Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4, t)$,
Матем. сб., 1996, том 187, номер 7, 97–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:57:27

УДК 519.14

А. А. Махнев

О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4, t)$

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются по не более, чем одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Граф с указанными параметрами называется *псевдогеометрическим* графом соответствующей геометрии. Доказано, что псевдогеометрический граф частичной геометрии $pG_2(4, t)$, в котором μ -подграфы – регулярные графы без треугольников, является треугольным графом $T(5)$, частным графа Джонсона $J(8, 4)$ или графом Маклафина.

Библиография: 4 названия.

§ 1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть *окрестностью* вершины a и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$, а через $[a]'$ – подграф $\Gamma - a^\perp$.

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* валентности k , если валентность любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ) , если он содержит v вершин, регулярен валентности k , и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным* графом, если он имеет диаметр 2. Для подграфа Δ графа Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных с i вершинами из Δ , $x_i(\Delta) = |K_i(\Delta)|$.

Через $(m_1, \dots, m_n)$ обозначим полный многодольный граф, с долями порядка $m_1, \dots, m_n$. Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$ назовем λ -(μ)-*подграфом*, если вершины a, b смежны (находятся на расстоянии 2). Граф на множестве пар $X \times Y$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00802-а) и фонда Госкомитета РФ по высшему образованию.

называется $m \times n$ -графом (прямоугольной решеткой), если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. При $m = n$ граф Γ называется *решетчатым графом*. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны только, если они имеют общий элемент. Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -элементные подмножества данного n -элементного множества, и две вершины смежны, если они пересекаются по $(m-1)$ -элементному подмножеству. Частным графом Джонсона $J(2m, m)$ называется граф, полученный отождествлением m -элементных подмножеств с их дополнениями.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются по не более, чем одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным 4-угольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1) + (\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Граф с указанными параметрами называется *псевдогеометрическим* графом соответствующей геометрии, при этом граф называется *геометрическим*, если подходящее множество его максимальных клик удовлетворяет условиям, налагаемым на прямые частичной геометрии. Для графов с этими параметрами достигается граница Хоффмана для клик (см. [1]) и каждая вершина вне $(s+1)$ -клики L смежна с α вершинами из L .

Точечный граф частичной геометрии $pG_2(4, t)$ имеет параметры $v = 5(2t+1)$, $k = 4(t+1)$, $\lambda = t+3$, $\mu = 2t+2$. Собственные значения графа равны в этом случае $4t+4, 2, -(t+1)$. По условию целочисленности [1] $t+3$ делит $2t(5t+5)$, поэтому $t = 1, 2, 3, 7, 9, 12, 17, 27$ или 54 . Если $t = 1$, то граф совпадает с треугольным графом $T(5)$, который является геометрическим. Для $t = 2$ геометрия $pG_2(4, 2)$ — это 3-сеть, она может быть построена из 5×5 -решетки добавлением пяти прямых, параллельных главной диагонали решетки. По условию Крейна [1] параметр t не больше 27, причем в случае равенства в точечном графе Γ двойственной геометрии $pG_2(27, 4)$ также достигается равенство в условии Крейна, поэтому окрестность и антиокрестность любой вершины из Γ являются сильно регулярными графами. Пусть $a \in \Gamma$, L — прямая из $a^\perp$, $b \in L - \{a\}$. Для смежной с b вершины $c \in [a]$ очевидно $[b] \cap [c]$ содержит по крайней мере 25 вершин из $[a]$, если $c \in L$, и не более 5 вершин, если $c \notin L$. Таким образом, $pG_2(4, 27)$ не существует. Однако граф с параметрами $(275, 112, 30, 56)$ существует и является графом Маклафлина [4]. Хорошо известно также, что не существует $pG_2(4, 3)$. С другой стороны, известно существование $pG_2(4, 17)$ [1]. Для $3 < t < 17$ неизвестно существование ни указанных геометрий, ни сильно регулярных графов с данными параметрами. Если все μ -подграфы являются объединениями изолированных 4-угольников, то граф является локально решетчатым и ввиду [2] является треугольным графом $T(5)$ или

частным графа Джонсона $J(8, 4)$. В [3] показано, что сильно регулярные графы с параметрами $(75, 32, 10, 16)$ и $(95, 40, 12, 20)$, в которых μ -подграфы – регулярные графы без треугольников, не существуют. В данной работе этот результат обобщается на псевдогеометрические графы для геометрий $pG_2(4, t)$.

ТЕОРЕМА. *Сильно регулярный граф с параметрами $(10t+5, 4t+4, t+3, 2t+2)$, в котором μ -подграфы являются регулярными графами (возможно различными валентностей) без треугольников, является треугольным графом $T(5)$, частным графа Джонсона $J(8, 4)$ или графом Маклафлина.*

Данной теоремой не охарактеризованы только два известных графа с параметрами $(10t+5, 4t+4, t+3, 2t+2)$: граф Пэли для $t = 2$ и граф Хэймерса для $t = 17$. Вершинами графа Хэймерса служат 175 ребер графа Хоффмана–Синглтона с параметрами $(50, 7, 0, 1)$, причем два ребра смежны, если они не пересекаются и соединены общим ребром. В графе Пэли любой μ -подграф – это 6-угольник с одним добавленным диаметром, так что валентности его вершин равны 2 и 3. В графе Хэймерса валентности вершин в μ -подграфе, соответствующем паре пересекающихся ребер, равны 5 и 6.

§2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены некоторые часто используемые вспомогательные результаты. В леммах 2.1–2.8 предполагается, что Γ – сильно регулярный граф с параметрами: $v = 10t + 5$, $k = 4t + 4$, $\lambda = t + 3$, $\mu = 2t + 2$. Тройку попарно несмежных вершин a, b, c назовем *плохой*, если $[c]$ не пересекает $[a] \cap [b]$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть K – клика из j вершин графа Γ , $x_i = x_i(K)$. Тогда*

- (1) *если $j = 4$, то $x_0 + x_3 + 3x_4 = 3$;*
- (2) *если $j = 3$, то $x_0 + x_3 = t + 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По выбору Δ мы имеем равенства:

$$\sum x_i = 10t + 5 - j, \quad \sum ix_i = j(4t + 5 - j), \quad \sum \binom{i}{2} x_i = \binom{j}{2}(t + 5 - j).$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

ЛЕММА 2.2. *Пусть ac – ребро. Тогда*

- (1) *$[a] - c^\perp$, $[c] - a^\perp$ и $[a]' \cap [c]'$ содержат по $3t$ вершин;*
- (2) *если $d \in [a] \cap [c]$ и d смежна точно с i вершинами из $[a] \cap [c]$, то d смежна с $2t - 2 + i$ вершинами из $[a]' \cap [c]'$;*
- (3) *если $w \in [a]' \cap [c]'$ и w смежна точно с j вершинами из $[a] \cap [c]$, то w смежна с j вершинами из $[a]' \cap [c]'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По условию $\lambda = t + 3$, поэтому $|[a] - c^\perp| = |[c] - a^\perp| = 3t$. Теперь $[a]' \cap [c]'$ состоит из $5(2t + 1) - (6t + t + 5) = 3t$ вершин.

