Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 3, 3–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:21:21

УДК 515.124.62+515.125

С. М. Агеев

Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений

В работе рассматривается пространство Небелинга N_k^{2k+1} – k -мерный аналог гильбертова пространства, являющееся топологически полным сепарабельным (т.е. польским) k -мерным абсолютным экстензором в размерности k (т.е. $AE(k)$) и сильно k -универсальным пространством. Доказывается гипотеза о том, что перечисленные свойства характеризуют пространства Небелинга N_k^{2k+1} в произвольной конечной размерности k . В первой части работы приводится полная система аксиом пространств Небелинга и на ее основе решается проблема улучшения связности разбиений.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Одним из наиболее важных результатов начальной стадии развития теории размерности явилось открытие К. Менгером и Г. Небелингом в координатном пространстве $\mathbb{R}^{2k+1}$ универсальных k -мерных пространств M_k^{2k+1} и N_k^{2k+1} для классов k -мерных компактных метрических и k -мерных польских (т.е. сепарабельных метрических) пространств (см. соответственно [1], [2]). С тех пор роль и значение этих пространств, названных впоследствии в честь первооткрывателей, в современной геометрической топологии неуклонно растет [3]–[5].

Обозначим через $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^1$ пространство иррациональных чисел, а через $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ – канторово совершенное множество. Пространства Менгера и Небелинга можно определить единообразно с помощью понятия Σ -произведения. Если через $\Sigma_k^n(X; Y) \subset X^n$, где $Y \subseteq X$, а $k \leq n \leq \infty$, обозначить подмножество X^n , состоящее из точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, у которых не более k координат x_i принадлежат дополнению $X \setminus Y$, то N_k^{2k+1} есть $\Sigma_k^{2k+1}(\mathbb{R}^1; \mathcal{I})$, а $M_k^{2k+1} = \bigcap \{ \Sigma_k^{2k+1}([0, 1]; \mathcal{C}_n) \mid 1 \leq n < \infty \}$, где $\mathcal{C}_n = [0, 3^{-n}] \cup \bigcup \{ 3^{-n} \cdot [3i - 1, 3i + 1] \mid 1 \leq i < 3^{n-1} \} \cup [1 - 3^{-n}, 1]$. Ясно, что $M_0^1 = \mathcal{C}$ и $N_0^1 = \mathcal{I}$. Если $k = \infty$, то $N_\infty^\infty = \Sigma_\infty^\infty(\mathbb{R}^1; \mathcal{I}) = \mathbb{R}^\omega$ совпадает в силу теоремы Андерсона–Кадеца [6] с гильбертовым пространством l_2 , $M_\infty^\infty = \bigcap \{ \Sigma_\infty^\infty([0, 1]; \mathcal{C}_n) \mid 1 \leq n < \infty \} = [0, 1]^\omega$ есть гильбертов куб Q . Среди многих свойств, присущих пространствам M_k^{2k+1} и N_k^{2k+1} , выделим следующие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $X \cong M_k^{2k+1}$ ($X \cong N_k^{2k+1}$), $0 \leq k \leq \infty$. Тогда

- (1)_k X есть компактное (польское) пространство размерности k ;
- (2)_k X есть абсолютный экстензор в размерности k , т.е. $X \in AE(k)$;

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712), гранта NSERC № OGP 005616 и гранта Министерства образования Республики Беларусь.

(3)_k X является сильно k -универсальным компактным (сильно k -универсальным польским) пространством.

Напомним, что компактное (польское) пространство X называется сильно k -универсальным, если любое отображение $\varphi: Z \rightarrow X$ из компактного (польского) пространства Z , $\dim Z \leq k$, как угодно близко аппроксимируется замкнутым вложением.

На протяжении почти семидесяти лет трудами многих математиков было установлено, что компактное пространство, удовлетворяющее (1)_k–(3)_k, гомеоморфно M_k^{2k+1} : Брауэр [7] ($k = 0$), Андерсон [8] ($k = 1$), Торунчик [9] ($k = \infty$), Бествина [10] ($k < \infty$). Аналогичные результаты для польских пространств устанавливались с некоторой временной задержкой: Александров, Урысон [11] ($k = 0$), Торунчик [12] ($k = \infty$), Кавамура, Левин, Тимчатин [13] ($k = 1$). Несмотря на интенсивные исследования проблемы характеристики конечномерных пространств Небелинга до сих пор недоказанной оставалась правдоподобная

ГИПОТЕЗА 1.2. Любое k -мерное сильно k -универсальное польское $AE(k)$ -пространство X гомеоморфно пространству Небелинга N_k^{2k+1} для всех $2 \leq k < \infty$.

Целью настоящей работы является доказательство гипотезы, а также

- (i) нахождение в пространстве Небелинга замены кусочно линейной структуре PL-многообразий, полностью определяющей топологию N_k^{2k+1} ;
- (ii) установление в пространстве Небелинга теоремы о незаузленности относительно произвольных Z -множеств;
- (iii) сколь угодно близкая аппроксимация гомеоморфизмом любого UV^{k-1} -отображения между N_k^{2k+1} ;
- (iv) существование совершенной k -резольвенты над k -мерным польским сильно k -универсальным $AE(k)$ -пространством, т.е. его представление в виде образа совершенного UV^{k-1} -отображения, определенного на N_k^{2k+1} ;
- (v) сколь угодно близкая аппроксимация совершенной k -резольвенты над k -мерным сильно k -универсальным польским $AE(k)$ -пространством улучшенной k -резольвентой, т.е. совершенной k -резольвентой, у которой множество сингулярных точек есть ручное σZ -множество;
- (vi) сжатие этой улучшенной k -резольвенты, т.е. сколь угодно близкая ее аппроксимация гомеоморфизмом.¹

Одна из основных идей, лежащих в основе топологической характеристики пространств, заключается в их аппроксимации некоторыми комбинаторными объектами (например, нервами покрытий) с последующей их контролируемой перестройкой и предельным переходом. В случае пространств Менгера и Небелинга такими комбинаторными объектами являются разбиения – специальные разновидности покрытий – и их соответствия – отображения разбиений, сохраняющие пересечения элементов разбиений. Разбиения призваны дискретизировать исходное топологическое пространство, а соответствия

¹Отметим, что пп. (iv)–(vi) можно рассматривать и как план доказательства гипотезы.

разбиений – непрерывные отображения топологических пространств. Возникающий на этом пути метод разбиений был развит в работах [8], [10], [11], [13]–[15]. Условно этот метод делится на две составные части: абстрактную и геометрическую. Бинг и Андерсон работали непосредственно с разбиениями характеризуемых пространств (в размерности один), а Бествина – с разбиениями их полиэдральных окрестностей. Главная черта предлагаемого метода исследования пространств Небелинга N_k^{2k+1} в многомерном случае $2 \leq k < \infty$ состоит в соединении геометрического подхода Бествины с абстрактным подходом Бинга–Андерсона.

Чтобы непосредственно работать с разбиениями пространств, имеющих довольно сложное строение, избирается полностью аксиоматический метод, истоки которого содержатся в работе [10].² Для этого мы вводим аналог кусочно линейной структуры посредством списка требований (аксиом конструктивных множеств) на подмножества исследуемого пространства. В последующем рассматриваются только разбиения, состоящие из таких множеств. Далее формулируется полная система аксиом об измельчениях и преобразованиях разбиений: любые два пространства одной размерности и связности, им удовлетворяющие, будут гомеоморфны. Попутно заметим, что нам представляется актуальной проблема упрощения аксиоматики, так как общее количество аксиом все еще велико.

Успех реализации предлагаемого аксиоматического подхода, сопряженной с преодолением ряда трудностей, во многом связан с возможностью вычленения и обособления геометрической, топологической и алгебраической составляющих развиваемой теории. Это позволяет избегать использования чрезмерно громоздких конструкций и добиться структурной прозрачности статьи. Вся геометрия сведена к проверке системы аксиом для N_k^{2k+1} . Остальные рассуждения носят общий топологический и алгебраический характер и связаны с продолжением отображений и гомотопий, процедурами улучшения связностных свойств разбиений, алгебраическим анализом коммутативных диаграмм гомотопических групп и т.д.

Сделаем небольшое отступление и отметим возможность унификации теорий пространств Небелинга и Менгера, имеющуюся при данном подходе: если в аксиомах пространств Небелинга заменить счетные разбиения на конечные, гомотопические группы со счетным числом образующих на группы с конечным числом образующих, то получается система аксиом пространств Менгера. Хотя настоящая работа содержит доказательство только характеристизационной теоремы для пространств Небелинга, однако если сделать соответствующие поправки в рассуждениях, то оно переходит в доказательство характеристизационной теоремы для пространств Менгера (проделать соответствующую коррекцию предоставляется читателю). Следует также отметить еще одно достоинство аксиоматического метода. Модифицируя соответствующим образом аксиоматику и доказательства основных теорем, можно будет в дальнейшем получать

²Большая часть из предложенных в настоящей работе аксиом содержится в [10] либо в явном, либо в завуалированном виде. Там же установлена (в явной или неявной форме) связь между ними.

характеризации многообразий Небелинга, а также несепарабельного пространства Небелинга, пространств Небелинга с действиями групп и др.

Совершенно очевидно, что многие осложнения в теории пространств Небелинга имеют общетопологический характер и связаны с отсутствием свойств компактности. Сложность другого характера возникает при проверке предлагаемой системы аксиом. Поскольку работа непосредственно с N_k^{2k+1} вызывает значительные трудности, то приходится использовать гомеоморфные ему полиэдральные псевдовнутренности PL-многообразий, которые в нашей работе будут называться *ядрами Небелинга*. Далее, “правильное” определение простой модели системы аксиом следует подкрепить проверкой для этой модели всех аксиом – этому посвящена третья часть работы.

Проще всего это делается в компактном (менгеровском) случае, поскольку здесь существует каноническое соответствие между разбиениями простой модели и PL-разбиениями ее полиэдральных окрестностей. В результате проверка модифицированных аксиом (для M_k^{2k+1}) легко сводится к кусочно линейному случаю и осуществляется параллельно [10] (за исключением отсутствующих там аксиом уединения и Z -множеств). В небелинговском случае такое соответствие устанавливается достаточно тонкими рассуждениями и носит “полуканонический” характер. Как следствие возникают значительные трудности как на стадии редуцирования аксиом к кусочно линейному случаю, так и при доказательстве кусочно линейных аналогов некоторых аксиом. Так, например, существенно новый момент возникает в вопросе выбора нижней границы m для размерностей PL-многообразий, порождающих k -ядро Небелинга: m должно превышать традиционное значение $2k + 1$ как минимум на две единицы.

Наиболее важные результаты статьи основываются на процедуре улучшения свойств связности элементов разбиения и их пересечений, впервые во всей полноте примененной Бествиной в менгеровском случае. Отслеживать связностные свойства необходимо потому, что только в случае, когда элементы разбиения $X \in \text{ANE}(k)$ и их пересечения являются абсолютными экстензорами в соответствующих размерностях (так называемые k -разбиения), каноническое отображение в нерв такого разбиения является k -эквивалентностью и, тем самым, нерв несет существенную информацию о связности X .

