Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Единственность минимального дерева Штейнера для границ общего положения, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 55–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:54:05

УДК 514.774.8+519.176

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Единственность минимального дерева Штейнера для границ общего положения

В настоящей работе доказан следующий результат: существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, для которого каждое $P \in U$, рассматриваемое как занумерованное подмножество стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, затягивается единственным минимальным деревом Штейнера, т.е. невырожденной кратчайшей сетью. Кроме того, получен ряд интересных следствий. В частности, доказано, что любое плоское дерево Штейнера планарно эквивалентно некоторому минимальному дереву Штейнера.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В конце прошлого века во время нашего доклада профессор Боннского университета Стефан Гильдебрандт задал вопрос, имеет ли проблема Штейнера единственное решение для границ общего положения. Настоящая статья является ответом на этот вопрос. А именно, доказана следующая теорема (см. ниже определения используемых понятий).

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, для которого каждое $P \in U$, рассматриваемое как занумерованное подмножество стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, затягивается единственным минимальным деревом Штейнера.*

Отметим, что если бы в целой окрестности граничного множества P существовало два разных невырожденных минимальных дерева Штейнера, то в этой окрестности длины таких деревьев совпадали бы. Последнее приводит к следующему естественному обобщению: можно ли построить пример двух локально минимальных деревьев (деревьев, звезда каждой вершины которых является минимальным деревом Штейнера с соответствующей границей), имеющих одинаковую длину в целой окрестности их общей границы? Конечно, если бы ответ на этот вопрос оказался отрицательным, то теорема 1.1 мгновенно получилась бы как непосредственное следствие. Однако в случае локально минимальных деревьев, допускающих самопересечения, имеется найденный авторами пример деревьев с совпадающими длинами в целой окрестности их общей границы, см. рис. 1.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00682, 03-01-00503, 05-01-22002), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1988.2003.1), а также Программы “Университеты России” (грант № 015.04.02.017).

Рис. 1. Два локально минимальных дерева, имеющих одинаковые длины в целой окрестности их общей границы

Рис. 2. Два локально минимальные сети, имеющие одинаковые длины в целой окрестности их общей границы

ЗАДАЧА 1.1. Существуют ли два таких вложенных (т.е. без самопересечений) локально минимальных дерева, что их длины одинаковы в целой окрестности их общей границы?

Ответ на этот вопрос авторам до сих пор не известен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Расширим класс рассматриваемых сетей, разрешив им иметь циклы. На рис. 2 приведены примеры двух локально минимальных сетей (с циклами) без самопересечений, длины которых одинаковы в целой окрестности общей границы. Отметим, что в первом случае сети имеют одинаковую структуру (одна сеть получена из другой непрерывной деформацией), а во втором – структура сетей различна.

История проблемы Штейнера и подробная библиография могут быть найдены в книгах авторов [1]–[4] или [5]–[7].

Авторы выражают сердечную благодарность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, С. Гильдебрандту за интересный вопрос и полезные обсуждения, а также Д. П. Илютко, взявшему на себя труд прочесть рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний.

§ 2. Необходимые определения и предварительные результаты

В настоящем параграфе собраны все необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности можно найти в [4].

Пусть G – произвольное дерево с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Вершины x и y из V назовем *смежными* или *соседними*, если $x = y$ или $\{x, y\} \in E$. Произвольное отображение $\Gamma: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ будем называть *сетью* на плоскости $\mathbb{R}^2$, *параметризованной* деревом G . Дерево G будем называть *параметризующим*. Сеть Γ называется *невыврожденной*, если отображение Γ инъективно. Ограничение отображения Γ на вершины и ребра параметризующего дерева G будем называть *вершинами* и *ребрами сети* Γ соответственно. Для каждого ребра $\Gamma: \{x, y\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети Γ естественно определен соответствующий ему *отрезок* $[\Gamma(x), \Gamma(y)]$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Если этот отрезок вырожден, то соответствующее ему ребро сети Γ называется *вырожденным*, иначе ребро называется *невыврожденным*. Отметим, что все ребра невырожденной сети также невырождены. *Длиной ребра* сети Γ назовем длину соответствующего этому ребру отрезка, а *длиной сети* Γ – сумму длин всех ее ребер. В дальнейшем мы часто будем отождествлять ребра и вершины сети с их областями определения, а также с соответствующими отрезками и точками на плоскости.

Пусть $e = \{x, y\}$ – произвольное ребро сети Γ . Если задать ориентацию этого ребра, т.е. выбрать одну из упорядоченных пар (x, y) или (y, x) , скажем (x, y) , то ребро e можно рассматривать как вектор на плоскости $\mathbb{R}^2$, который мы обозначим через xu . Определим *угол* между невырожденными ориентированными ребрами сети как угол между соответствующими векторами. Отметим, что угол между такими ребрами принимает значения из отрезка $[0, \pi]$. Если не оговорено противное, мы всегда будем ориентировать невырожденные смежные ребра от их общей вершины.

В дальнейшем мы будем рассматривать граничную задачу, в которой некоторая часть вершин сети фиксирована, а положение оставшихся вершин подбирается так, чтобы выполнялись интересующие нас условия. Отметим, что специфика рассматриваемых задач приводит к необходимости фиксировать все вершины степени 1 и 2. Чтобы формализовать это, мы введем понятие границы дерева и границы соответствующей сети. *Границей* ∂G *дерева* G назовем произвольное занумерованное подмножество множества $V(G)$, содержащее все вершины степени 1 и 2. Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины дерева G – *внутренними*. Разрежем дерево G по всем его граничным вершинам степени больше 1 и у полученных поддеревьев в качестве граничных выберем все те вершины, которые до разрезания были граничными у дерева G . Построенные поддеревья G_i с границами ∂G_i будем называть

1-компонентами дерева G . Отметим, что граница каждой 1-компоненты состоит в точности из всех ее вершин степени 1.

Определим теперь понятие усов, которое обычно используется в индуктивных доказательствах. Ребро дерева (сети) назовем 1-граничным, если оно инцидентно граничной вершине степени 1. Вершину, которой инцидентно не более одного не 1-граничного ребра, назовем *вершиной усов*. Совокупность всех инцидентных вершине усов 1-граничных ребер, за исключением любого одного в случае, когда этой вершине инцидентны только 1-граничные ребра, назовем *усами*. Усы, состоящие из k ребер, будем называть *k-реберными усами*. Вектор длин усов состоит из длин ребер этих усов. Будем говорить, что *длина усов не превосходит некоторого числа ε* , если все компоненты вектора длин этих усов не больше чем ε . Выкидывание ребер усов из дерева (сети) и превращение вершины v этих усов в граничную называется *отрезанием усов*. “Обратная операция” называется *выпусканием усов* из некоторой граничной вершины степени 1. Более подробно, если v – граничная вершина степени 1, то новое дерево (сеть), отличающееся от исходного лишь дополнительными 1-граничными ребрами, выходящими из v , и является результатом выпуска усов. При этом если в новом дереве степень вершины v больше 2, то мы, как правило, будем считать v внутренней вершиной полученного дерева.

Морфизмом из графа G в граф G' назовем отображение $f: V(G) \rightarrow V(G')$, переводящее смежные вершины в смежные, а граничные вершины – в граничные с сохранением линейного порядка, порожденного нумерацией граничных вершин. Назовем морфизм $f: V(G) \rightarrow V(G')$ *инъективным (сюръективным)*, если отображение f является таковым. Морфизм $f: V(G) \rightarrow V(G')$ называется *изоморфизмом*, если f – биекция; f^{-1} также является морфизмом графов. Деревья с границами называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одного из них на другое. В дальнейшем, если не оговорено противное, каждое отображение занумерованных множеств предполагается *монотонным*, т.е. сохраняющим линейные порядки, порожденные нумерациями. Отметим, что группа автоморфизмов произвольного дерева с занумерованной границей тривиальна. Ограничения отображения Γ на граничные и внутренние вершины будем называть соответственно *граничными* и *внутренними вершинами сети Γ* , а на 1-компоненты дерева G – *1-компонентами сети Γ* . Множество всех граничных вершин сети Γ обозначим через $\partial\Gamma$ и назовем *границей сети*. Отметим, что граница $\partial\Gamma$ представляет собой отображение $\Gamma|_{\partial G}$.

Деревом Штейнера G будем называть дерево, степени вершин которого не превосходят 3. Частным случаем деревьев Штейнера являются *бинарные деревья*, т.е. деревья, вершины которых имеют лишь степени 1 и 3, а граничное множество состоит в точности из всех вершин степени 1. Отметим, что 1-компоненты дерева Штейнера являются бинарными деревьями. С другой стороны, бинарное дерево совпадает с единственной своей 1-компонентой.

Сеть $\Gamma: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^2$ назовем *сетью Штейнера (бинарной сетью)*, если дерево G является деревом Штейнера (соответственно бинарным деревом).

Произвольное отображение $\beta: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ будем называть *граничным*, а пару (G, β) – *типом*. Отображение $\Gamma: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $\Gamma|_{\partial G} = \beta$, назовем

сетью типа (G, β) . Тип (G, β) назовем *типом Штейнера* (бинарным типом), если $(G, \partial G)$ – дерево Штейнера (соответственно бинарное дерево).

Каждое граничное отображение $\beta: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\partial G = (v_1, \dots, v_n)$, естественно отождествляется с точкой $(\beta(v_1), \dots, \beta(v_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Обратно, каждой точке $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$ соответствует граничное отображение $\beta: v_i \mapsto (x^i, y^i)$. В дальнейшем точки из $\mathbb{R}^{2n}$ мы будем называть *занумерованными подмножествами плоскости* (на самом деле, правильнее называть их занумерованными мультимножествами, так как некоторые из точек $(x^i, y^i) \in \mathbb{R}^2$ могут совпадать). Если Γ – сеть типа (G, β) , то будем говорить, что Γ *затягивает граничное множество* $\beta \in \mathbb{R}^{2n}$.

Через $[G, \beta]$ обозначим конфигурационное пространство всевозможных сетей типа (G, β) . Ясно, что $[G, \beta]$ изоморфно линейному пространству $\mathbb{R}^{2|V(G) \setminus \partial G|}$. На пространстве $[G, \beta]$ естественным образом определен *функционал длины* ℓ , ставящий в соответствие каждой сети из $[G, \beta]$ ее длину. Хорошо известно (см., например, [4]), что функционал длины является выпуклым вниз на $[G, \beta]$ и стремится к бесконечности при удалении от начала координат. Поэтому ℓ достигает наименьшего значения и множество всех его минимумов выпукло. Более того, если G – дерево Штейнера, в частности бинарное дерево, то ℓ достигает своего минимума ровно в одной точке. Каждая точка $\Gamma_0 \in [G, \beta]$, на которой ℓ достигает наименьшего значения, называется *минимальной параметрической сетью* типа (G, β) . Если для типа Штейнера (G, β) единственная минимальная параметрическая сеть в $[G, \beta]$ невырождена, то тип (G, β) назовем *невырожденным*. Отметим, что по определению невырожденной сети у невырожденного типа граничное отображение инъективно.