(2) Заметим, что $[d]$ содержит по $t + 2 - i$ вершин из $[a] - c^\perp$ и $[c] - a^\perp$, поэтому $[d]$ содержит $4(t + 1) - 2(t + 2 - i) - (i + 2) = 2t - 2 + i$ вершин из $[a]' \cap [c]'$.

(3) Ясно, что $[w]$ содержит по $\mu - j$ вершин из $[a] - c^\perp$ и $[c] - a^\perp$. Теперь из равенства $k = 2\mu$ следует, что $[w]$ содержит j вершин из $[a]' \cap [c]'$.

ЛЕММА 2.3. Пусть вершины a, b не смежны. Тогда

- (1) подграфы $[a] - b^\perp$, $[b] - a^\perp$ и $[a] \cap [b]$ содержат по $2(t + 1)$ вершин и $|[a]' \cap [b]'| = 4t - 3$;
- (2) если вершина d из $[a] \cap [b]$ смежна точно с i вершинами из $[a] \cap [b]$, то d смежна с $2t - 4 + i$ вершинами из $[a]' \cap [b]'$;
- (3) если $w \in [a]' \cap [b]'$ и w смежна точно с j вершинами из $[a] \cap [b]$, то w смежна с j вершинами из $[a]' \cap [b]'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые вычисления (как в доказательстве леммы 2.2).

ЛЕММА 2.4. Если μ -подграфы из Γ – регулярные графы без треугольников и $t > 3$, то Γ не содержит плохих троек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предложение 2 из [3].

ЛЕММА 2.5. Пусть μ -подграфы из Γ не содержат треугольников. Если cd – ребро из $[a]$, то $[c] \cap [d]$ содержит не более двух вершин из $[a]$, причем $a^\perp \cap c^\perp \cap d^\perp$ является кликой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $[c] \cap [d]$ содержит несмежные вершины e, f из $[a]$. Тогда $[e] \cap [f]$ содержит треугольник acd , противоречие.

ЛЕММА 2.6. Если μ -подграфы из Γ не содержат треугольников и L является 4-кликой, то либо L лежит в 5-клике, либо $K_0(L)$ является плохой тройкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть 4-клика L не лежит в 5-клике из Γ , $K_i = K_i(L)$, $x_i = |K_i|$. Ввиду леммы 2.1 $x_0 = 3$, $x_3 = x_4 = 0$. Теперь $x_1 + x_2 = 10t - 2$, $x_1 + 2x_2 = 4(4t + 1)$, поэтому $x_2 = 6t + 6$, $x_1 = 4t - 8$. Для $a \in K_0$, $w \in L$ подграф $[a] \cap [w]$ состоит из $2t + 2$ вершин и $k = 4(t + 1)$, поэтому $[a]$ содержится в K_2 . Для $\Delta = K_0(L)$ верно включение $K_1 \subset K_0(\Delta)$. Применив к Δ лемму 2.1, получим, что $K_0(\Delta) = L \cup K_1$ и $K_3(\Delta)$ пусто.

ЛЕММА 2.7. Если $t > 3$ и μ -подграфы из Γ – регулярные графы без треугольников, то любая 3-клика из Γ либо максимальна, либо лежит в некоторой 5-клике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что 3-клика Δ не является максимальной кликой в Γ . Ввиду леммы 2.6 Δ лежит в 5-клике или Γ содержит плохую тройку. Но по лемме 2.4 граф Γ не содержит плохих троек.

ЛЕММА 2.8. Пусть Δ – октаэдр, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Тогда $\sum \binom{i-1}{2} x_i = 4t + 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По выбору Δ мы имеем равенства:

$$\sum x_i = 10t - 1, \quad \sum ix_i = 6 \cdot 4t, \quad \sum \binom{i}{2} x_i = 12(t + 1) + 3(2t - 2).$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

§ 3. Случай небольших t

До конца работы будем предполагать, что μ -подграфы из Γ – регулярные графы, не содержащие треугольников. Пусть a, b – не смежные вершины, $\Delta = [a] \cap [b]$, $\Lambda = [a]' \cap [b]'$. В леммах 3.1, 3.2 мы допустим, что $t = 2$ и Γ имеет параметры $(25, 12, 5, 6)$.

ЛЕММА 3.1. *Валентность любого μ -подграфа равна 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Δ имеет валентность 3. Тогда Δ является $(3, 3)$ -подграфом. Пусть $\Delta = \{c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3\}$, где $c_i d_j$ – ребра. Заметим, что $[c_i] \cap [c_j]$ содержит вершину a валентности 3, поэтому $[c_i] \cap [c_j]$ содержит вершину c_{ij} из Λ , смежную с d_1, d_2, d_3 . Теперь $[d_1] \cap [d_2]$ содержит c_{ij} для любых различных i, j . Отсюда Λ содержит вершину e , смежную со всеми вершинами из Δ . Но тогда $[e]$ не пересекает $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, поэтому валентность вершины e не больше 10, противоречие.

Предположим, что Δ является кокликкой. Если c, d – различные вершины из Δ , то $[c]$ и $[d]$ содержат по 5 вершин из $[a] - [b]$ и валентность a в графе $[c] \cap [d]$ не меньше 4, противоречие.

Пусть теперь Δ – граф валентности 1, $c_i d_i$ – ребра из Δ , $i = 1, 2, 3$. Тогда $[c_i]$, $[d_j]$ содержат по 4 вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ и по одной вершине из Λ . Далее, валентность a в $[c_i] \cap [d_j]$ не больше 2 для $i \neq j$, поэтому не смежны с c_1 вершины e, f из $[a] - [b]$ смежны с c_2, c_3, d_2, d_3 . Итак, $[c_2] \cap [d_2]$ содержит a, b и по две вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 3.1 следует, что μ -подграфы из Γ являются шестиугольниками.

ЛЕММА 3.2. *Подграф Λ содержит точно две вершины f, g валентности 3, причем $[f] \cap [g]$ не пересекает Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1 d_1 e_1 c_2 d_2 e_2$ – путь в Δ . Тогда $[x_1] \cap [x_2]$ содержит по две вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ и не пересекает Λ для любых антиподов $x_1, x_2 \in \Delta$. Отсюда для любой пары антиподов из Δ граф Λ содержит единственную вершину, не смежную с обеими вершинами этой пары. Число ребер между Δ и Λ равно 12, поэтому Λ содержит две вершины f, g , смежные с тремя вершинами из Δ , и три вершины, смежные с двумя вершинами из Δ . По лемме 2.2 валентности f, g в Λ равны 3.

