Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Об оценках типа Нэша–Аронсона для уравнения диффузии с несимметрической матрицей и их приложении к усреднению, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 65–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:56:35

УДК 517.956.4

В. В. Жиков

Об оценках типа Нэша–Аронсона для уравнения диффузии с несимметрической матрицей и их приложения к усреднению

Рассматривается параболическое уравнение с несимметрическим эллиптическим оператором второго порядка. Доказываются оценки типа Нэша–Аронсона в том случае, когда кососимметрическая часть матрицы теплопроводности не является ограниченной. Указанные оценки применяются при доказательстве центральной предельной теоремы для диффузии в несжимаемом случайном потоке.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

1.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} A(x) \nabla u, \quad u|_{t=0} = f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.1)$$

где измеримая не обязательно симметрическая матрица $A(x)$ удовлетворяет условию эллиптичности:

$$\nu \xi^2 \leq A(x) \xi \cdot \xi \leq \nu^{-1} \xi^2, \quad \nu > 0. \quad (1.2)$$

Условие (1.2) не налагает никаких ограничений на кососимметрическую часть $B = (A - A^T)/2$ матрицы A .

Известно [1]–[3], что если $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, то задаче (1.1) соответствует действующая в $L^2(\mathbb{R}^d)$ сильно непрерывная полугруппа операторов $e^{-t\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} = -\operatorname{div} A \nabla$. При этом $e^{-t\mathcal{A}}$ есть интегральный оператор и соответствующее ядро $K(x, y, t)$ (фундаментальное решение) удовлетворяет оценке Нэша–Аронсона

$$0 \leq K(x, y, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{-(x-y)^2/(c_0 t)}, \quad (1.3)$$

в которой константа $c_0 > 0$ зависит только от d , ν и $\|B\|_{L^\infty}$.

Наряду с оценкой (1.3) для фундаментального решения представляет интерес оценка вида

$$|u(x, t)| \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t \lambda^2 - \lambda |x|} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda |s|} |f(s)| ds,$$

содержащая произвольный вещественный параметр λ . Если в этой оценке перейти к начальному значению $f(x) = \delta(x)$ (дельта-функция в точке $x = 0$), а в показателе взять минимум по λ , то придем к оценке (1.3) при $y = 0$. Оценки с параметром предпочтительней, когда имеются те или иные затруднения с построением фундаментального решения.

Мы рассматриваем случай, когда матрица B не является локально ограниченной, а лишь суммируемой с некоторой степенью. В этих условиях сталкиваемся с обескураживающим явлением – решение задачи Коши (1.1) определено не единственным образом. Позже обсудим проблему единственности и определим так называемую *аппроксимационную* полугруппу, а сейчас сформулируем ключевой результат, в котором сама проблема единственности не затрагивается.

Речь идет о некоторых оценках для решения задачи Коши и фундаментального решения, полученных в предположении ограниченности матрицы B . Важно, однако, что константы в этих оценках зависят не от $\|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, а лишь от величин $p > d$ и l ,

$$l = \sup_{r \geq 1} \frac{1}{r^d} \int_{|x| \leq r} |B|^p dx < \infty. \quad (1.4)$$

Введем функцию

$$g(\lambda) = \lambda^2 + |\lambda|^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha = \frac{2p}{p-d},$$

и сопряженную к ней функцию $g^*(k) = \sup_\lambda \{\lambda k - g(\lambda)\}$.

ТЕОРЕМА 1.1. *В предположении ограниченности матрицы B для решения задачи Коши (1.1) и фундаментального решения справедливы оценки*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(x^2 + 1)^\lambda u(x, t)| \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} (s^2 + 1)^\lambda |f(s)| ds, \quad (1.5)$$

$$0 \leq K(x, 0, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{-c_0 t g^*(\ln(x^2 + 1)/(c_0 t))} \equiv \Phi(x, t). \quad (1.6)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^1$ произвольно, а постоянная c_0 зависит только от размерности пространства, константы эллиптичности ν и величин $p > d$ и l из (1.4). Например, можно взять

$$c_0 = c(d) \nu^{-(p+d)/(p-d)} l^{2/(p-d)}.$$

В случае, когда матрица B удовлетворяет лишь условию (1.4) (т.е. не является ограниченной), существование решения, удовлетворяющего оценке (1.5), будет получено путем аппроксимации.

По определению фундаментального решения $\lim_{t \rightarrow 0} K = \delta(x)$ в смысле слабой сходимости мер, где $\delta(x)$ – дельта-функция. Оценка (1.6) обеспечивает *равномерный* характер этой сходимости, а именно справедливость соотношения

$$\int_{|x| \geq r} K(x, 0, t) dx \leq c_r(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} c_r(t) = 0 \quad \forall r > 0, \quad (1.7)$$

в которых функция $c_r(t)$ определяется только величинами d, ν, p, l . Действительно, достаточно заметить, что $g(\lambda) \leq 2|\lambda|^\alpha + 1$, $g^*(\eta) \geq \gamma|\eta|^{\alpha'} - 1$, где $\gamma > 0$, $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1) > 1$, и поэтому

$$\Phi(x, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} \exp \left[-\gamma \frac{\ln^{\alpha'}(x^2 + 1)}{(c_0 t)^{1/(\alpha-1)}} \right].$$

Отсюда легко следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| \geq r} \Phi(x, t) dx = 0 \quad \forall r > 0.$$

В теории усреднения рассматривается задача Коши (1.1), в которой вместо матрицы $A(x)$ берется матрица $A(\varepsilon^{-1}x)$. Поскольку для матрицы $B(\varepsilon^{-1}x)$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) основное условие (1.4) выполнено с той же константой l , оценки (1.5), (1.6) будут равномерными по ε . Это обстоятельство играет ключевую роль при доказательстве так называемой центральной предельной теоремы, см. § 6.

Возьмем в оценке (1.5) $\lambda = 0$. Тогда получим, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(x, t)| \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)| ds.$$

Стоит отметить, что константу c_0 в этом случае можно выбрать зависящей только от размерности пространства и постоянной эллиптичности, т.е. никак не зависящей от матрицы B .

Оценка (1.6), очевидно, обеспечивает степенное убывание ядра K при фиксированном $t > 0$ и $|x| \rightarrow \infty$. Чтобы добиться экспоненциального убывания, нужны более жесткие, чем (1.4), требования на матрицу B . Пусть для некоторого $p > d$

$$\sup_{\square} \|B\|_{L^p(\square)} = l < \infty, \quad (1.8)$$

где $\square = [0, 1]^d + y$ – единичный куб, а супремум берется по всем таким кубам.

Очевидно, что условие (1.8) (в отличие от (1.4)) сохраняется не только при гомотетии, но и при сдвиге.

ТЕОРЕМА 1.2. *В предположении ограниченности матрицы B справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |e^{\lambda|x|} u(x, t)| &\leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda|s|} |f(s)| ds, \\ 0 \leq K(x, y, t) &\leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{-c_0 t g^*(|x-y|/(tc_0))}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^1$ произвольно, а постоянная c_0 зависит только от размерности пространства, константы эллиптичности ν и величин l и p из (1.8).

Отметим, что при $p \rightarrow \infty$ условие (1.8) переходит в условие $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, а оценка (1.9) – в классическую оценку Нэша–Аронсона (1.3).

Приведенные оценки можно записать в единой форме

$$|u(x, t)| \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda) - \lambda \psi_0(x)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda \psi_0(s)} |f(s)| ds, \quad (1.10)$$

где в качестве ψ_0 следует взять одну из функций $\ln(x^2 + 1)$, $|x|$. Если в этой оценке перейти к начальному значению $f(x) = \delta(x)$, а в показателе взять инфимум по $\lambda \in \mathbb{R}^1$, то получим

$$0 \leq K(x, 0, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{-c_0 t g^*(\psi_0(x)/(c_0 t))}.$$

По ходу доказательства оценки (1.10) мы устанавливаем также “весовую” энергетическую оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\lambda\psi_0(x)} |u(x, t)|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\lambda\psi_0(x)} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq (1 + \lambda^2 t) e^{c_0 t g(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\lambda\psi_0(s)} |f(s)|^2 ds \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Сделаем одно замечание относительно указанных выше оценок. Все они опираются на условие (1.4) (или на более сильное условие (1.8)). Ослабим условие (1.4), взяв в нем $p \leq d$. Тогда никаких оценок такого рода доказать не удастся, а из некоторых результатов по усреднению можно заключить, что свойство (1.7) равномерного дельтаобразного поведения в этом случае не имеет места, другими словами, подходящих оценок просто нет. Строгое обоснование будет дано в § 3, п. 3.2. Однако условие (1.4) можно ослабить в ином отношении, а именно с сохранением оценки (1.5) заменить на

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^{p+1}} \int_{|x| \leq r} |B|^p dx dr = l < \infty, \quad (1.12)$$

где по-прежнему $p > d$. Например, если $|B(x)| \leq C(|x|^k + 1)$, где $0 < k < 1$, то это условие выполнено с любым $p > d/(1 - k)$. Если же матрица B линейна по x , $B(x) \not\equiv \text{const}$, то условие (1.12) не выполняется, а оценка (1.5) теряет силу. Последнее будет пояснено ниже.

1.2. Обсудим теперь проблему единственности. Начнем с эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} A \nabla u + u = f \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.13)$$

Скажем, что функция $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ есть решение этого уравнения, если

$$\int_{\mathbb{R}^d} [a \nabla u \cdot \nabla \varphi + B \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi] dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (1.14)$$

где a – симметрическая часть матрицы A , $a = (A + A^T)/2$.

Данное определение имеет смысл, если $B \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$. Это минимальное требование обеспечивает и существование решения. В самом деле, рассмотрим аппроксимацию

$$B_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad B_n \text{ кососимметрична,} \quad B_n \rightarrow B \text{ в } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d),$$

при сохранении симметрической части a . Пусть u_n – решение соответствующего уравнения,

$$\begin{aligned} & u_n \in H^1(\mathbb{R}^d), \\ & \int_{\mathbb{R}^d} [a \nabla u_n \cdot \nabla \varphi + B_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi + u_n \varphi] dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (1.15)$$

В исходном тождестве (1.14) вообще нельзя было взять в качестве пробной функции само решение u . Теперь это возможно и, полагая в (1.15) $\varphi = u_n$, в силу кососимметричности B_n получим энергетическое равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a \nabla u_n \cdot \nabla u_n + u_n^2) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f u_n dx$$

и энергетическую оценку

$$\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.16)$$

Видим, что последовательность u_n ограничена в H^1 , и можно считать, что она слабо сходится $u_n \rightharpoonup u$ в H^1 . Тогда в тождестве (1.15) легко перейти к пределу и получить тождество (1.14).