Также хорошо известно следующее утверждение, см. [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Минимальная параметрическая сеть Штейнера типа (G, β) непрерывно зависит от границы, т.е. если последовательность граничных отображений $\beta_n: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ сходится к β , то последовательность минимальных параметрических сетей Γ_n типа (G, β_n) сходится к Γ .*

Пусть Γ – невырожденная сеть типа (G, β) , затягивающая $P \in \mathbb{R}^{2n}$, и $v \in \partial G$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ – все смежные с v вершины сети Γ . Положим $\xi_p = v_i v / \|v_i v\|$, и пусть $\xi(v) = \xi_1 + \dots + \xi_p$. Будем рассматривать $\xi(v)$ как касательный вектор к плоскости $\mathbb{R}^2$ в точке v . Вектор $(\xi(v_1), \dots, \xi(v_k))$, где $(v_1, \dots, v_k) = \partial G$, назовем *инфинитезимальным ростком сети* Γ .

Пусть Γ_i , $i = 1, 2$, – невырожденные сети типов (G_i, β_i) , затягивающие одно и то же занумерованное множество $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $v_i = \beta_i^{-1}(p_j)$ для некоторого j . Обозначим через $u_1, \dots, u_m$ смежные с v_1 вершины сети Γ_1 , а через $w_1, \dots, w_n$ – вершины из Γ_2 , смежные с v_2 . Тогда будем говорить, что сети Γ_i *имеют одинаковые ростки в точке* p_j , если $m = n$ и существует такая биекция $\nu: \{u_1, \dots, u_m\} \rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$, что при каждом $1 \leq i \leq m$ векторы $u_i v_1$ и $\nu(u_i) v_2$ сонаправлены. Скажем, что сети Γ_i *имеют одинаковые ростки*, если их ростки в каждой точке p_j одинаковы.

Далее, ясно, что множество типов сетей, затягивающих P , конечно. Кратчайшая минимальная параметрическая сеть, затягивающая P , называется *кратчайшим деревом*, или *абсолютно минимальным деревом* на P .

Хорошо известно, что среди кратчайших сетей, затягивающих данное граничное множество, всегда найдутся невырожденные, причем каждая такая сеть имеет тип Штейнера. Отсюда, в частности, вытекает, что если (G, β) – тип некоторой невырожденной кратчайшей сети Γ , то множество минимальных параметрических сетей типа (G, β) состоит ровно из одного элемента, а именно из Γ . Невырожденная кратчайшая сеть называется *минимальным деревом Штейнера*.

Пусть e – некоторое ребро минимального дерева Штейнера Γ . *Лункой*, соответствующей ребру e , назовем подмножество плоскости, равное пересечению открытых кругов с центрами в вершинах ребра e и радиусами, равными длине ребра e .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2 (свойство лунки). *Лунка произвольного ребра e минимального дерева Штейнера Γ не содержит точек сети Γ , не лежащих на ребре e .*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Правильный треугольник T , построенный на ребре e минимального дерева Штейнера Γ , пересекается с Γ не более чем по стороне e и противоположащей e вершине из T .*

Параллелограмм, построенный на соседних ребрах e и f минимального дерева Штейнера Γ , пересекается с Γ не более чем по сторонам e , f и своим вершинам.

Назовем тип (G, β) *минимальным*, если минимальное параметрическое дерево $\Gamma \in [G, \beta]$ кратчайшее. Будем говорить, что минимальный тип (G, β) *реализуется на граничном множестве β* .

Пусть $\{p_1, \dots, p_n\}$ – занумерованное множество, состоящее из n различных точек плоскости. Такие подмножества плоскости будем называть *n -точечными*. Из сделанных выше замечаний вытекает, что для каждого занумерованного n -точечного подмножества $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ существует невырожденный минимальный тип Штейнера (G, β) , реализующийся на граничном множестве $\beta = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Невырожденную параметрическую сеть Штейнера назовем *локально минимальной*, если угол между любыми двумя ее смежными ребрами не меньше чем 120° . Отметим, что каждое минимальное дерево Штейнера представляет собой локально минимальную сеть, а каждая локально минимальная сеть типа (G, β) является (единственной) минимальной параметрической сетью в $[G, \beta]$.

Пусть Γ – локально минимальное бинарное дерево. Каждое ребро дерева Γ параллельно одной из трех прямых на плоскости, составляющих друг с другом углы в 60° . *Сетевой геодезической сети Γ* называется ломаная на плоскости, представляющая собой часть пути в Γ , составленного из ребер не более чем двух направлений. *Геодезический луч, выпущенный из точки x сети Γ* , – это максимальная (по включению) сетевая геодезическая, одна из концевых точек которой совпадает с точкой x .

Если локально минимальное бинарное дерево Γ заданного типа (G, β) существует, то оно может быть построено с помощью хорошо известного алгоритма Мелзака, см. [8] или [4]. Этот алгоритм, в частности, позволяет построить для каждой граничной вершины $v \in \mathbb{R}^2$ так называемую *линию Симпсона*, представляющую собой отрезок, выходящий из v в направлении единственного инцидентного v ребра e сети Γ и имеющий длину, равную длине дерева Γ . Отличная от v вершина m этого отрезка может быть вычислена следующим образом [4]. Для каждой граничной вершины $w \neq v$ сети Γ рассмотрим единственный путь γ , идущий из v в w , и обозначим через t_w разность количеств левых и правых поворотов, совершаемых в вершинах степени 3 сети Γ при движении по γ от v к w . Тогда

$$m = v + \sum_w w e^{i \frac{\pi}{3} t_w}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где m , v и w рассматриваются как комплексные числа, задающие положение соответствующих вершин сети Γ . Точку m назовем *точкой Мелзака*, соответствующей вершине v или ребру e сети Γ . Из только что приведенной формулы и утверждения 2.1 мгновенно вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. *Пусть Γ – локально минимальное бинарное дерево и v – его граничная вершина. Будем смещать вершину v в направлении, не параллельном единственному инцидентному v ребру сети Γ . Тогда локально минимальное дерево Γ будет непрерывно меняться и угол поворота направления каждого ребра сети Γ будет строго монотонной функцией от величины смещения вершины v .*

§ 3. Хорошие граничные множества и границы общего положения

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ открытое всюду плотное подмножество $\mathbb{R}^{2n}$, состоящее из всех таких $(p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{R}^2$, что все точки p_i различны.

Назовем граничное множество $\beta \in \mathcal{P}_n$ *хорошим множеством*, если существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ граничного множества β , что

- 1) для каждого минимального типа (G, β) и каждого $\beta' \in U$ тип (G, β') является минимальным;
- 2) минимальный тип (G, β) вырожден (невырожден), если и только если каждый минимальный тип (G, β') , $\beta' \in U$, вырожден (невырожден).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Семейство всех хороших множеств $\beta \in \mathcal{P}_n$ открыто и всюду плотно в $\mathbb{R}^{2n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство хороших множеств открыто, так как все точки окрестности U из определения хорошего множества одновременно обладают всеми свойствами, определяющими эту окрестность.

Пусть $\beta \in \mathcal{P}_n$ и U – произвольная окрестность β в $\mathcal{P}_n$. На β реализуется конечный набор минимальных типов $\{\tau_1, \dots, \tau_p\}$. Это означает, что длины минимальных параметрических деревьев других типов строго больше, чем длина кратчайшего дерева на β . В силу непрерывности функционала длины эти

неравенства остаются справедливыми в некоторой окрестности $U_1 \subset U$ множества β . Предположим, что не все τ_i реализуются в U_1 , и пусть τ_j не реализуется на некотором множестве $\beta_1 \in U_1$. Тогда существует окрестность $U_2 \subset U_1$ точки β_1 , на которой τ_j не реализуется. Тем самым, мы построили открытое подмножество $U_2 \subset U$, на котором реализуется на тип меньше. Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов построим окрестность $U_q \subset U$, в каждой точке которой будут реализовываться все оставшиеся минимальные типы.

Далее, пусть $\beta \in U_q$ и $\{(G_1, \beta), \dots, (G_k, \beta)\}$ – все невырожденные минимальные типы, реализующиеся на β . Заметим, что для каждого дерева Штейнера G семейство $O(G)$ таких δ , что тип (G, δ) невырожден, открыто в $\mathcal{P}_n$. Положим $U' = \bigcap_i O(G_i) \cap U_q$. Ясно, что все типы (G_i, β') , $\beta' \in U'$, невырождены.

Пусть теперь $\{(G_{k+1}, \beta), \dots, (G_{k+m}, \beta)\}$ – все вырожденные минимальные типы, реализующиеся на некотором $\beta \in U'$. Предположим, что для некоторого j , $k+1 \leq j \leq k+m$, и некоторого $\beta' \in U'$ тип (G_j, β') является невырожденным. Тогда на непустой окрестности $U'' = U' \cap O(G_j)$ точки β' тип (G_j, β'') является невырожденным для каждого $\beta'' \in U''$. Продолжая эту процедуру, мы за конечное число шагов построим такую окрестность, содержащуюся в U , что каждый минимальный тип, реализующийся в точках этой окрестности, или вырожден, или невырожден во всех ее точках одновременно. Доказательство закончено.

Сформулируем одно важное для дальнейшего свойство хороших множеств.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Если Γ – минимальное дерево Штейнера, затягивающее хорошее множество, то дерево Γ не содержит граничных вершин степени 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть v – граничная вершина степени 3 минимального дерева Штейнера Γ , а Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 – 1-компоненты, содержащие соответственно граничные ребра e_1 , e_2 и e_3 , инцидентные v . Будем смещать вершину v в направлении ребра e_1 . Так как граница $\partial\Gamma$ является хорошей по предположению, то при достаточно малом смещении вершины v продеформированная граница будет затягиваться минимальным деревом Штейнера Γ' с тем же параметризующим графом. В частности, все компоненты дерева Γ , отличные от Γ_i , не меняются, направления ребер компоненты Γ_1 остаются теми же, а по утверждению 2.3 направления ребер компонент Γ_2 и Γ_3 меняются строго монотонно. Поэтому у сети Γ' не все углы в вершине, полученной из v , равны 120° , что противоречит минимальности Γ' . Утверждение 3.2 доказано.

Будем говорить, что невырожденное кратчайшее дерево находится в общем положении, если угол между любыми двумя ребрами (ориентированными произвольным образом), лежащими в разных 1-компонентах этого дерева, не кратен $\pi/3$. (Заметим, что это свойство не зависит от ориентации ребер.) Также будем говорить, что граничное множество $\beta \in \mathcal{P}_n$ находится в общем положении, если оно хорошее и каждое затягивающее его невырожденное кратчайшее дерево находится в общем положении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что каждое невырожденное кратчайшее дерево общего положения по определению не содержит граничных вершин степени 3, а также не содержит граничных вершин степени 2, в которых угол между ребрами равен $2\pi/3$ или π . В частности, инфинитезимальные ростки таких деревьев отличны от нуля в каждой точке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Семейство $\mathcal{G}_n$ всех граничных множеств $\beta \in \mathcal{P}_n$ общего положения открыто и всюду плотно в $\mathcal{P}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β – граничное множество общего положения. По определению хорошего множества существует такая окрестность U точки β , что если Γ – произвольное невырожденное кратчайшее дерево, затягивающее β , и (G, β) – тип дерева Γ , то для каждого граничного множества $\beta' \in U$ минимальное параметрическое дерево Γ' типа (G, β') является кратчайшим и невырожденным. По утверждению 2.1 окрестность U можно выбрать настолько малой, что углы между ребрами сети Γ' будут сколь угодно мало отличаться от углов между соответствующими ребрами сети Γ (взятыми с той же ориентацией). Так как Γ в общем положении, т.е. углы между его ребрами, лежащими в разных 1-компонентах, не кратны $\pi/3$, то U можно выбрать настолько малой, что и соответствующие углы между ребрами дерева Γ' не будут кратны $\pi/3$, т.е. Γ' будет в общем положении. Таким образом, $\mathcal{G}_n$ открыто в $\mathcal{P}_n$.

