta_{\nu}^{(k_{m_s-1}+1)}|. \quad (4.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{m_s}^*(x) &\geq \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} g_{m_s}^{j-1}(x) \right| \\ &\quad - \delta_{2^{2m_s}+1} \left| \frac{\delta_{2^{2m_s}+1}^{-1} \omega_\nu^*}{\sqrt{2^{2m_s}+1}} - \sum_{j=1}^{2^{2m_s}} g_{m_s}^{j-1}(x) \right| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}+1} |\alpha_j^{m_s}| \\ &= \hat{\sigma}_{m_s}^*(x) - \hat{R}_\nu^s(x), \quad \text{если } x \in E_{s,\nu},\end{aligned}$$

$2^{k_{m_s-1}-k_{n_s}+1} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s}-1}$, где через n_s обозначено число, которое соответствует числу n , если в условии (4.3) заменим m на m_s . Применяя равенство (3.3), получим

$$\begin{aligned}\int_{E_{s,\nu}} \hat{R}_\nu^s(x) dx &\leq \sqrt{|E_{s,\nu}|} \left(\int_{E_{s,\nu}} (\hat{R}_\nu^s(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 4 \frac{\mathcal{M}_{m_s} \sqrt{|E_{s,\nu}|}}{\sqrt{2^{2m_s}+1}} \left(\int_{E_{s,\nu}} \left((2^{2m_s}+1)(\omega_\nu^*)^2 + \sum_{j=1}^{2^{2m_s}+1} (g_{m_s}^{j-1}(x))^2 \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq 4|E_{s,\nu}| \mathcal{M}_{m_s} \sqrt{(\omega_\nu^*)^2 + m^{-2}} \leq 4\sqrt{(2^{-k_{n_s}-1}) + m_s^{-2}} |E_{s,\nu}| \mathcal{M}_{m_s}\end{aligned}$$

для всех ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s}+1} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s}-1}$. Последнее неравенство следует из условий (3.8), (3.12).

С другой стороны, из определения функций (3.2) мы приходим к заключению, что для всех ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s}+1} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s}-1}$,

$$\begin{aligned}\int_{E_{s,\nu}} \hat{\sigma}_{m_s}^*(x) dx &= \int_{E_{s,\nu}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} \hat{g}_{m_s}^{j-1}(2^{k_{m_s-1}+2m_s^2+1}x) \right| dx \\ &= |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}| \int_{2^{-\tau_s}}^{2^{-\tau_s+1}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}+1} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} \hat{g}_{m_s}^{j-1}(x) \right| dx \\ &= \frac{1}{m_s} 2^{\tau_s/2} |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}| \int_{2^{-\tau_s}}^{2^{-\tau_s+1}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} f_{2m_s}^{j-1}(2^{\tau_s+2}x - 4) \right| dx \\ &= \frac{1}{m_s} 2^{-\tau_s/2} |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}| \int_0^4 \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} f_{2m_s}^{j-1}(y) \right| dy \\ &\geq 2^{\tau_s/2} \frac{|E_{s,\nu}|}{6} 2^{-m_s} \left| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}} \alpha_j^{m_s} \right|.\end{aligned}$$

Последние два неравенства мы получаем, применяя последовательно лемму 2.2 и лемму 2.1 (см. (2.3)), а также условие (4.6). Имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}} \alpha_j^{m_s} \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}+1} \alpha_j^{m_s} \right| - |\alpha_{2^{2m_s}+1}^{m_s}| \geq \left| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}+1} \alpha_j^{m_s} \right| - \mathcal{M}_{m_s} \geq \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{2^{2m_s}+1} \alpha_j^{m_s} \right|$$

для произвольного $m_s \geq N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = 2 \log_2(8/\varepsilon)$. Следовательно, для произвольного $m_s \geq N_\varepsilon$

$$\int_{E_{s,\nu}} \hat{\sigma}_{m_s}^*(x) dx \geq 2^{\tau_s/2} \frac{|E_{s,\nu}|}{12} 2^{-m_s} \left| \sum_{j=1}^{2^{m_s}+1} \alpha_j^{m_s} \right|.$$