В самом простом виде проблема улучшения связности разбиения заключается в нахождении k -разбиения $\mathcal{Q}$ пространства $X \in \text{AE}(k)$, изоморфного k -разбиению $\hat{\mathcal{Q}}$ другого $\text{AE}(k)$ -пространства $\hat{X}$. Ее решение следует начинать с построения какого-либо разбиения $\mathcal{Q}'$ пространства X , изоморфного $\hat{\mathcal{Q}}$. Так как в начальный момент разбиение $\mathcal{Q}'$ произвольно, то аккомпанемент трансформации между $\mathcal{Q}'$ и $\hat{\mathcal{Q}}$ не является k -эквивалентностью.³ Далее последовательно улучшается связность $\mathcal{Q}'$ с сохранением имеющегося изоморфизма между разбиениями. Однако основной используемый для этого прием – перестройка элементов разбиений посредством заклейки образующих их гомотопических групп – не в силах существенно повлиять на аккомпанемент и перестроить его в k -эквивалентность, если аккомпанемент первоначально не обладал этим свойством. В то же время любой аккомпанемент трансформации между

³Определение трансформации и ее аккомпанемента см. в § 7. Если трансформация тождественна, $\mathcal{Q}' = \hat{\mathcal{Q}}$, то ее аккомпанемент совпадает с каноническим отображением в нерв $\hat{\mathcal{Q}}$.

k -разбиениями обязан быть k -эквивалентностью. По этой причине проблему улучшения свойств связности разбиения следует ставить и решать в исправленном виде: пусть аккомпанемент трансформации между $\mathcal{Q}'$ и $\hat{\mathcal{Q}}$ уже является k -эквивалентностью, требуется найти k -разбиение $\mathcal{Q}$, изоморфное $\hat{\mathcal{Q}}$. Отсюда видно, что гомотопические группы размерности k в пространствах Небелинга играют существенную роль, хотя запас k -мерных гомотопий в них невелик.

Гомотопические группы элементов перестраиваемых разбиений имеют счетное число образующих. В отличие от менгеровского случая последовательное заклеивание образующих здесь не дает эффекта из-за отсутствия стабилизации осуществляемых построений. По этой причине мы вынуждены развить метод уединения изоморфных копий разбиений, позволяющий обойти эту (существенно небелинговскую) трудность и осуществить заклеивания счетного числа образующих гомотопических групп одновременно: сначала построить счетное дискретное семейство изоморфных копий исходного разбиения, затем заклеить i -ю образующую гомотопической группы в i -й копии, после чего собрать счетное число перестроенных разбиений в единое разбиение, являющееся искомым. Вместе с тем метод уединения является одним из самых действенных инструментов в работе, его применение в других частях позволяет существенно упростить многие рассуждения.

Техника, выработанная в процессе решения проблемы улучшения связности разбиения, далее существенно усиливается за счет более тщательного контроля над используемыми параметрами и применяется в принципиально важной теореме о Z -незаузленности. В самой простой формулировке она утверждает, что частичный гомеоморфизм между Z -множествами N_k^{2k+1} может быть продолжен до гомеоморфизма всего пространства. Доказанная в полном объеме эта теорема представляет собой мощный инструмент в исследовании пространств Небелинга и играет решающую роль при построении и улучшении резольвент.

Отметим особенность доказательства общей теоремы о Z -незаузленности для пространств Небелинга. В настоящей работе она сводится к теореме о незаузленности относительно более узкого класса ручных Z -множеств, не имеющего внутреннего топологического определения. Тщательный анализ показывает, что в случае пространств Менгера в [10]⁴ установлена лишь ручная теорема о Z -незаузленности. Способ доказательства общей теоремы о Z -незаузленности для пространств Менгера недавно предложен М. Бествиной.

Наконец отметим, что чтение этой достаточно длинной статьи потребует значительных усилий. Именно поэтому мы сосредотачиваем внимание только на принципиально важном результате – характеристике пространств Небелинга. За чертой настоящей статьи остаются разнообразные приложения развитого здесь аксиоматического метода, включая характеристики псевдограницы евклидова пространства, многообразий Небелинга и многое другое.

⁴В [10; часть 3, с. 69] чрезвычайно кратко описывается аналог этапа 6 из 2.7.6 для доказательства теоремы о Z -незаузленности. Однако в отличие от 2.7.6 здесь дополнительно фигурирует Z -множество $Z \subset M$, что существенно меняет ситуацию. Если все же попытаться применить рассуждения из 2.7.6, то в определенный момент возникнет необходимость согласования элементов разбиения с Z . Это и будет означать, что множество Z должно быть ручным.

Несмотря на то что в основном доказательства изложены подробно, остается все же много вспомогательных утверждений, оставляемых на рассмотрение читателя. Как правило, это относится и к утверждениям, доказываемым аналогично. Если не возникает двусмысленностей, мы будем опускать определения некоторых понятий, возникающих естественным образом.

Вся работа состоит из трех частей. В первой из них приводится аксиоматика пространств Небелинга и в ее рамках решается проблема улучшения связности разбиения. На основе этого во второй части устанавливаются все основные результаты (i)–(vi). В заключительной, третьей, части работы устанавливается непротиворечивость предложенной системы аксиом.

Первая часть состоит из трех глав. Глава 1 посвящена разбиениям и их соответствиям. Здесь вводится понятие ядра Небелинга конструктивного многообразия и приводятся Аксиомы конструктивных множеств. Во второй главе завершается построение системы аксиом пространства Небелинга, которая состоит из аксиом трансверсальности, конфинальности, раздутия, уединения, Z -множеств, воротников, а также локальной и глобальной аксиом. Формулируются постулат Бествины и постулат о гомеоморфизме, доказательство которых переносится во вторую часть работы. Третья глава посвящена решению проблемы улучшения связности разбиений. С помощью специального вида перестроек – “join crowd” – доказываются теоремы о сильных перестройках: l_r - в l_{r+1} -разбиение и l - в $(l+1)_1$ -разбиение.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить участников семинара Е. В. Щепина и А. Н. Дранишникова в Математическом институте им. В. А. Стеклова, а также слушателей первых его докладов по топологии пространства Небелинга в Московском и Люблянском университетах. Много ценных и полезных предложений, способствовавших улучшению статьи, было высказано во время визитов автора в Университет Тсукуба (Япония) и Университет Саскатчеван (Канада). Автор благодарит К. Sakai и Е. D. Tymchatyn за интерес, проявленный к моим исследованиям. Автор высоко ценит работу, сделанную Y. Iwamoto. Им найден и исправлен ряд неточностей в работе [16]. Нынешним своим видом настоящая статья во многом обязана ему.

Трудно переоценить вклад Младена Бествины в развитие данной области исследования и, в частности, влияние его идей на настоящую статью. Автор признателен М. Бествине за плодотворные обсуждения, приведшие к более сильным результатам. И последнее, эта работа не появилась бы без того понимания и поддержки, которые автор ощущал все эти годы со стороны своих близких.

§ 2. Предварительные сведения и факты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются сепарабельными конечномерными метрическими (непрерывными). В частности, компактное пространство всегда метризуемо. Мы будем использовать для $A \subset X$ стандартные обозначения: для замыкания – $\text{Cl } A$; для внутренности – $\text{Int } A$; для границы – $\text{Bd } A$. Будем говорить, что вложение $A \subset B$ *строгое* и писать $A \Subset B$, если $\text{Cl } A \subset \text{Int } B$.

Множество всех открытых покрытий пространства X будем обозначать через $\text{cov } X$. *Окрестностью* множества $A \subset X$ относительно $\omega \in \text{cov } X$ будем называть множество $\bigcup \{U \mid U \in \omega, U \cap A \neq \emptyset\}$ и обозначать через $N(A; \omega)$. *Звездой* покрытия ω относительно покрытия ω' назовем покрытие $\text{St}(\omega; \omega') = \{N(U; \omega') \mid U \in \omega\}$. Многократные звезды $\text{St}(\dots(\text{St}(\omega_1; \omega_2); \omega_3); \dots)$ будем для краткости обозначать через $(\dots((\omega_1 \circ \omega_2) \circ \omega_3) \circ \dots \circ \omega_n)$ или $\omega_1 \circ \omega_2 \circ \dots \circ \omega_n$, а если ω_i равны между собой – то через $(\omega_1)^k$.

Телом системы ω множеств называется множество $\bigcup \omega \Rightarrow \bigcup \{U \mid U \in \omega\}$ (здесь и далее знак $\Rightarrow$ используется для введения новых объектов, стоящих слева от него).

Вписанность покрытия ω в ω_1 обозначается как $\omega \prec \omega_1$. Если $f, g: X \rightarrow Y$ суть отображения, а δ – любое семейство подмножеств Y , то δ -*близость* f и g (кратко $\text{dist}(f, g) \prec \delta$, или $f \overset{\delta}{\sim} g$) означает, что если $f(x) \neq g(x)$, то

$$\{f(x), g(x)\} \subset W \in \delta.$$

Для ограничения отображения f на подмножество $A \subset X$ принято обозначение $f|_A$, или просто $f|$, если ясно о каком множестве A идет речь. Поскольку f есть продолжение $g = f|_A$, то иногда это записывается как $f = \text{ext}(g)$.

Из [17; часть 6] следует, что язык покрытий и чисел в топологии метрических пространств, по существу, эквивалентен.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого покрытия $\omega \in \text{cov } X$ существует такая метрика $\rho(x, x')$, совместимая с топологией на X , что $\{N(x; 1) \mid x \in X\} \prec \omega$.*

Если $\delta > 0$ есть число, то δ -близость f и g записывается так же, как и в случае покрытий: $\text{dist}(f, g) < \delta$. Расстояние $d(x, y)$ между точками $x, y \in X$ метрического пространства (X, d) будем записывать в виде $\text{dist}(x, y)$, если при этом не возникает путаницы.

Введем ряд понятий, связанных с продолжением отображений. Пространство X называется *абсолютным окрестностным экстензором*, $X \in \text{ANE}$, если любое отображение $\varphi: A \rightarrow X$, определенное на замкнутом подмножестве $A \subset Z$ пространства Z и называемое *частичным отображением*, может быть продолжено на некоторую окрестность $U \subset Z$ множества A до отображения $\hat{\varphi}: U \rightarrow X$, $\hat{\varphi}|_A = \varphi$. Если всегда возможно продолжить φ на $U = Z$, то X называется *абсолютным экстензором*, $X \in \text{AE}$. Если любое частичное отображение $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} X$, $\dim Z \leq k$, может быть продолжено на все пространство Z [на некоторую окрестность A], то X называется *абсолютным [окрестностным] экстензором в размерности k* , $X \in \text{A}[N]\text{E}(k)$. По теореме Куратовского–Дугунджи свойство быть экстензором в конечной размерности связано со стягиваемостью и локальной стягиваемостью [18]:

$$X \in \text{A}[N]\text{E}(k) \quad \Leftrightarrow \quad X \in C^{k-1} \& \text{LC}^{k-1}[X \in \text{LC}^{k-1}].$$

Будем говорить, что гомотопия $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, соединяющая $f, g: X \rightarrow Y$,

- (i) есть ω -*гомотопия*, где $\omega \in \text{cov } Y$ (кратко $H[\text{rel } \omega]$), если выполняется $\{H(x, I) \mid x \in X\} \prec \omega$;
- (ii) *постоянна на $A \subset X$* (кратко $H[\text{rel } A]$), если $f|_A = g|_A = H_t|_A$ для всех $t \in I$.