Покажем теперь, что $\mathcal{G}_n$ всюду плотно. Пусть β – произвольное хорошее множество, и предположим, что β не находится в общем положении. Последнее означает, что среди затягивающих β невырожденных кратчайших деревьев есть деревья не общего положения. Пусть Γ – такое дерево и (G, β) – его тип. Покажем, что в сколь угодно малой окрестности граничного множества β найдется такое граничное множество β' , что минимальное параметрическое дерево Γ' типа (G, β') является кратчайшим невырожденным деревом общего положения.

Проведем доказательство индукцией по числу 1-компонент дерева G . Если компонента одна, то само дерево Γ находится в общем положении. Пусть $\{G_1, \dots, G_p\}$ – это 1-компоненты дерева G . Граф пересечений 1-компонент представляет собой дерево. Пусть компонента G_i соответствует вершине степени 1 этого дерева. Выбросим компоненту G_i из G . Полученное дерево Штейнера $\overline{G}$ с границей $\partial\overline{G} = \partial G \cap V(\overline{G})$ состоит из меньшего числа 1-компонент, поэтому в силу предположения индукции в сколь угодно малой окрестности границы $\overline{\beta} = \beta|_{\partial\overline{G}}$ найдется такое граничное отображение $\widehat{\beta}$, что минимальное параметрическое дерево типа $(\overline{G}, \widehat{\beta})$ является невырожденным кратчайшим деревом общего положения. Определим теперь граничное отображение β'' на ∂G , положив его равным $\widehat{\beta}$ на $\partial\overline{G}$ и равным β на $\partial G \setminus \partial\overline{G}$. Ясно, что отображение β'' может быть выбрано сколь угодно близким к β , поэтому минимальная параметрическая сеть Γ'' типа (G, β'') является кратчайшим невырожденным деревом. При этом углы между его ребрами, находящимися в разных компонентах G_p и G_q , $i \notin \{p, q\}$, не кратны $\pi/3$. Пусть v – вершина степени 1 дерева G , лежащая в G_i . Определим, наконец, граничное отображение β' на ∂G , положив его равным β'' на $\partial G \setminus \{v\}$ и выбрав $\beta'(v)$ достаточно близким к $\beta(v) = \beta''(v)$ так,

чтобы вектор $\beta(v)\beta'(v)$ не был коллинеарен отрезку, соответствующему единственному инцидентному v ребру из Γ'' . Тогда минимальная параметрическая сеть Γ' типа (G, β') является невырожденным кратчайшим деревом. При этом Γ' совпадает с Γ'' на всех 1-компонентах дерева G , за исключением G_i , а углы между ребрами из G_i и ребрами из других 1-компонент меняются непрерывно в зависимости от $\beta'(v)$. В частности, их можно сделать не кратными $\pi/3$.

Выберем β' настолько близким к β , чтобы все кратчайшие сети общего положения, затягивающие β , остались в общем положении и на граничном множестве β' . Существует такая окрестность U' границы β' , что для всех границ $\beta'' \in U'$ кратчайшие сети типа (G, β'') находятся в общем положении. Таким образом, мы показали, что в сколь угодно малой окрестности границы β существует граница β' , которую затягивает по крайней мере на одно невырожденное кратчайшее дерево не общего положения меньше, чем β . Продолжая этот процесс, мы построим сколь угодно близко к β граничное множество общего положения. Утверждение 3.3 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Если у двух невырожденных минимальных параметрических деревьев, затягивающих одно и то же граничное множество β , длины одинаковы в целой окрестности граничного множества β , то у этих деревьев совпадают инфинитезимальные ростки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле первой вариации, см. [4], скорость изменения длины невырожденного минимального параметрического дерева при деформации границы равна стандартному скалярному произведению инфинитезимального ростка этого дерева на вектор, составленный из векторов скоростей граничных вершин. Поэтому если инфинитезимальные ростки у двух сетей различны, то существует такая линейная деформация границы, что скорости изменения длин этих сетей различны, что противоречит совпадению этих длин в целой окрестности. Утверждение 3.4 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Если у двух невырожденных кратчайших деревьев, затягивающих одно и то же хорошее граничное множество общего положения, инфинитезимальные ростки совпадают, то у них совпадают и обычные ростки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что инфинитезимальный росток кратчайшего дерева в общем положении в вершине степени 1 имеет длину 1, а в вершине степени 2 – отличную от нуля и строго меньшую единицы. Граничных вершин степени 3 у таких деревьев быть не может. Поэтому степени соответствующих граничных вершин у рассматриваемых деревьев одинаковы. Далее, совпадение инфинитезимальных ростков в вершинах степени 1 равносильно совпадению направлений выходящих из этих вершин ребер. В каждой вершине степени 2 совпадение направлений инфинитезимальных ростков влечет совпадение биссектрис углов между инцидентными такой вершине ребрами, а совпадение величин инфинитезимальных ростков – совпадение величин этих углов. Поэтому ростки в вершинах степени два также совпадают. Утверждение 3.5 доказано.

Тем самым, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если граничное множество общего положения затягивается двумя невырожденными кратчайшими деревьями, то разбиения на 1-компоненты у этих деревьев совпадают. Более того, у соответствующих 1-компонент совпадают ростки.*

Задача 3.1. Пусть граничное множество затягивается двумя невырожденными кратчайшими деревьями с одинаковыми инфинитезимальными ростками. Верно ли, что разбиения на 1-компоненты у этих деревьев совпадают?

Напомним, что каждая 1-компонента минимального дерева Штейнера является минимальным деревом Штейнера с соответствующей границей. Из теоремы 3.1 вытекает, что для доказательства единственности минимального дерева Штейнера, затягивающего граничное множество общего положения, достаточно рассмотреть случай бинарных минимальных деревьев Штейнера. А именно, достаточно показать, что два бинарных минимальных дерева Штейнера с общей границей и одинаковыми ростками совпадают. Доказательству этого факта и посвящен следующий параграф.

§ 4. Бинарные минимальные деревья Штейнера с одинаковыми ростками

Пусть Γ – локально минимальное бинарное дерево и w – произвольная его внутренняя вершина. Проведем через w три прямые, параллельные ребрам из Γ . Эти прямые разбивают плоскость на шесть углов с общей вершиной w , которые образуют три вертикальных угла с общей вершиной в w . Будем говорить, что эти углы *порождаются* сетью Γ .

ЛЕММА 4.1. *Пусть w – внутренняя вершина локально минимального бинарного дерева Γ и $B(w)$ – один из углов с вершиной w , порожденный Γ . Пусть x и y – произвольные точки, лежащие внутри сторон угла $B(w)$, соединенные ломаной L , внутренность которой лежит внутри $B(w)$, и пусть T – многоугольник, отрезаемый от $B(w)$ ломаной L , см. рис. 3. Выпустим из w в направлении одного из граничных лучей угла $B(w)$ сетевой геодезический луч, ребра которого параллельны сторонам этого угла. Если в $T \setminus L$ нет граничных вершин сети Γ , то такой луч пересекает ломаную L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассматриваемый геодезический луч не может выйти из угла $B(w)$ и не может закончиться в $T \setminus L$, поэтому он пересекает L .

В дальнейшем, для удобства, прямую, проходящую через прямолинейное ребро e , будем обозначать той же буквой e . Кроме того, будем говорить, что правильный треугольник *коллинеарен сети*, если его ребра параллельны ребрам этой сети.

ЛЕММА 4.2. *Пусть треугольник T , коллинеарный локально минимальному бинарному дереву Γ , содержит две внутренние вершины u и v этой сети. Тогда если внутренность треугольника T не содержит граничных вершин сети, то путь, соединяющий в Γ вершины u и v , целиком лежит в треугольнике T .*

Рис. 3. Геодезический луч в угле, порожденном сетью

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $A(u)$ порожденный сетью Γ вертикальный угол с вершиной u , содержащий v , а через $A(v)$ – порожденный Γ вертикальный угол с вершиной v , содержащий u . Отметим, если прямая uv не параллельна ни какому ребру из Γ , то углы $A(u)$ и $A(v)$ определены однозначно и прямые, порождающие $A(u)$ и $A(v)$, параллельны. Если же прямая uv параллельна одному из ребер сети Γ , то выберем указанные углы так, чтобы порождающие их прямые были параллельны.

Рис. 4. К лемме 4.2

Далее, обозначим через $A_v(u)$ тот из двух углов, составляющих $A(u)$, который содержит v , а через $A_u(v)$ – тот из двух углов, составляющих $A(v)$, который содержит u , см. рис. 4. Отличный от $A_u(v)$ угол, составляющий $A(v)$, обозначим через $\bar{A}_u(v)$. Так как стороны одного из углов $A_u(v)$ и $A_v(u)$, скажем угла $A_u(v)$, сонаправлены со сторонами одного из углов треугольника T , скажем угла в вершине A , а стороны другого, $A_v(u)$, – противоположены сторонам угла A , то $A_u(v)$ пересекает внутренность только одной стороны треугольника T , а именно стороны a , противоположной A . Вершина A содержится в угле $A_v(u)$ и, значит, в угле $\bar{A}_u(v) \subset A(v)$. Более того, точка u не может совпадать с A , так как иначе $u = v$.

Обозначим через ℓ ту из трех проходящих через u прямых, параллельных ребрам из Γ , которая не параллельна сторонам угла $A(v)$, и пусть Π – ограниченная прямой ℓ полуплоскость, содержащая v . Обозначим через $B_1(u)$ и $B_2(u)$ порожденные Γ углы с вершиной u , лежащие в Π и не содержащиеся в $A(u)$. Поскольку углы $B_i(u)$ лежат в полуплоскости Π , внутренность которой не пересекает стороны a , внутренности углов $B_i(u)$ не пересекают a . Кроме того, так как u лежит в треугольнике $T \cap A_u(v)$, то углы $B_i(u)$ пересекаются с углом $\bar{A}_u(v)$ не более чем по стороне, поэтому их внутренности не содержат вершину A .