Заметим, что в графе $[c_1] \cap [e_1]$ вершина d_1 смежна с a, b , поэтому $[d_1]$ не пересекает $[c_1] \cap [e_1] \cap \Lambda$. Отсюда f, g смежны с кокликками из Δ . Без ограничения общности, $[f] \cap \Delta = \{c_1, e_1, d_2\}$. Теперь $[g] \cap \Delta$ совпадает с $[f] \cap \Delta$ или с $\Delta - [f]$. Но в первом случае $[c_1] \cap [e_1]$ содержит подграф $\{a, b, f, g\}$, имеющий не более одного ребра. Противоречие с тем, что $[c_1] \cap [e_1]$ является шестиугольником. Лемма доказана.

Завершим рассмотрение случая $t = 2$. В обозначениях из леммы 3.2 допустим, что fg – ребро. Тогда $[f] \cap [g]$ содержит единственную вершину $c \in \Lambda$ и по две вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$. Ввиду леммы 2.6 $[c]$ не пересекает $[f] \cap [g]$, поэтому $[c]$ содержит по 4 вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, не лежащие в $[f] \cap [g]$. Но теперь $[c] \cap [f]$ содержит g , по одной вершине, смежной только с a или b , и две вершины из Δ . Симметрично, $[c] \cap [g]$ содержит две вершины из Δ , противоречие.

Итак, fg – не ребро, $[f] \cap [g]$ содержит три вершины из Λ и по две вершины, смежные только с a или b . Противоречие с тем, что $\mu = 6$.

До конца параграфа мы предполагаем, что $t=3$ и Γ имеет параметры $(35, 16, 6, 8)$.

ЛЕММА 3.3. *Валентность любого μ -подграфа равна 2 или 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Δ имеет валентность 4. Тогда Δ является $(4, 4)$ -подграфом. Пусть $\Delta = \{c_1, c_2, c_3, c_4; d_1, d_2, d_3, d_4\}$, где $c_i d_j$ – ребра. Заметим, что $[c_i] \cap [c_j]$ содержит вершину a валентности 4, поэтому $[c_i] \cap [c_j]$ содержит две вершины из Λ , смежные с d_1, d_2, d_3, d_4 . Отсюда Λ содержит две вершины f, g , смежные со всеми вершинами из Δ . Но тогда $[f]$ содержит 8 вершин из Λ и fg – ребро, противоречие.

Предположим, что Δ является кокликкой. Если c, d – различные вершины из Δ , то $[c]$ и $[d]$ содержат по 6 вершин из $[a] - [b]$. Отсюда $[c] \cap [d]$ содержит a, b и по 4 вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, противоречие.

Пусть теперь Δ – граф валентности 1, $c_i d_i$ – ребра из Δ , $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда $[c_i], [d_j]$ содержат по 5 вершин из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ и по три вершины из Λ . Если валентность a в графе $[x] \cap [y]$ равна 3 (2) для некоторых несмежных вершин $x, y \in \Delta$, то $[x] \cap [y]$ не пересекает Λ (пересекает Λ по двум вершинам). Пусть Δ_0 – подграф из Δ , состоящий из вершин, не смежных с x, y .

Предположим, что валентность графа $[x] \cap [y]$ равна 3. Если Δ_0 содержит такую вершину z , что $[x] \cap [z], [z] \cap [y]$ – графы валентности 3, то $[x], [y], [z]$ расщепляют Λ и $[w]$ содержит четное число вершин из Λ для несмежной с z вершины $w \in \Delta_0$, противоречие. Если вершина $z \in \Delta_0$ смежна с двумя вершинами из $([x] \cap [y]) \cap ([a] - [b])$, то a – вершина валентности 3 в $[x] \cap [z]$ и $[z] \cap [y]$, противоречие. Если $[z]$ не пересекает $([x] \cap [y]) \cap ([a] - [b])$, то очевидно $[x] \cap [z]$ и $[y] \cap [z]$ – графы валентности 2, поэтому $[z] \cap \Lambda$ содержит не менее 4 вершин, противоречие. Итак, любая вершина из Δ_0 смежна с единственной вершиной из $([x] \cap [y]) \cap ([a] - [b])$. Ясно, что один из графов $[x] \cap [z], [y] \cap [z]$ имеет валентность 2, а второй – валентность 3. Без ограничения общности, $[z] \cap [w]$ содержит две вершины из $([x] - [y]) \cap ([a] - [b])$ для некоторой не смежной с z вершины $w \in \Delta_0$. Но тогда все три подграфа $[x] \cap [z], [x] \cap [w], [z] \cap [w]$ имеют валентность 3, противоречие.

Пусть $[x] \cap [y]$ – граф валентности 2. Тогда для любой вершины $z \in \Delta_0$ один из графов $[x] \cap [z]$ или $[y] \cap [z]$ имеет валентность 3.

ЛЕММА 3.4. *Любой μ -подграф является восьмиугольником, объединением двух изолированных четырехугольников, кубом или кубом Мёбиуса (см. рис. 1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Δ имеет валентность 2. Тогда Δ является восьмиугольником или объединением двух изолированных четырехугольников.

Рис. 1. Куб Мёбиуса

Если же Δ имеет валентность 3, то либо Δ содержит 3-кликку и является кубом, либо в Δ нет 3-кликки и Δ – куб Мёбиуса.

ЛЕММА 3.5. *Валентность любого μ -подграфа равна 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Δ имеет валентность 3 и выберем 4-угольник $cdef$ из Δ . Заметим, что любая вершина из Δ смежна с 5 вершинами из Λ . Если $[c] \cap [e]$ содержит вершину a валентности 2, то ввиду леммы 3.4 $[c] \cap [e]$ содержит 4-угольник из $\Lambda \cap [f]' \cap [d]'$. Но тогда $[d] \cap [f]$ содержит 5 вершин из Λ . Противоречие с тем, что $\mu = 8$. Значит, $[c] \cap [e]$ и $[d] \cap [f]$ – графы валентности 3, в частности, $[c] \cap [e]$ содержит 2 вершины из Λ .

Покажем сначала, что Δ является кубом Мёбиуса. Если Δ – куб, то $\Delta_2(e) \cap \Delta_2(c) = \{g, h\}$, где вершины g, h лежат на грани, параллельной грани, проходящей через c, e . Как показано выше, $[g] \cap [c]$ и $[g] \cap [e]$ пересекают Λ по двум точкам, поэтому $[g] \cap \Lambda$ содержит по две вершины из $[c] - [e]$, $[e] - [c]$ и вершину вне $[e] \cup [c]$. То же самое верно и для h , поэтому $[g] \cap [h]$ содержит 3 вершины из Λ , противоречие.