Если $H: X \times I \rightarrow Y$ есть гомотопия, то формула

$$H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$$

определяет инверсную H гомотопию $H^{-1}: X \times I \rightarrow Y$. Если гомотопия $G: X \times I \rightarrow Y$ согласуется с H (т.е. $H_1 = G_0$), то

$$(H \cup G)(w, t) = H(w, 2t), \quad t \leq 1/2, \quad (H \cup G)(w, t) = G(w, 2t - 1), \quad t \geq 1/2,$$

определяет соединение гомотопий $H \cup G: W \times I \rightarrow Y$.

Из теоремы Борсука о продолжении гомотопии [19] несложно следует возможность перестройки гомотопий специального вида в гомотопии, постоянные на подмножествах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть (W, A) есть компактная полиэдральная пара, а гомотопии $E, F, G: W \times I \rightarrow Y \in \text{ANE}$ таковы, что F является ω -гомтопией, $F[\text{rel } A]$, а также $E_1 = F_0$, $F_1 = G_0$ и $G|_{A \times I} = E^{-1}|_{A \times I}$ (и, следовательно, $E_0|_A = G_1|_A$). Если E и G являются α -гомтопиями, то существует такая $\omega \circ \alpha$ -гомтопия $H: W \times I \rightarrow Y$, соединяющая E_0 и G_1 , что $H[\text{rel } A]$.

2.1. ANE-тесты. Пусть $\varepsilon, \delta \in \text{cov } Y$ и $\delta \prec \varepsilon$. Пара покрытий $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет ANE $_Y$ -тесту, если

- (1) для любого замкнутого подпространства $A \subset W$, а также для любых отображений $\hat{\alpha}: W \rightarrow Y$ и $\beta: A \rightarrow Y$ с условием $\text{dist}(\hat{\alpha}|_A, \beta) \prec \delta$ существует продолжение $\hat{\beta}: W \rightarrow Y$, $\hat{\beta}|_A = \beta$, с условием $\text{dist}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \prec \varepsilon$.

Если $Y \in \text{ANE}$, то для любого $\varepsilon \in \text{cov } Y$ существует такое $\delta \in \text{cov } Y$, что $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет ANE $_Y$ -тесту [18]. Должно быть совершенно ясно, что означает “пара чисел $0 < \delta < \varepsilon$ удовлетворяет ANE $_Y$ -тесту”.

Ясно, что свойство $\mathcal{Q}$ пар вписанных открытых покрытий Y удовлетворять ANE $_Y$ -тесту подчиняется следующим условиям:

- (а) если $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathcal{Q}$ и $\varepsilon \prec \varepsilon'$, то $(\delta \prec \varepsilon') \in \mathcal{Q}$;
- (б) если $\delta' \prec \delta$ и $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathcal{Q}$, то $(\delta' \prec \varepsilon) \in \mathcal{Q}$;
- (с) для любого покрытия ε существует пара $(\delta \prec \varepsilon) \in \mathcal{Q}$.

Следующий общий результат содержится в [20] (см. также [17; часть 6]).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть свойство $\mathcal{Q}$ пар вписанных открытых покрытий метрического пространства (Y, ρ) удовлетворяет (а)–(с), а $\omega \in \text{cov } Y$. Тогда существует согласованная с топологией на Y метрика $d \geq \rho$ такая, что

- (i) $\{N_d(y; 1)\}_{y \in Y} \prec \omega$, где $N_d(y; r)$ есть открытый шар радиуса r ;
- (ii) для любых $0 < 9a < b < 1$ имеем

$$(\{N_d(y; a) \mid y \in Y\} \prec \{N_d(y; b) \mid y \in Y\}) \in \mathcal{Q}.$$

Отсюда несложно вывести справедливость утверждения, гарантирующего существование большого количества пар чисел $0 < \delta < \varepsilon$, удовлетворяющих ANE $_Y$ -тесту.

ТЕОРЕМА 2.4. Для любых ANE-пространства (Y, ρ) и $\omega \in \text{cov } Y$ существует метрика $d \geq \rho$, совместимая с топологией на Y , такая, что выполнены свойства (i) и

- (iii) если $0 < 9\delta < \varepsilon < 1$, то пара чисел $\delta < \varepsilon$ удовлетворяет ANE $_Y$ -тесту.

2.2. Свойства UV^{k-1} -отображений. Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть плотное отображение⁵ из $\text{ANE}(k)$ -пространства X в Y . Скажем, что f является UV^{k-1} -отображением (кратко $f \in UV^{k-1}$), если для любой окрестности $\mathcal{O}(y)$, $y \in Y$, существует такая окрестность $\mathcal{O}_1(y)$, что вложение $f^{-1}(\mathcal{O}_1(y)) \hookrightarrow f^{-1}(\mathcal{O}(y))$ является $(k-1)$ -асферичным⁶. Ясно, что совершенное отображение

$$f: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$$

в том и только том случае, когда $f^{-1}(y) \in UV^{k-1}$ для любой $y \in Y$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Скажем, что f является ε - UV^{k-1} -отображением, если для любой k -мерной компактной полиэдральной пары (W, A) и для любой квадратной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{f} & Y \\ h \uparrow & & \uparrow g \\ A & \hookrightarrow & W \end{array} \quad (f_Y^X)$$

существует продолжение $\hat{h}: W \rightarrow X$ отображения h такое, что $\text{dist}(g, f \circ h) < \varepsilon$. Несложно установить связь между введенными понятиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если $Y \in \text{ANE}(k)$, то $f \in UV^{k-1}$ в том и только том случае, когда f является ε - UV^{k-1} -отображением для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательства последующих трех предложений о свойствах UV^{k-1} -отображений осуществляются с помощью предложения 2.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Если $f: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$, а Y полно, то $Y \in \text{ANE}(k)$. Если дополнительно $X \in \text{AE}(k)$, то $Y \in \text{AE}(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z \in UV^{k-1}$, а Y и Z являются полными пространствами, то $g \circ f: X \rightarrow Z \in UV^{k-1}$.

Приведем достаточные условия того, чтобы почти гомеоморфизм (т.е. отображение, сколь угодно близко аппроксимирующееся гомеоморфизмом) был UV^{k-1} -отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть последовательность $\{f_n: X \rightarrow Y\}_{n \geq 1} \subset UV^{k-1}$ -отображений равномерно сходится к отображению $f: X \rightarrow Y$, а Y является полным метрическим пространством. Тогда $f \in UV^{k-1}$.

2.3. r -эквивалентность. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется r -эквивалентностью, $r \geq 1$, если оно индуцирует биекцию компонент линейной связности X и Y и если для любой $x \in X$ индуцированный гомоморфизм

$$f_*: \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$$

гомотопических групп является изоморфизмом при $0 < q < r$ и эпиморфизмом при $q = r$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется 0-эквивалентностью, если оно индуцирует эпиморфизм компонент линейной связности X и Y . Переформулируем это понятия в терминах продолжений отображений и гомотопий.

⁵То есть образ $f(X)$ всюду плотен в Y .

⁶Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется i -асферичным, если для любой $x \in X$ индуцированный гомоморфизм $f_*: \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$ гомотопических групп является нулевым при $0 < q < i$.

ТЕОРЕМА 2.9. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ является r -эквивалентностью тогда и только тогда, когда для любой компактной полиэдральной пары (W, A) , $\dim W \leq r$, и для любой коммутативной диаграммы (f_Y^X) существует отображение $\hat{h}: W \rightarrow X$, являющееся продолжением h , $\hat{h}|_A = h$, для которого $f \circ \hat{h}$ и g гомотопны, $f \circ \hat{h} \stackrel{H}{\simeq} g$, причем гомотопия H постоянна на A , $H[\text{rel } A]$.*

Доказательство теоремы изложено в [21; гл. 7, § 6, теорема 22]. Если дополнительно потребовать от X и Y хороших связностных свойств, то вместо полиэдральной пары станет возможным брать произвольную r -мерную пару. Этот факт мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 2.10. *Если f есть r -эквивалентность, а*

$$X \in \text{ANE}(r), \quad Y \in \text{ANE}(r+1),$$

то для любой пары (W, A) , $\dim W \leq r$, а также для любых отображений $h: A \rightarrow X$, $g: W \rightarrow Y$, $f \circ h = g|_A$, существует отображение $\hat{h}: W \rightarrow X$ такое, что $\hat{h}|_A = h$ и $f \circ \hat{h} \simeq g[\text{rel } A]$.

Изучим достаточные условия для r -эквивалентности вложений.

ТЕОРЕМА 2.11. *Если X есть объединение $X_0 \cup X_1$ замкнутых подмножеств*

$$X_i \subset X, \quad X_i \in \text{ANE}(r+1),$$

$X_0 \cap X_1 \in \text{ANE}(r)$ и вложение $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_1$ является r -эквивалентностью, то вложение $i: X_0 \hookrightarrow X$ также есть r -эквивалентность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: A \rightarrow X_0$ и $g: W \rightarrow X$, $\dim W \leq r$, взяты из диаграммы $(i_X^{X_0})$. Рассмотрим компакты $W_i = g^{-1}(X_i)$ и $W_{01} = g^{-1}(X_0 \cap X_1)$. Отметим, что $A \subset W_0$. Так как вложение $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_1$ есть r -эквивалентность, то в силу теоремы 2.10 для отображений

$$g|_{W_{01}}: W_{01} \rightarrow X_0 \cap X_1 \quad \text{и} \quad g|_{W_1}: W_1 \rightarrow X_1$$

существует отображение $\varphi: W_1 \rightarrow X_0 \cap X_1$ такое, что $\varphi|_{W_{01}} = g|_{W_{01}}$ и $g|_{W_1} \stackrel{G}{\simeq} \varphi$, где $G[\text{rel } W_{01}]$.

Искомое отображение $\hat{h}: W \rightarrow X_0$ задается формулой

$$\hat{h}|_{W_0} = g|_{W_0}, \quad \hat{h}|_{W_1} = \varphi.$$

Легко проверить, что гомотопия $H: W \times I \rightarrow X$, заданная формулой $H_t|_{W_0} = g$, $H|_{W_1 \times I} = G$, соединяет g и $\hat{h}$ и удовлетворяет условию $H[\text{rel } A]$.