Таким образом, процедура аппроксимации всякий раз приводит к решению исходного уравнения (1.13). Такие решения называются *аппроксимационными*. Проблема единственности рассмотрена в [4], в частности там указано эллиптическое уравнение, которое помимо аппроксимационного решения имеет и другое решение, которое не может быть получено никакой аппроксимацией.

Стоит отметить, что для аппроксимационного решения выполнено “энергетическое неравенство”

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a \nabla u \cdot \nabla u + u^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f u dx.$$

Это непосредственно следует из энергетического равенства для u_n и полунепрерывности стоящего слева квадратичного функционала относительно слабой сходимости $u_n \rightharpoonup u$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Справедлива также энергетическая оценка

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Хотя существование аппроксимационного решения уравнения (1.13) установлено, главный вопрос, будет ли последовательность эллиптических операторов $\mathcal{A}_n = -\operatorname{div}(a + B_n)\nabla$ компактной в смысле сильной резольвентной сходимости, остался пока не выясненным. Сейчас мы дадим ответ на этот вопрос сразу в терминах сходимости соответствующих полугрупп.

Напомним, что $u(x, t)$ есть решение задачи Коши (1.1), если

$$u, \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T]) \quad \forall T > 0$$

и выполнено интегральное тождество

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} A \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}).$$

При условии $B \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$ существование аппроксимационного решения доказывается столь же просто, как и в случае эллиптического уравнения (1.13). Однако заранее не вполне очевидно, что аппроксимационные решения можно задать с помощью полугрупп.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть матрица B удовлетворяет условию

$$\sup_{r \geq 1} \frac{1}{r^d} \int_{|x| \leq r} |B|^d dx = l < \infty, \quad (1.17)$$

а аппроксимации B_n таковы, что

$$B_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad B_n \rightarrow B \text{ в } L_{\text{loc}}^d(\mathbb{R}^d), \quad \sup_n \sup_{r \geq 1} \frac{1}{r^d} \int_{|x| \leq r} |B_n|^d dx < \infty. \quad (1.18)$$

Тогда последовательность полугрупп $e^{-t\mathcal{A}_n}$ компактна в смысле сильной L^2 -сходимости при любом $t \geq 0$. Иначе говоря, с точностью до выбора подпоследовательности

$$e^{-t\mathcal{A}_n} f \rightarrow U(t)f \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^d) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.19)$$

где $U(t)$ – сильно непрерывная полугруппа в $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Видим, что в условиях теоремы 1.3 любое (подходящим образом определенное) аппроксимационное решение $u(\cdot, t)$ задачи Коши имеет структуру $u(\cdot, t) = U(t)f$, где $U(t)$ – некоторая “аппроксимационная” полугруппа. Позже (см. § 5) укажем дополнительные условия, при которых аппроксимационная полугруппа единственна.

Разумеется, при выполнении условия (1.17) последовательность операторов $\mathcal{A}_n$ будет компактной в смысле сильной резольвентной сходимости. Для предельного оператора $\mathcal{A}$ (он служит производящим оператором “аппроксимационной” полугруппы $U(t)$, см. (1.19)) уравнение $\mathcal{A}u + u = f$ имеет *единственное* решение, и это решение будет аппроксимационным решением эллиптического уравнения (1.12).

Обсудим оценки (1.10), (1.11) для аппроксимационных решений. Предполагаем, что аппроксимации B_n удовлетворяют условию (1.4) равномерно по n и $B_n \rightarrow B$ в $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Возьмем начальное значение $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, и пусть $u_n(\cdot, t) = e^{-t\mathcal{A}_n} f$, $u(\cdot, t) = U(t)f$. Тогда непосредственно из соотношения (1.19) ясно, что оценка (1.10) сохраняется для $u(x, t)$. Относительно оценки (1.11) необходимо еще учесть слабую сходимость градиентов $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])$. После того как оценки (1.10), (1.11) установлены для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, по замыканию получаем сильно непрерывную полугруппу $U(t)$ в $L^2(\mathbb{R}^d, e^{2\lambda\psi_0} dx)$, а при $t > 0$ – непрерывный оператор $U(t)$ из $L^1(\mathbb{R}^d, e^{2\lambda\psi_0} dx)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^d, e^{2\lambda\psi_0} dx)$. Для $u(\cdot, t) = U(t)f$ оценки (1.10), (1.11) будут, очевидно, выполнены.

Вопрос о гёльдеровости и даже просто непрерывности аппроксимационного решения при $t > 0$ остался открытым. По-видимому, здесь не обойтись без дополнительных условий на матрицу B , например принадлежности B пространству функций с ограниченным средним колебанием (ВМО) или сверхэкспоненциальной суммируемости (это значит, что $e^{s|B|} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ при любом $s > 0$). Оба эти условия обсуждались в [4] в связи с проблемой единственности.

1.3. Поясним особую роль кососимметрической матрицы B с точки зрения диффузии. Пусть матрица B является достаточно гладкой, а именно имеет дивергенцию $b = \text{div } B \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, т.е.

$$b_j \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} b_j h_j dx = - \int_{\mathbb{R}^d} B_{ij} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} dx \quad \forall h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.20)$$

Вектор b автоматически соленоиден, $\text{div } b = 0$, что непосредственно следует из кососимметричности матрицы B . Если дополнительно

$$b \in L^{2d/(d+2)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \quad \text{при } d \geq 3, \quad b \in L^{1+\sigma}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad \sigma > 0, \quad \text{при } d = 2, \quad (1.21)$$

то справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} B \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} b u \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.22)$$

Действительно, сначала проверяем его для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, а затем переходим к пределу, пользуясь тем, что $B\nabla u \in L_{\text{loc}}^1$ и $bu \in L_{\text{loc}}^1$ в силу (1.21) и теоремы вложения Соболева. Тождество (1.22) позволяет переписать уравнение (1.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a\nabla u + bu). \quad (1.23)$$

Обратно, если дано уравнение с соленоидальным вектором b , удовлетворяющим условию (1.21), то, представив последний в виде дивергенции от косо-симметрической матрицы $B \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$, получим уравнение с матрицей B . Например, в случае $d = 2$ имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta(x) \\ -\beta(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \operatorname{div} B = \left\{ -\frac{\partial \beta}{\partial x_2}, \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right\}.$$

Отметим, что замена уравнения с вектором b на уравнение с матрицей B автоматически желаемых результатов не дает – требуется обеспечить еще соответствующие свойства матрицы B . Начнем с “хорошего” случая. Пусть вектор b периодичен,

$$\int_{\square} b \, dx = 0, \quad b \in L^q(\square) \text{ для некоторого } q > \frac{d}{2},$$

где $\square$ – ячейка периодичности. Тогда справедливо представление $b = \operatorname{div} B$, в котором периодическая матрица принадлежит $L^p(\square)$, $p > d$. Видим, что условие (1.8) выполнено.

Дело обстоит иначе, если вектор b (вектор сноса) постоянен, $b \neq 0$, поскольку соответствующая матрица B линейна и условие (1.4) не выполняется. В таком случае целесообразно от решения $u(x, t)$ перейти к функции $w(x, t) = u(x - bt, t)$, которая удовлетворяет дивергентному уравнению без сноса, но с матрицей $a(x - bt)$, зависящей, как видно, и от аргумента t . В связи с этим вообще имеет смысл рассмотреть оценки типа Нэша–Аронсона в случае, когда в (1.1) матрица A зависит от x и t . В настоящей работе нет возможности подробно остановиться на этом вопросе. Как бы то ни было, если матрица a постоянна, для w справедлива оценка (1.5), откуда легко заключить, что для исходной функции $u(x, t)$ она не выполняется.

Оценкам типа Нэша–Аронсона посвящена обширная литература. Изучались главным образом параболические уравнения с симметрической эллиптической частью, например уравнение теплопроводности в области евклидова пространства с условием Неймана на границе, а также уравнение теплопроводности на многообразии, см. [5]–[7]. В работе [8] имеется некоторый обзор применяемых подходов, а также значительная библиография. Книга [9] содержит много материала по оценкам Нэша–Аронсона и библиографию до 1989 г.

Уравнение (1.23) с соленоидальным вектором b , очевидно, описывает диффузию в несжимаемом потоке. Интерес к уравнению с неограниченной косо-симметрической матрицей вызван тем, что именно такому уравнению отвечает диффузия в турбулентном потоке. Обсуждение связи с турбулентностью и дальнейшие по этому вопросу ссылки имеются в [10]–[14]. В случае неограниченной матрицы B каких-либо оценок типа Нэша–Аронсона ранее доказано не было, хотя многократно отмечалось, что их отсутствие является основным препятствием к доказательству центральной предельной теоремы в наиболее желательной форме, см. § 6, теорема 6.3.

§ 2. Об ограниченности снизу некоторых эллиптических операторов

По заданной на $\mathbb{R}^d$ достаточно гладкой функции $\psi(x)$ строим оператор

$$\mathcal{A}_\psi = e^\psi \mathcal{A} e^{-\psi}, \quad \text{где } \mathcal{A} = -\operatorname{div} A \nabla, \quad A = a + B, \quad B \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что

$$-\mathcal{A}_\psi v = \operatorname{div} A \nabla v - \nabla \psi \cdot A \nabla v - \operatorname{div}(v A \nabla \psi) + \nabla \psi \cdot A \nabla \psi v.$$

Здесь и далее запись вида $\nabla \psi v$ надо понимать как $v \nabla \psi$, а не $\nabla(\psi v)$. Для билинейной формы соответствующего оператора в $L^2(\mathbb{R}^d)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_\psi v, w)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^d} A \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \psi \cdot A \nabla v w \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} v A \nabla \psi \cdot \nabla w \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} a \nabla \psi \cdot \nabla \psi v w \, dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функция ψ будет специально выбираться в зависимости от того, какое из двух условий (1.4) или (1.8) рассматривается.