Пусть вершины графа Λ выбраны как на рис. 1. Если граф $[g] \cap [e]$ имеет валентность 3, то он содержит единственную вершину из Λ , и $[g] \cap [c]$ содержит не менее трех вершин из Λ , противоречие. Значит, граф $[g] \cap [e]$ имеет валентность 2 и содержит 3 вершины из $\Lambda \cap [d]'$. Симметрично, $[g] \cap [f]$ содержит 3 вершины из $[h]' \cap \Lambda$. Итак, $[x] \cap [y]$ содержит не более двух вершин из Λ для любого ребра xy графа Δ . С другой стороны, $[d] \cap \Lambda$ содержит единственную вершину из $[c] \cap [e]$ и не более одной вершины вне $[c] \cup [e]$. Противоречие с тем, что $|[d] \cap \Lambda| = 5$.

ЛЕММА 3.6. *Любой μ -подграф является объединением двух изолированных четырехугольников.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Δ является 8-угольником. Выберем 2-путь cde из Δ . Тогда $[c] \cap [e]$ содержит 3 вершины из $\Lambda \cap [d]'$. При этом одна из вершин c, e не смежна с вершинами из $\Lambda \cap [d]$. Пусть для определенности $[e] \cap [d]$ не пересекает Λ и f — отличная от d вершина из $\Delta \cap [e]$. Как и выше, $[d] \cap [f]$ содержит 3 вершины из $\Lambda \cap [e]'$, поэтому $[d] \cap [e]$ содержит не более одной вершины из Λ . Противоречие с тем, что $\mu = 8$. Лемма доказана.

Завершим рассмотрение случая $t = 3$. Заметим, что каждое ребро из Γ лежит в некотором μ -подграфе. Пусть $cdef$ — четырехугольник из Δ . Тогда $[c] \cap [e]$ и $[d] \cap [f]$ расщепляют Λ на два 4-угольника. Таким образом, $[x] \cap [y]$ не пересекает Λ для любого ребра xy графа Δ . Отсюда $[x] \cap [y]$ содержит по две вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, поэтому любой λ -подграф состоит из двух изолированных треугольников. Итак, окрестность любой вершины из Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(16, 6, 2, 2)$, поэтому она совпадает с квадратной 4×4 -решеткой. Теперь граф Γ однозначно восстанавливается до частного графа Джонсона $J(8, 4)$ (можно воспользоваться также теоремой 2 [2]).

§ 4. Редукция к малым валентностям

До конца работы мы будем предполагать, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2)$, в котором μ -подграфы являются регулярными графами без треугольников. Ввиду [3] и результатов § 3 можно считать, что $t = 12$ или 17 .

Пусть a, b — не смежные вершины из Γ такие, что $\Delta = [a] \cap [b]$ является μ -подграфом наибольшей валентности β . Положим $\Lambda = [a]' \cap [b]'$. Напомним, что $|\Lambda| = 4t - 3$. Применив границу Хоффмана для клик [1], получим, что размер максимальной клики из Γ не больше $2t + 1$, поэтому $\beta \geq 1$. Среди μ -подграфов Δ выберем такой, что $[c] \cap [d]$ содержит наибольшее число i вершин из Δ для подходящих не смежных вершин $c, d \in \Delta$. Пусть $\gamma = |[c] \cap [d] \cap \Lambda|$, и если $i \geq 2$, то e, f — различные вершины из $[c] \cap [d] \cap \Delta$.

ЛЕММА 4.1. *Если xy — ребро из Δ , то $[x] \cap [y]$ содержит $t - 3$, $t - 1$ или $t + 1$ вершин из Λ . Далее, четности пересечений $[x] \cap [y]$ с Δ и Λ одинаковы для любых не смежных $x, y \in \Delta$. Наконец, β не больше, чем $t/2 + 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x, y — различные вершины из Δ . По лемме 2.2 $[x], [y]$ содержат по $2t - 4 + \beta$ вершин из Λ , поэтому $[x] \cap [y]$ пересекает Λ по не менее, чем $2\beta - 5$ вершинам. Если xy — ребро, то ввиду леммы 2.7 $[x] \cap [y]$ содержит по 0 или 2 вершины из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$, и первое утверждение леммы доказано. Более того, $2\beta - 3 \leq t + 3$ и $\beta \leq t/2 + 3$.

Если x, y — не смежные вершины из Δ , то ввиду регулярности графа $[x] \cap [y]$, его пересечения с $[a] - [b]$ и с $[b] - [a]$ равномощны. Теперь четность μ влечет второе утверждение леммы.

ЛЕММА 4.2. *Параметр β меньше, чем $(t + 5)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = t/2 + 3$. Тогда $t = 12$, $|\Delta| = 26$, $|\Lambda| = 45$ и любая вершина из Δ смежна с 29 вершинами из Λ . Далее, $[x] \cap [y]$ лежит в $\{a, b\} \cup \Lambda$ и

$\Lambda \subset [x] \cup [y]$ для любого ребра xy из Δ . Число ребер между $\Delta(c)$ и $\Delta_2(c)$ равно 72 и $|\Delta_2(c)| \leq 16$, поэтому $i \geq 5$. Валентность вершины a в графе $[c] \cap [d]$ не меньше 5, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит не менее 3 вершин из $[c] \cap [d]$. Далее, $[e] \cap \Lambda$ содержит все вершины из $(\Lambda - [c]) \cup (\Lambda - [d])$, поэтому $(45 - \gamma) + 3 \leq 29$ и $\gamma \geq 19$. С другой стороны, $[c] \cap [d]$ содержит a, b и не менее 5 вершин из Δ . Итак, $\gamma = 19$ и $[c] \cap [d]$ пересекает Δ по 5 вершинам. Но теперь $[e] \cap [f]$ содержит a, b, c, d и по крайней мере 26 вершин из Λ , противоречие.

Пусть теперь $\beta = (t + 5)/2$. Тогда $t = 17$, $|\Delta| = 36$, $|\Lambda| = 65$ и каждая вершина из Δ смежна с 41 вершиной из Λ . В этом случае снова $i \geq 5$ и $[x] \cap [y]$ содержит не менее 17 вершин из Λ для любых различных вершин $x, y \in \Delta$. Ввиду леммы 4.1 подграф $[x] \cap [y]$ содержит 18 вершин из Λ для любого ребра xy графа Δ . Заметим, что e, f не смежны не более чем с одной вершиной из $\Lambda - [d]$, поэтому $[e] \cap [f]$ содержит a, b и по крайней мере $39 - \gamma$ вершин из $\Lambda \cap ([c] - [d])$. Но валентность c в графе $[e] \cap [f]$ не больше 11, поэтому $\gamma \geq 30$, противоречие.