Пусть X есть объединение $X_0 \cup X_1$ замкнутых подмножеств $X_i \subset X$ такое, что $X_i \in \text{ANE}(r+1)$, $X_0 \cap X_1 \in \text{ANE}(r)$. Из [22] следует, что $X \in \text{ANE}(r+1)$. Легким следствием теоремы 2.11 является уточнение этого факта.

ТЕОРЕМА 2.12. *Если $X_0 \in C^r$, а вложение $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_1$ есть r -эквивалентность, то $X \in C^r$ (и, следовательно, $X \in \text{AE}(r+1)$). В частности, если $X_0 \in \text{AE}(r+1)$, $X_1 \in \text{AE}(r+1)$, а $X_0 \cap X_1 \in \text{AE}(r)$, то $X \in \text{AE}(r+1)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Пусть $\sigma \in \text{cov } B$. Вложение $e: C \hookrightarrow B$ называется

- (1) *r -ретракцией относительно σ* , если для любой полиэдральной пары (W, A) , $\dim W \leq r$, и для любого отображения $\varphi: W \rightarrow B$, $\varphi(A) \subset C$, существует отображение $\tilde{\varphi}: W \rightarrow C$ такое, что $\tilde{\varphi}|_A = \varphi|_A$ и $\text{dist}(\varphi, \tilde{\varphi}) \prec \sigma$;
- (2) *деформационной r -ретракцией относительно σ* , если для любой полиэдральной пары (W, A) , $\dim W \leq r$, и для любого отображения $\varphi: W \rightarrow B$, $\varphi(A) \subset C$, существует отображение $\tilde{\varphi}: W \rightarrow C$ такое, что $\tilde{\varphi}|_A = \varphi|_A$ и $\varphi \stackrel{F}{\simeq} \tilde{\varphi}$, где $F[\text{rel } \sigma]$ и $F[\text{rel } A]$.

Если $\sigma \in \text{cov } B$ одноэлементно, то будем говорить просто о *r -ретракции* и о *деформационной r -ретракции* соответственно.

Отметим, что любая r -ретракция индуцирует мономорфизм гомотопических групп π_i , $i < r$. Из теоремы 2.9 следует, что классы деформационных r -ретракций и r -эквивалентностей совпадают. Дополним эту информацию полезным в дальнейшем результатом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Вложение

$$e: C \hookrightarrow B$$

является деформационной $(r - 1)$ -ретракцией и r -ретракцией тогда и только тогда, когда оно индуцирует биекцию компонент линейной связности и для любого $x \in C$ гомоморфизм $e_*: \pi_q(C, x) \rightarrow \pi_q(B, x)$ гомотопических групп, индуцированный e , является изоморфизмом при $0 < q < r$.

Глава 1. Разбиения и их соответствия

§ 3. Разбиения пространств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Покрытие $\mathcal{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства X каноническими замкнутыми множествами назовем *предразбиением*, если $\mathcal{P}$ есть локально конечное покрытие и имеет непересекающиеся ядра элементов: $\text{Int } p_\alpha \cap \text{Int } p_{\alpha'} = \emptyset$ для всех $\alpha \neq \alpha'$.

В терминологии [23] и [24] это понятие называлось разбиением. Среди локально конечных покрытий предразбиения обладают особенной наглядностью, их изучение восходит к [1] и [11]. Вводимое ниже понятие известно в литературе как *брикетное разбиение*, см. [14], [15]. Однако в настоящей работе только такие покрытия и рассматриваются, поэтому мы сочли возможным упростить терминологию и называть их просто разбиениями. В дальнейшем через $p_{A'}$, где A' есть индексное подмножество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\} \subset A$, будем обозначать пересечение $p_{\alpha_1} \cap \dots \cap p_{\alpha_t}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Предразбиение $\mathcal{P}$ пространства X назовем *разбиением*, если $\dim p_{A'} = \dim X - |A'| + 1$ для любого $A' \subset A$ такого, что $p_{A'} \neq \emptyset$ ($|A'| = t$ есть число элементов A').

Определение 3.2 гарантирует убывание размерности непустых пересечений элементов разбиения $\mathcal{P}$ “правильным” образом. Отметим, что по теореме Менгера [25] в X всегда существует измельчающаяся последовательность $\mathcal{P}_n$ подразбиений с менее ограничительным условием $\dim p_{A'} \leq \dim X - |A'| + 1$ для любого $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \emptyset$. Ясно, что если $\mathcal{P}_0$ есть подсистема $\mathcal{P}$, то $\mathcal{P}_0$ является разбиением своего тела $\cup \mathcal{P}_0$.

Всюду в дальнейшем нас будут интересовать только разбиения, пересечения элементов которых *размерностно полноценны*, т.е. удовлетворяют следующему условию:

(а) если $F \subset p_{A'}$ замкнуто и $\dim F < \dim p_{A'}$, то $\text{Cl}(p_{A'} \setminus F) = p_{A'}$.

Пусть L есть триангуляция PL-многообразия M , $M = |L|$. Через $(\beta^r L)^{(s)}$ обозначим семейство симплексов размерности $\leq s$ r -го барицентрического подразделения $\beta^r L$. Примером разбиения M служит разложение $\mathcal{P}$ на ручки, ассоциированное с βL : $\mathcal{P} = \{\text{St}(v, \beta^2 L) \mid v \in (\beta L)^{(0)}\}$, где $\text{St}(v, L)$ есть звезда $\bigcup \{\Delta \in L \mid v \in \Delta\}$ вершины v .

Важным понятием, позволяющим во многих ситуациях проводить рассуждения по индукции, является остов разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Остовом $\mathcal{P}^{(s)}$ размерности $0 \leq s \leq \dim X$ разбиения $\mathcal{P}$ называют множество $\bigcup \{p_{A'} \mid \dim p_{A'} = s\} = \bigcup \{p_{A'} \mid |A'| = \dim X + 1 - s\}$.*

Через $\text{ord}_x \omega$ обозначим *кратность покрытия ω в точке x* , т.е. число элементов ω , содержащих x . Ясно, что по-другому остов $\mathcal{P}^{(s)}$ можно определить как $\{x \in X \mid \text{ord}_x \mathcal{P} \geq (\dim X + 1) - s\}$. Отметим также, что остов $\mathcal{P}^{(s)}$ замкнут в X и $\dim \mathcal{P}^{(s)} = s$ (в силу локальной конечности замкнутого покрытия $\mathcal{P}$); $\mathcal{P}^{(0)}$ есть дискретное объединение 0-мерных множеств $\bigsqcup \{p_{A'} : |A'| = \dim X + 1\}$; в пространстве X остовы $\mathcal{P}^{(s)}$ задают замкнутую фильтрацию $X = \mathcal{P}^{(\dim X)} \supset \mathcal{P}^{(\dim X - 1)} \supset \dots \supset \mathcal{P}^{(0)} \supset \mathcal{P}^{(-1)} = \emptyset$. В работе [10] вместо остова $\mathcal{P}^{(s)}$ использовалось другое понятие – *страт* $S_t = \{x \in X \mid \text{ord}_x \mathcal{P} \geq t + 1\}$ разбиения $\mathcal{P}$ *коразмерности* $(\dim X - t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Ограничением $\mathcal{P}|_Y$ разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ на подмножество $Y \subset X$ называется семейство $\{p_\alpha \cap Y \mid p_\alpha \in \mathcal{P} \text{ и } p_\alpha \cap Y \neq \emptyset\}$.*

Ограничение разбиения, как правило, не является разбиением, однако в некоторых частных случаях мы можем рассчитывать на исключение. Если $\mathcal{P}$ есть разбиение PL-многообразия X на ручки, ассоциированное с триангуляцией L , а Y есть подмногообразие относительно L , то $\mathcal{P}|_Y$ совпадает с разбиением Y на ручки, ассоциированным с $L|_Y$. Продолжим изучение операции ограничения разбиений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Пусть $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ есть разбиение X и $p_{A'} \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{P}' \Leftarrow \mathcal{P} \setminus \{p_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ есть разбиение $X \setminus \text{Int}(\bigcup \{p_\alpha \mid \alpha \in A'\})$, а $\mathcal{P}'|_{\mathcal{B}p_{A'}}$ есть разбиение $\mathcal{B}p_{A'}$.⁷*

Доказательство предложения 3.5 легко сводится к следующим трем леммам.

ЛЕММА 3.6. *Множество $p_{A'} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$ плотно в $p_{A'}$.*

⁷Здесь и далее во всей работе под $\mathcal{B}p_{A'}$ понимается относительная граница, т.е. граница $p_{A'}$ в остове $\mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.6. Пусть $s = \dim X - |A'|$. Так как $\dim p_{A'} = s + 1$ и $\dim \mathcal{P}^{(s)} = s$, то

$$\dim(p_{A'} \cap \mathcal{P}^{(s)}) \leq \dim \mathcal{P}^{(s)} = s$$

и, стало быть,

$$\dim(p_{A'} \cap \mathcal{P}^{(s)}) < \dim p_{A'}.$$

В силу размерной полноценности $\mathcal{P}$ замкнутое подмножество $p_{A'} \cap \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$ нигде не плотно в $p_{A'}$ и поэтому $p_{A'} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)} = p_{A'} \setminus (p_{A'} \cap \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)})$ плотно в $p_{A'}$.

ЛЕММА 3.7. Множество $\{x \in p_{A'} \mid \text{ord}_x \mathcal{P} > |A'|\}$ совпадает с $\mathcal{B} \partial p_{A'}$. Более того, $\mathcal{B} \partial p_{A'} = \bigcup \{p \cap p_{A'} \mid p \in \mathcal{P}, p \neq p_\alpha \text{ для всех } \alpha \in A'\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.7. Для любой точки из $p_{A'}$ возможны лишь рассмотренные ниже два случая (α) и (β). Отсюда легко будет следовать доказательство утверждения.

(α) $x \in p \cap p_{A'} \subseteq \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$, где $p \notin \{p_i\}$: по лемме 3.6 множество $p_{A''} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$ всюду плотно в $p_{A''}$, где $A'' = \{p\} \cup \{p_2, \dots, p_t\}$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\} \subseteq p_{A''} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$, сходящаяся к x . Покажем, что $\{x_n\} \cap p_{A'} = \emptyset$ и, стало быть, $x \in \mathcal{B} \partial p_{A'}$. Если бы нашлась точка $y \in p_{A''} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)}$, которая лежит в $p_{A'}$, то $y \in p \cap p_{A'}$, что противоречило бы тому, что $p_{A''} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)} \subseteq \mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$ состоит из тех и только тех точек, которые принадлежат только $p, p_2, p_3, \dots, p_t$. Поэтому $p_{A''} \setminus \mathcal{P}^{(\dim X - |A'|)} \subseteq \mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \setminus p_{A'}$ и, следовательно, $\{x_n\} \subseteq \mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \setminus p_{A'}$, а $x \in \mathcal{B} \partial p_{A'}$.