Обозначим через L замкнутую ломаную, ограничивающую треугольник T . Положим I_i равным пересечению внутренности угла $B_i(u)$ с L , если это пересечение непусто, и равным u в противном случае. Отметим, что $I_i \subset L$, причем I_1 и I_2 разделены на L внутренностью стороны a и вершиной A . Далее, обозначим через J пересечение внутренности угла $A_u(v)$ с L , а через $\bar{J}$ – пересечение внутренности угла $\bar{A}_u(v)$ с L , если оно непусто, и множество $\{v\}$ в противном случае. В силу выбора угла $A_u(v)$ множество J представляет собой интервал, лежащий на стороне a треугольника T , а множество $\bar{J}$ – или объединение двух полуинтервалов с общей вершиной A , или вершину v , лежащую на L . Из сказанного выше вытекает, что множества I_1 , J , I_2 и $\bar{J}$ попарно не пересекаются и множества J и $\bar{J}$ разделяют I_1 и I_2 на замкнутой ломаной L .

Итак, пусть в T нет граничных вершин дерева Γ . Выпустим из вершины u геодезические лучи, лежащие в тех углах $B_1(u)$ и $B_2(u)$, которые пересекаются с T по внутренности. В силу леммы 4.1 геодезический луч, выпущенный в $B_i(u)$, соединяет u с точкой из замыкания множества I_i , поэтому объединение этих лучей содержит путь γ_1 , лежащий в треугольнике T и соединяющий некоторые точки из замыканий множеств I_1 и I_2 . Аналогично, из вершины v выпустим геодезические лучи, лежащие в тех углах $A_u(v)$ и $\bar{A}_u(v)$, которые пересекаются с T по внутренним точкам. Объединение этих лучей содержит путь γ_2 , лежащий в T и соединяющий некоторые точки из замыканий множеств J и $\bar{J}$. Пути γ_1 и γ_2 пересекаются в T , так как или имеют общую концевую точку на L , или их концевые точки перемежаются на L . Искомый путь – это путь в дереве $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Лемма 4.2 доказана.

Треугольник назовем *пустым* (по отношению к сети), если его пересечение с граничным множеством этой сети содержится в множестве его вершин.

ЛЕММА 4.3. Пусть ребра f_1 и f_2 локально минимального бинарного дерева Γ пересекают сторону l пустого треугольника T , коллинеарного Γ по точкам x_1 и $x_2 \neq x_1$ соответственно. Предположим, что x_i не являются граничными вершинами дерева Γ , а точка пересечения прямых f_i лежит в T . Тогда путь γ в дереве Γ , соединяющий x_1 и x_2 , лежит в T , см. рис. 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π – полуплоскость, ограниченная прямой l и содержащая треугольник T . Построим сетевые геодезические лучи r_i сети Γ , начинающиеся в точках x_i ребер f_i , идущие в полуплоскость Π так, что их

Рис. 5. К доказательству леммы 4.3

ребра параллельны f_i и прямой l . Так как треугольник T пустой, а x_i не являются граничными вершинами, луч r_i или приходит в вершину x_j , $\{i, j\} = \{1, 2\}$, или входит во внутренность полуплоскости Π , а затем пересекает сторону треугольника T , параллельную f_j . Следовательно, лучи r_1 и r_2 пересекаются в треугольнике T , поэтому их объединение содержит искомый путь. Лемма 4.3 доказана.

Ниже Γ_1 и Γ_2 обозначают минимальные бинарные деревья Штейнера с общей границей и одинаковыми ростками.

Пусть e – ребро дерева Γ_1 , которое пересекают под ненулевыми углами по точкам x_1 и x_2 не параллельные ребра f_1 и f_2 дерева Γ_2 . Обозначим через Π полуплоскость, ограниченную прямой e и содержащую точку пересечения прямых f_i .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *В сделанных предположениях путь γ в дереве Γ_2 , соединяющий x_1 и x_2 , лежит в правильном треугольнике T , образованном прямыми e , f_1 и f_2 , см. рис. 6.*

Рис. 6. К доказательству следствия 4.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что треугольник T коллинеарен сетям Γ_i и пусть по свойству лунки для ребра e . Кроме того, точки x_i не могут быть граничными вершинами сетей. Действительно, если x_i – внутренняя точка ребра e , то она не может быть граничной вершиной, так как сеть Γ_1 вложена. Если же x_i – вершина ребра e , то в ней встречаются непараллельные ребра e и f_i , поэтому x_i вновь не может быть граничной в силу совпадения ростков сетей Γ_i . Следствие 4.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пересечение произвольного ребра e сети Γ_1 с сетью Γ_2 содержит не более одной неточечной связной компоненты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что таких компонент несколько, и рассмотрим две из них, соседние на ребре e . Эти компоненты являются пересечениями некоторых ребер сети Γ_2 , лежащих на прямой e , с ребром e . Обозначим через x_1 и x_2 соседние на e вершины этих ребер. Так как сети Γ_i имеют одинаковую границу, то внутри ребра e нет граничных вершин, поэтому x_1 и x_2 – внутренние вершины сети Γ_2 , см. рис. 7.

Рис. 7. Доказательство следствия 4.2

Далее, каждая пара ребер сети Γ_2 , инцидентных x_1 и x_2 соответственно и лежащих в одной полуплоскости по отношению к прямой e , удовлетворяет условиям следствия 4.1, в соответствии с которыми вершины x_1 и x_2 соединены двумя различными путями в дереве Γ_2 . Противоречие.

ЛЕММА 4.4. *Пусть ребра e_1 и e_2 бинарного минимального дерева Штейнера Γ пересекают сторону l пустого треугольника T , коллинеарного Γ по точкам x_1 и $x_2 \neq x_1$ соответственно, под не равными нулю углами. Обозначим через T' треугольник, симметричный T относительно l . Предположим, что x_i не являются граничными вершинами сети Γ , а путь в Γ , соединяющий e_1 и e_2 , лежит в треугольнике T' и не лежит в T . Тогда если треугольник T' пустой, то прямые e_1 и e_2 пересекаются вне треугольника T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если прямые e_1 и e_2 пересекаются внутри треугольника T , то по лемме 4.3 путь в Γ , соединяющий x_1 и x_2 , лежит в T . Противоречие.

Пусть теперь e_1 и e_2 параллельны. В силу леммы 4.2 в треугольнике T не может быть двух внутренних вершин дерева (иначе дерево Γ содержит цикл), поэтому для одного из ребер, скажем для e_1 , множество $e_1 \cap T$ не содержит внутренних вершин сети Γ . Так как x_1 не является граничной вершиной сети Γ , то x_1 вообще не является вершиной из Γ , следовательно, $e_1 \cap T$ – собственное подмножество ребра e_1 . Более того, e_1 не пересекает параллельное ему ребро треугольника T , так как иначе путь в Γ , соединяющий e_1 и e_2 , не лежит в T' ,

Рис. 8. К лемме 4.4

поскольку x_1 – внутренняя точка ребра e_1 . Следовательно, ребро e_1 пересекает те две стороны l и l' из T , которые ему не параллельны, см. рис. 8. Поэтому в силу свойства лунки для ребра e_1 правильный треугольник, отрезаемый e_1 от T (этот треугольник может быть точечным), пересекается с Γ только по подмножеству из e_1 . Поэтому ребро e_2 лежит вне этого треугольника, см. рис. 8.

Предположим сначала, что ребро e_2 пересекает те же две стороны l и l' треугольника T , что и e_1 . Если $e_2 \cap T$ – собственное подмножество e_2 , то получаем противоречие со свойством лунки для ребра e_2 . Поэтому $e_2 = e_2 \cap T$ и ребро e_1 пересекает T по вершине $C = l \cap l'$. Перестроим дерево Γ , соединив C с отличной от x_2 вершиной ребра e_2 и выбросив e_2 . Получим дерево той же длины с внутренней вершиной x_2 степени 2 с углом в 120° между инцидентными ей ребрами. Противоречие.

Рассмотрим оставшуюся возможность, т.е. пусть теперь ребро e_2 не пересекает сторону l' . В этом случае в $e_2 \cap T$ содержится внутренняя вершина. Обозначим через v последнюю внутреннюю вершину из $e_2 \cap T$, считая от e_1 . Отметим, что v не лежит на l . В самом деле, если v лежит на l , то геодезический луч, выходящий из v в направлении l и l' , заканчивается внутри $T \cup T'$ граничной вершиной. Противоречие.

Далее, пусть e_3 – инцидентное v ребро из Γ , параллельное l . Тогда вторая вершина ребра e_3 не может лежать внутри T . Действительно, в противном случае из нее можно выпустить геодезический луч, ребра которого параллельны l' и e_2 . Этот геодезический луч закончится внутри $T \cup T'$ граничной вершиной. Противоречие.

Обозначим через A точку пересечения e_3 и l' , а через B – точку пересечения e_1 и l' . Рассмотрим равнобокую трапецию $vACx_2$. Ясно, что B лежит на ее боковой стороне AC , поэтому ребро e_2 не короче, чем отрезок AB . Но тогда, добавляя к дереву Γ отрезок AB и выбрасывая из возникшего цикла ребро e_2 , мы не увеличим длину дерева Γ , однако при этом получим кратчайшее де-

рево, в котором v будет внутренней вершиной степени 2 с углом 120° между стыкующимися в ней ребрами. Противоречие. Лемма 4.4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть на ребре e сети Γ_1 лежит вершина v сети Γ_2 . Тогда пересечение ребра e с сетью Γ_2 связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $e \cap \Gamma_2$ не связно.

Если вершина v граничная, то v совпадает с одной из вершин, инцидентных e , и соответствующее граничное ребро f сети Γ_2 заканчивается внутри e некоторой внутренней вершиной сети Γ_2 . Поэтому можно сразу предполагать, что вершина v внутренняя. Обозначим через f_1 и f_2 инцидентные v ребра, не параллельные e . По предположению существует ребро f' сети Γ_2 , пересечение которого с e лежит в компоненте, не содержащей v . Если f' параллельно e , то одна из инцидентных f' вершин лежит в e , является внутренней в Γ_2 и инцидентна двум другим ребрам из Γ_2 , уже не параллельным e . Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда f' не параллельно e .

В этом случае f' параллельно одному из ребер f_i , скажем f_1 . Тогда прямые f' и f_2 пересекаются внутри правильного треугольника T , построенного на e в полуплоскости, содержащей f_2 . Обозначим через T' треугольник, симметричный T относительно e . Оба треугольника T и T' пусты. Обозначим через w точку пересечения ребер f' и e . Применяя к треугольнику T , его стороне e и ребрам f' и f_2 лемму 4.3, заключаем, что точки v и w соединены путем в Γ_2 , лежащим в T . Этот путь не лежит в T' , так как f_2 лежит на этом пути, но не лежит на ребре e . Таким образом, к T' , его стороне e и ребрам f' и f_1 применима лемма 4.4, откуда заключаем, что ребра f' и f_1 не могут быть параллельны. Полученное противоречие и завершает доказательство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть (e_1, e_2) – усы дерева Γ_1 , инцидентные граничным вершинам p_1 и p_2 , и пусть v – общая вершина этих усов. Обозначим граничное ребро дерева Γ_2 , инцидентное p_i , через $f_i = p_i u_i$, $i = 1, 2$. Тогда или $u_1 = u_2 = v$, или вершина u_i лежит внутри ребра e_i , $i = 1, 2$, см. рис. 9.