2.1. Начнем с основного условия (1.4) и положим

$$\psi(x) = \lambda \psi_0(x), \quad \psi_0(x) = \ln(x^2 + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

В данном случае $e^\psi = (x^2 + 1)^\lambda$, $\nabla \psi_0 = 2x/(x^2 + 1)$ и требуется оценить снизу квадратичную форму

$$(\mathcal{A}_\psi v, v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} a \nabla v \cdot \nabla v \, dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v v \, dx - \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} a \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 v^2 \, dx. \quad (2.2)$$

Ниже используется обозначение

$$\|v\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^q \, dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

ЛЕММА 2.1. *Справедлива оценка*

$$I \equiv \lambda \int_{\mathbb{R}^d} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v v \, dx \leq \frac{\nu}{8} \|\nabla v\|_2^2 + c_0 |\lambda|^\alpha \|v\|_2^2, \quad \alpha = \frac{2p}{p-d}, \quad (2.3)$$

в которой постоянная c_0 зависит только от d, ν и величин $p > d$ и l из (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что

$$\|B \nabla \psi_0\|_p \leq c_1, \quad c_1 = c_1(p, l). \quad (2.4)$$

Действительно, положим

$$\eta(r) = \left(\frac{2r}{r^2 + 1} \right)^p, \quad G(r) = \int_{|x| \leq r} |B|^p \, dx.$$

Так как $|\nabla \psi_0| \leq 2|x|/(x^2 + 1)$, то в сферических координатах имеем

$$\int_{|x| \leq R} |\nabla \psi_0|^p |B|^p \, dx \leq \int_0^R \eta(r) \frac{d}{dr} G(r) \, dr = \eta(R) G(R) - \int_0^R G(r) \eta'(r) \, dr.$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ в силу условия (1.4), поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi_0|^p |B|^p dx = - \int_0^\infty G(r) \eta'(r) dr$$

и неравенство (2.4) следует из (1.4).

Далее используем известное мультипликативное неравенство

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_2^{1-\theta}, \quad \theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)d, \quad 2 \leq q < \frac{2d}{d-2}, \quad (2.5)$$

где $C = C(d, q)$, см. [15; гл. II, § 2]. Определим показатель q из соотношения $1/p + 1/2 + 1/q = 1$. В этом случае $\theta = d/p$ и по неравенству Гёльдера

$$I \leq |\lambda| \|B \nabla \psi_0\|_p \|\nabla v\|_2 \|v\|_q \leq c_1 |\lambda| \|\nabla v\|_2 \|v\|_q \leq c_2 |\lambda| \|\nabla v\|_2^{1+\theta} \|v\|_2^{1-\theta}.$$

Так как по неравенству Юнга $ab \leq a^{2/(1+\theta)} + b^{2/(1-\theta)}$, где $a, b \geq 0$, то

$$I \leq c_2 |\lambda| (t^{2/(1+\theta)} \|\nabla v\|_2^2 + t^{-2/(1-\theta)} \|v\|_2^2) \quad \forall t > 0.$$

Выбирая t из соотношения $c_2 |\lambda| t^{2/(1+\theta)} = \nu/8$, после несложных вычислений получим оценку (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Теперь из (2.2) следует искомая оценка снизу

$$(\mathcal{A}_\psi v, v)_{L^2} \geq \frac{\nu}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \frac{c_1}{2} g(\lambda) \|v\|_2^2, \quad (2.6)$$

в которой постоянная c_1 зависит только от d, ν и величин p и l из (1.4).

2.2. Нам требуется обобщить оценку (2.6), а именно оценить снизу форму $J = (\mathcal{A}_\psi v, w)_{L^2}$, $w = s|v|^{2s-2}v$, $s \geq 1$. Для упрощения записи считаем, что $v \geq 0$. Тогда $w = sv^{2s-1}$ и из (2.1) имеем

$$J = s \int_{\mathbb{R}^d} [A \nabla v \cdot \nabla v^{2s-1} + \lambda \nabla \psi_0 \cdot A \nabla v v^{2s-1} - \lambda v A \nabla \psi_0 \cdot \nabla v^{2s-1} - \lambda^2 a \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 v^{2s}] dx.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} A \nabla v \cdot \nabla (sv^{2s-1}) &= \frac{2s-1}{s} A \nabla v^s \cdot \nabla v^s = \frac{2s-1}{s} a \nabla v^s \cdot \nabla v^s, \\ s \nabla \psi_0 \cdot A \nabla v v^{2s-1} &= v^s \nabla \psi_0 \cdot A \nabla v^s, \\ sv A \nabla \psi_0 \cdot \nabla v^{2s-1} &= (2s-1) v^s A \nabla \psi_0 \cdot \nabla v^s, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{2s-1}{s} a \nabla v^s \cdot \nabla v^s - \lambda 2(s-1) a \nabla v^s \cdot \nabla \psi_0 v^s \right. \\ &\quad \left. + 2s \lambda v^s B \nabla v^s \cdot \nabla \psi_0 - s \lambda^2 a \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 v^{2s} \right] dx. \end{aligned}$$

Упростим первые два слагаемых под знаком интеграла. Так как

$$\lambda 2a \nabla v^s \cdot \nabla \psi_0 v^s \leq \lambda^2 s a \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 v^{2s} + s^{-1} a \nabla v^s \cdot \nabla v^s$$

и $(2s - 1)/s \geq 1$, то

$$J \geq \int_{\mathbb{R}^d} (\nu \nabla v^s \cdot \nabla v^s - 2s\lambda B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v^s v^s - s^2 \nu^{-1} \lambda^2 v^{2s}) dx.$$

Используя оценку (2.3) для $s\lambda$ вместо λ , приходим к искомой оценке

$$s(\mathcal{A}_\psi v, v^{2s-1})_{L^2} \geq \frac{\nu}{4} \|\nabla v^s\|_2^2 - c_1 g(s\lambda) \|v^s\|_2^2. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (2.4) и, значит, оценка (2.7) справедливы при условии (1.12).

2.3. Теперь предположим, что выполнено условие (1.8), и возьмем $\psi(x) = \lambda \psi_0(x)$, $\psi_0(x) = |x|$. В данном случае $e^\psi = e^{\lambda|x|}$, $|\nabla \psi_0| \leq 1$. Снова требуется оценить снизу квадратичную форму (2.2).

ЛЕММА 2.2. *Справедлива оценка (2.3), в которой постоянная c_0 зависит только от d, ν и величин p и l из (1.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для единичного куба $\square$ положим

$$\begin{aligned} J &\equiv \lambda \int_{\square} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v v dx \\ &= \lambda \int_{\square} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v (v - m) dx + \lambda \int_{\square} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v m dx = J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $m = \int_{\square} v dx$ – среднее значение. Используя прежние обозначения, по неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq |\lambda| \|B\|_{L^p(\square)} \|\nabla v\|_{L^2(\square)} \|v - m\|_{L^q(\square)} \\ &\leq c_1 |\lambda| \|\nabla v\|_{L^2(\square)} \|\nabla v\|_{L^2(\square)}^\theta \|v - m\|_2^{1-\theta} \leq c_2 |\lambda| \|\nabla v\|_{L^2(\square)}^{1+\theta} \|v\|_{L^2(\square)}^{1-\theta} \end{aligned}$$

в силу аналога мультипликативного неравенства (2.5) для единичного куба. Отсюда по неравенству Юнга

$$J_1 \leq c_2 l |\lambda| (t^{2/(1+\theta)} \|\nabla v\|_{L^2(\square)}^2 + t^{-2/(1-\theta)} \|v\|_{L^2(\square)}^2) \quad \forall t > 0$$

и, выбирая t из соотношения $c_2 l |\lambda| t^{2/(1+\theta)} = \nu/16$, получим

$$J_1 \leq \frac{\nu}{16} \|\nabla v\|_{L^2(\square)}^2 + c_1 |\lambda|^\alpha \|v\|_{L^2(\square)}^2, \quad \alpha = \frac{2}{1-\theta} = \frac{2p}{p-d}. \quad (2.9)$$

Слагаемое J_2 из (2.8) оценивается проще:

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \lambda \int_{\square} B \nabla \psi_0 \cdot \nabla v dx \int_{\square} v dx \leq |\lambda| \|B\|_{L^2(\square)} \|\nabla v\|_{L^2(\square)} \|v\|_{L^2(\square)} \\ &\leq \frac{\nu}{16} \|\nabla v\|_{L^2(\square)}^2 + c_1 |\lambda|^2 \|v\|_{L^2(\square)}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь разобьем $\mathbb{R}^d$ на единичные кубы и, суммируя оценки (2.9), (2.10) по всем кубам, придем к искомой оценке (2.3). Лемма 2.2 доказана.

Из оценки (2.3) тем же способом, что и ранее, выводятся неравенства (2.6) и (2.7).

§ 3. Оценки для решения задачи Коши

3.1. Решение задачи Коши (1.1) запишем как действие полугруппы:

$$u(\cdot, t) = e^{-t\mathcal{A}} f.$$

Рассмотрим также полугруппу $e^{-t\mathcal{A}_\psi}$, которой соответствует задача Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathcal{A}_\psi v, \quad v|_{t=0} = f. \quad (3.1)$$

Связь между этими полугруппами дается равенством

$$e^{-t\mathcal{A}_\psi} f = e^\psi e^{-t\mathcal{A}} e^{-\psi} f, \quad (3.2)$$

которое справедливо по крайней мере для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Умножая уравнение (3.1) скалярно на v , в силу (2.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 &= -(\mathcal{A}_\psi v, v)_{L^2} \leq \frac{c_1}{2} g(\lambda) \|v\|_2^2, \\ \int_0^t \|v\|_2^2 ds &\leq t e^{c_1 t g(\lambda)} \|f\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно считать, что начальное значение f неотрицательно, и тогда решение $v(x, t)$ также неотрицательно. Умножим (3.1) скалярно на $sv^{2s-1}\eta^2(t)$, где η – гладкая неотрицательная функция на $[0, \infty)$, $\eta(0) = 0$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$. В результате имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta^2 \frac{\partial v}{\partial t} s v^{2s-1} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2 v^{2s} dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\eta}{dt} \eta v^{2s} dx = -\eta^2 s (\mathcal{A}_\psi v, v^{2s-1})_{L^2}.$$

Отсюда с помощью (2.7) получаем оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2 v^{2s} dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2 |\nabla v^s|^2 dx dt \leq \widehat{c} \left[g(s\lambda) + \sup \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| \right] \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta v^{2s} dx dt. \quad (3.4)$$

В мультипликативном неравенстве (2.5) возьмем специальный показатель $q = 2(d+2)/d$. Тогда $\|u\|_q^q \leq c \|\nabla u\|_2^2 \|u\|_2^{q-2}$, откуда

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^q dx dt \right)^{2/q} &\leq c^{2/q} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|_2^2 dt \right)^{2/q} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \|u\|_2^{2(q-2)/q} \\ &\leq c^{2/q} \left\{ \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \|u\|_2^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|_2^2 dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где использовано неравенство Юнга $a^{2/q} b^{2(q-2)/q} \leq a + b^2$ ($a, b \geq 0$).