(β) x принадлежит ровно t элементам $p_1, p_2, \dots, p_t$: тогда найдется окрестность $O(x) \subset X$ точки x такая, что $O(x) \cap p = \emptyset$ для всех $p \notin \{p_i\}$. Следовательно, $O(x) \cap \mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)} \subseteq p_{A'}$ и $x \notin \mathcal{B} \partial p_{A'}$.

Из лемм 3.6 и 3.7 несложно вывести справедливость следующего факта.

ЛЕММА 3.8. Множество $p_{A'}$ канонически замкнуто в $\mathcal{P}^{(\dim X + 1 - |A'|)}$.

Объединяя некоторые элементы разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства X , получаем новое разбиение $\mathcal{Q} = \{q_\beta \mid \beta \in B\}$, называемое укрупнением $\mathcal{P}$. Ясно, что $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ и $q_\beta = \bigcup \{p_\alpha \mid p_\alpha \subset q_\beta\}$.

§ 4. Нервы разбиений и канонические отображения

Нервом разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства X будем называть полиэдр $\mathcal{N}(\mathcal{P})$, вершины которого $\langle p_\alpha \rangle$ находятся во взаимно однозначном соответствии с индексным множеством A , а $\Delta = \langle p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_s} \rangle$ есть s -мерный симплекс $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ с вершинами $\langle p_{\alpha_i} \rangle$ в том и только том случае, когда $\bigcap p_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Тем самым, любая точка $w \in \text{rint } \Delta \subset \mathcal{N}(\mathcal{P})$ (здесь $\text{rint } \Delta$ есть относительная внутренность симплекса Δ) может быть записана в виде $w = \sum \varphi_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle$, где неотрицательные коэффициенты φ_α таковы, что $\sum \varphi_\alpha = 1$ и $\varphi_\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $\langle p_\alpha \rangle$ есть вершина симплекса Δ . Всюду далее нерв $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ рассматривается в топологии, порожденной метрикой

$d(\sum \varphi_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle, \sum \varphi'_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle) = \sum |\varphi_\alpha - \varphi'_\alpha|$. Открытой звездой $\mathring{\text{St}}\langle p_{\alpha_0} \rangle$ вершины $\langle p_{\alpha_0} \rangle$ назовем множество $\{\sum \varphi_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle \in \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle \mid \varphi_{\alpha_0} > 0\}$. Ясно, что $\mathring{\text{St}}\langle p_{\alpha_0} \rangle$ совпадает с внутренностью звезды $\text{St}\langle p_{\alpha_0} \rangle \Leftrightarrow \{\sum \varphi_\alpha \cdot \langle p_\alpha \rangle \mid \varphi_\alpha = 0, \text{ если } p_\alpha \cap p_{\alpha_0} = \emptyset\} \subset \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$.

Известно [19], что метрический нерв $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle \in \text{ANE}$. Поскольку открытая звезда $\mathring{\text{St}}\langle p_{\alpha_0} \rangle$ стягиваема, то $\mathring{\text{St}}\langle p_{\alpha_0} \rangle \in \text{AE}$. Связь между разбиением $\mathcal{P}$ и его нервом осуществляется с помощью канонического отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Отображение $v: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$ в нерв $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$ разбиения $\mathcal{P}$ называется *каноническим*, если $v(p)$ содержится в $\mathring{\text{St}}\langle p \rangle$ для любого элемента $p \in \mathcal{P}$.

Из того, что любое локально конечное замкнутое покрытие X допускает раздутие [26; 7.1.G], легко следует существование канонического отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для любого разбиения $\mathcal{P}$ пространства X существует каноническое отображение $v: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$ в нерв $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$.

Геометрический смысл нерва разбиения $\mathcal{P}$ состоит в аппроксимации пространства X полиэдром, “лежащим” достаточно близко от него (мера близости оценивается $\mathcal{P}$). Тогда каноническое отображение v представляет собой малый сдвиг точек X в этот полиэдр. В дальнейшем мы будем нуждаться в соотношениях близости между X и $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$, устанавливаемых v . Очевидно, что

- (i) $v^{-1}v(A) \subset N(A; \mathcal{P})$, если $A \subset X$ есть тело подсемейства $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, однако
- (ii) $v^{-1}v(A) \subset N(A; \mathcal{P} \circ \mathcal{P})$, если $A \subset X$ есть произвольное множество.

Для более тщательного изучения образов множеств при каноническом отображении необходимо ввести специальные подполиэдры $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$. Обозначим через $\mathcal{N}_A$ нерв разбиения $\mathcal{P}_A \Leftrightarrow \{p \in \mathcal{P} \mid p \cap A \neq \emptyset\}$ окрестности $N(A; \mathcal{P})$. Если $\sigma \in \text{cov } X$, то через $\mathcal{N}_\sigma$ обозначим замкнутое полиэдральное покрытие $\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$, состоящее из $\mathcal{N}_U$, $U \in \sigma$. Отметим, что для любого $p \in \mathcal{P}$ полиэдр $\mathcal{N}_p$ совпадает со звездой $\text{St}\langle p \rangle \subset \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$ и, следовательно, $\mathcal{N}_\mathcal{P} \prec L \circ L$, где L есть естественная триангуляция нерва $\mathcal{N}_\mathcal{P}$. В качестве очевидного соотношения на образы множеств отметим вложение

- (iii) $v(A) \subset N(\mathcal{N}_A; L)$ для любого $A \subset X$.

Менее очевидно другое вложение, показывающее степень близости $v(A)$ и $\mathcal{N}_A$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $A \subset X$. Тогда $\mathcal{N}_A \subset N(vA; \mathcal{N}_\mathcal{P})$.

Приведем еще ряд необходимых соотношений между образами и прообразами канонического отображения. Доказательство оставляем читателю.

ЛЕММА 4.4. Пусть $A, B \subset X$, $\sigma \in \text{cov } X$. Тогда

- (α) если $v(A) \subset \mathcal{N}_U$, $U \in \sigma$, то $A \subset N(U; \mathcal{P})$;
- (β) если $v(B) \subset N(v(A); \mathcal{N}_\sigma)$, то $B \subset N(A; \mathcal{P}^2 \circ \sigma \circ \mathcal{P})$;
- (γ) если $\sigma, \theta \in \text{cov } X$, то $\mathcal{N}_\sigma \circ \mathcal{N}_\theta \prec \mathcal{N}_{\sigma \circ \theta}$.

§ 5. Ядра Небелинга конструктивных многообразий

Пусть фиксированы $\kappa \geq 0$ и PL -многообразие M^m размерности $\geq 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L . Последовательность $\mathcal{L} = \{L, \delta L, \dots, \delta^r L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции L назовем *нуль-последовательностью*, если $\text{mesh } \delta^r L \rightarrow 0$, где $\text{mesh } \delta^r L \equiv \sup\{\text{diam } \Delta \mid \Delta \in \delta^r L\}$. Примером может служить последовательность барицентрических подразделений.

Для построения теории пространств Небелинга следует расширить класс триангуляций с тем, чтобы все открытые подмножества являлись PL -многообразиями относительно них. Назовем PL -полиэдр (многообразие) $P \subset M^m$ $\mathcal{L}$ -конструктивным, если его можно представить в виде тела локально конечного в P семейства $\mathcal{L}$ симплексов, лежащих в $\bigcup \{\delta^r L \mid 0 \leq r < \infty\}$. Если Q и P являются $\mathcal{L}$ -конструктивными многообразиями, а Q является PL -подмногообразием P , то будем говорить, что Q является $\mathcal{L}$ -конструктивным подмногообразием P . Ясно, что любое открытое подмножество $\mathcal{L}$ -конструктивного многообразия является $\mathcal{L}$ -конструктивным подмногообразием.

Представление $\mathcal{L}$ -конструктивного полиэдра в виде тела локально конечного семейства симплексов возможно многими способами. Выделим среди них наиболее экономные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $P \subset M$ есть полиэдр, а $\mathcal{L} \subset \bigcup \{\delta^r L \mid 0 \leq r < \infty\}$ есть локально конечное (в P) семейство симплексов. $\mathcal{L}$ называется *смешанной триангуляцией P относительно $\mathcal{L}$* , если $P = \bigsqcup \{\text{rint } \Delta \mid \Delta \in \mathcal{L}\}$.

Название введенного понятия отражает тот факт, что в $\mathcal{L}$ могут встречаться симплексы разных подразделений. Покажем, как локально конечное семейство симплексов $\mathcal{L}'$, лежащее в $\bigcup \delta^r L$ и порождающее P (т.е. $P = |\mathcal{L}'|$), трансформировать в смешанную триангуляцию. Можно без потери общности считать $\mathcal{L}'$ замкнутым относительно перехода к собственным граням. Тогда каждой точке $x \in P$ возможно сопоставить симплекс $\Delta_x \in \mathcal{L}'$ с $x \in \text{rint } \Delta_x$, принадлежащий подразделению $\delta^{n_x} L$ триангуляции L с наименьшим номером n_x . Легко проверить, что $\mathcal{L} \equiv \{\Delta_x \mid x \in P\} \subset \mathcal{L}'$ есть смешанная триангуляция P . Приведенная конструкция используется при построении смешанной триангуляции, обслуживающей целое семейство $\mathcal{L}$ -конструктивных подполиэдров.

ЛЕММА 5.2. Пусть P есть $\mathcal{L}$ -конструктивный полиэдр. Тогда для любого локально конечного семейства $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}$ $\mathcal{L}$ -конструктивных подполиэдров P и любого $\{W_\gamma\} \in \text{cov } P$ существует такая смешанная триангуляция $\mathcal{L} \prec \{W_\gamma\}$ полиэдра P относительно $\mathcal{L}$, что $\mathcal{L}|_{P_\alpha}$ есть смешанная триангуляция $P_\alpha \in \mathcal{P}$ относительно $\mathcal{L}$ для всех α .

Следующее свойство смешанных триангуляций приведем без доказательства:

- (а) если $\mathcal{L}$ есть смешанная триангуляция $\mathcal{L}$ -конструктивного полиэдра P , то для любого $\Delta \in \mathcal{L} \cup \{\text{rint } \sigma \mid \sigma \in \mathcal{L} \text{ и } \text{rint } \Delta \cap \sigma \neq \emptyset\}$ есть окрестность $\text{rint } \Delta$ в $P = |\mathcal{L}|$.

Если $P \subset M^m$ есть $\mathcal{L}$ -конструктивное многообразие и $0 \leq \dim M - \dim P \leq \kappa$, то $0 \leq k = \kappa - (\dim M - \dim P) \leq \kappa$. Назовем $P \setminus \mathfrak{S}_{\mathcal{L}}$ k -ядром Небелинга $\nu_{\mathcal{L}}^k P$

многообразия P , где $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}} = \bigcup \{ |(\delta^r L)^{(m-\kappa-1)}| \mid 0 \leq r < \infty \}$ есть κ -псевдо-граница M^m относительно $\mathfrak{L}$. Скажем, что P является $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивным, если

(b) $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ есть замкнутое подмножество в $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M = M \setminus \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$.