ЛЕММА 4.3. *Параметр β меньше, чем $(t + 3)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = t/2 + 2$. Тогда $t = 12$, и вершина из Δ смежна с 28 вершинами из Λ . Далее, $i \geq 4$ и $[x] \cap [y]$ содержит не менее 11 вершин из Λ для $x, y \in \Delta$. Ввиду леммы 4.1 $[x] \cap [y]$ содержит 11 или 13 вершин из Λ для любого ребра xy графа Δ . Заметим, что e не смежна не более чем с 2 вершинами из $\Lambda - [d]$, и $[e] \cap [f]$ содержит не менее $24 - \gamma$ вершин из $\Lambda \cap ([c] - [d])$. Отсюда $18 \leq \gamma \leq 20$.

Если $\gamma = 20$, то $[c] \cap [d]$ — граф валентности 4, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит 2 вершины из $[c] \cap [d]$ и не более 25 вершин вне $[c] \cap [d]$, противоречие. Если $\gamma = 19$, то $[c] \cap [d]$ имеет валентность 5, поэтому $i = 5$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 3 вершины из $[c] \cap [d]$, по 8 вершин, смежных только с c или d и 9 вершин вне $[c] \cup [d]$. Противоречие с тем, что $|\Lambda - ([c] \cup [d])| = 8$.

Если $\gamma = 18$, то валентность $[c] \cap [d]$ равна 5 или 6, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 3 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 10 вершин, смежных только с c или d , либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 9 вершин, смежных только с c или d . В любом случае валентность c в графе $[e] \cap [f]$ не меньше 10, противоречие.

Пусть $\beta = (t + 3)/2$. Тогда $t = 17$ и вершина из Δ смежна с 40 вершинами из Λ . В этом случае $[x] \cap [y]$ содержит 16 или 18 вершин из Λ для любого ребра xy графа Δ . Далее, e не смежна не более чем с 3 вершинами из $[c] \cap [d]$, поэтому $[e] \cap [f]$ содержит a, b и не менее $34 - \gamma$ вершин из $\Lambda \cap ([c] - [d])$. Отсюда $26 \leq \gamma \leq 30$.

Если $\gamma \geq 28$, то валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 6. В этом случае $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 13 вершин вне $[c] \cup [d]$, поэтому $\gamma = 28$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 4 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 12 вершин, смежных только с c или d . Но тогда $[e] \cap [f]$ содержит все 12 вершин из $([c] - [d]) \cap \Lambda$, противоречие.

Если $\gamma = 26$, то $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 6 вершин из $[c] \cap [d]$, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит 6 вершин из $[c] \cap [d]$, 10 вершин вне $[c] \cup [d]$ и по 12 вершин, смежных только с c или d . Но тогда $[f] \cap [e]$ содержит не менее 10 вершин из $\Lambda \cap ([c] - [d])$ и валентность c в графе $[e] \cap [f]$ не меньше 12.

Пусть, наконец, $\gamma = 27$. Тогда валентность $[c] \cap [d]$ не больше 7 и $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 5 вершин из $[c] \cap [d]$. Отсюда $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 12 вершин, смежных только с c или d , либо 5 вершин из $[c] \cap [d]$, 11 вершин вне

$[c] \cup [d]$ и 24 вершины из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$. В любом случае $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит не менее 9 вершин из $[c] - [d]$ или $[d] - [c]$, противоречие.

ЛЕММА 4.4. *Параметр β не равен $t/2 + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = t/2 + 1$. Тогда $t = 12$, $\beta = 7$ и любая вершина из Δ смежна с 27 вершинами из Λ . В этом случае $i \geq 3$ и $[x] \cap [y]$ содержит 9, 11 или 13 вершин из Λ для любого ребра xy из Δ . Если $\gamma \leq 16$, то валентность графа $[c] \cap [d]$ не меньше 6 (причем в случае равенства $i \geq 4$), поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 9 вершин, смежных только с c или d , или 7 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 9 вершин – с другой, либо 5 вершин из $[c] \cap [d]$ и по 8 вершин, смежных только с c или d . Но валентность графа $[e] \cap [f]$ не больше 7, следовательно, $\gamma = 16$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 7 вершин из $[c] - [d]$, а $[f] \cap \Lambda$ содержит 7 вершин из $[d] - [c]$. Но для отличной от e, f вершины $g \in [c] \cap [d] \cap \Lambda$ мы получим, что $[e] \cap [g]$ или $[f] \cap [g]$ имеет валентность большую 7, противоречие.

Если $\gamma \geq 18$, то валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 6, поэтому либо $\gamma = 19$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 3 вершины из $[c] \cap [d]$, все 10 вершин вне $[c] \cup [d]$ и 14 вершин из $([d] - [c]) \cup ([c] - [d])$, либо $\gamma = 18$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 4 вершины из $[c] \cap [d]$ и 14 вершин из $([d] - [c]) \cup ([c] - [d])$. Теперь либо граф $[f] \cap [e]$ имеет валентность, большую 7, либо $\gamma = 18$, $i = 6$ и $[e] \cap \Lambda$ содержит 7 из 9 вершин в $[c] - [d]$, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит 5 вершин из $[c] - [d]$ для любых различных $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Но тогда в графе $\Sigma = \Lambda \cap ([c] - [d])$ 6 вершин из $(\Sigma - [e]) \cup (\Sigma - [f]) \cup (\Sigma - [g])$ лежат в $[y] \cap [w]$ для различных $e, f, g, y, w \in [c] \cap [d] \cap \Lambda$.

Итак, $\gamma = 17$. Тогда $i \geq 5$ и $\Lambda \cap [e]$ содержит либо 3 вершины из $[c] - [d]$ и 16 вершин, смежных только с c или d , либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$, 9 вершин из $[c] - [d]$ и 7 из $[d] - [c]$, либо 5 вершин из $[c] \cap [d]$, 8 вершин из $[c] - [d]$ и 6 из $[d] - [c]$. В любом случае валентность μ -подграфа $[e] \cap [f]$ больше 7 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

ЛЕММА 4.5. *Параметр β не равен 9.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = 9$. Тогда $t = 17$ и каждая вершина из Δ смежна с 39 вершинами из Λ . Далее, $i \geq 3$ и $[x] \cap [y]$ содержит 14, 16 или 18 вершин из Λ для любого ребра xy графа Δ .

Если $\gamma \leq 25$, то валентность $[c] \cap [d]$ не меньше 6, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит не менее 22 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$. Но валентность графа $[e] \cap [f]$ не больше 9, поэтому $\gamma = 22$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 6 вершин из $[c] \cap [d]$, все 9 вершин вне $[c] \cup [d]$ и по 12 из 17 вершин, смежных только с c или d . Далее, $i = 4$ и $[e] \cap [f]$ содержит по 7 вершин из Λ , смежных только с c или f . Противоречие с тем, что $[w] \cap \Lambda$ содержит по 5 вершин из $[c] - ([d] \cup [x])$ для $x \in \{e, f, z\}$, где $[c] \cap [d] \cap \Lambda = \{e, f, z, w\}$.