Далее применяем итерационную технику Мозера. С этой целью зафиксируем $t_0 > 0$ и рассмотрим интервалы

$$I_k = t_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

а также гладкие функции $\eta_k = \eta_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $0 \leq \eta_k \leq 1$ на $[0, t_0]$,

$$\eta_k \equiv 1 \text{ на } I_k, \quad \eta_k \equiv 0 \text{ на } I_0 \setminus I_{k-1}, \quad \left| \frac{d\eta_k}{dt} \right| \leq 4^k t_0^{-1}.$$

Соединим неравенство (3.5) с неравенством (3.4), в котором η заменено на η_k . Получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{I_k} \int_{\mathbb{R}^d} v^{sq} dx dt \right)^{2/q} &\leq c^{2/q} \left(\sup_{t \in I_k} \|v^s\|_2^2 + \int_{I_k} \|\nabla v^s\|_2^2 dt \right) \\ &\leq c_1 (g(s\lambda) + 4^k t_0^{-1}) \int_{I_{k-1}} \int_{\mathbb{R}^d} v^{2s} dx dt \end{aligned}$$

или, в других обозначениях,

$$\|v^s\|_{L^q(\mathbb{R}^d \times I_k)} \leq c_1 [g(s\lambda) + 4^k t_0^{-1}]^{1/2} \|v^{s/(1+\gamma)}\|_{L^q(\mathbb{R}^d \times I_{k-1})}^{1+\gamma}, \quad 1 + \gamma = \frac{q}{2} = \frac{d+2}{d}. \quad (3.6)$$

Положив

$$s_k = (1 + \gamma)^{k-1}, \quad \Phi_k = \|v^{s_k}\|_{L^q(\mathbb{R}^d \times I_k)},$$

запишем (3.6) в виде рекуррентного соотношения

$$\Phi_k \leq c_1 [g(s_k \lambda) + 4^k t_0^{-1}]^{1/2} \Phi_{k-1}^{1+\gamma}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $g(s\lambda) \leq s^\alpha g(\lambda)$ (поскольку $\alpha > 2$, $s \geq 1$) и $1 + \gamma \leq 3$, так что

$$\Phi_k \leq c_1 [g(\lambda) + t_0^{-1}]^{1/2} 4^{k\alpha} \Phi_{k-1}^{1+\gamma}.$$

Отсюда по индукции заключаем, что

$$\Phi_k \leq c_1^{((1+\gamma)^k - 1)/\gamma} 4^{\alpha((1+\gamma)^{k+1} - \gamma - 1)/\gamma^2} [g(\lambda) + t_0^{-1}]^{((1+\gamma)^k - 1)/(2\gamma)} \Phi_0^{(1+\gamma)^k}$$

и, следовательно,

$$\sup_{\mathbb{R}^d \times [t_0/2, t_0]} v \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[s_k]{\Phi_k} \leq c_2 [g(\lambda) + t_0^{-1}]^{(1+\gamma)/(2\gamma)} \Phi_0^{1+\gamma}.$$

Поскольку $\Phi_0^{1+\gamma} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times [0, t_0])}^{1+\gamma}$, из (3.3) получаем неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v(x, t_0)| \leq c_2 (g(\lambda) + t_0^{-1})^{(1+\gamma)/(2\gamma)} t_0^{1/2} e^{c_1 t_0 g(\lambda)} \|f\|_2.$$

Заметим, что

$$[g(\lambda) + t_0^{-1}]^{(1+\gamma)/(2\gamma)} t_0^{1/2} = [t_0 g(\lambda) + 1]^{(1+\gamma)/(2\gamma)} t_0^{-1/(2\gamma)} \leq c_3 t_0^{-1/(2\gamma)} e^{c_1 t_0 g(\lambda)}.$$

Отсюда (берем t вместо t_0)

$$\|e^{-t\mathcal{A}_\psi} f\|_\infty \leq \frac{c}{t^{1/(2\gamma)}} e^{c_1 t g(\lambda)} \|f\|_2. \quad (3.7)$$

Аналогичная оценка таким же путем доказывается для сопряженного к $e^{-t\mathcal{A}_\psi}$ оператора (который получится, если ψ заменить на $-\psi$, а матрицу B – на матрицу $-B$). Поэтому выполнена двойственная к (3.7) оценка

$$\|e^{-t\mathcal{A}_\psi} f\|_2 \leq \frac{c}{t^{1/(2\gamma)}} e^{c_1 t g(\lambda)} \|f\|_1,$$

которая вместе с самой оценкой (3.7) дает

$$\|e^{-t\mathcal{A}_\psi} f\|_\infty \leq \frac{c_0}{t^{1/\gamma}} e^{c_0 t g(\lambda)} \|f\|_1, \quad \gamma = \frac{2}{d}. \quad (3.8)$$

Полученное неравенство, в котором f уже не обязательно неотрицательная функция, содержит в себе все утверждения теорем 1.1 и 1.2. В самом деле, непосредственно из (3.8) и соотношения (3.2) следует, что

$$e^{\lambda\psi_0(x)} |v(x, t)| \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)| ds,$$

где $v(\cdot, t) = e^{-t\mathcal{A}} e^{-\psi} f$. Поэтому для решения задачи Коши (1.1) выполнена оценка (1.10).

Теперь несколько слов о фундаментальном решении. Из оценки (3.8) нетрудно вывести, что

$$\sup_{x, y} K_\psi(x, y, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)},$$

где K_ψ – ядро оператора $e^{-t\mathcal{A}_\psi}$. Так как $K_\psi(x, 0, t) = e^{\lambda\psi_0(x)} K(x, 0, t)$, то

$$K(x, 0, t) \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda) - \lambda\psi_0(x)}.$$

Если теперь в показателе взять инфимум по λ , то придем к оценкам (1.6), (1.9).

Эти же рассуждения можно было провести проще, если в оценке (1.10) непосредственно перейти к начальному значению $f(x) = \delta(x)$.

Отметим энергетические оценки, которые автоматически получаются из предыдущих результатов.

Для решения задачи Коши (1.1) имеем классическую оценку

$$\|u(t, \cdot)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 ds \leq \|f\|_2^2. \quad (3.9)$$

Для решения задачи Коши (3.1) выполнено

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + (\mathcal{A}_\psi v, v) &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v\|_2^2 &\leq \frac{c_1}{2} g(\lambda) \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

в силу оценки (2.6). Отсюда получим

$$\|v(t, \cdot)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v\|_2^2 ds \leq \|f\|_2^2 e^{c_1 t g(\lambda)}.$$

Для решения исходной задачи (1.1) эта оценка дает

$$\|e^\psi u(\cdot, t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(e^\psi u)\|_2^2 ds \leq \|e^\psi f\|_2^2 e^{c_1 t g(\lambda)}, \quad (3.10)$$

где $\psi = \lambda \psi_0$. Так как $|\nabla \psi_0| \leq 1$ и

$$\begin{aligned} \|\nabla(e^\psi u)\|_2^2 &\geq \frac{1}{2} \|e^\psi \nabla u\|_2^2 - 2\lambda^2 \|e^\psi u\|_2^2, \\ \int_0^t \|e^\psi u\|_2^2 ds &\leq t \|e^\psi f\|_2^2 e^{c_1 t g(\lambda)}, \end{aligned}$$

то из (3.10) следует оценка (1.11).

3.2. Выведем из оценки (1.5) одно важное для дальнейшего свойство решений.

ЛЕММА 3.1. Пусть $A_\varepsilon(x)$ – семейство матриц, для которых условия (1.2), (1.4) выполнены равномерно по ε , u_ε – аппроксимационное решение задачи Коши с матрицей $A_\varepsilon(x)$ и дельтаобразным начальным значением

$$u_\varepsilon(x, 0) = f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} f(\varepsilon^{-1} x),$$

где f удовлетворяет условиям

$$f \geq 0, \quad (x^2 + 1)^\lambda f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall \lambda > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f dx = 1. \quad (3.11)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq r} u_\varepsilon(x, t) dx \leq c_r(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} c_r(t) = 0 \quad \forall r > 0, \quad (3.12)$$

где функция $c_r(t)$ определяется только величинами d, ν, p, l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.5) имеем

$$u_\varepsilon(x, t) \leq \frac{c_0 e^{c_0 t g(\lambda)}}{(x^2 + 1)^{\lambda t d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (\varepsilon^2 y^2 + 1)^\lambda f(y) dy.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_r(t) &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq r} u_\varepsilon dx \leq \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)} J(r) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} (\varepsilon^2 y^2 + 1)^\lambda f(y) dy \\ &= \frac{c_0}{t^{d/2}} e^{c_0 t g(\lambda)} J(r), \\ J(r) &= \int_{|x| \geq r} \frac{dx}{(x^2 + 1)^\lambda}. \end{aligned}$$

Поскольку при больших $\lambda > 0$

$$J(r) \leq \frac{c_1(r)}{(r^2 + 1)^\lambda},$$

то, положив $\lambda^\alpha = t^{-1}$, получим $t g(\lambda) \leq 2t\lambda^\alpha = 2$,

$$c_r(t) \leq \frac{c_0 c_1 e^{2c_0}}{t^{d/2} (r^2 + 1)^{1/t^{1/\alpha}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Лемма 3.1 доказана.

Доказанная лемма теряет силу, если ослабить условие (1.4), положив в нем $p < d$. Рассмотрим следующий пример. Пусть $d = 2$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \beta(x_1) \\ -\beta(x_1) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\beta(x_1)$ – гладкая периодическая (с периодом 1) функция. Если $K_\varepsilon(x, 0, t)$ – фундаментальное решение для задачи Коши с $A_\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x)$, то по теории усреднения имеет место поточечная сходимость

$$K_\varepsilon(x, 0, t) \rightarrow K_0(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

где $K_0(x, t)$ – фундаментальное решение для усредненной задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} A_0 \nabla u, \quad u|_{t=0} = \delta(x),$$

A_0 – усредненная матрица. Матрица A_0 в данном случае (см. [3; гл. I, § 2]) вычисляется точно:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = 1 + \langle \beta^2 \rangle, \quad \langle \beta^2 \rangle = \int_0^1 \beta^2(x_1) dx_1.$$

Кроме того, для K_ε выполнена равномерная по ε оценка Нэша–Аронсона (1.3), из которой получаем, что

$$\int_{|x| \geq r} K_0(x, t) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq r} K_\varepsilon(x, 0, t) dx.$$

Допустим теперь, что имеет место свойство (1.7), в котором функция $c_r(t)$ определяется только константой $l = \langle |\beta|^p \rangle$ при некотором $p < 2$, т.е.

$$\int_{|x| > r} K_0(x, t) dx \leq c_r(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} c_r(t) = 0 \quad \forall r > 0. \quad (3.13)$$

Но при условии $\langle |\beta|^p \rangle \leq l$ величина $\langle \beta^2 \rangle$ может быть сделана сколь угодно большой. Получается, что свойство (3.13) выполняется для

$$K_0(x, t) = \frac{1}{2\pi ta} e^{-x_1^2/(4t)} e^{-x_2^2/(4a^2t)}$$

равномерно по $a \geq 1$. Легко понять, что это невозможно.