Рис. 9. К утверждению 4.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если это не так, то одно из ребер e_i содержит внутреннюю вершину сети Γ_2 и его пересечение с Γ_2 состоит не менее чем из двух компонент связности. Последнее противоречит следствию 4.3. Утверждение 4.1 доказано.

Для двух неколлинеарных отрезков ξ и η , выходящих из одной точки, обозначим через $[\xi, \eta]$ параллелограмм, порожденный этими отрезками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Пусть (e_1, e_2) – усы дерева Γ_1 , инцидентные граничным вершинам p_1 и p_2 , и пусть вершины u_i сети Γ_2 , смежные с p_i , лежат внутри соответствующих ребер e_i , $i = 1, 2$. Тогда вершины u_1 и u_2 дерева Γ_2 соединены в Γ_2 путем, лежащим в параллелограмме $[e_1, e_2]$, причем этот путь состоит ровно из двух ребер, которые параллельны ребрам e_1 и e_2 соответственно, см. рис. 10.

Рис. 10. К утверждению 4.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпустим из вершин u_1 и u_2 геодезические лучи r_1 и r_2 в Γ_2 соответственно, направления которых параллельны ребрам e_1 и e_2 . Нам достаточно показать, что эти лучи пересекаются (в этом случае искомым путь представляет собой пересечение этих лучей). Предположим, что лучи не пересекаются. Так как внутри параллелограмма $[e_1, e_2]$ нет граничных вершин сети, то в этом случае один из лучей r_i пересекает оба ребра e_1 и e_2 (одно из них – по вершине u_i). Но тогда ребро e_j , $\{i, j\} = \{1, 2\}$, содержит внутреннюю вершину u_j и пересечение e_j с сетью Γ_2 состоит не менее чем из двух компонент связности. Последнее противоречит следствию 4.3. Таким образом, существование пути доказано.

Далее, если построенный путь γ состоит более чем из двух ребер, то геодезический луч, выходящий из его внутренней вершины (второй, считая от u_1) и пересекающийся с γ только по этой вершине, пересекает одно из ребер e_i , что снова противоречит следствию 4.3. Утверждение 4.2 доказано.

Пусть (e_1, e_2) – усы дерева Γ_1 , инцидентные граничным вершинам p_1 и p_2 , и пусть вершины u_i сети Γ_2 , смежные с p_i , лежат внутри соответствующих ребер e_i , $i = 1, 2$. Пусть u – (единственная) внутренняя вершина пути γ , соединяющего u_1 и u_2 в дереве Γ_2 , и $f = up_3$ – инцидентное u ребро из Γ_2 ,

не принадлежащее γ . Предположим, что вершина p_3 граничная, и пусть p_3w – ребро сети Γ_1 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Вершина w не может быть инцидентна усам сети Γ_1 .*

Рис. 11. Двое усов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если w инцидентна усам ($e_3 = p_3w, e_4 = wp_4$), см. рис. 11, то по утверждению 4.1, примененному к (e_3, e_4) , вершина u лежит на e_3 . Но тогда вершина p_4 окажется в параллелограмме $[e_1, e_2]$, что невозможно.

Обозначим через w_1 и w_2 отличные от p_3 вершины сети Γ_1 , смежные с вершиной w .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. *Вершина w лежит на ребре p_3u , вершины w_1 и w_2 сети Γ_1 являются внутренними и лежат внутри угла p_1vp_2 , см. рис. 12.*

Рис. 12. К утверждению 4.4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вершины w_i являются внутренними в силу предыдущего утверждения. Далее, если ребро p_3w длиннее, чем p_3u , то геодезический луч, выпущенный из w в направлении ребер p_3w и ww_1 , не может покинуть параллелограмм $[e_1, e_2]$. Противоречие. Если вершина $w_i \in \Gamma_1$ оказалась вне угла p_1vp_2 , то правильный треугольник, построенный на ребре ww_i в полу-плоскость, содержащую u , содержит граничную вершину p_i . Противоречие. Утверждение 4.4 доказано.

Обозначим через r_1 геодезический луч в Γ_1 , выпущенный из w_1 в направлении ребер p_3w и ww_2 , а через r_2 – геодезический луч в Γ_1 , выпущенный из вершины w_2 в направлении ребер p_3w и ww_1 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Если путь γ , соединяющий вершины p_3 и v в дереве Γ_1 , проходит через w_2 , то геодезический луч r_1 заканчивается внутри угла p_1vp_2 . Если же γ проходит через w_1 , то внутри угла p_1vp_2 заканчивается геодезический луч r_2 .

Рис. 13. Два геодезических луча

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности путь γ проходит через w_2 . Предположим противное, т.е. пусть геодезический луч r_1 выходит из угла p_1vp_2 . Так как в силу следствия 4.3 геодезический луч r_1 не может пересекать ребро p_3u , в этом случае r_1 пересекает луч vp_1 . Пусть x – первая на геодезическом луче r_1 точка пересечения с vp_1 . Цикл, возникающий в дереве Γ_1 после добавления ребра $e = p_1x$, содержит ребро w_1w . Получим противоречие, показав, что e короче w_1w . Для этого рассмотрим равнобоковую трапецию, образованную прямыми wi , vp_1 , ww_1 и прямой, проходящей через точку x параллельно wi , см. рис. 13. Ясно, что ребро e короче боковой стороны этой трапеции, которая, в свою очередь, не может быть длиннее, чем ww_1 . Утверждение 4.5 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Один из геодезических лучей r_1 и r_2 заканчивается внутри угла p_1vp_2 .

Обозначим через ℓ_i , $i = 1, 2$, прямую, проходящую через p_i параллельно ребру p_3w . Концевую вершину геодезического луча r_i , $i = 1, 2$, обозначим через q_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *Одна из вершин q_1 и q_2 лежит в угле p_1vp_2 вне полосы, образованной прямыми ℓ_1 и ℓ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть путь γ , соединяющий в дереве Γ_1 вершины p_3 и v , проходит через w_2 . Тогда в силу утверждения 4.5 геодезический луч r_1 лежит в угле p_1vp_2 , а вершина q_1 лежит в той же полуплоскости относительно p_3u , что и w_1 (иначе получаем противоречие со следствием 4.3).

Предположим сначала, что геодезический луч r_2 выходит из p_1vp_2 , см. рис. 14. Тогда r_2 пересекает луч vp_2 , и пусть x – первая на vp_2 их точка пересечения. Если q_1 и p_3 лежат в разных полуплоскостях относительно ℓ_1 , то искомое утверждение имеет место. Пусть теперь q_1 лежит в одной полуплоскости с p_3 относительно ℓ_1 . Тогда q_1 лежит в треугольнике Δ , образованном прямой ℓ_1 , прямой, проходящей через p_1 параллельно vp_2 , и прямой, проходящей через u параллельно vp_1 . Поэтому отрезок p_1q_1 не длиннее стороны этого треугольника, которая, в свою очередь, короче vp_2 .

Рис. 14. Луч r_2 вышел из угла p_1vp_2

Далее, покажем, что в рассматриваемом случае vp_2 короче ww_2 . Действительно, соединив p_2 с точкой x , мы получим цикл, содержащий vp_2 , поэтому отрезок p_2x не короче vp_2 . Рассмотрим трапецию, порожденную прямыми ww_2 , wp_3 , прямой, проходящей через x параллельно wp_3 , и прямой vp_2 . Одна ее боковая сторона не меньше, чем ww_2 , а вторая содержит p_2x , откуда $ww_2 > p_2x \geq vp_2$.

Таким образом, p_1q_1 короче ww_2 . Добавление p_1q_1 к дереву Γ_1 порождает цикл, содержащий ww_2 . Противоречие.

Пусть теперь геодезический луч r_2 не выходит из p_1vp_2 , см. рис. 15. Тогда его концевая вершина q_2 лежит в этом угле. При этом, как вытекает из

следствия 4.3, вершина q_2 лежит в одной полуплоскости с w_2 относительно p_3u . Если одна из q_i лежит вне полосы, ограниченной прямыми ℓ_i , то искомое утверждение имеет место. Иначе q_1 лежит в треугольнике Δ , а q_2 – в правильном треугольнике, порожденном прямыми ℓ_2 , прямой, проходящей через p_2 параллельно ww_2 , и прямой, проходящей через u параллельно vp_2 . Построим отрезок p_2q_2 , который короче vp_1 . Если vp_1 короче, чем vp_2 , то, добавляя p_2q_2 , получаем цикл, содержащий vp_2 . Противоречие. Если же vp_2 короче, чем vp_1 , то, добавляя $p_1q_1 < vp_2$, получаем цикл, содержащий vp_1 . Противоречие.

Рис. 15. Луч r_2 не вышел из угла p_1vp_2

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. *Сеть Γ_1 не является кратчайшей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть путь, соединяющий в дереве Γ_1 вершины p_3 и v , проходит через w_2 . В силу утверждения 4.5 в этом случае геодезический луч r_1 заканчивается в угле p_1vp_2 .

Предположим сначала, что концевая вершина q_1 луча r_1 лежит в той полуплоскости, ограниченной прямой ℓ_1 , которая не содержит p_3 , см. рис. 16. Рассмотрим путь δ в Γ_1 , образованный ребром ww_1 и геодезическим лучом r_1 . Этот путь выходит из правильного треугольника T_1 , построенного на ребре p_3u в той полуплоскости, которая содержит w_1 . При этом путь δ пересекает ту сторону треугольника T_1 , которая лежит на прямой a , проходящей через u параллельно vp_1 . Обозначим через x первую на δ , считая от w , точку пересечения пути δ и прямой a .

Далее, проведем через p_1 прямую b , параллельную vp_2 . Точку пересечения b и a обозначим через y . Рассмотрим треугольник xup_1 . Его угол y равен $\pi/3$, угол x меньше, чем $\pi/3$, так как x и y лежат по разные стороны от ℓ_1 , поэтому угол p_1 больше, чем $\pi/3$, следовательно, отрезок p_1x меньше, чем xu , который, в свою очередь, короче ww_1 как часть боковой стороны трапеции, ограниченной прямыми ww_1 , p_3u , a и прямой, проходящей через x параллельно p_3u (отметим,

бинарных деревьев с n и менее вершинами степени 1 лемма доказана, и пусть Γ – бинарное дерево с $n + 1$ вершиной степени 1.

Дерево Γ имеет не менее двух непересекающихся усов. Выберем одни из них, и пусть v – их общая вершина в Γ , а u – единственная вершина степени 3 в Γ , смежная с v . Отметим, что вершина u не может быть смежна усам в Γ , так как $n + 1 \geq 5$. Выбросим из дерева Γ выбранные усы. В результате получим бинарное дерево Γ' с n вершинами степени 1, количеством усов k' и количеством вполне внутренних вершин m' . Если вершина u была вполне внутренней в Γ , то в Γ' она не будет вполне внутренней и не будет инцидентна усам, поэтому $k = k' + 1$, $m = m' + 1$. Если же u не была вполне внутренней в Γ , то она инцидентна усам в Γ' , и поэтому $k = k'$, $m = m'$. Таким образом, в обоих случаях $k - m = k' - m' = 2$, где последнее равенство имеет место в силу предположения индукции. Доказательство закончено.