Если $\gamma \geq 27$, то валентность $[c] \cap [d]$ не больше 7, поэтому $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 5 вершин из $[c] \cap [d]$, и валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 10.

Пусть $\gamma = 26$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит либо не менее 22 вершин, смежных только с c или d , либо 6 вершин из $[c] \cap [d]$ и по 10 из 13 вершин в $[c] - [d]$ и $[d] - [c]$. Но валентность графа $[e] \cap [f]$ не больше 9, поэтому $[c] \cap [d]$ – граф валентности 8 и $i = 8$. Далее, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 7 вершин из $[c] - [d]$, $[d] - [c]$. Положим $\Sigma = ([c] - [d]) \cap \Lambda$. Тогда $[w]$ содержит 12 вершин из $\bigcup \{\Sigma - [x] \mid x \in \{e, f, y, z\}\}$ для различных вершин $e, f, y, z, w \in [c] \cap [d] \cap \Delta$, противоречие.

ЛЕММА 4.6. *Параметр β меньше $t/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = t/2$. Тогда $t = 12$, $\beta = 6$, $i \geq 2$ и любая вершина из Δ смежна с 26 вершинами из Λ . Далее, валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 6, поэтому $\gamma \geq 14$.

Если $\gamma \geq 18$, то $[e] \cap \Lambda$ содержит не менее 12 вершин, смежных только с c или d . Но валентность графа $[e] \cap [f]$ не больше 6, поэтому $\gamma = 18$, $i = 4$, $[e] \cap \Lambda$ содержит по 6 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и все 11 вершин вне $[c] \cup [d]$. Далее, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 4 вершины из $[c] - [d]$ и $[d] - [c]$ для различных $e, f \in [d] \cap [c] \cap \Delta$. Таким образом, $[e] \cap [f]$ – граф валентности 6, пересекающий Λ по 19 вершинам, противоречие.

Пусть $\gamma = 17$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$, 5 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 7 вершин – с другой, либо 3 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 7 вершин, смежных только с c или d . Но $i \geq 3$, поэтому валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 7 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 16$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит 14 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и либо 4 вершины из $[c] \cap [d]$, либо 3 вершины из $[c] \cap [d]$ и все 9 вершин вне $[c] \cup [d]$. В первом случае $i = 4$ и валентность графа $[f] \cap [e]$ не меньше 7 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Во втором случае $i = 2$, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит 9 вершин вне $[c] \cup [d]$ и по 4 вершины, смежных только с c или d . Противоречие с тем, что $\gamma < 17$.

Пусть $\gamma = 15$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит 14 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и $i = 3$ или 5. Далее, $[f] \cap [e]$ содержит 4 вершины из $\Lambda \cap ([c] - [d])$ для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Если $i = 3$, то $[e] \cap [f]$ – граф валентности 6, пересекающий Λ по 16 вершинам, причем $[c]$ содержит 4 вершины из $[e] \cap [f] \cap \Lambda$. Но в этом случае $[e] \cap [f]$ содержит 4 вершины из Δ , что противоречит выбору i . Значит $i = 5$ и $[e] \cap \Lambda$ содержит 5 вершин из $[c] \cap [d]$, 6 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 8 вершин – с другой. Снова валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 7 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 14$. Тогда $i = 2$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 4 вершины из $[c] \cap [d]$, 6 вне $[c] \cup [d]$, 7 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 9 вершин – с другой. Пусть для определенности $\Lambda \cap [e]$ содержит 7 вершин из $[c] - [d]$. Тогда $[f] \cap \Lambda$ содержит 9 вершин из $[c] - [d]$, и $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 4 вершины, смежных только с c или d , и 6 вершин вне $[c] \cup [d]$.

Через Σ обозначим октаэдр $\{a, b; c, d; e, f\}$ и положим $K_i = K_i(\Sigma)$. Тогда $x_j(\Sigma) = 0$ для $j \geq 4$, K_3 содержит по 4 вершины, смежных с 2-путями типа ced , всего 48 вершин этого типа. Скажем, что точка из K_3 , смежная с треугольником из Σ , лежит на соответствующей грани октаэдра. Мы показали, что $[c] \cap [e]$ пересекает $[a] \cup [b]$ по двум вершинам, поэтому для любого ребра xu графа Σ точно одна из двух граней, проходящих через xu , содержит 2 вершины из K_3 . Значит, K_3 содержит 8 вершин, лежащих на гранях октаэдра, и $x_3(\Sigma) = 56$. Противоречие с леммой 2.8.

ЛЕММА 4.7. *Параметр β меньше 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = 8$. Тогда $t = 17$ и любая вершина из Δ смежна с 38 вершинами из Λ . Заметим, что $i \geq 3$ и валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 8, поэтому $\gamma \geq 21$.

Если $\gamma \geq 27$, то $[e] \cap \Lambda$ содержит не менее 18 вершин, смежных только с c или d . Но тогда валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 9.

Пусть $\gamma = 26$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит 18 вершин, смежных только с c или d , и либо 6 вершин из $[c] \cap [d]$, либо 5 вершин из $[c] \cap [d]$ и все 15 вершин вне $[c] \cup [d]$. При этом $i = 8$ или 6, соответственно. Если $i = 8$, то валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 10 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Значит $i = 6$, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 6 вершин, смежных только с c или d для любых различных $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Но в этом случае $[e] \cap [f]$ содержит 27 вершин из Λ , причем валентность c в графе $[e] \cap [f]$ равна 8. Противоречие с тем, что валентность a в $[e] \cap [f]$ не больше 7.

Пусть $\gamma = 25$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит либо не менее 20 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$, либо 6 вершин из $[c] \cap [d]$ и 18 вершин, смежных только с c или d , причем в последнем случае $i = 7$. Отсюда валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 9 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 24$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 20 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и 6 или 5 вершин из $[c] \cap [d]$, либо 22 вершины, смежные только с c или d . В последних двух случаях валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 10 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Теперь $i = 6$, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 6 вершин, смежных только с c или d для любых различных $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Противоречие с тем, что $[g] \cap [w]$ содержит 8 вершин из $(\Omega - [e]) \cup (\Omega - [f])$ для $\Omega = ([c] - [d]) \cap \Lambda$ и подходящих $e, f, g, w \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 23$. Тогда $i = 5$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 20 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$, 6 вершин из $[c] \cap [d]$ и все 12 вершин вне $[c] \cup [d]$. Легко понять, что $[e] \cap [f]$ содержит 6 вершин из $([c] - [d]) \cap \Lambda$ для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Теперь $[e] \cap [f]$ — граф валентности 8, пересекающий Λ по 24 вершинам, поэтому $[e] \cap [f]$ содержит 6 вершин из Δ . Противоречие с выбором i .