3.3. Нам понадобится также одно свойство компактности для семейства задач Коши.

ЛЕММА 3.2. Пусть $A^\varepsilon(x)$ – семейство матриц, для которых условия (1.2), (1.4) выполнены равномерно по ε , $u_\varepsilon(x, t)$ – аппроксимационное решение задачи Коши с начальным значением $u_\varepsilon(x, 0) = f_\varepsilon(x)$, удовлетворяющим условиям:

- (а) семейство f_ε ограничено в $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- (б) для любого $\delta > 0$ найдется $R = R(\delta)$ такое, что

$$\int_{|x| \geq R} |f_\varepsilon|^2 dx \leq \delta.$$

Тогда семейство $u_\varepsilon(x, t)$ компактно в $L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.

Доказательство разобьем на отдельные замечания.

(i) Благодаря условию (b) и оценке (3.9) можно считать, что семейство начальных значений f_ε финитно, т.е. f_ε сосредоточены в одном и том же шаре.

(ii) Тогда энергетическая оценка (1.11) действует при любом $\lambda > 0$, и из нее ясно, что достаточно доказать компактность семейства $u_\varepsilon(x, t)$ в $L^2(Q \times [0, T])$, где Q – любая ограниченная область.

(iii) Из оценки (3.9) следует, что семейство u_ε ограничено в пространстве $C(0, T, L^2(Q))$ непрерывных функций со значениями в $L^2(Q)$. Проверим, что это семейство слабо равномерно непрерывно. Достаточно убедиться, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ семейство функций

$$\Phi_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx$$

равномерно непрерывно на $[0, T]$. Исходим из равенства

$$\Phi_\varepsilon(t_2) - \Phi_\varepsilon(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx,$$

которое очевидно в случае ограниченной матрицы A^ε и легко проверяется для аппроксимационного решения. Отсюда

$$\begin{aligned} |\Phi_\varepsilon(t_2) - \Phi_\varepsilon(t_1)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &\leq |t_1 - t_2|^{1/2} \sup |\nabla \varphi| \left(\int_Q |A^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx dt \right) \leq C |t_1 - t_2|^{1/2}, \end{aligned}$$

где C не зависит от ε .

(iv) Теперь достаточно ссылки на известную лемму о компактности (см. [16; гл. IX]). Сформулируем эту лемму применительно к нашим функциональным пространствам.

ЛЕММА 3.3. Пусть семейство $z_\varepsilon = z_\varepsilon(x, t)$ ограничено в пространствах $C(0, T, L^2(Q))$ и $L^2(0, T, H^1(Q))$, а также слабо равномерно непрерывно в $L^2(Q)$. Тогда это семейство компактно в $L^2(0, T, L^2(Q))$.

Для удобства чтения приведем доказательство леммы 3.3. Рассмотрим конечномерные проекторы

$$P_n: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q),$$

удовлетворяющие условию $P_n f \rightarrow f$ в $L^2(Q)$ для любого $f \in L^2(Q)$. Сильная сходимость операторов всегда равномерна на компактах, поэтому для любого $\delta > 0$

$$\|P_n f - f\|_{L^2(Q)}^2 \leq \delta \|f\|_{H^1(Q)}^2$$

при $n \geq n(\delta)$. Положив $z_\varepsilon^n = P_n z_\varepsilon$, получим

$$\int_0^T \|z_\varepsilon^n - z_\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2 dt \leq \delta \|z_\varepsilon\|_{L^2(0, T, H^1(Q))}^2 \leq c\delta. \quad (3.14)$$

При фиксированном n семейство z_ε^n компактно в $L^2(0, T, L^2(Q))$ в силу слабой равномерной непрерывности исходного семейства z_ε . Тогда утверждение

леммы следует из (3.14) по критерию компактности Хаусдорфа (множество компактно тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ найдется компактная δ -сеть).

§ 4. Существование аппроксимационной полугруппы

4.1. Нашей целью будет доказательство теоремы 1.3 о существовании аппроксимационной полугруппы.

Напомним, что если матрица B ограничена, то оператор $\mathcal{A} = -\operatorname{div} A \nabla$ обладает следующими свойствами:

- (i) область определения $D(\mathcal{A})$ плотна в $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) отрицательная полуось принадлежит резольвентному множеству и $\|(\mathcal{A} + s)^{-1}\| \leq s^{-1}$.

Здесь и далее через “1” обозначаем тождественный оператор.

Пусть для матрицы B выполнено только условие (1.17). Рассмотрим аппроксимации B_n из (1.18) и соответствующие операторы $\mathcal{A}_n$.

Важную роль будет играть следующая

ЛЕММА 4.1 (лемма о компактности). *Для любого $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ последовательность $(\mathcal{A}_n + 1)^{-1}f$ компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Эту лемму докажем позже.

ТЕОРЕМА 4.2. *Последовательность $\mathcal{A}_n$ компактна в смысле сильной резольвентной сходимости. Другими словами, с точностью до выделения подпоследовательности выполнено*

$$(\mathcal{A}_n + s)^{-1}f \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} (\mathcal{A} + s)^{-1}f \quad \forall s > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{A}$ – оператор, удовлетворяющий условиям (i), (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $s = 1$. На основе леммы 4.1 с помощью диагонального метода убеждаемся в том, что последовательность $(\mathcal{A}_n + 1)^{-1}$ компактна в смысле сильной сходимости операторов. Можно считать, что она сама является сходящейся, т.е.

$$(\mathcal{A}_n + 1)^{-1}f \rightarrow Sf \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (4.2)$$

Проверим, что область значений оператора S плотна в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Сильная сходимость (4.2) влечет слабую сходимость сопряженных операторов:

$$(\mathcal{A}_n^* + 1)^{-1}g \rightharpoonup S^*g \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Если допустить, что область значений S не плотна в $L^2(\mathbb{R}^d)$, то оператор S^* имеет непустое ядро, т.е. $v = S^*g = 0$ для некоторого $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \neq 0$. Но v есть решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div}(a \nabla v - B \nabla v) + v = g,$$

и тогда ясно, что $g = 0$. Итак, область значений оператора S плотна в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Положив $S^{-1} = \mathcal{A} + 1$, получим соотношение (4.1) при $s = 1$. Как показано в книге Като [17; гл. VIII, теорема 1.3], отсюда следует выполнение соотношения (4.1) при любом $s > 0$. Теорема 4.2 доказана.

Теперь, чтобы получить теорему 1.3, достаточно ссылки на теорему Троттера–Като [17; гл. IX, теорема 2.16].

4.2. Для доказательства леммы о компактности (леммы 4.1) нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. Пусть $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, u – решение уравнения (1.13), $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда при $d \geq 3$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln^{2\lambda}(x^2 + e) u^2(x) dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \ln^{2\lambda}(x^2 + e) f^2(x) dx, \quad (4.3)$$

в которой показатель $\lambda > 0$ достаточно мал, а постоянная c_0 зависит только от d , ν и величины l из (1.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем эту оценку для решения задачи Дирихле в кубе $Q = [-n, n]^d$. Итак, пусть

$$u \in H_0^1(Q), \quad -\operatorname{div}(a \nabla u + B \nabla u) + u = f.$$

Возьмем $\psi = \lambda \psi_0$, $\psi_0 = \ln \ln(x^2 + e)$, $\lambda > 0$, и рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\psi = e^\psi \mathcal{A} e^{-\psi}$. Для $v = e^\psi u$ выполнено

$$\begin{aligned} v &\in H_0^1(Q), \quad \mathcal{A}_\psi v + v = g = e^\psi f, \\ \int_Q a \nabla v \cdot \nabla v dx + 2\lambda \int_Q B \nabla v \cdot \nabla \psi_0 v dx \\ &- \lambda^2 \int_Q a \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 v^2 dx + \int_Q v^2 dx = \int_Q g v dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что

$$|\nabla \psi_0| \leq \frac{2|x|}{(x^2 + 1) \ln(x^2 + e)}$$

и $|B| |\nabla \psi_0| \in L^d(\mathbb{R}^d)$. Последнее проверяется путем перехода к сферическим координатам и интегрирования по частям (см. доказательство неравенства (2.4)). Отсюда по неравенству Гёльдера и Соболева

$$\begin{aligned} \left| \int_Q B \nabla v \cdot \nabla \psi_0 v dx \right| &\leq \left(\int_Q |B|^d |\nabla \psi_0|^d dx \right)^{\frac{1}{d}} \left(\int_Q |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |v|^{\frac{2d}{d-2}} dx \right)^{\frac{d-2}{2d}} \\ &\leq c_1 \int_Q |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

Тогда из (4.4) при малых λ следует оценка

$$\int_Q v^2 dx \leq c_2 \int_Q g^2 dx, \quad v = e^\psi u, \quad g = e^\psi f,$$

в которой постоянная c_2 не зависит от n . Собственно оценка (4.3) получается предельным переходом при $n \rightarrow \infty$. Лемма 4.3 доказана.

Проверим, что в случае $d = 2$ верна оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln^{2\lambda}(x^2 + e) u^2(x) dx \leq c_0 \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \ln^{2\lambda}(x^2 + e) f^2(x) dx + \|f\|_\infty^2 \right\}. \quad (4.5)$$

Действительно, так как по принципу максимума $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty = M$, то $|v| \leq e^\psi \|f\|_\infty = M \ln^\lambda(x^2 + e)$. Легко выясняется, что при малых $\lambda > 0$

$$|B| |\nabla \psi_0| |v| \leq \frac{2M|B| |x|}{(x^2 + e) \ln^{1-\lambda}(x^2 + e)} \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left| \int_Q B \nabla v \cdot \nabla \psi_0 v \, dx \right| \leq c \left(\int_Q |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} M$$

и сама оценка (4.5).