Таким образом, если возьмем $\hat{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ так, что

$$4\sqrt{(2^{-k_{n_s}-1}) + m_s^{-2}} < \frac{\varepsilon}{96}, \quad \text{когда } m_s > \hat{N}_\varepsilon,$$

то получим

$$\begin{aligned} \int_{E_{s,\nu}} \sigma_{m_s}^*(x) dx &\geq \int_{E_{s,\nu}} \hat{\sigma}_{m_s}^*(x) dx - \int_{E_{s,\nu}} \hat{R}_\nu^{m_s}(x) dx \\ &\geq 2^{\tau_s/2} \frac{|E_{s,\nu}|}{6} 2^{-m_s} \left| \sum_{j=1}^{2^{m_s}+1} \alpha_j^{m_s} \right| - 4\sqrt{(2^{-k_{n_s}-1}) + m_s^{-2}} |E_{s,\nu}| \mathcal{M}_{m_s} \\ &\geq 2^{\tau_s/2} \frac{|E_{s,\nu}|}{96} \varepsilon \mathcal{M}_{m_s} \end{aligned}$$

для всех ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s}+1} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s}-1}$.

Согласно (3.2) и теореме Меньшова–Радемахера имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_{s,\nu}} |\hat{\sigma}_{m_s}^*(x)|^2 dx &= \int_{E_{s,\nu}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} \hat{g}_{m_s}^{j-1}(2^{k_{m_s}-1+2m_s^2+1}x) \right|^2 dx \\ &= |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}| \int_{2^{-\tau_s}}^{2^{-\tau_s+1}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}+1} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} \hat{g}_{m_s}^{j-1}(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{2^{\tau_s}}{m_s^2} |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}| \int_{2^{-\tau_s}}^{2^{-\tau_s+1}} \sup_{1 \leq v \leq 2^{2m_s}} \left| \sum_{j=1}^v \alpha_j^{m_s} f_{2m_s}^{j-1}(2^{\tau_s+2}x - 4) \right|^2 dx \\ &\leq C^2 |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}| \left(\frac{m_s+2}{m_s} \right)^2 \mathcal{M}_{m_s}^2 \leq 4C^2 |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}| \mathcal{M}_{m_s}^2, \end{aligned}$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная. Следовательно, если $m_s > \hat{N}_\varepsilon$, то

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_{s,\nu}} (\sigma_{m_s}^*(x))^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{E_{s,\nu}} (\hat{\sigma}_{m_s}^*(x))^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{E_{s,\nu}} (\hat{R}_\nu^s(x))^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2C |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}|^{1/2} \mathcal{M}_{m_s} + |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}|^{1/2} \mathcal{M}_{m_s} \\ &\leq (2C+1) |\Delta_\nu^{(k_{m_s}-1+1)}|^{1/2} \mathcal{M}_{m_s} \end{aligned}$$

для произвольного ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s}+1} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s}-1}$.

Для функции $\sigma_{m_s}^*$ можно применить лемму 2.3, чтобы оценить лебегову меру множества

$$E_{s,\nu}^* = \left\{ x \in E_{s,\nu} : |\sigma_{m_s}^*(x)| \geq \frac{2^{\tau_s/2} \varepsilon}{200} \mathcal{M}_{m_s} \right\}.$$

После нормирования лебеговой меры на множестве $E_{s,\nu}$, легко вычислив, насколько увеличиваются нормы в L^1 и L^2 , мы получим, что для произвольного ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s-1}}$, и $m_s \in \Omega_\varepsilon$, $m_s \geq \hat{N}_\varepsilon$,

$$|E_{s,\nu}|^{-1} |E_{s,\nu}^*| \geq \left(\frac{2^{\tau_s/2} |E_{s,\nu}|^{1/2} \varepsilon}{400(2C+1) |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}|^{1/2}} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{400(2C+1)} \right)^2 = C_\varepsilon > 0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \Omega_n(x)$ расходится на множестве