Пусть $\gamma = 22$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит 22 вершины из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и 6 вершин из $[c] \cap [d]$, при этом $i = 4$. Но тогда валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 9 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 21$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит все 10 вершин вне $[c] \cup [d]$, 6 вершин из $[c] \cap [d]$, 10 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 12 вершин — с другой. Но в этом случае $i = 3$ и валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 9 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

ЛЕММА 4.8. *Параметр β меньше $t/2 - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = t/2 - 1$. Тогда $t = 12$ и любая вершина из Δ смежна с 25 вершинами из Λ . Число ребер между $\Delta(c)$ и $\Delta_2(c)$ равно 20 и совпадает с $|\Delta_2(c)|$. Если $i = 1$, то Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 5, 0, 1)$. Но граф с такими параметрами не существует, поэтому $i \geq 2$.

Валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 5, поэтому $[c] \cap [d]$ содержит не более 8 вершин из $[a] \cup [b]$ и $\gamma \geq 16$.

Если $\gamma \geq 18$, то $[e] \cap \Lambda$ содержит либо 2 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 7 вершин, смежных только с c или d , либо 3 вершины из $[c] \cap [d]$ и по 6 вершин, смежных только с c или d . В любом случае валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 7 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 17$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит по 6 из 8 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$ и валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 6.

Пусть $\gamma = 16$. Тогда $i = 2$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 12 вершин из $([c] - [d]) \cup ([d] - [c])$, 3 вершины из $[c] \cap [d]$, и 10 из 11 вершин вне $[c] \cup [d]$. Далее, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 3 вершины, смежных только с c или d , и 10 вершин вне $[c] \cup [d]$.

Для октаэдра $\Sigma = \{a, b; c, d; e, f\}$ подграф K_3 содержит 36 вершин, смежных с 2-путями из Σ , и 16 вершин, лежащих на гранях октаэдра. Единственную вершину $z \in K_0$ назовем *центром* октаэдра Σ . Ясно, что $[z] = K_3$ (см. рис. 2).

Рис. 2. Октаэдр

Если x_1x_2 (y_1y_2) — ребро с грани ace (adf), то, без ограничения общности, x_1y_1 и x_2y_2 — ребра и $\Sigma' = \{a, z; x_1, y_2; x_2, y_1\}$ — октаэдр с центром b . На грани zx_1x_2 октаэдра Σ' лежат вершины u_1, u_2 с грани bce октаэдра Σ . Далее, на гранях zx_1y_1 и zx_2y_2 октаэдра Σ' лежат по две вершины, смежные с 2-путями cbd и ebf .

Таким образом, окрестность вершины x_1 в графе $[z]$ содержит четыре изолированных треугольника: $x_2u_1u_2$ и три треугольника, построенные по грани ace и граням adf (как в предыдущем абзаце), bde и bcf . Покажем, что оставшиеся три вершины из $[x_1] \cap [z]$ также образуют треугольник. В противном случае $[x_1] \cap [z]$

содержит изолированные вершины u, w, y . Положим $\Delta' = [u] \cap [y]$, $\Lambda' = [u]' \cap [y]'$. Тогда Λ' содержит 4 треугольника из $[x_1] \cap [z]$. Если q — отличная от z смежная с x_1 вершина из Δ' , то $[q] \cap \Lambda'$ содержит по одной вершине из каждого треугольника в $[x_1] \cap [z] \cap \Lambda'$. Но в этом случае валентность x_1 в μ -подграфе $[q] \cap [z]$ не меньше 6, противоречие. Итак, окрестность в $[z]$ любой вершины с грани октаэдра Σ состоит из пяти изолированных треугольников.

Любая, смежная с b вершина, лежащая на грани октаэдра Σ , попадает на грань некоторого октаэдра, содержащего a, z , с центром b . Но вершины, смежные с 2-путями cbd и ebf , лежат на гранях октаэдра Σ' с центром b , поэтому они лежат на гранях некоторого октаэдра с центром z . Итак, окрестность любой вершины в $[z]$ состоит из пяти треугольников, и $[z]$ — обобщенный 4-угольник порядка $(3, 4)$. Но $GQ(3, 4)$ не существует [1].

ЛЕММА 4.9. *Параметр β меньше 7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = 7$. Тогда $t = 17$ и любая вершина из Δ смежна с 37 вершинами из Λ . Заметим, что $i \geq 2$ и валентность графа $[c] \cap [d]$ не больше 7, поэтому $[c] \cap [d]$ содержит не более 12 вершин из $[a] \cup [b]$ и $\gamma \geq 22$.

Если $\gamma \geq 25$, то $[e] \cap \Lambda$ содержит не менее 18 вершин, смежных только с c или d , и валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 8 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 24$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит 5 вершин из $[c] \cap [d]$ (и $i = 4$), по 9 из 13 вершин из $[c] - [d]$ и $[d] - [c]$ и 14 вершин вне $[c] \cup [d]$. Далее, $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 5 вершин, смежных только с c или d для любых $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Противоречие с тем, что $[g] \cap [w] \cap \Lambda$ содержит 8 вершин из $(\Omega - [e]) \cup (\Omega - [f])$ для $\Omega = ([c] - [d]) \cap \Lambda$ и подходящих $e, f, g, w \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 23$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит по 9 из 14 вершин в $[c] - [d]$ и $[d] - [c]$, 5 вершин из $[c] \cap [d]$ и все 14 вершин вне $[c] \cup [d]$. В этом случае $i = 3$ и $[e] \cap [f]$ содержит 5 вершин из $([c] - [d]) \cap \Lambda$ для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Теперь $[e] \cap [f]$ — граф валентности 7, пересекающий Λ по 24 вершинам, поэтому $[e] \cap [f]$ содержит 4 вершины из Δ . Противоречие с выбором i .

Пусть $\gamma = 22$. Тогда $i = 2$, $[e] \cap \Lambda$ содержит 5 вершин из $[c] \cap [d]$, 11 из 15 вершин в $[d] - [c]$ и 9 вершин из $[c] - [d]$. Ясно, что $\Lambda \cap [f]$ содержит 11 вершин из $[c] - [d]$ и 9 вершин из $[d] - [c]$, причем $[e] \cap [f] \cap \Lambda$ содержит по 5 вершин, смежных только с c или d . Противоречие с тем, что $[g] \cap [w]$ содержит 8 вершин из $(\Omega - [e]) \cup (\Omega - [f])$ для $\Omega = ([c] - [d]) \cap \Lambda$ и подходящих $e, f, g, w \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

Пусть $\gamma = 21$. Тогда $[e] \cap \Lambda$ содержит все 10 вершин вне $[c] \cup [d]$, 6 вершин из $[c] \cap [d]$, 10 вершин, смежных с одной из вершин c, d , и 12 вершин — с другой. Но в этом случае $i = 3$ и валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 9 для подходящих $e, f \in [c] \cap [d] \cap \Delta$.