Теперь не составляет труда доказать собственно лемму о компактности. Так как $\|(\mathcal{A}_n + 1)^{-1}\| \leq 1$, то достаточно установить компактность последовательности $(\mathcal{A}_n + 1)^{-1}f$ для f из плотного в $L^2(\mathbb{R}^d)$ множества. Но для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ компактность следует из энергетической оценки (1.16) и оценки (4.3) (в двумерном случае – из оценки (4.5)).

§ 5. Достаточные условия единственности

По теореме 1.3 задаче Коши (1.1) отвечает хотя бы одна аппроксимационная полугруппа. Чтобы обеспечить единственность такой полугруппы, требуются определенные локальные условия на матрицу B . Можно указать несколько таких условий – все они заимствуются из найденных в [4] условий единственности задачи Дирихле в ограниченной области. Остановимся на одном из локальных условий.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнено условие (1.17) и, кроме того,

$$b = \operatorname{div} B \in L_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^d). \quad (5.1)$$

Тогда аппроксимационная полугруппа единственна.

Теорема 5.1 будет получена в качестве следствия подходящих свойств единственности для резольвентного эллиптического уравнения вида (1.13). Предварительно отметим одно утверждение.

ЛЕММА 5.2. Пусть $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\bar{u}$ – срезка,

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq N, \\ \pm N, & \text{если } |u| > N. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} b \cdot \nabla u \bar{u} \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} B \nabla u \cdot \nabla \varphi \bar{u} \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тожество (1.20) запишем коротко в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d} b \cdot h \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} B \cdot \nabla h \, dx \quad \forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)^d.$$

Считая пока функцию u гладкой, возьмем в этом тождестве пробный вектор $h = \nabla u \bar{u} \varphi$. Так как в этом случае

$$\begin{aligned}\nabla h &= \varphi(\nabla u \times \nabla \bar{u}) + \bar{u}(\nabla u \times \nabla \varphi) + \bar{u} \varphi \nabla^2 u, \\ B \nabla u \cdot \nabla \bar{u} &= 0, \quad B \cdot \nabla^2 u = 0,\end{aligned}$$

то равенство (5.2) имеет место. Путем аппроксимации оно распространяется на функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Лемма 5.2 доказана.

Основной шаг составляет следующий результат о единственности для эллиптического уравнения.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть выполнены условия (1.17), (5.1). Тогда при $d \geq 3$ решение эллиптического уравнения (1.13) единственно, а при $d = 2$ аппроксимационное решение этого уравнения единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что однородное уравнение имеет решение, т.е.

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} (a \nabla u \cdot \nabla h - b \cdot \nabla u h + u h) dx = 0 \quad \forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

В качестве пробной функции h в действительности можно взять

$$h = \bar{u} \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

в чем можно убедиться путем аппроксимации, если учесть, что $b \cdot \nabla u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$. По лемме 5.2

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a \nabla u \cdot \nabla \bar{u} + u \bar{u}) \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^d} a \nabla u \cdot \nabla \varphi \bar{u} dx + \int_{\mathbb{R}^d} B \nabla u \cdot \nabla \varphi \bar{u} dx. \quad (5.3)$$

Считаем, что $\varphi \geq 0$ зависит от параметра r ,

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq r/2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq r, \end{cases} \quad |\nabla \varphi| \leq \frac{4}{r}.$$

Покажем, что второй интеграл в правой части (5.3) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Для $d \geq 3$ по неравенствам Гёльдера и Соболева

$$\begin{aligned}J &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} B \nabla u \cdot \nabla \varphi \bar{u} dx \right| \\ &\leq \frac{2}{r} \left(\int_{|x| \leq r} |B|^d dx \right)^{1/d} \left(\int_{|x| \geq r/2} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\bar{u}|^{2d/(d-2)} dx \right)^{(d-2)/(2d)}, \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{u}|^{2d/(d-2)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2d/(d-2)} dx \leq c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \right)^{d/(d-2)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.17) следует, что $J \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Сходимость к нулю первого слагаемого в правой части (5.3) устанавливается аналогично (и даже проще). В результате приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a \nabla u \cdot \nabla \bar{u} + u \bar{u}) dx = 0$$

и, полагая в срезке $N \rightarrow \infty$, получим, что $u = 0$.

В случае $d = 2$ изложенное доказательство единственности годится только при условии (1.4) вместо (1.17). При условии (1.17) требуется отдельное рассмотрение. Покажем, что однородное уравнение не имеет ненулевых решений из $H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Как показано в [4; лемма 1.5], отсюда следует единственность аппроксимационного решения. В данном случае нет необходимости брать срезку и вместо $\bar{u}$ в (5.3) можно взять u . Благодаря ограниченности u сходимость к нулю правой части при $r \rightarrow \infty$ устанавливается непосредственно по неравенству Гёльдера. Теорема 5.3 доказана.

§ 6. Диффузия в несжимаемом случайном потоке. Центральная предельная теорема

6.1. Пусть Ω – вероятностное пространство, т.е. множество со счетно аддитивной нормированной мерой μ , заданной на некоторой σ -алгебре $\mathcal{F}$ его подмножеств.

Динамической системой с d -мерным временем или просто d -мерной динамической системой называется такое семейство отображений $T(x): \Omega \rightarrow \Omega$ ($x \in \mathbb{R}^d$), что выполнены условия:

1) групповое свойство: $T(0) = I$ (тождественное отображение),

$$T(x+y) = T(x)T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

2) преобразования $T(x): \Omega \rightarrow \Omega$ сохраняют меру μ на Ω , т.е. для любых $x \in \mathbb{R}^d$, $F \in \mathcal{F}$

$$T(x)F \in \mathcal{F}, \quad \mu(T(x)F) = \mu(F);$$

3) для любой μ -измеримой функции $h(\omega)$ на Ω функция $h(T(x)\omega)$ измерима на $\Omega \times \mathbb{R}^d$ (при этом на $\mathbb{R}^d$ задается мера Лебега).

Измеримая на Ω функция h называется *инвариантной*, если $h(T(x)\omega) = h(\omega)$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$ μ -п.в. Динамическая система *эргодична*, если всякая инвариантная функция есть константа (μ -п.в.). В этой ситуации говорят также, что мера μ эргодична относительно $T(x)$. Мы предполагаем, что динамическая система $T(x)$ эргодична, и используем эргодическую теорему в следующей форме.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА [18; гл. VIII, 7]. Пусть $h \in L^q(\Omega) = L^q(\Omega, d\mu)$, $q \geq 1$. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ реализация $h(T(x)\omega)$ принадлежит $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$h(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \rightharpoonup \langle h \rangle = \int_{\Omega} h d\mu \quad \text{слабо в } L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Для большинства приложений достаточно считать, что Ω – компактное метрическое пространство, μ – борелевская мера, а преобразование

$$\Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega, \quad \text{где } (\omega, x) \rightarrow T(x)\omega,$$

непрерывно. Приведем простейшие примеры.

ПРИМЕР 1 (периодический случай). Пусть $\Omega = \square$ – единичный куб,

$$\square = \{\omega \in \mathbb{R}^d, 0 \leq \omega_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}.$$

На Ω имеется динамическая система $T(x)\omega = \omega + x \pmod{1}$, относительно которой мера Лебега инвариантна и эргодична. Реализация функции $h(\omega)$ имеет вид $h(x + \omega)$.

ПРИМЕР 2 (квазипериодический случай). Пусть $\Omega = \square$ – единичный куб в $\mathbb{R}^m$, μ – мера Лебега на нем. Для $x \in \mathbb{R}^d$ положим $T(x)\omega = \omega + \lambda x \pmod{1}$, где $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$ – матрица размера $d \times m$. Очевидно, преобразование $T(x)$ сохраняет меру μ на Ω . Эргодичность будет иметь место, если $\lambda_{ij}k_j \neq 0$ для любого целочисленного вектора k . Таким образом, $L^q(\Omega) = L^q(\square)$ – пространство периодических функций от m переменных, а реализации имеют вид $h(\omega + \lambda x)$.

6.2. Пусть $A = A(\omega)$ – μ -измеримая эллиптическая матрица,

$$\nu \xi^2 \leq A(\omega) \xi \cdot \xi \leq \nu^{-1} \xi^2,$$

где $\nu > 0$ не зависит от ω . Условия на кососимметрическую часть B этой матрицы будут указаны позже, а сейчас напомним постановку вопроса о центральной предельной теореме в классическом случае $B \in L^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим задачу Коши (1.1), в которой $A(x) = A(T(x)\omega)$, а начальное значение f взято не зависящим от ω ,

$$f \geq 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} f dx = 1,$$

и пусть $X(t) = X(t, \omega)$ – случайный процесс с плотностью распределения $u(x, t, \omega)$. Центральная предельная теорема – это утверждение о том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ случайная величина $\varepsilon X(\varepsilon^{-2}t)$ ($t > 0$) сходится по распределению к гауссовой случайной величине. Очевидно, что плотностью распределения указанной случайной величины служит $\varepsilon^{-d}u(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega)$ – решение задачи Коши для уравнения с матрицей $A(\varepsilon^{-1}x)$ и дельтаобразным начальным значением $\varepsilon^{-d}f(\varepsilon^{-1}x)$. Более точно, сходимость по распределению и сама центральная предельная теорема означают, что для μ -почти всех ω

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} [\varepsilon^{-d}u(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega) - K_0(x, t)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (6.1)$$

где

$$K_0(x, t) = (2\pi t)^{-d/2} (\det A_0)^{-1/2} e^{-A_0^{-1}x \cdot x / (4t)},$$

A_0 – постоянная положительно определенная матрица, называемая *матрицей эффективной диффузии*.

Укажем эллиптическую задачу на вероятностном пространстве Ω , с помощью которой определяется матрица A_0 . Напомним, что вектор $v = v(\omega)$, заданный на Ω , $v \in L^1(\Omega)^d$, *потенциален (соленоидален)*, если для μ -почти всех $\omega \in \Omega$ реализации $v(T(x)\omega)$ потенциальны (соленоидальны) на $\mathbb{R}^d$. Пусть V_{pot}^2 (V_{pot}^∞) – это множество всех потенциальных векторов из $L^2(\Omega)$ ($L^\infty(\Omega)$) с нулевым средним, $\langle v \rangle = \int_{\Omega} v d\mu = 0$. Известно, что V_{pot}^∞ плотно в V_{pot}^2 .