$$E = \limsup_k \bigcup_{\nu=2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}}}^{2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}}} E_{s,\nu}^*.$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что для произвольного двоичного интервала $\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}$, $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s-1}}$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ x \in \Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)} : |\sigma_{m_s}^*(x)| \geq \frac{\varepsilon}{24} \right\} \right| \\ & \geq C_\varepsilon 2^{-\tau_s} |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}| \geq \frac{1}{2} C_\varepsilon \mathcal{M}_{m_s}^2 |\Delta_\nu^{(k_{m_s-1}+1)}|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Согласно построению функций $\{\Omega_j^m : 1 \leq j \leq 2^{2m}\}$ имеем, что для произвольного $s \in \mathbb{N}$ и любого ν , $2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s-1}}$, множество $E_{s,\nu}^*$ состоит из объединения некоторых двоичных интервалов, каждый из которых имеет длину больше чем $2^{-k_{m_s+1}-1}$. Следовательно, для произвольных натуральных чисел l и ν таких, что

$$2^{k_{m_s+1}-1-k_{n_s+1}+1} \leq l \leq 2^{k_{m_s+1}-1}, \quad 2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}} \leq \nu \leq 2^{k_{m_s-1}},$$

только одно из следующих условий имеет место:

$$\Delta_l^{(k_{m_s+1}-1+1)} \subset E_{s,\nu}^*, \quad \Delta_l^{(k_{m_s+1}-1+1)} \cap E_{s,\nu}^* = \emptyset.$$

Таким образом, можно применить схему доказательства леммы 2.4 и согласно (4.7) получить, что для произвольного $r \in \mathbb{N}$

$$1 - \left| \bigcup_{s=r}^{r+k} \bigcup_{\nu=2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}}}^{2^{k_{m_s-1}-k_{n_s+1}}} E_{s,\nu}^* \right| \leq (1-2^{-k_{m_r}+1}) \prod_{s=r}^{r+k} \left(1 - \frac{1}{2} C_\varepsilon \mathcal{M}_{m_s}^2 \right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $|E| = 1$.

4.3. Случай, когда $\sum_{m \in \Omega_\varepsilon} \mathcal{M}_m^2 < +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, 1]$. В этом случае имеем

$$\sum_{m \in \Omega_\varepsilon^c} \mathcal{M}_m^2 = +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, 1].$$

Пусть $\{m_j(\varepsilon)\}_{j=1}^\infty = \Omega_\varepsilon^c$, где $m_1(\varepsilon) < m_2(\varepsilon) < \dots < m_j(\varepsilon) < m_{j+1}(\varepsilon) < \dots$. Рассмотрим два случая.

4.3.1. Случай, когда $\limsup_j \mathcal{M}_{m_j(\varepsilon)} > 0$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1]$. Положим

$$\ell_p = m_p(\varepsilon) \quad \text{для всех } p \in \mathbb{N}$$

и допустим, что

$$\mathcal{M}_{\ell_p} > b > 0 \quad \text{для всех } p \in \mathbb{N}.$$

Отсюда для произвольного $p \in \mathbb{N}$ получаем

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\ell_p}^2 = \sum_{i=0}^{2^{2\ell_p}-1} (\gamma_{\ell_p}^i)^2 = \mathcal{M}_{\ell_p}^2 - \beta_{\ell_p}^2 \geq \frac{3}{4} \mathcal{M}_{\ell_p}^2 > \frac{3}{4} b^2 = b_1^2.$$

Таким образом, имеем

$$\sigma_{\ell_p}(x) = \sum_{j=1}^{2^{2\ell_p}+1} \alpha_j^{\ell_p} \Omega_j^{\ell_p}(x) = \beta_{\ell_p} \xi_{\ell_p}(x) + \sum_{i=0}^{2^{2\ell_p}-1} \gamma_{\ell_p}^i g_{\ell_p}^i(x)$$

для произвольного $p \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\rho_{n_p-1} < \ell_p \leq \rho_{n_p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Тогда согласно (3.11), (3.12) и условию (3.2) получим для произвольного ν , $2^{k_{\ell_p-1}+2\ell_p^2+1} - 2^{k_{n_p}} \leq \nu \leq 2^{k_{\ell_p-1}+2\ell_p^2+1}$,

$$\sigma_{\ell_p}(x) = \beta_{\ell_p} \omega_{\ell_p, \nu} + P_{\ell_p, \nu}(x), \quad \text{если } x \in \Delta_{2\nu}^{(k_{\ell_p-1}+2\ell_p^2+2)},$$