Легко видеть, что не каждое $\mathfrak{L}$ -конструктивное многообразие нужной размерности является $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивным. Из (b) имеем $P \cap \nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M = \text{Cl}_M P \cap \nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M$ и поэтому $\text{Cl}_M P \setminus P \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$, но, вообще говоря, $\text{Cl}_M P$ не является многообразием.

Будем называть PL -многообразие P $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным, если оно является $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивным для соответствующего $k = \kappa - (\dim M - \dim P)$. Ясно, что геометрическая граница ∂P является $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным подмногообразием. Если Q и P являются $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивными многообразиями, а Q является PL -подмногообразием P , то будем говорить, что Q является $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным подмногообразием P . Легко видеть, что $\nu_{\mathfrak{L}}^s(Q) = Q \cap \nu_{\mathfrak{L}}^s(P)$ для любого $\nu_{\mathfrak{L}}^s$ -конструктивного подмногообразия $Q \subset P$.

Ядра Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивных PL -многообразий P , $0 \leq k \leq \kappa$, будем называть $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивными множествами.

§ 6. Аксиомы конструктивных множеств

Пусть фиксированы $\kappa \geq 0$, PL -многообразие M^m размерности $\geq 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L , и нуль-последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений L . Пусть X есть ядро Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathcal{C}_X^s$, $0 \leq s \leq k = \dim X$, обозначим совокупность всех s -ядер Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^s$ -конструктивных подмногообразий $Q \subset P$. В третьей части работы будет показано, что совокупность $\mathcal{C}_X = \{\mathcal{C}_X^s \mid 0 \leq s \leq k\}$ зависит только от X , но не от способа представления X в виде $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$, а также удовлетворяет свойствам $(\mathcal{C})_1$ – $(\mathcal{C})_{10}$, которые мы будем называть аксиомами конструктивных множеств.

- $(\mathcal{C})_1$ Аксиома базы: $X \in \mathcal{C}_X$ и $\mathcal{C}_X^{\dim X} = \{F \in \mathcal{C}_X \mid \dim F = \dim X\}$ образует замкнутую базу топологии пространства X .
- $(\mathcal{C})_2$ Аксиома двухэлементных разбиений: если $F \in \mathcal{C}_X^{\dim X}$, $F \neq X$, то $\{F, X \setminus \text{Int } F\}$ является $\mathcal{C}_X$ -разбиением X .⁸
- $(\mathcal{C})_3$ Аксиома образующих гомотопических групп: $X \in \text{ANE}(\dim X)$ и группа $\pi_i(X)$, $i < k$, имеет счетное число образующих.⁹
- $(\mathcal{C})_4$ Аксиома дискретности: $\bigcup \{N_{\alpha} \mid \alpha \in A\} \in \mathcal{C}_X^{\dim X}$ для дискретного семейства $\{N_{\alpha} \in \mathcal{C}_X^{\dim X}\}_{\alpha \in A}$.
- $(\mathcal{C})_5$ Аксиома укрупнения: любое укрупнение $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{P}$ пространства X есть снова $\mathcal{C}_X$ -разбиение.
- $(\mathcal{C})_6$ Аксиома аддитивности: если $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_X^s$, $F_0 = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{C}_X^{s-1}$, а $F_0 \subset_Z F_1$ и $F_0 \subset_Z F_2$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}_X^s$.¹⁰

⁸То есть разбиением, все элементы которого и их пересечения принадлежат $\mathcal{C}_X$.

⁹Отметим, что $X \notin \text{ANE}(\dim X + 1)$ и имеет бедный запас $\dim X$ -гомотопий.

¹⁰Замкнутое множество F пространства X называется Z -множеством (кратко, $F \subset_Z X$), если для любого $\varepsilon \in \text{cov } X$ существует отображение $\varphi: X \rightarrow X$, ε -близкое к Id_X .

- ($\mathcal{C}$)₇ Аксиома Z -множеств в разбиениях: для любого $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ пространства X и для любого $p_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$, граница $\mathcal{B}dp_{A'} \in \mathcal{C}_X$ и $\mathcal{B}dp_{A'} \subset_Z p_{A'}$.
- ($\mathcal{C}$)₈ Аксиома универсальности: X является сильно $\dim X$ -универсальным польским пространством.
- ($\mathcal{C}$)₉ Аксиома счетной порожденности: существует такой счетный набор $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X$, что для любого $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{P}$ пространства X существует $\mathcal{C}_X$ -разбиение $\mathcal{P}$ пространства X , вписанное в $\mathcal{P}$.
- ($\mathcal{C}$)₁₀ Аксиома наследственности: для любого $E \in \mathcal{C}_X$ существуют классы $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{C}_X$ и $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{C}_X$, которые удовлетворяют аксиомам ($\mathcal{C}$)₁–($\mathcal{C}$)₉, если заменить в них X на E .

Из ($\mathcal{C}$)₂ следует, что любое $F \in \mathcal{C}_X^{\dim X}$, $F \neq X$, является канонически замкнутым в X , а также $X \setminus \text{Int } F \in \mathcal{C}_X^{\dim X}$ и $\text{Bd } F \in \mathcal{C}_X^{\dim X-1}$; из ($\mathcal{C}$)₂ и ($\mathcal{C}$)₇ следует, что $\text{Bd } F \subset_Z F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. В дальнейшем любое пространство X с семействами множеств $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}_X$, удовлетворяющих аксиомам ($\mathcal{C}$)₁–($\mathcal{C}$)₁₀, будем называть *абстрактным $\nu^{\dim X}$ -конструктивным пространством*, элементы семейства $\mathcal{C}_X$ – *абстрактными ν -конструктивными множествами*, а само семейство $\mathcal{C}_X$ – $\mathcal{C}$ -структурой на X .

Получим ряд следствий из приведенных аксиом.

- (а) Абстрактное ν^0 -конструктивное пространство X допускает счетное $\mathcal{C}_X$ -разбиение.

В самом деле, в силу ($\mathcal{C}$)₈ и ($\mathcal{C}$)₁ существует дискретное счетное семейство $\{E_i \in \mathcal{C}_X^0 \mid i \geq 1\}$. Из ($\mathcal{C}$)₄ следует, что $\bigcup E_i \in \mathcal{C}_X^0$, а из ($\mathcal{C}$)₂ имеем $E_0 = X \setminus \bigcup \{E_i \mid i \geq 1\} \in \mathcal{C}_X^0$. Легко видеть, что $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ есть искомое разбиение X .

Из аксиом ($\mathcal{C}$)₃ и ($\mathcal{C}$)₈, а также [27] следует, что

- (b) любой компакт $K \subset E$, $E \in \mathcal{C}_X$, является Z -множеством в E .

Отсюда несложно вывести свойство совместной дизъюнктности:

- (c) пусть E и $F \in \mathcal{C}_X$, а компакты A и B таковы, что $\dim A \leq \dim E$ и $\dim B \leq \dim F$; тогда любые отображения $\varphi: A \rightarrow E$ и $\psi: B \rightarrow F$ сколь угодно близко аппроксимируются отображениями $\varphi': A \rightarrow E$ и $\psi': B \rightarrow F$ с дизъюнктными образами.

Из аксиом ($\mathcal{C}$)₁ и ($\mathcal{C}$)₁₀ следует, что семейство $\mathcal{C}_X$ размерностно полноценно. Тем самым для $\mathcal{C}_X$ -разбиений справедливо предложение 3.5. В дальнейшем будем $\mathcal{C}_X$ -разбиения абстрактных $\nu^{\dim X}$ -конструктивных пространств X называть *удобными разбиениями* или просто *разбиениями*, если при этом не будет возникать недоразумений.

Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение X . Если $B \subset_Z X$, то $B \cap p_{A'}$ не является, вообще говоря, Z -множеством в $p_{A'}$ для $A' \subset A$ с $|A'| \geq 2$. Однако обратный факт имеет место.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть разбиение X . Если $B \cap p_{A'} \subset_Z p_{A'}$ для всех $A' \subset A$, то $B \subset_Z X$.

Доказательство леммы легко сводится к конечным $\mathcal{P}$. Далее проводится индукция по количеству элементов в $\mathcal{P}$. Наши рассуждения основываются на следующем простом факте.

ЛЕММА 6.3. Пусть $X \in \text{ANE}(k)$, а $X_i \subset X$, $i = 1, 2$, суть такие замкнутые $\text{ANE}(k)$ -подпространства, что $X_1 \cup X_2 = X$ и $X_0 \rightleftharpoons X_1 \cap X_2 \in \text{ANE}(k-1)$. Если $B \subset X$ есть замкнутое подмножество такое, что $B \cap X_i \subset_Z X_i$ для $i = 0, 1, 2$, то $B \subset_Z X$.

Счетное дизъюнктивное объединение $D = \bigsqcup F_i$ компактных подмножеств F_i пространства X называется

- (1) Z -детектором в X , если любое замкнутое подмножество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми F_i , является Z -множеством;
- (2) универсальным Z -детектором D в X , если $D \cap F$ является Z -детектором в F для любого $F \in \mathcal{C}_X$.

Доказательство следующего факта в основном следует рассуждениям из [10; 4.3.1, шаг 2], если воспользоваться свойством (с) совместной дизъюнктивности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Существует универсальный Z -детектор D относительно $\mathcal{C}_X$, т.е. $D \cap F$ является Z -детектором в F для любого $F \in \mathcal{C}_X$.

Покажем, что D из предложения 6.4 является универсальным Z -детектором. В самом деле, пусть замкнутое множество $B \subset F \in \mathcal{C}_X$ не пересекается с D . В силу (с)₉ существует разбиение $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ множества F , пересечения элементов которого принадлежат $\mathcal{C}_X$. Так как D является универсальным Z -детектором относительно $\mathcal{C}_X$, то $B \cap p_{A'} \subset_Z p_{A'}$. Далее следует воспользоваться леммой 6.2: $B \subset_Z F$.

§ 7. Соответствия разбиений

В этом параграфе пространства X и $\widehat{X}$ являются абстрактными ν^k -конструктивными пространствами, $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\widehat{\mathcal{P}} = \{\widehat{p}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — их разбиениями.

Разбиения являются дискретным вариантом понятия топологического пространства. Теперь следует позаботиться и о введении дискретного аналога непрерывных отображений пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Отображение $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ элементов разбиений $\mathcal{P}$ и $\widehat{\mathcal{P}}$ (рассматриваемых как дискретные множества) называется *соответствием разбиений*, если $p_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$, всегда влечет $Tr_{A'} \rightleftharpoons \bigcap \{T(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Отображение $\alpha: X \rightarrow \widehat{X}$ назовем *сильным аккомпанементом* соответствия $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$, если $\alpha(p) \subseteq T(p)$ для любого $p \in \mathcal{P}$.