Поставим задачу: для $\xi \in \mathbb{R}^d$ найти вектор $v \in V_{\text{pot}}^2$ такой, что

$$\int_{\Omega} A(\omega)(\xi + v(\omega)) \cdot w(\omega) d\mu = 0 \quad \forall w \in V_{\text{pot}}^\infty,$$

или в краткой записи

$$v \in V_{\text{pot}}^2, \quad \langle A(\xi + v) \cdot w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_{\text{pot}}^\infty. \quad (6.2)$$

В случае $A \in L^\infty(\Omega)$ существование и единственность решения этой задачи непосредственно следует из леммы Лакса–Мильграма, а усредненная матрица A_0 определяется равенством

$$A_0 \xi = \langle A(\xi + v) \rangle, \quad (6.3)$$

причем эту матрицу можно считать симметрической.

Установим некоторые оценки для решения задачи (6.2). Из (6.2), (6.3) имеем

$$\begin{aligned} A_0 \xi \cdot \xi &= \langle A(\xi + v) \cdot \xi \rangle = \langle A(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle \\ &= \langle a(\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle \geq \nu \langle (\xi + v) \cdot (\xi + v) \rangle \geq \nu \xi^2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \langle A(\xi + v) \cdot v \rangle &= 0, \quad \langle av \cdot v \rangle = -\langle A\xi \cdot v \rangle, \\ \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \nu^{-1} \|A\|_{L^2(\Omega)} |\xi|. \end{aligned}$$

Пусть теперь $B \in L^2(\Omega)$, $B_n \rightarrow B$ в $L^2(\Omega)$, $B_n \in L^\infty(\Omega)$. Тогда последовательность решений v_n ограничена в $L^2(\Omega)$ и (с точностью до выделения подпоследовательности) $v_n \rightharpoonup v$ в $L^2(\Omega)$. Переходом к пределу в тождестве

$$\langle A_n(\xi + v_n) \cdot w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_{\text{pot}}^\infty$$

получаем “аппроксимационное” решение задачи (6.2). При этом усредненная матрица определяется как соответствующий предел усредненных матриц:

$$A_0 \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n(\xi + v_n) \rangle = \langle A(\xi + v) \rangle.$$

Посмотрим, что представляет собой задача (6.2) на реализациях. Здесь важно следующее утверждение, см. [3; гл. VI].

ЛЕММА 6.1. *Вектор $h \in L^1(\Omega)^d$ соленоиден тогда и только тогда, когда он ортогонален пространству V_{pot}^∞ , т.е.*

$$\int_{\Omega} h \cdot v \, d\mu = 0 \quad \forall v \in V_{\text{pot}}^\infty.$$

Теперь из (6.2) видим, что вектор $h = A(\xi + v)$ соленоиден, и поэтому для μ -почти всех ω выполнено

$$\operatorname{div}_x(A(T(x)\omega)(\xi + v(T(x)\omega))) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^d.$$

Вектор $v(x) = v(T(x)\omega)$ по определению имеет потенциал $v(x) = \nabla u(x)$, $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$, но $u(x, \omega)$ вообще не будет стохастически однородной функцией, т.е. не допускает представления в виде $u(T(x)\omega)$, где $u \in L^1(\Omega)$. Указанное представление имеет место в периодическом случае, что приводит к известной задаче на ячейке периодичности:

$$u \in H_{\text{per}}^1(\square), \quad \operatorname{div}(A(\xi + \nabla u)) = 0.$$

Задачу (6.2) на вероятностном пространстве по аналогии также называют “задачей на ячейке”. В силу леммы 6.1 она может быть представлена в виде

$$v \in V_{\text{pot}}^2, \quad \operatorname{div}(A(\xi + v)) = 0,$$

где запись $\operatorname{div} g = 0$, $g \in L^1(\Omega)^d$, означает, что вектор g соленоиден.

Отметим следующее утверждение о единственности.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $B \in L^2(\Omega)$ и для почти всех реализаций $B(x) = B(T(x)\omega)$ выполнено условие (5.1). Тогда решение задачи (6.2) единственно.

Эта теорема, по существу, доказана в [19]. В этой работе предполагалось, что $B \in L^2(\Omega)$ и для некоторого вектора $b \in L^2(\Omega)$ выполнено

$$\operatorname{div} B(T(x)\omega) = b(T(x)\omega) \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } \omega.$$

Однако в самом доказательстве использовалось более слабое “локальное” условие (5.1).

6.3. Наш основной результат по усреднению составляет

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $B \in L^p(\Omega)$ для некоторого $p > d$, а начальные значения f удовлетворяют условиям (3.11). Тогда для μ -почти всех ω выполнено соотношение (6.1), в котором $u(x, t, \cdot)$ – аппроксимационное решение задачи Коши, а также более сильное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} (x^2 + 1)^\lambda |\varepsilon^{-d} u(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega) - K_0(x, t)| dx = 0 \quad \forall t > 0, \quad \lambda > 0. \quad (6.4)$$

Матрица эффективной диффузии зависит от способа аппроксимации.

Несколько слов об аппроксимации, которая предполагается в теореме 6.3. Рассматривается последовательность $B_n \in L^\infty(\Omega)$, $B_n \rightarrow B$ в $L^p(\Omega)$. Для почти всех реализаций $B_n(x) = B(T(x)\omega)$, $B(x) = B(T(x)\omega)$ по эргодической теореме имеем сходимость $B_n \rightarrow B$ в $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$. Нужно еще убедиться, что условие (1.4) выполняется равномерно по n . С этой целью воспользуемся известным результатом из эргодической теории [18; гл. VIII].

МАКСИМАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА. Если $h \in L^1(\Omega)$ и

$$l(\omega) = \sup_{r \geq 1} \frac{1}{r^d} \int_{|x| \leq r} |h(T(x)\omega)| dx,$$

то выполнено неравенство

$$\mu\{\omega \in \Omega, l(\omega) \geq \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\Omega} |h| d\mu, \quad c = c(d).$$

Отсюда получаем, что если $h_n \rightarrow h$ в $L^1(\Omega)$, то (с точностью до выбора подпоследовательности) $l_n(\omega) \rightarrow l(\omega)$ для μ -почти всех ω . Остается применить это свойство к последовательности $h_n = |B_n|^p$.

В основе доказательства теоремы 6.3 лежит оценка (1.5) для функции $\varepsilon^{-d} u(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega)$ и следующая теорема об усреднении.

Пусть $w_\varepsilon(x, t, \omega)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div} A(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \nabla w_\varepsilon, \quad w_\varepsilon|_{t=0} = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $B \in L^d(\Omega)$ при $d \geq 3$ и $B \in L^{2+\sigma}(\Omega)$, $\sigma > 0$, при $d = 2$. Тогда для μ -почти всех ω для аппроксимационного решения задачи Коши (6.5) выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |w_\varepsilon(x, t, \omega) - w_0(x, t)|^2 dx = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

в котором $w_0(x, t)$ – решение усредненной задачи Коши

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \operatorname{div} A_0 \nabla w_0, \quad w_0|_{t=0} = \varphi.$$

Усредненная матрица A_0 зависит от способа аппроксимации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3. Плотность

$$u^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x, t, \omega) = \varepsilon^{-d} u(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega)$$

служит решением задачи Коши с матрицей $A(\varepsilon^{-1}x)$ и дельтаобразным начальным значением $\varepsilon^{-d}f(\varepsilon^{-1}x)$. Непосредственно теорема усреднения здесь не применима, поскольку семейство начальных значений $\varepsilon^{-d}f(\varepsilon^{-1}x)$ не ограничено в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Однако благодаря оценке (1.5) значение $u^\varepsilon(x, t_0)$, где $t_0 > 0$, принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^d)$ и, более того, семейство $u^\varepsilon(x, t_0)$ компактно в $L^2(\mathbb{R}^d)$ для почти всех $t_0 > 0$ в силу леммы 3.2. Следовательно, теорема усреднения применима при $t \geq t_0 > 0$ и можно считать, что имеет место сильная сходимость

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u^0(x, t) \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^d), \quad t > 0, \quad (6.6)$$

причем u^0 есть решение усредненного уравнения $\partial u^0 / \partial t = \operatorname{div} A_0 \nabla u^0$. Остается проверить, что $u^0(x, 0) = \delta(x)$, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x, t) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

С этой целью воспользуемся оценкой (1.5) и свойством (3.12) равномерного дельтаобразного поведения. Так как

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(x, t) dx \equiv 1,$$

то из (3.12) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x, t) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(x, t) dx \equiv 1, \\ \int_{|x| \geq r} u^0(x, t) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > r} u^\varepsilon(x, t) dx \leq c_r(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} c_r(t) = 0 \quad \forall r > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $\lim_{t \rightarrow 0} u^0(x, t) = \delta(x)$, т.е. $u^0(x, t) = K_0(x, t)$ – фундаментальное решение для усредненной задачи Коши. Наконец, само соотношение (6.4) легко получается из (6.6) и оценки (1.5). Теорема 6.3 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы об усреднении

Установим усреднение для эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (7.1)$$

где $A^\varepsilon(x) = A(T(y)\omega)$, $y = \varepsilon^{-1}x$, а именно докажем соотношение

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^d), \quad (7.2)$$

в котором u^ε – аппроксимационное решение указанного уравнения, а u^0 – решение усредненного уравнения

$$-\operatorname{div} A_0 \nabla u^0 + u^0 = f.$$

После этого сама теорема 6.4 будет следовать из теоремы Троттера–Като.