где $P_{\ell_p, \nu}(x)$ – полином Радемахера, $\omega_{\ell_p, \nu}$ – постоянная и норма $P_{\ell_p, \nu}(x)$ в $L^2_{[0,1]}$ равна $\widehat{\mathcal{M}}_{\ell_p}$. Таким образом, согласно лемме 2.3 и неравенству (2.1), полагая $\lambda = 1/2$, получим

$$\left| \left\{ x \in \Delta_{2\nu}^{(k_{\ell_p-1}+2\ell_p^2+2)} : |\sigma_{\ell_p}(x)| \geq \frac{1}{16} b_1 \right\} \right| \geq 2^{-8} |\Delta_{2\nu}^{(k_{\ell_p-1}+2\ell_p^2+2)}|.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Omega_n(x)$ расходится п.в. Для завершения доказательства теоремы 1.1 нам остается рассмотреть следующий случай.

4.3.2. Случай, когда $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{m_j(\varepsilon)} = 0$ для произвольного $\varepsilon \in (0, 1]$. В этом случае полагаем, что для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\sum_{m \in \Omega_\varepsilon} \mathcal{M}_m^2 < +\infty.$$

Иначе таким же образом, как и в доказательстве, данном в п. 4.1, получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Omega_n(x)$ расходится п.в., и поэтому нечего будет доказывать.

Пусть

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{2^{2m}-1} \gamma_m^i g_m^i(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $\widehat{\mathcal{M}}_m > 0$ для произвольного $m \in \Omega_1^c$ и $\Omega_\varepsilon^c \subset \Omega_1^c$ для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$. Определим функцию

$$\widehat{F}_m(x) = \widehat{\mathcal{M}}_m^{-1} F_m(x) \quad \text{для всех } m \in \Omega_1^c,$$

и пусть

$$m_j = m_j(1) \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{\widehat{F}_{m_j}(x)\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированная система независимых функций. Следовательно, для построенной системы имеем

$$\int_0^1 \widehat{F}_{m_j}(x) dx = 0 \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}.$$

Согласно определению функций $\widehat{g}_n^i$, $0 \leq i \leq 2^{2n} - 1$, (3.2) и неравенству (2.1) получаем

$$\int_0^1 |\widehat{F}_{m_j}(x)| dx \geq \frac{1}{16} \widehat{\mathcal{M}}_{m_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ОНС $\{\widehat{F}_{m_j}(x)\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условиям леммы 2.6.

Положим $\varepsilon_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, и выберем последовательность натуральных чисел

$$j_1 < j'_1 < j_2 < j'_2 < \dots < j_n < j'_n < \dots$$

таким образом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$n < \sum_{j=j_n}^{j'_n} \widehat{\mathcal{M}}_{m_j}^2 < n+1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{m \in \Omega_{\varepsilon_n}, m \geq j_n} \mathcal{M}_m^2 \leq 2^{-2n}.$$

Согласно лемме 2.6 получим, что существуют $C_l > 0$, $l = 1, 2$, такие, что

$$\left| \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{j=j_n}^{j'_n} \mathcal{M}_{m_j} \widehat{F}_{m_j}(x) \right| > C_1 n \right\} \right| \geq C_2.$$

Так как $\{\widehat{E}_n\}_{n=1}^\infty$,

$$\widehat{E}_n = \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{j=j_n}^{j'_n} \mathcal{M}_{m_j} \widehat{F}_{m_j}(x) \right| > C_1 n \right\},$$

– последовательность независимых множеств, то согласно лемме 2.4 получим

$$|\widehat{E}| = \limsup_n |\widehat{E}_n| = 1.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=j_n}^{j'_n} \sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \alpha_k \Omega_k(x) &= \sum_{m=j_n}^{j'_n} \beta_m \xi_m(x) + \sum_{m=j_n}^{j'_n} \sum_{i=0}^{2^{2m}-1} \gamma_m^i g_m^i(x) \\
 &= \sum_{m=j_n}^{j'_n} \beta_m \xi_m(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_1} F_m(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_1^c} F_m(x) \\
 &= \Phi_n(x) + \sum_{j=j_n}^{j'_n} \mathcal{M}_j \hat{F}_{m_j}(x).
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(x) &= \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon_n}} \beta_m \xi_m(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon_n}^c} \beta_m \xi_m(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_1} F_m(x) \\
 &= \Phi'_{n, \varepsilon_n}(x) + \Phi''_{n, \varepsilon_n}(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_1} F_m(x),
 \end{aligned}$$