Ясно, что T является дискретизацией отображения α . Биективное отображение разбиений, являющееся соответствием в обе стороны, служит дискретным вариантом гомеоморфизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Биективное отображение $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ называется *трансформацией разбиений*, если $p_{A'} \neq \emptyset \Leftrightarrow Tr_{A'} \neq \emptyset$ для любого $A' \subset A$.

Следовательно, биекция $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ является трансформацией в том и только том случае, когда T и T^{-1} являются соответствиями. Любое соответствие $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ порождает симплициальное относительно естественных триангуляций непрерывное отображение $\mathcal{L}_T: \mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$ нервов, определяемое формулой

$$\mathcal{L}_T\left(\sum \mu_i \cdot \langle p_i \rangle\right) = \sum \mu_i \cdot \langle T(p_i) \rangle.$$

Если T есть трансформация, то $\mathcal{L}_T$ есть симплициальный изоморфизм; если же $\mathcal{L}_T$ есть симплициальный изоморфизм на свой образ, T называется *инъективным соответствием*. Последнее равносильно тому, что T является трансформацией $\mathcal{P}$ и $T(\mathcal{P})$.

Вводимые ниже аккомпанементы играют аналогичную, но более значимую роль, чем сильные аккомпанементы. Главная причина этого состоит в том, что последние плохо взаимодействуют с k -мерными гомотопиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Отображение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$ назовем *аккомпанементом* соответствия $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$, если $\beta(p) \subseteq \mathring{\text{St}}\langle T(p) \rangle$ для любого $p \in \mathcal{P}$.

Каноническое отображение $v: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle$ можно рассматривать как аккомпанемент тождественного соответствия. Если $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ есть соответствие, а $\mathcal{L}_T: \mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$ есть симплициальное отображение, порожденное T , то композиция $\mathcal{L}_T \circ v$ является аккомпанементом исходного соответствия T . Тем самым, любое соответствие имеет аккомпанемент.

Для любого $p_{A'} \neq \emptyset$

$$\mathring{\text{St}}\langle T p_{A'} \rangle = \bigcap \{ \mathring{\text{St}}\langle T(p_\alpha) \rangle \mid \alpha \in A' \}$$

есть непустое открытое стягиваемое множество в $\mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$ и, следовательно, $\mathring{\text{St}}\langle T p_{A'} \rangle \in \text{AE}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Любые аккомпанементы $\beta_i: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$ соответствия T являются гомотопными. Более того, существует гомотопия

$$H: X \times I \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle,$$

соединяющая β_i , такая, что $H(p \times I) \subseteq \mathring{\text{St}}\langle T(p) \rangle$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $x \in p_{A'}$, то $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ лежат в АЕ-пространстве $\mathring{\text{St}}\langle T p_{A'} \rangle$. Построение гомотопии H между β_1 и β_2 осуществляется индукцией по s -мерным остовам $\mathcal{P}^{(s)}$ разбиения $\mathcal{P}$, $s = 0, 1, \dots, k$. Не вдаваясь в подробности, приведем лишь индуктивный шаг, который основан на приводимой ниже лемме.

ЛЕММА 7.6. Пусть гомотопия

$$H': \mathcal{B} p_{A'} \times I \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle,$$

соединяющая $\beta_1|_{\mathcal{B} p_{A'}}$ и $\beta_2|_{\mathcal{B} p_{A'}}$, такова, что $H'_t(p_{A'} \cap p_\alpha) \subseteq \mathring{\text{St}}\langle T(p_{A' \cup \{\alpha\}}) \rangle$ для всех $\alpha \notin A'$ и $t \in I$. Тогда существует гомотопия $H: p_{A'} \times I \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{P}}\rangle$, являющаяся продолжением H' , которая соединяет $\beta_1|_{p_{A'}}$ и $\beta_2|_{p_{A'}}$ и для которой $H_t(p_{A'}) \subseteq \mathring{\text{St}}\langle T p_{A'} \rangle$ для всех $t \in I$.

Аналогично предложению 7.5 можно исследовать экстензорные свойства аккомпанементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. Пусть $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ есть соответствие разбиений. Тогда для любого отображения $\beta_0: Y \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{P}} \rangle$, заданного на замкнутом подмножестве X и удовлетворяющего включению $\beta_0(p \cap Y) \subset \mathring{\text{St}}\langle T(p) \rangle$ для всех p , существует аккомпанемент $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{P}} \rangle$ соответствия T , являющийся продолжением β_0 .

§ 8. Правильные разбиения

В этом параграфе встречающиеся пространства X и $\widehat{X}$ являются, если не оговорено противное, абстрактными ν^k -конструктивными пространствами.

Вершину в иерархии связностных свойств разбиений занимают *правильные* или *k -разбиения*, в которых элементы являются $(k-1)$ -связными, а связность пересечения t различных элементов уменьшается ровно на $(t-1)$ единиц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Пусть $k \leq \dim X$. Удобное разбиение $\mathcal{P}$ пространства X назовем *k -разбиением*, если $p_{A'} \in \text{AE}(k+1-|A'|)$ для всех $A' \subset A$ с $p_{A'} \neq \emptyset$ и $|A'| \leq k+1$.

Так как аксиома $(\mathcal{C})_3$ влечет $p_{A'} \in \text{ANE}(k+1-|A'|)$, то определение k -разбиения реально добавляет лишь гарантированную связность $p_{A'} \in C^{k-|A'|}$. Отметим также, что в определении k -разбиения не требуется полнота его нерва.

Промежуточную роль в изучении связностных свойств разбиений играют *l -разбиения* для $0 \leq l \leq k$. При $l=0$ связность элементов и их пересечений никак не гарантируются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Пусть $k \leq \dim X$. Разбиение $\mathcal{P}$ пространства X назовем *l -разбиением*, $0 \leq l \leq k$, если $p_{A'} \in \text{AE}(\min\{l, k+1-|A'|\})$ для всех $A' \subset A$ с $p_{A'} \neq \emptyset$.

Перестройка $(l-1)$ -разбиения в l -разбиение будет осуществляться за $(k+1-l)$ шагов, для чего нам понадобится изучать свойства $(l-1)$ -разбиений, у которых связность непустого пересечения $\leq r$ различных элементов такая же, как у l -разбиения. Более точно,

$$p_{A'} \in \begin{cases} \text{AE}(l), & \text{если } k+1-|A'| \geq k+1-r \Leftrightarrow r \geq |A'|, \\ \text{AE}(l-1), & \text{если } k+1-r > k+1-|A'| \geq l-1, \\ \text{AE}(k+1-|A'|), & \text{если } k+1-|A'| \leq l-1. \end{cases}$$

Такого рода промежуточные разбиения называются *l_r -разбиениями*. Ясно, что

- (1) l_{k+1-l} -разбиения являются l -разбиениями;
- (2) если $\mathcal{P}$ является l_r -разбиением X , то $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ является l_r -разбиением своего тела.

Для большей наглядности читателю рекомендуется изобразить график связности пересечения элементов l_r -разбиения. Для этого следует выделить множество отмеченных точек, соответствующих l_r -разбиению, т.е. тех точек (t, s) целочисленной решетки, для которых $p_{A'} \in \text{AE}(s)$ для всех $A' \subset A$ с $|A'| = t$.

Глава 2. Система аксиом пространства Небелинга

Приступая к изложению системы аксиом пространства Небелинга, будем далее считать, если не оговорено противное, что X и $\hat{X}$ суть абстрактные ν^k -конструктивные АЕ(k)-пространства, а все встречающиеся разбиения – удобные. Через $\hat{\mathcal{Q}}$ всегда будем обозначать удобное k -разбиение пространства $\hat{X}$ с полным нервом $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$.¹¹

§ 9. Аксиомы трансверсальности и конфинальности

Идею трансверсальности легче всего понять на примере компактного РL-многообразия $X = M^m$, заданного в триангуляции L . Рассмотрим на нем конечное разбиение $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ с элементами, являющимися подполиэдрами относительно L . Тогда разложение $\mathcal{Q} = \{q_\gamma\}$ многообразия M на ручки обладает многими свойствами хорошего расположения по отношению к $\mathcal{P}$. Перечислим ряд наиболее характерных свойств $(\mathcal{T})_1$ – $(\mathcal{T})_6$, положив их в основу абстрактного понятия трансверсальности одного разбиения другому. Пусть $\mathcal{Q}_{A'} \rightleftharpoons \mathcal{Q}|_{p_{A'}}$, где $p_{A'} \neq \emptyset$ для $A' \subset A$. Тогда

- $(\mathcal{T})_1$ $\mathcal{Q}_{A'}$ есть $(k+1-|A'|)$ -разбиение $p_{A'}$, имеющее полный нерв;
- $(\mathcal{T})_2$ если $A'' \subset A'$, то естественное вложение разбиений $\mathcal{Q}_{A'} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{A''}$ является инъективным;
- $(\mathcal{T})_3$ $\mathcal{Q}_{\partial A'} \rightleftharpoons \mathcal{Q}|_{\partial p_{A'}}$ есть $(k-|A'|)$ -разбиение $\partial p_{A'}$, имеющее полный нерв;
- $(\mathcal{T})_4$ естественное вложение разбиений $\mathcal{Q}_{\partial A'} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{A'}$ инъективно;
- $(\mathcal{T})_5$ для любого $q \in \mathcal{Q}$ семейство $\{A' \subset A \mid q \cap p_{A'} \neq \emptyset\}$ конечных подмножеств имеет наибольший (относительно вложений) элемент, который мы будем называть *терминальным индексным подмножеством* и обозначать через A_q ;
- $(\mathcal{T})_6$ если $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$ для $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$, то либо $A_{q_1} \subset A_{q_2}$, либо $A_{q_2} \subset A_{q_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть удобные разбиения X . Скажем, что $\mathcal{Q}$ *трансверсально* к $\mathcal{P}$ ($\mathcal{Q} \nabla \mathcal{P}$), если $\mathcal{Q}$ есть k -разбиение и выполнены свойства $(\mathcal{T})_1$ – $(\mathcal{T})_6$.

Из $(\mathcal{T})_1$ следует, что для любого $F = q_{\gamma_1} \cap \dots \cap q_{\gamma_s} \cap p_{\alpha_1} \cap \dots \cap p_{\alpha_t} \neq \emptyset$, $q_{\gamma_i} \in \mathcal{Q}$, имеет место $F \in \mathcal{C}_X^{\dim X + 2 - (s+t)}$ и $F \in \text{АЕ}(\dim X + 2 - (s+t))$. Из $(\mathcal{T})_5$ следует, что в случае $\dim X = 0$ трансверсальность $\mathcal{Q} \nabla \mathcal{P}$ равносильна вписанности $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$.

Трансверсальность одного разбиения другому налагает на них довольно жесткие условия взаимного расположения.