Энергетическая оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \nu^{-1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (7.3)$$

показывает, что соотношение (7.2) достаточно доказать для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. В этом случае по принципу максимума

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \quad (7.4)$$

Пусть для определенности $d \geq 3$. Из оценок (7.3) и (4.3) следует, что последовательность u^ε компактна в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, без потери общности можно считать, что имеет место соотношение (7.2), а также справедливы соотношения

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{в } H^1(\mathbb{R}^d), \quad u^\varepsilon \rightarrow u^0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^d) \quad \forall s \geq 1,$$

см. (7.4). Семейство A^ε ограничено в $L_{\text{loc}}^d(\mathbb{R}^d)$, поскольку $A \in L^d(\Omega)$. Поэтому семейство $p^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x)$ ограничено в $L_{\text{loc}}^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d)$ и без потери общности считаем, что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p^0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d).$$

Интегральное тождество для исходной задачи (7.1) запишется как

$$\int_{\mathbb{R}^d} (p^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + u^\varepsilon \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (7.5)$$

Будем использовать задачу на ячейке вида (6.2), отвечающую транспонированной к A матрице. Запишем эту задачу в виде

$$v \in V_{\text{pot}}^2, \quad \operatorname{div}(\xi + v)A = 0$$

и положим

$$v^\varepsilon(x) = v(T(y)\omega), \quad h = (\xi + v)A, \quad h^\varepsilon(x) = h(T(y)\omega), \quad y = \varepsilon^{-1}x.$$

Тогда $\xi A_0 = \langle h \rangle$,

$$\operatorname{div} h^\varepsilon = 0, \quad h^\varepsilon \rightharpoonup \langle h \rangle = \xi A_0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d).$$

Вектор v^ε потенциален и $v^\varepsilon \rightharpoonup \langle v \rangle = 0$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ по эргодической теореме, следовательно, справедливо представление

$$v^\varepsilon = \nabla w^\varepsilon, \quad w^\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{в } H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d). \quad (7.6)$$

Исходим из очевидного поточечного равенства

$$\Phi^\varepsilon(x) \equiv p^\varepsilon(x) \cdot \nabla w^\varepsilon(x) = \nabla u^\varepsilon(x) \cdot v^\varepsilon(x) A^\varepsilon(x) = \nabla u^\varepsilon(x) \cdot h^\varepsilon(x) - p^\varepsilon(x) \cdot \xi.$$

При наших условиях на матрицу A функция $\Phi^\varepsilon(x)$, вообще говоря, не принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Поэтому преобразуем величину

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^\varepsilon(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

предполагая пока, что $A \in L^\infty(\Omega)$. Из (7.5) имеем

$$J_\varepsilon \equiv \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} (f - u^\varepsilon) w^\varepsilon \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \nabla \varphi dx.$$

Кроме того,

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u^\varepsilon \cdot h^\varepsilon \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon(x) \cdot \xi \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon \cdot h^\varepsilon \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon(x) \cdot \xi \varphi dx$$

в силу соленоидальности вектора h^ε .

В результате получим равенство

$$- \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^d} (f - u^\varepsilon) w^\varepsilon \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot \xi \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon h^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = 0. \quad (7.7)$$

Теперь нужно проверить, что это равенство верно для аппроксимационных решений, а затем перейти в нем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оба предельных перехода основаны на одинаковых соображениях, причем некоторую трудность составляет только первое слагаемое – в остальных предельный переход основан на простейших свойствах сильной и слабой сходимости. Начнем с предельного перехода при фиксированном $\varepsilon > 0$. В равенстве (7.7) вместо $u^\varepsilon, p^\varepsilon, \dots$ надо взять $u_n^\varepsilon, p_n^\varepsilon, \dots$. При переходе к пределу в задаче на ячейке имеем слабую сходимость

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad h_n \rightharpoonup h \quad \text{в } L^{2d/(d+2)}(\Omega),$$

которая влечет слабую сходимость реализаций

$$\begin{aligned} v_n(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) &\rightharpoonup v(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \\ h_n(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) &\rightharpoonup h(T(\varepsilon^{-1}x)\omega) \quad \text{в } L^{2d/(d+2)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

при фиксированном ε (для μ -почти всех ω).

В результате при $n \rightarrow \infty$ имеем:

- 1) $p_n^\varepsilon \rightharpoonup p^\varepsilon, \quad h_n^\varepsilon \rightharpoonup h^\varepsilon$ в $L^{2d/(d+2)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$,
- 2) $u_n^\varepsilon \rightarrow u^\varepsilon$ в $L^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ($\forall s \geq 1$), $w_n^\varepsilon \rightharpoonup w^\varepsilon$ в $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Отсюда видно, что во всех слагаемых в (7.7), кроме первого, предельный переход совсем прост.

Напомним, что последовательность измеримых функций $\beta_n(x)$ на Q (Q – шар в $\mathbb{R}^d$) равностепенно интегрируема, если для любого $\delta > 0$ найдется $\tau = \tau(\delta)$ такое, что для любого измеримого множества $K \subset Q$

$$\int_K |\beta_n(x)| dx \leq \delta$$

как только $|K| \leq \tau$, где $|K|$ – мера Лебега множества K .

Известно, что последовательность β_n слабо компактна в $L^1(Q)$ тогда и только тогда, когда она равностепенно интегрируема.

Вернемся к первому слагаемому в (7.7). Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} p_n^\varepsilon \cdot w_n^\varepsilon \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \nabla \varphi dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} p_n^\varepsilon \cdot (w_n^\varepsilon - w^\varepsilon) \nabla \varphi dx. \quad (7.8)$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_K |p_n^\varepsilon (w_n^\varepsilon - w)| dx &\leq \int_K |A_n^\varepsilon| |\nabla u_n^\varepsilon| |w_n^\varepsilon - w| dx \\ &\leq \left(\int_K |A_n^\varepsilon|^d dx \right)^{1/d} \left(\int_Q |\nabla u_n^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q |w_n^\varepsilon - w|^{2d/(d-2)} dx \right)^{(d-2)/d} \\ &\leq c \left(\int_K |A_n^\varepsilon|^d dx \right)^{1/d}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $|p_n^\varepsilon (w_n^\varepsilon - w)|$ равностепенно интегрируема, поскольку таковой является $|A_n^\varepsilon|^d$ в силу сходимости $A_n^\varepsilon \rightarrow A^\varepsilon$ в $L^d(Q)$.

Рассмотрим второе слагаемое в (7.8). Положив для ясности $a_n = |p_n^\varepsilon|$, $b_n = |w_n^\varepsilon - w^\varepsilon|$, введем срезку

$$a_n^N = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n(x) \leq N, \\ N, & \text{если } a_n(x) > N, \end{cases}$$

и пусть $K_n^N = \{x \in Q, a_n(x) > N\}$. Справедлива оценка $|K_n^N| \leq cN^{-1}$, вытекающая из ограниченности a_n в $L^1(Q)$. Имеем

$$\int_\Omega a_n b_n dx = \int_{\Omega \setminus K_n^N} a_n^N b_n dx + \int_{K_n^N} a_n b_n dx.$$

При фиксированном N первый интеграл справа сходится к нулю, поскольку $b_n \rightarrow 0$ в $L^2(Q)$. Второй интеграл (в силу равностепенной интегрируемости последовательности $a_n b_n$) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора N равномерно по n . Отсюда следует соотношение $a_n b_n \rightarrow 0$ в $L^1(Q)$. Таким образом, второе слагаемое в (7.8) равно нулю и равенство (7.7) справедливо для аппроксимационных решений.

Теперь перейдем к пределу в (7.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} (f - u^\varepsilon) w^\varepsilon \varphi = 0, \quad (7.9)$$

так как семейство $(f - u^\varepsilon)$ ограничено в $L^2(\mathbb{R}^d)$, а $w^\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, см. (7.6). Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot \xi \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} p^0 \cdot \xi \varphi \, dx, \quad (7.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon \cdot h^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0 \langle h \rangle \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0 \nabla \varphi \cdot \xi A_0 \, dx, \quad (7.11)$$

поскольку $u^\varepsilon \rightarrow u$ в $L^{2d/(d-2)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а $h^\varepsilon \rightharpoonup \langle h \rangle = \xi A_0$ в $L^{2d/(d+2)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Остается рассмотреть первое слагаемое в (7.7). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_K |p^\varepsilon w^\varepsilon| \, dx &\leq \int_K |A^\varepsilon| |\nabla u^\varepsilon| |w^\varepsilon| \, dx \\ &\leq \left(\int_K |A^\varepsilon|^d \, dx \right)^{1/d} \left(\int_Q |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_Q |w^\varepsilon|^{2d/(d-2)} \, dx \right)^{(d-2)/d} \\ &\leq c \left(\int_K |A^\varepsilon|^d \, dx \right)^{1/d}, \end{aligned}$$

см. (7.6). Отсюда видно, что последовательность $p^\varepsilon w^\varepsilon$ равномерно интегрируема, поскольку таковой является $|A^\varepsilon|^d$. Действительно, по эргодической теореме имеем слабую сходимость $|A^\varepsilon|^d \rightharpoonup \langle |A|^d \rangle$ в $L^1(Q)$, которая влечет равномерную интегрируемость. Тем же рассуждением со срезкой, что и при переходе к пределу при $n \rightarrow \infty$, убеждаемся, что $|p_\varepsilon| |w_\varepsilon| \rightarrow 0$ в $L^1(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = 0,$$

и мы приходим (см. (7.9)–(7.11)) к соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon \cdot \xi \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^0 \nabla \varphi \cdot \xi A_0 \, dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

из которого следует важное равенство

$$p^0 = A_0 \nabla u^0.$$

С другой стороны, из (7.5) получаем тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} (p^0 \cdot \nabla \varphi + u^0 \varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

так что u^0 – решение усредненного уравнения. Тем самым усреднение для эллиптического уравнения доказано.

Список литературы

- [1] D. G. Aronson, “Bounds for the fundamental solutions of a parabolic equation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 890–896.
- [2] D. G. Aronson, “Non-negative solutions of linear parabolic equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci.* (4), **22** (1968), 607–694; Addendum, **25** (1971), 221–228.

- [3] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
- [4] В. В. Жиков, “Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:3 (2004), 15–28.
- [5] Ф. О. Порпер, С. Д. Эйдельман, “Двусторонние оценки для фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения”, *УМН*, **39**:3 (1984), 107–156.
- [6] А. К. Гущин, “О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **119(161)**:4(12) (1982), 451–508.
- [7] В. В. Жиков, “Асимптотические задачи, связанные с уравнением теплопроводности в перфорированных областях”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1283–1305.
- [8] A. Grigor'yan, “Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds”, *J. Differential Geom.*, **45**:1 (1997), 33–52.
- [9] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [10] K. Oelschläger, “Homogenization of a diffusion process in a divergence free random field”, *Ann. Probab.*, **16** (1988), 1084–1126.
- [11] A. Fannjiang, G. Papanicolaou, “Diffusion in turbulence”, *Probab. Theory and Related Fields*, **105** (1996), 279–334.
- [12] A. Fannjiang, T. Komorowski, “An invariance principle for diffusion in turbulence”, *Ann. Probab.*, **27** (1999), 751–781.
- [13] A. Fannjiang, T. Komorowski, “Turbulent diffusion in Markovian flows”, *Ann. Appl. Probab.*, **9** (1999), 591–610.
- [14] A. Fannjiang, T. Komorowski, “A martingale approach to homogenization of unbounded random flows”, *Ann. Probab.*, **25** (1997), 1872–1894.
- [15] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [16] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во МГУ, М., 1978.
- [17] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [18] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Мир, М., 1962.
- [19] В. В. Жиков, “Диффузия в несжимаемом случайном потоке”, *Функц. анализ и его прил.*, **31**:3 (1997), 10–22.

В. В. Жиков (V. V. Zhikov)
 Владимирский государственный
 педагогический университет
E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступила в редакцию
 07.12.2005