то, используя равенство Парсеваля, легко приходим к заключению, что

$$\left\| \Phi'_{n, \varepsilon_n}(x) + \sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_1} F_m \right\|_{L^2_{[0,1]}} \leq \left(\sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon}} \mathcal{M}_m^2 \right)^{1/2} \leq 2^{-n}$$

и

$$\begin{aligned}
 \|\Phi''_{n, \varepsilon_n}(x)\|_{L^2_{[0,1]}} &= \left(\sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon_n}^c} \beta_m^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon_n}{4} \left(\sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon_n}^c} \mathcal{M}_m^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \varepsilon_n \left(\sum_{j_n \leq m \leq j'_n, m \in \Omega_{\varepsilon_n}^c} \hat{\mathcal{M}}_m^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon_n (n+1)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\Phi_n\|_{L^2_{[0,1]}} \leq 2^{-(n-1)}(n+1)^{1/2}.$$

Из неравенства Чебышёва получаем, что

$$|G_n| = |\{x \in [0, 1] : |\Phi_n(x)| > 1\}| \leq 2^{-2(n-1)}(n+1),$$

следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |G_n| < +\infty$. Таким образом,

$$\left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{m=j_n}^{j'_n} \sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \alpha_k \Omega_k(x) \right| > C_1 n - 2 \right\} \supseteq \hat{E}_n \setminus G_n.$$

Кроме того,

$$\left| \bigcup_{k=n}^{\infty} \hat{E}_n \setminus G_n \right| \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем $|\limsup_n \widehat{E}_n \setminus G_n| = 1$, и поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Omega_n(x)$ неограниченно расходится п.в.

Список литературы

- [1] K. Kazarian, “A complete orthonormal system of divergence”, *J. Funct. Anal.*, **214**:2 (2004), 284–311.
- [2] Б. С. Кашин, “Об одной полной ортонормированной системе”, *Матем. сб.*, **99**(141):3 (1976), 356–365.
- [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [4] П. Л. Ульянов, “О некоторых решенных и нерешенных проблемах теории ортогональных рядов”, *Труды 4-го Всесоюзного математического съезда*, т. II (Ленинград, 1961), Наука, Л., 1964, 694–704.
- [5] П. Л. Ульянов, “Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов”, *УМН*, **19**:1(115) (1964), 3–69.
- [6] Б. С. Кашин, “О некоторых свойствах ортогональных систем сходимости”, *Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **143**, Наука, М., 1977, 68–87.
- [7] K. Kazarian, “A complete orthonormal system of divergence”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **337**:2 (2003), 85–88.
- [8] К. С. Казарян, Д. Ватерман, “Теоремы о представлении функций рядами”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 123–140.
- [9] K. S. Kazarian, S. S. Kazarian, “On the representations of functions of the L^r , $0 \leq r < 1$, spaces”, *Geometry, analysis and applications* (Varanasi, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, 185–201.
- [10] А. А. Талалян, “Представление измеримых функций рядами”, *УМН*, **15**:5(95) (1960), 77–141.
- [11] А. М. Олевский, “Об одной ортонормальной системе и ее приложениях”, *Матем. сб.*, **71**(113):3 (1966), 297–336.
- [12] P. Sjölin, “An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series”, *Ark. Mat.*, **7** (1969), 551–570.
- [13] A. Khintchine, A. N. Kolmogoroff, “Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden”, *Матем. сб.*, **32** (1925), 668–677.
- [14] D. Menchoff (D. E. Menshov), “Sur les séries des fonctions orthogonales”, *Fund. Math.*, **4** (1923), 82–105.
- [15] J.-P. Kahane, “Some random series of functions”, Cambridge Stud. Adv. Math., **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [16] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, “Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes”, *Studia Math.*, **7** (1938), 104–120.
- [17] A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

К. С. Казарян (K. S. Kazarian)
 Universidad Autonoma de Madrid, Spain
E-mail: kazaros.kazarian@uam.es

Поступила в редакцию
 07.12.2005 и 08.08.2006