ТЕОРЕМА 4.2. *На плоскости не существует граничного множества, затягиваемого двумя разными бинарными минимальными деревьями Штейнера с одинаковыми ростками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторое граничное множество M затягивается двумя бинарными минимальными деревьями Штейнера с одинаковыми ростками. Случай $\#M = 3$ тривиален, так как имеется только одно бинарное дерево с тремя вершинами степени 1. Поэтому будем предполагать, без ограничения общности, что $\#M \geq 4$. Кроме того, будем также считать, что рассматриваемые деревья не имеют совпадающих усов. Действительно, это предположение не ограничивает общности, так как каждую пару совпадающих усов можно отрезать, отнеся при этом общие вершины этих усов к граничным. Заметим, что вновь полученные сети по-прежнему являются минимальными бинарными деревьями Штейнера с одинаковыми ростками. Продолжая этот процесс до тех пор, пока не избавимся от всех пар совпадающих усов, мы в результате построим минимальные бинарные деревья Штейнера с одинаковыми ростками, но уже не содержащими совпадающих усов.

Итак, пусть рассматриваемые деревья не имеют совпадающих усов. Воспользовавшись теоремой 4.1, каждым усам одного дерева поставим в соответствие вполне внутреннюю вершину другого дерева следующим образом. Обозначим усы первого дерева, Γ_1 , через (e_1, e_2) , а граничные вершины, смежные этим усам, – через p_1 и p_2 . Пусть $p_i u_i$ – ребро другого дерева, Γ_2 , инцидентное p_i . Тогда, как показано в теореме 4.1, точки u_i лежат внутри отрезков e_i и соединены путем в Γ_2 , содержащим единственную отличную от u_i вершину из Γ_2 . Эта вершина по теореме 4.1 является вполне внутренней и ставится в соответствие усам (e_1, e_2) .

Покажем, что вполне внутренняя вершина u дерева Γ_2 может соответствовать только одним усам дерева Γ_1 . Действительно, см. рис. 19, если u соответствует двум усам, то u лежит на двух путях в Γ_2 , каждый из которых состоит из двух ребер. Поэтому эти пути пересекаются по общему ребру. Общая концевая вершина этих путей должна лежать на ребрах сети Γ_1 , относящихся к разным и поэтому непересекающимся усам. Противоречие.

Рис. 19. Двое усов с общей вполне внутренней вершиной

Таким образом, если k_i – количество усов сети Γ_i , а m_i – количество его вполне внутренних вершин, то в силу существования построенного соответствия $k_1 \leq m_2$ и $k_2 \leq m_1$.

С другой стороны, в силу леммы 4.5 $m_i = k_i - 2$. Поэтому

$$k_1 - 2 = m_1 \geq k_2 > k_2 - 2 = m_2 \geq k_1.$$

Противоречие. Теорема 4.2 доказана.

Тем самым доказан следующий результат, из которого с помощью утверждения 3.3 получается основная теорема 1.1.

ТЕОРЕМА 4.3. *Граничное множество общего положения затягивается единственным минимальным деревом Штейнера.*

§ 5. Следствия и замечания

Приведем некоторые следствия основной теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Хорошее граничное множество затягивается единственным минимальным деревом Штейнера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существует такое хорошее граничное множество $\beta \in \mathcal{P}_n$, что β затягивается двумя разными минимальными деревьями Штейнера. Тогда по определению хорошего множества существует такая открытая окрестность $U \subset \mathcal{P}_n$ точки β , что каждое граничное множество $\beta' \in U$ тоже затягивается двумя разными минимальными деревьями Штейнера. Однако в силу утверждения 3.3 окрестность U содержит граничное множество общего положения, которое по теореме 4.3 затягивается единственным минимальным деревом Штейнера. Противоречие.

Для доказательства следующих результатов нам понадобится понятие, моделирующее расщепление вершин сети. Пусть G и G' – деревья с множествами вершин V и V' и границами ∂G и $\partial G'$ соответственно. Отображение $\pi: V \rightarrow V'$ назовем *проекцией*, если

- 1) оно сюръективно;
- 2) его ограничение на ∂G устанавливает (сохраняющую нумерацию) биекцию между ∂G и $\partial G'$;
- 3) при x и y смежных в G их образы $\pi(x)$, $\pi(y)$ или совпадают, или смежны в G' .

Легко доказывается следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $\pi: V \rightarrow V'$ – проекция дерева G на дерево G' . Тогда если V'' – множество вершин поддерева G'' дерева G' , то подграф в G , порожденный прообразом $\pi^{-1}(V'')$, связан. В частности, связным является подграф в G , порожденный прообразом $\pi^{-1}(x')$ произвольной вершины $x' \in V'$. Кроме того, если вершины x' и y' дерева G' смежны, то существуют смежные в G вершины $x \in \pi^{-1}(x')$ и $y \in \pi^{-1}(y')$.

Пусть (G_i, β_i) , $i = 1, 2$, – два типа. Будем говорить, что тип (G_1, β_1) проецируется на тип (G_2, β_2) , если существует проекция $\pi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, согласованная с граничными отображениями β_i , т.е. $\beta_1 = \beta_2 \circ \pi|_{\partial G_1}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Граничное множество $\beta \in \mathcal{P}_n$ является хорошим тогда и только тогда, когда существуют такая окрестность $U \subset \mathcal{P}_n$ граничного множества β и такое дерево Штейнера G , что каждое граничное множество $\beta' \in U$ затягивается единственным минимальным деревом Штейнера, причем тип этого дерева равен (G, β') .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, каждое хорошее множество обладает окрестностью с указанными свойствами в силу следствия 5.1 и определения хорошего множества. Обратно, если граничное множество обладает такой окрестностью U , то эта окрестность удовлетворяет всем свойствам из определения хорошего множества. Действительно, на каждом граничном множестве β' из этой окрестности реализуется единственный невырожденный минимальный тип (G, β') , и поэтому одинаков набор вырожденных минимальных типов, каждый из которых проецируется на тип (G, β') . Следствие 5.2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{P}_n$ – семейство всех граничных множеств, каждое из которых затягивается единственным минимальным деревом Штейнера, то неверно, что внутренность $\mathcal{U}_n$ совпадает с семейством всех хороших множеств. Например, если $n = 3$, то $\mathcal{U}_3 = \mathcal{P}_3$, но граничное множество, состоящее из вершин треугольника с углом в 120° , не является хорошим.

Граничное множество $\beta \in \mathcal{P}_n$ назовем *бинарно устойчивым*, если существует такая его окрестность $U \subset \mathcal{P}_n$, что все кратчайшие бинарные деревья, затягивающие граничные множества из этой окрестности, имеют один и тот же параметризующий граф.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. Если граничное множество β затягивается единственным минимальным деревом Штейнера Γ и у дерева Γ нет граничных вершин степени 3, то множество β бинарно устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в рассматриваемом случае на граничном множестве β реализуется единственный минимальный бинарный тип. Остается воспользоваться непрерывностью функционала длины минимального параметрического дерева. Доказательство закончено.

Из утверждения 3.2 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *Каждое хорошее граничное множество является бинарно устойчивым. Таким образом, семейство всех бинарно устойчивых граничных множеств из $\mathcal{P}_n$ содержит семейство всех хороших граничных множеств, которое, в свою очередь, содержит все граничные множества общего положения.*

Имеет место следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Семейство $\mathcal{S}_n$ всех бинарно устойчивых граничных множеств $\beta \in \mathcal{P}_n$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{P}_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Открытость множества $\mathcal{S}_n$ вытекает из непрерывности функционала длины параметрического бинарного дерева. Далее, каждое хорошее граничное множество является бинарно устойчивым, поэтому $\mathcal{S}_n$ всюду плотно. Доказательство закончено.

Пусть Γ – кратчайшее бинарное дерево. Его граничную вершину v назовем невырожденной, если единственное инцидентное этой вершине ребро сети Γ невырождено. Для такого дерева операцию выпускания усов (см. определение в §2) будем понимать в следующем более узком смысле: усы всегда будем выпускать из невырожденной граничной вершины, причем это всегда будут 2-усы, и во вновь образовавшейся вершине усов входящие в нее невырожденные ребра образуют углы величины не меньшей чем 120° . Отметим, что полученное дерево будет минимальным параметрическим бинарным деревом.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\beta \in \mathcal{P}_n$, $n > 1$, – бинарно устойчивое граничное множество, Γ – единственное кратчайшее бинарное дерево, его затягивающее, G – параметризующий граф сети Γ и v – невырожденная граничная вершина из G . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого минимального параметрического бинарного дерева $\bar{\Gamma}$, полученного из Γ выпусанием из v усов длины не больше чем ε , граничное множество $\partial\bar{\Gamma} \in \mathcal{P}_{n+1}$ является бинарно устойчивым и единственное кратчайшее бинарное дерево, затягивающее $\partial\bar{\Gamma}$, совпадает с $\bar{\Gamma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что существует такое $\varepsilon > 0$, для которого каждое бинарное дерево $\bar{\Gamma}$, полученное из Γ выпусанием из v усов длины не больше чем ε , является кратчайшим деревом.

Предположим, что это не так. Пусть $(\bar{G}, \partial\bar{\Gamma})$ – тип бинарного дерева $\bar{\Gamma}$. Обозначим через β' граничное множество из $\mathbb{R}^{2n+2}$ вида $(\beta, \beta(v))$. Тогда существует такая последовательность Γ_i кратчайших бинарных деревьев, что

- 1) граничное множество $\beta_i = \partial\Gamma_i \in \mathcal{P}_{n+1}$ совпадает с граничным множеством сети, полученной из $\bar{\Gamma}$ укорачиванием тех усов, которыми дерево $\bar{\Gamma}$ отличается от Γ ;

- 2) множества β_i сходятся к β' при $i \rightarrow \infty$;
- 3) параметризующие бинарные деревья сетей Γ_i отличны от $\bar{G}$.

Так как существует лишь конечное число бинарных деревьев с данным числом граничных вершин, то без ограничения общности мы можем сразу предполагать, что последовательность граничных множеств β_i затягивается кратчайшими бинарными деревьями Γ_i с одним и тем же параметризующим бинарным деревом G' .

Рассмотрим предельную сеть Γ' последовательности сетей Γ_i . Эта сеть имеет тип (G', β') . Так как функционал длины кратчайшего дерева непрерывно зависит от граничного множества, дерево Γ' является кратчайшим. Из единственности бинарного дерева Γ на β вытекает, что G' и G проецируются на параметризующий граф F единственного минимального дерева Штейнера Φ , затягивающего β . Так как $\beta_i \rightarrow \beta'$, то ровно две граничные вершины, скажем u и u' , дерева G' проецируются в ту же вершину x графа F , в которую проецируется v . Обозначим через γ единственный путь в G' , соединяющий u и u' . Ясно, что все вершины пути γ проецируются в x (иначе Γ' не является кратчайшим деревом). Покажем, что множество ребер дерева G' , не лежащих на γ и инцидентных вершинам этого пути, состоит из одного элемента. Действительно, каждому такому ребру e соответствует начинающийся на e путь γ_e , имеющий с γ ровно одну общую вершину и приходящий в отличную от u и u' граничную вершину дерева G' . Отметим, что построенные пути не имеют общих ребер. Первое, считая от e , невырожденное ребро сети Γ' , лежащее на γ_e , проецируется в единственное ребро сети Φ , инцидентное x . Но так как Γ' – кратчайшее, то такое ребро ровно одно, что и требовалось. Таким образом, путь γ состоит из двух ребер, общую вершину которых обозначим через w .