§ 5. Окончание доказательства

В этом параграфе используются обозначения из § 4.

ЛЕММА 5.1. *Параметр t равен 17.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = 12$. По лемме 4.8 $\beta \leq 4$.

Если $\beta = 4$, то каждая вершина из Δ смежна с 24 вершинами из Λ . Валентность графа $[c] \cap [f]$ не больше 4, поэтому $[c] \cap [d]$ содержит не более 7 вершин из $[a] \cup [b]$ и $\gamma \geq 17$. Но $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 2 вершин из $[c] \cap [d]$, и не менее 7 вершин, смежных только с s или d , поэтому $\gamma = 17$. Теперь $[e] \cap \Lambda$ содержит точно 2 вершины из $[c] \cap [d]$, по 7 вершин, смежных только с s или d , и 8 вершин вне $[c] \cup [d]$.

Отсюда $i = 1$ и диаметр Δ больше 2. Выберем 3-путь $cf dg$ из Δ . Тогда $[d] \cap \Lambda$ содержит по 7 вершин из $[f] - [g]$ и $[g] - [f]$, поэтому $[g] \cap \Lambda$ содержит все 8 вершин вне $[f] \cup [g]$ и 7 вершин из $[f] \cap ([c] - [d])$. Симметрично, $[c] \cap \Lambda$ содержит 8 вершин вне $[f] \cup [g]$, поэтому $\Lambda \cap [c] \cap [g]$ содержит 7 вершин вне $[d]$ и 9 вершин из $[d]$. Отсюда, в частности, Δ не содержит 5-угольников и $[c] \cap [g]$ — граф валентности 4.

Число ребер между $\Delta(c)$ и $\Delta_2(c)$ равно 36, причем $\Delta - (c^\perp \cup \Delta_2(c))$ содержит 9 вершин. Отсюда $\Delta_3(c)$ является 9-кликкой для любой вершины $c \in \Delta$, следовательно, Δ — двудольный дистанционно регулярный граф диаметра 3.

Покажем теперь, что любой μ -подграф из Γ имеет валентность 4. Пусть x, y — несмежные вершины из Γ , $\Sigma = [x] \cap [y]$ — граф валентности j , $j \leq 3$, $\Omega = [x]' \cap [y]'$. Тогда каждая вершина из Σ смежна с $20 + j$ вершинами из Ω . Пусть $j > 1$, uwz — 2-путь из Σ . Как показано выше, валентность графа $[u] \cap [z]$ не больше 3, поэтому $[u] \cap [z]$ содержит не менее 19 вершин из Ω . Далее, $[w] \cap \Omega$ содержит не более одной вершины из $[u] \cap [z]$ и не более 4 вершин из $[u] - [z]$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [u]$ содержит не менее 9 вершин из Ω . Если же $j = 1$, то $[y] \cap [z]$ содержит 24 вершины из Ω для любых несмежных $y, z \in \Sigma$. Противоречие с тем, что $|[y] \cap \Omega| = 21$.

Теперь для любого ребра xu графа Δ подграф $[x] \cap [y]$ содержит по треугольнику из $a^\perp$ и $b^\perp$. Отсюда любое ребро из Γ лежит в пяти 5-кликах. Пусть a — вершина из Γ . Тогда $\Sigma = [a]$ обобщенный 4-угольник порядка (3, 4). В самом деле для $c \in \Sigma$ граф $\Sigma(c)$ состоит из пяти изолированных 3-клик. Если вершина $d \in \Sigma$ не лежит в 4-кликке L из Σ , то d смежна с двумя вершинами из 5-кликки $\{a\} \cup L$, поэтому d смежна с единственной вершиной из L . Но $GQ(3, 4)$ не существует, поэтому не существует и Γ .

Пусть до конца работы $t = 17$, $|\Lambda| = 65$ и каждая вершина из Δ смежна с $30 + \beta$ вершинами из Λ .

ЛЕММА 5.2. *Верны неравенства $\beta \leq 5$, $i \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = 6$. Тогда число ребер между $\Delta(c)$ и $\Delta_2(c)$ равно 30, $|\Delta_2(c)| \leq 29$, поэтому $i > 1$. Теперь $[c] \cap [d]$ содержит не более 10 вершин из $[a] \cup [b]$ и $\gamma \geq 24$. Далее, $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 4 вершин из $[c] \cap [d]$ и не менее 20 вершин, смежных только с s или d . Однако $[c] - [d]$ содержит не более 12 вершин из Λ , поэтому валентность графа $[e] \cap [f]$ не меньше 10.

Итак, $\beta \leq 5$. Предположим, что $i > 1$. Тогда $[c] \cap [d]$ содержит не более 8 вершин из $[a] \cup [b]$, поэтому $\gamma \geq 26$. Отсюда $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 3 вершин из $[c] \cap [d]$ и не менее 11 вершин из $[c] - [d]$. Противоречие с тем, что $[c] - [d]$ содержит не больше 9 вершин из Λ .

ЛЕММА 5.3. *Параметр β равен 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta > 1$, $e \in [c] \cap [d] \cap \Delta$. Тогда $\gamma \geq 25$ и $[e] \cap \Lambda$ содержит не более 3 вершин из $[c] \cap [d]$ и не менее 11 вершин из $[c] - [d]$. Противоречие с тем, что $[c] - [d]$ содержит не более 10 вершин из Λ . Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Если c, d — не смежные вершины из Δ , то $[c] \cap [d]$ содержит a, b , по одной вершине, смежной только с a или b , и 32 вершины из Λ . Противоречие с тем, что $|[c] \cap \Lambda| = 31$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Браувер А. Е., ван Линт Й. Х. Сильно регулярные графы и частичные геометрии // Кибернет. сб. 1987. Т. 24. С. 186–229.
2. Зюляркина Н. Д., Махнев А. А. О сильно регулярных локально решетчатых графах // Дискрет. матем. 1993. Т. 5. № 4. С. 145–150.
3. Махнев А. А. О сильно регулярных графах с параметрами $(75, 32, 10, 16)$ и $(95, 40, 12, 20)$ // Исследования по чистой и прикладной математике. Препринт Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. С. 73.
4. Goethals J.-M., Seidel J. J. The regular two graph on 276 points // Discrete Math. 1975. V. 12. № 1. P. 143–158.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: mak@top.imm.intec.ru

Поступила в редакцию
11.09.1995