Итак, пусть e – единственное ребро дерева G' , не лежащее на γ и инцидентное w . Отрежем от G' путь γ и у полученного дерева G'' отнесем вершину w к граничным вершинам, присвоив ей тот же номер, что имеет вершина v в ∂G . Ограничение сети Γ' на G'' обозначим соответственно через Γ'' . Отметим, что Γ'' является кратчайшим бинарным деревом, затягивающим β . Так как β – бинарно устойчивое граничное множество, то β затягивается единственным кратчайшим бинарным деревом, откуда $G'' = G$ и $w = v$. Поэтому дерево G' изоморфно $\bar{G}$. Противоречие.

Покажем теперь, что для некоторого (возможно, меньшего) $\varepsilon > 0$ каждое граничное множество $\partial \bar{\Gamma} \in \mathcal{P}_{n+1}$ является бинарно устойчивым. Предположим противное, т.е. пусть существует такая положительная последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$, что для каждого i найдется сеть $\bar{\Gamma}_i$, полученная из Γ выпусканием из v усов длины не более чем ε_i , граничное множество $\partial \bar{\Gamma}_i$ которой не является бинарно устойчивым. Последнее означает, что каждая окрестность $U_i \subset \mathcal{P}_{n+1}$ граничного множества $\partial \bar{\Gamma}_i$ содержит граничное множество β_i , которое затягивается кратчайшим бинарным деревом с параметризующим графом G_i , отличным от $\bar{G}$. Выбирая окрестности U_i так, чтобы их диаметры стремились к нулю, и переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы получим последовательность кратчайших бинарных деревьев, параметризованных одним

и тем же графом $G' \neq \bar{G}$ и затягивающих граничные множества β_i , причем $\beta_i \rightarrow \beta'$. Рассуждения, полностью аналогичные приведенным в первой части доказательства теоремы, показывают, что последнее невозможно. Доказательство теоремы 5.1 закончено.

Аналогичный результат может быть получен и в более узком классе хороших множеств.

Пусть Γ – локально минимальное дерево Штейнера и v – его вершина степени 1. Для такого дерева операцию выпускания усов (см. определение в §2) будем понимать в следующем более узком смысле: усы всегда будут предполагаться такими, что во вновь образовавшейся вершине u усов входящие в нее ребра образуют углы величины не меньшей чем 120° (в частности, выпускаемые усы могут быть или однореберными, или двуреберными); более того, мы дополнительно требуем,

- 1) чтобы полученная сеть была невырожденной и, значит, вновь локально минимальной,
- 2) если мы выпускаем 1-усы, то чтобы угол в вершине u усов был строго больше 120° .

Отметим, что это соглашение имеет место также и для минимального дерева Штейнера как частного случая локально минимальной сети.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\beta \in \mathcal{P}_n$, $n > 1$, – хорошее граничное множество, Γ – единственное минимальное дерево Штейнера, его затягивающее, G – параметризующий граф сети Γ и v – граничная вершина степени 1 из G . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждого невырожденного дерева $\bar{\Gamma}$, полученного из Γ выпускиванием из v усов длины не больше чем ε , граничное множество $\partial\bar{\Gamma} \in \mathcal{P}_{n+1}$ является хорошим и единственное минимальное дерево Штейнера, затягивающее $\partial\bar{\Gamma}$, совпадает с $\bar{\Gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что существует такое $\varepsilon > 0$, для которого каждое невырожденное дерево $\bar{\Gamma}$, полученное из Γ выпускиванием из v усов длины не больше чем ε , является минимальным деревом Штейнера.

Предположим, что это не так. Пусть $(\bar{G}, \partial\bar{\Gamma})$ – тип дерева $\bar{\Gamma}$. Обозначим через β' граничное множество из $\mathbb{R}^{2n+2}$ вида $(\beta, \beta(v))$. Тогда существует такая последовательность Γ_i минимальных деревьев Штейнера, что

- 1) граничное множество $\beta_i = \partial\Gamma_i \in \mathcal{P}_{n+1}$ совпадает с граничным множеством локально минимальной сети, полученной из $\bar{\Gamma}$ укорачиванием тех усов, которыми дерево $\bar{\Gamma}$ отличается от Γ ;
- 2) множества β_i сходятся к β' при $i \rightarrow \infty$;
- 3) параметризующие графы сетей Γ_i отличны от $\bar{G}$.

Так как существует лишь конечное число деревьев Штейнера с данным числом граничных вершин, то без ограничения общности мы можем сразу предполагать, что последовательность граничных множеств β_i затягивается минимальными деревьями Штейнера Γ_i с одним и тем же параметризующим деревом G' .

Рассмотрим предельную сеть Γ' последовательности сетей Γ_i . Эта сеть имеет тип (G', β') . Так как функционал длины минимального дерева Штейнера непрерывно зависит от граничного множества, дерево Γ' является кратчайшим. Из единственности дерева Γ на β вытекает, что G' проецируется на G . Так как $\beta_i \rightarrow \beta'$, то ровно две граничные вершины, скажем u и u' , дерева G' проецируются в v . Обозначим через γ единственный путь в G' , соединяющий u и u' . Ясно, что все вершины пути γ проецируются в v (иначе Γ' не является кратчайшим деревом). Покажем, что множество ребер дерева G' , не лежащих на γ и инцидентных вершинам этого пути, состоит из одного элемента. Действительно, каждому такому ребру e соответствует начинающийся на e путь γ_e , имеющий с γ ровно одну общую вершину и приходящий в отличную от u и u' граничную вершину дерева G' . Отметим, что построенные пути не имеют общих ребер. Первое, считая от e , невырожденное ребро сети Γ' , лежащее на γ_e , проецируется в единственное ребро сети Γ , инцидентное v . Но так как Γ' – кратчайшее, то такое ребро ровно одно, что и требовалось.

Итак, пусть e – единственное ребро дерева G' , не лежащее на γ и инцидентное некоторой вершине w этого пути. Отрежем от G' путь γ и у полученного дерева G'' отнесем вершину w к граничным вершинам, поставив ее в конце упорядоченного списка граничных вершин. Ограничение сетей Γ_i и Γ' на G'' обозначим соответственно через Γ''_i и Γ'' , а их граничные отображения – через β''_i и β'' . Так как Γ_i невырождены, Γ''_i также невырождены, при этом их граничные множества отличаются от β расположением лишь одной точки $\beta''_i(w)$.

Так как β – хорошее граничное множество, то у β существует такая открытая окрестность $U \subset \mathcal{P}_n$, что каждое граничное множество из этой окрестности затягивается единственным минимальным деревом Штейнера, параметризованным тем же деревом Штейнера G , что и сеть Γ . Выберем i_0 столь большим, чтобы при всех $i > i_0$ граничные множества β''_i лежали в U . Тогда в соответствии с вышесказанным параметризующие графы сетей Γ''_i совпадают с G , откуда $G'' = G$ и $w = v$.

Пусть H – это 1-компонента дерева G , содержащая вершину v , а η_i и η – ограничения на H сетей Γ''_i и Γ соответственно. Пусть M_i и M – точки Мелзака невырожденных бинарных сетей η_i и η , соответствующие ребру e . Так как граничные вершины этих сетей, участвующие в формуле для рассматриваемых точек Мелзака, одни и те же, при всех $i > i_0$ имеем $M_i = M$.

Добавим теперь к дереву H путь γ , отнеся при этом концевые вершины u и u' пути γ к граничным вершинам, и если w не является концевой вершиной пути γ , то ее отнесем ко внутренним вершинам. Полученный подграф в G' обозначим через H' . Пусть η'_i – ограничение сети Γ_i на H' . Хорошо известно, что длина сети η'_i равна длине минимального дерева Штейнера, затягивающего множество $\{M, \eta'_i(u) = \Gamma_i(u), \eta'_i(u') = \Gamma_i(u')\}$. Но эта сеть имеет точку Штейнера в случае, когда выпускаемые усы двуреберны, и не имеет точки Штейнера для одnoreберных усов. Отсюда вытекает, что дерево Γ_i параметризуется тем же деревом, что и сеть $\bar{\Gamma}$, т.е. $G' = \bar{G}$. Противоречие.

Покажем теперь, что для некоторого (возможно, меньшего) $\varepsilon > 0$ каждое граничное множество $\partial \bar{\Gamma} \in \mathcal{P}_{n+1}$ является хорошим. Предположим против-

ное, т.е. пусть существует такая положительная последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$, что для каждого i найдется сеть $\bar{\Gamma}_i$, полученная из Γ выпусканием из v усов длины не более чем ε_i , граничное множество $\partial\bar{\Gamma}_i$ которой не является хорошим. Последнее означает, что каждая окрестность $U_i \subset \mathcal{P}_{n+1}$ граничного множества $\partial\bar{\Gamma}_i$ содержит граничное множество β_i , которое затягивается минимальным деревом Штейнера с параметризующим графом G_i , отличным от $\bar{G}$. Выбирая окрестности U_i так, чтобы их диаметры стремились к нулю, и переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы получим последовательность минимальных деревьев Штейнера, параметризованных одним и тем же графом $G' \neq \bar{G}$ и затягивающих граничные множества β_i , причем $\beta_i \rightarrow \beta'$. Рассуждения, полностью аналогичные приведенным в первой части доказательства теоремы, показывают, что последнее невозможно. Доказательство теоремы 5.2 закончено.

Теорема 5.2 мгновенно влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Любое плоское дерево Штейнера планарно эквивалентно некоторому минимальному дереву Штейнера, затягивающему хорошее граничное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, начав с отрезка и последовательно выпуская достаточно короткие, в смысле теоремы 5.2, усы из соответствующих вершин степени 1 построенного на предыдущем шаге минимального дерева Штейнера, затягивающего хорошее граничное множество, мы можем реализовать любое плоское дерево Штейнера в виде минимального дерева Штейнера с хорошей границей. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Пусть Γ – бинарное минимальное дерево Штейнера, затягивающее множество $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, и пусть e_i – единственное ребро из Γ , инцидентное вершине p_i . Обозначим через q_i произвольную точку, лежащую внутри e_i . Тогда невырожденное локально минимальное бинарное дерево Γ' , полученное из Γ выбрасыванием отрезков $[p_i, q_i]$, является единственным минимальным деревом Штейнера для $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ и поэтому граничное множество Q бинарно устойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть Δ' – отличное от Γ' минимальное дерево Штейнера, затягивающее Q . Добавим к Δ' отрезки $[q_i, p_i]$ и у полученного дерева исключим из множества вершин точки q_i , а точки p_i объявим граничными вершинами. Построенное дерево обозначим через Δ . Отметим, что Δ имеет те же длину и границу, что и Γ , поэтому является кратчайшим и все его граничные вершины имеют степень 1. Отсюда вытекает, что Δ – отличное от Γ бинарное минимальное дерево Штейнера, затягивающее P , причем ростки деревьев Γ и Δ одинаковы. Получаем противоречие с теоремой 4.2. Таким образом, множество Q затягивается единственным минимальным деревом Штейнера Γ' , дерево Γ' бинарное, в частности не содержит вершин степени 3, и поэтому в силу утверждения 5.2 множество Q бинарно устойчиво.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если часть точек q_i совпадает с p_i , а часть лежит внутри e_i , то приведенное только что доказательство не работает, так как дерево Δ может

не оказаться бинарным и теорема 4.2 неприменима. Возникает естественный вопрос: можно ли перенести следствие 5.4 на эту более общую ситуацию? Отметим, что инфинитезимальные ростки деревьев Γ и Δ совпадают и в этом случае. Поэтому другой интересный вопрос: можно ли обобщить теорему 4.2 на случай минимальных деревьев Штейнера без граничных вершин степени 3 с одинаковыми инфинитезимальными ростками в предположении, что в каждой граничной вершине степени 2 угол между ребрами дерева равен 120° ?

Следующие утверждения касаются дифференцируемости функций длины минимального дерева Штейнера и отношения Штейнера на пространстве границ.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Длина минимального дерева Штейнера непрерывно дифференцируема на открытом всюду плотном подмножестве множества границ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве открытого всюду плотного множества границ можно взять подмножество $\mathbb{R}^{2n}$, состоящее из хороших граничных множеств. Каждая такая граница затягивается единственным (невыврожденным) минимальным деревом Штейнера, которое остается таковым при малых изменениях границы. Поэтому в окрестности хорошего граничного множества длина минимального дерева Штейнера совпадает с длиной невыврожденного минимального параметрического дерева с одним и тем же параметризующим деревом. Однако длина минимального параметрического дерева непрерывно дифференцируема для всех границ, где это дерево невыврождено, см. [4]. Доказательство закончено.

Напомним, что *минимальным остовным деревом* на множестве $\beta \in \mathbb{R}^{2n}$ называется кратчайшее из деревьев, множества вершин которых совпадают с β . Если длина минимального остовного дерева на β отлична от нуля, то *отношением Штейнера* $\text{sg}(\beta)$ множества β называется отношение длин минимального дерева Штейнера и минимального остовного дерева, построенных на β . В противном случае положим $\text{sg}(\beta) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Отношение Штейнера граничных множеств из $\mathbb{R}^{2n}$ непрерывно дифференцируемо на открытом всюду плотном подмножестве множества границ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что на каждом элементе β из некоторого открытого всюду плотного подмножества $\mathbb{R}^{2n}$ реализуется единственное невыврожденное минимальное остовное дерево. Напомним достаточное условие единственности минимального остовного дерева:

- (*) на конечном подмножестве плоскости таком, что все расстояния между его различными точками попарно различны, реализуется единственное минимальное остовное дерево.

Для завершения доказательства мы покажем, что множество всех β , состоящих из попарно различных точек и удовлетворяющих условию (*), открыто и всюду плотно в $\mathbb{R}^{2n}$.

Открытость этого множества вытекает из непрерывной зависимости расстояния между точками от положения этих точек. Поэтому осталось доказать, что в любой сколь угодно малой окрестности множества β , состоящего из попарно различных точек, существует β' , состоящее из попарно различных точек и удовлетворяющее условию (*).

Доказательство этого факта проведем индукцией по числу точек в β . Рассмотрим в минимальном остовном дереве усы и выкинем их. К полученному дереву применимо предположение индукции, поэтому можно так сместить его граничные вершины, чтобы измененное β по-прежнему состояло из различных вершин, а полученное дерево удовлетворяло условию (*). Теперь вернем усы, слегка растянув их ребра так, чтобы добиться выполнения искомых условий. Доказательство закончено.

Точную нижнюю грань величин $\text{sr}(\beta)$, взятую по всем множествам $\beta \in \mathbb{R}^{2n}$, обозначим через $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$ и назовем *отношением Штейнера для граничных множеств, состоящих не более чем из n точек плоскости*. Отметим, что $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$ – это невозрастающая функция от n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. *Предположим, что на подмножестве $M \subset \mathbb{R}^2$ достигается отношение Штейнера $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$. Пусть Γ – кратчайшее дерево на M и $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ – 1-компоненты дерева Γ . Обозначим через M_i граничное множество компоненты Γ_i . Тогда $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$ достигается также и на каждом M_i , а дерево, составленное из минимальных остовных деревьев Δ_i множеств M_i , является минимальным остовным деревом на M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{sr}(M) = \text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$, имеем $\ell(\Gamma_i) \geq \text{sr}_n(\mathbb{R}^2)\ell(\Delta_i)$. Кроме того, так как объединение деревьев Δ_i представляет собой остовное дерево, затыгивающее M , то $\ell(\Delta) \leq \sum_i \ell(\Delta_i)$. Таким образом,

$$\text{sr}_n(\mathbb{R}^2) = \text{sr}(M) = \frac{\ell(\Gamma)}{\ell(\Delta)} \geq \frac{\sum_i \ell(\Gamma_i)}{\sum_i \ell(\Delta_i)} \geq \frac{\text{sr}_n(\mathbb{R}^2) \sum_i \ell(\Delta_i)}{\sum_i \ell(\Delta_i)} = \text{sr}_n(\mathbb{R}^2),$$

поэтому все неравенства выполняются в виде равенств. В частности, $\ell(\Gamma_i) = \text{sr}_n(\mathbb{R}^2)\ell(\Delta_i)$ и $\ell(\Delta) = \sum_i \ell(\Delta_i)$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущее утверждение остается верным в произвольном метрическом пространстве X . Доказательство переносится дословно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение 5.5 перестает быть верным, если отказаться от требования $\text{sr}(M) = \text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$. Приведем пример такого граничного множества. Рассмотрим равнобоковую трапецию с основаниями длины 1 и 2 и боковыми сторонами длины 1. Пусть P – множество, состоящее из вершин этой трапеции и середины X ее большего основания. Непосредственно проверяется, что минимальное дерево Штейнера Γ , затыгивающее P , состоит из двух 1-компонент, каждая из которых затыгивает концы одной из боковых сторон и точку X . Так как Γ не содержит граничных вершин степени 3, то P – бинарно устойчивое граничное множество. По теореме 5.1 из любой невырожденной граничной вершины можно выпустить усы так, чтобы полученное граничное множество

вновь было бинарно устойчивым. Выпустим усы из вершины меньшего основания трапеции. Полученное бинарное дерево Γ' будет кратчайшим на $\partial G' = M$. С другой стороны, каждое минимальное остовное дерево на M содержит ребро, соединяющее вершины из разных 1-компонент дерева Γ' .

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Отношение Штейнера $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$, $n > 2$, достигается на замкнутом нигде не плотном семействе граничных множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что отношение Штейнера не может достигаться на граничном множестве, затягиваемом единственным минимальным деревом Штейнера и единственным минимальным остовным деревом. Предположим противное, и пусть $\beta \in \mathcal{P}_n$ – граничное множество, которое затягивается единственным минимальным деревом Штейнера Γ и единственным минимальным остовным деревом Δ , причем отношение Штейнера $\text{sr}(\beta)$ этого множества совпадает с отношением Штейнера $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2)$.

Из результатов авторов [9] вытекает, что в этом случае инфинитезимальный росток дерева Γ совпадает с умноженным на $\text{sr}(\beta)$ инфинитезимальным ростком дерева Δ . Предположим сначала, что Γ – бинарное дерево. В частности, все его граничные вершины имеют степень 1. Но тогда существует такая граничная вершина $v \in \mathbb{R}^2$, степень которой равна 1 как в дереве Δ , так и в дереве Γ . Пусть ν_v и μ_v – инфинитезимальные ростки деревьев Γ и Δ в вершине v соответственно. Тогда $\|\nu_v\| = \|\mu_v\| = 1$ и равенство $\nu_v = \text{sr}(\beta)\mu_v$ невозможно, так как $\text{sr}(\beta) < 1$.

Пусть теперь дерево Γ состоит из нескольких 1-компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Обозначим через Δ_i минимальное остовное дерево, затягивающее граничное множество $\partial\Gamma_i$. В силу утверждения 5.5 $\ell(\Gamma_i) = \text{sr}_n(\mathbb{R}^2)\ell(\Delta_i)$ и $\ell(\Delta) = \sum_i \ell(\Delta_i)$. Так как $\text{sr}_n(\mathbb{R}^2) < 1$, из первого равенства вытекает, что все компоненты Γ_i отличаются от отрезков и к ним применимы предыдущие рассуждения, из которых следует, что граничное множество $\partial\Gamma_i$ не может затягиваться единственным минимальным деревом Штейнера и единственным минимальным остовным деревом. Но тогда и на исходной границе β или минимальное дерево Штейнера, или минимальное остовное дерево не единственно. Следствие 5.7 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущее доказательство может быть перенесено на более общий случай связных полных римановых многообразий. Методами, изложенными в работах [10] и [11], можно показать, что отношение Штейнера $\text{sr}_n(\mathbb{X})$ не более чем n -элементных подмножеств связного полного k -мерного риманова многообразия $\mathbb{X}$ не превосходит $\text{sr}_n(\mathbb{R}^k)$ и поэтому $\text{sr}_n(\mathbb{X}) < 1$ при $n > 2$ и $k > 1$. Пользуясь этим фактом, можно получить следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.6. *Пусть $\mathbb{X}$ – связное полное риманово многообразие и $M \subset \mathbb{X}$ – конечное подмножество, состоящее из $n > 2$ элементов. Если M затягивается единственным кратчайшим деревом и единственным минимальным остовным деревом (имеющими единственные геометрические реализации, см. подробности в [9]), то на M не может достигаться отношение Штейнера $\text{sr}_n(\mathbb{X})$.*

Список литературы

- [1] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей*, The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, 1999.
- [3] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Branching solutions to one-dimensional variational problems*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [4] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Ин-т компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003.
- [5] F. K. Hwang, D. Richards, P. Winter, *The Steiner tree problem*, Ann. Discrete Math., **53**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [6] D. Cieslik, *Steiner minimal trees*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [7] S. Hildebrandt, A. Tromba, *The parsimonious universe*, Copernicus, New York, 1996.
- [8] Z. A. Melzak, *Companion to concrete mathematics*, Wiley, New York, 1973.
- [9] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях”, *Матем. сб.*, **192**:6 (2001), 31–50.
- [10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик, “Отношение Штейнера для римановых многообразий”, *УМН*, **55**:6 (2000), 139–140.
- [11] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик, “Отношение Штейнера для многообразий”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 387–395.

А. О. Иванов (A. O. Ivanov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
05.12.2005

А. А. Тужилин (A. A. Tuzhilin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: tuz@mech.math.msu.su