ЛЕММА 9.2. Если $\mathcal{Q} \nabla \mathcal{P}$, то $N(q; \mathcal{Q}) \subset \text{Int}(N(p; \mathcal{P}))$ для любых $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{Q}$ таких, что $p \cap q \neq \emptyset$. Тем самым, $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P} \circ \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что

- (а) $p \cap p_1 \neq \emptyset$ для любых $q_1 \in \mathcal{Q}$ и $p_1 \in \mathcal{P}$ таких, что $q \cap q_1 \neq \emptyset$ и $q_1 \cap p_1 \neq \emptyset$.

¹¹Полнота полиэдра означает, что конечное множество S его вершин порождает симплекс в том и только том случае, когда любые две вершины из S образуют 1-симплекс. Полнота нерва разбиения $\hat{\mathcal{Q}} = \{\hat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ эквивалентна тому, что если $\hat{q}_\alpha \cap \hat{q}_\beta \neq \emptyset$ для всех $\alpha, \beta \in A'$, то $\hat{q}_{A'} \neq \emptyset$.

Предположим противное: $p \cap p_1 = \emptyset$. Из $(\mathcal{T})_5$ легко следует, что

(b) $p \cap p' \neq \emptyset$ для любого $p' \in \mathcal{P}$ с $q \cap p' \neq \emptyset$.

Отсюда и из $p \cap p_1 = \emptyset$ следует, что $q \cap p_1 = \emptyset$. Аналогично получаем $q_1 \cap p = \emptyset$.

Поэтому

(c) $p_1 \notin A_q$ и $p \notin A_{q_1}$, а также $p \in A_q$ и $p_1 \in A_{q_1}$ (так как $p \cap q$ и $q_1 \cap p_1$ непусты).

Но поскольку $q \cap q_1 \neq \emptyset$, $(\mathcal{T})_6$ влечет $A_q \subset A_{q_1}$ или $A_{q_1} \subset A_q$. Это противоречит (c).

Следующее усиление леммы 9.2 получается ее многократным применением.

ЛЕММА 9.3. *Если $\mathcal{P}_{i+1} \looparrowright \mathcal{P}_i$, $i \geq 1$, то $N(p; \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_3 \circ \dots) \subset \text{Int } N(p; \mathcal{P}_1)$, где $p \in \mathcal{P}_1$.*

Вводимые ниже аксиомы призваны постулировать существование сколь угодно мелких k -разбиений со свойствами взаимного расположения.

АКСИОМА ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ. *Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение X . Тогда для любого $\epsilon \in \text{cov } X$ существует разбиение $\mathcal{Q}$, вписанное в ϵ и трансверсальное к $\mathcal{P}$.*

АКСИОМА КОНФИНАЛЬНОСТИ. *Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение X . Тогда для любого $\epsilon \in \text{cov } X$ существует k -разбиение $\mathcal{Q}$, вписанное в ϵ и вписанное в $\mathcal{P}$.*

§ 10. Аксиома раздутья и эквивалентность относительно покрытий

Раздутьем $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\mathcal{O}(p_\alpha)\}$ разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ пространства X называется такое открытое покрытие, что $\mathcal{O}(p_\alpha) \supset p_\alpha$ и $p_{A'} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \{\mathcal{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \emptyset$. Известно [26; 7.1.G(c)], что любое разбиение допускает раздутье.

АКСИОМА РАЗДУТИЯ. *Для любого разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ пространства X существует такое раздутье $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\mathcal{O}(p_\alpha)\} \in \text{cov } X$, что для всех $A' \subset A$ вложение $p_{A'} \hookrightarrow \bigcap \{\mathcal{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$ индуцирует изоморфизм π_i , $i \leq k - |A'|$.*

Если $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\mathcal{O}(p_\alpha)\} \in \text{cov } X$ есть раздутье l_1 -разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$, удовлетворяющее введенной аксиоме, то

(α) $\bigcap \{\mathcal{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \in \text{AE}(l + 1 - |A'|)$, $|A'| \leq l + 1$.

Аксиома раздутья имеет скорее технический характер и применяется в работе лишь один раз в следующем утверждении (неконтролируемый вариант которого установлен в [28]).

ТЕОРЕМА 10.1 (о каноническом отображении l_1 -разбиения). *Пусть $0 < l \leq k$. Если $\mathcal{P}$ является l_1 -разбиением абстрактного ν^k -конструктивного пространства X , то каноническое отображение $v: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$ является l -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}\mathring{\mathcal{P}} \Leftarrow \{\text{St}\langle p \rangle \mid p \in \mathcal{P}\} \in \text{cov } \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle$.*

Понятие эквивалентности относительно покрытия призвано отслеживать мелкость участвующей в его определении гомотопии. От этого контроля существенно зависит доказательство ключевой теоремы о незаузленности из второй части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется r -эквивалентностью относительно $\theta \in \text{cov } Y$, если для любой r -мерной компактной пары PL-многообразий (W, A) и для любой коммутативной диаграммы $(f_Y^X)^{12}$ существуют продолжение $\hat{h}: W \rightarrow X$ отображения h и гомотопия $H: W \times I \rightarrow Y$ такие, что $g \stackrel{H}{\simeq} f \circ \hat{h}$, где $H[\text{rel } A]$ и $H[\text{rel } \theta]$.

С помощью (α) теорему 10.1 несложно свести к более простому факту.

ТЕОРЕМА 10.3. Если $\widetilde{\mathcal{P}} = \{\emptyset(p_\alpha)\} \in \text{cov } X$ есть раздутие l_1 -разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$, то каноническое отображение $\tilde{v}: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\widetilde{\mathcal{P}}\rangle$ является l -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}\langle\widetilde{\mathcal{P}}\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.3. Рассмотрим коммутативную диаграмму $(\tilde{v}_{\mathcal{N}\langle\widetilde{\mathcal{P}}\rangle}^X)$. Так как $\widetilde{\mathcal{P}}$ есть открытое покрытие, а (W, A) есть компактная пара PL-многообразий, то на W существует такое разбиение $\mathcal{Q}$, что $\mathcal{Q}|_A$ есть разбиение A , для которого естественное соответствие $\mathcal{Q}|_A \hookrightarrow \mathcal{Q}$ инъективно, а также существует соответствие $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$, для которых

- (1) h есть аккомпанемент T ;
- (2) g есть сильный аккомпанемент $T|_A$.

Искомое отображение $\hat{g}: W \rightarrow X$ строится индукцией по остовам $\mathcal{Q}$ с сохранением свойства (2). Так как при этом $\tilde{v} \circ \hat{g}$ будет аккомпанементом T , то h будет гомотопно $\tilde{v} \circ \hat{g}$ относительно $\mathcal{N}\langle\widetilde{\mathcal{P}}\rangle$.

Из теоремы 10.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 10.4. Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение X , $0 < l \leq k$. Тогда

- (3) если $X \in \text{AE}(l)$, а $\mathcal{P}$ есть l_1 -разбиение, то $\mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle \in \text{AE}(l)$;
- (4) если $\mathcal{P}$ есть l_1 -разбиение, имеющее полный нерв $\mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle$, то

$$F \Rightarrow N(p_1 \cap \dots \cap p_t; \mathcal{P}) \in \text{AE}(l)$$

для любых элементов $p_i \in \mathcal{P}$, $p_1 \cap \dots \cap p_t \neq \emptyset$.

Для доказательства (4) заметим, что нерв $\mathcal{N}\langle\mathcal{R}\rangle$ разбиения

$$\mathcal{R} = \left\{ p \in \mathcal{P} \mid p \cap \bigcap p_i \neq \emptyset \right\}$$

множества F стягиваем в любую точку $x_0 \in \text{rint}\langle p_1, \dots, p_t \rangle$ линейной гомотопией. Далее применим теорему 10.1 для канонического отображения $v: F \rightarrow \mathcal{N}\langle\mathcal{R}\rangle \in \text{AE}$.

Изучим условия, гарантирующие сохранение k -эквивалентности при операциях аппроксимации и ограничения отображений. Начнем с операции ограничения.

ТЕОРЕМА 10.5. Пусть $X \in \text{ANE}(k)$, а $f: X \rightarrow Y \in \text{ANE}$ есть k -эквивалентность относительно $\theta \in \text{cov } Y$. Пусть $X_0 \subset X$ и покрытие $\sigma \in \text{cov } Y$ таковы, что

- (i) пара покрытий $\sigma \prec \theta$ удовлетворяет ANE_Y -тесту;
- (ii) вложение $X_0 \hookrightarrow X$ является k -ретракцией относительно $f^{-1}(\sigma)$.

Тогда $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y \in \text{ANE}$ является k -эквивалентностью относительно θ^2 .

¹²Определение диаграммы (f_Y^X) дается в теореме 2.9.

С помощью предложения 2.2 о перестройке гомотопии несложно установить условия, при соблюдении которых отображения, близкие к эквивалентностям, также являются эквивалентностями. Будем говорить, что пара покрытий $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет s -кратному ANE_Y -тесту, $s \in \mathbb{N}$, если существует такая последовательность покрытий $\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \varepsilon$, что каждая соседняя пара покрытий удовлетворяет ANE_Y -тесту.

ТЕОРЕМА 10.6 (об открытости k -эквивалентностей). Пусть $X \in \text{ANE}(k)$, а $f': X \rightarrow Y \in \text{ANE}$ есть k -эквивалентность относительно $\theta \in \text{cov } Y$. Если

(iii) $f: X \rightarrow Y$ является λ -близким к f' , где $\lambda \in \text{cov } Y$;

(iv) покрытия $\lambda \prec \eta$, $\eta \in \text{cov } Y$, удовлетворяют 3-кратному ANE_Y -тесту, то $f: X \rightarrow Y$ является k -эквивалентностью относительно $\theta \circ \eta$.

Отсюда как следствие получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 10.7. Пусть $X \in \text{ANE}(k)$, $Z \in \text{ANE}$ и $\eta \in \text{cov } Z$. Тогда существует такое $\theta \in \text{cov } Z$, что если $\varphi': X \rightarrow Z$ есть k -эквивалентность относительно θ , а отображение $\varphi: X \rightarrow Z$ θ -близко к φ' , то φ есть k -эквивалентность относительно η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_1, \theta \in \text{cov } Z$ таковы, что $(\theta_1)^2 \prec \eta$, а пара $\theta \prec \theta_1$ удовлетворяет 3-кратному ANE_Z -тесту. В силу теоремы 10.6 φ' есть k -эквивалентность относительно $\theta_1^2 \prec \eta$.

§ 11. Аксиома уединения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Множество $N \in \mathcal{C}_X^k$, $N \neq X$, является допустимым, если

- (1) вложение $\text{Bd } N \hookrightarrow (X \setminus \text{Int } N)$ является $(k-1)$ -эквивалентностью;
- (2) вложение $N \hookrightarrow X$ индуцирует мономорфизм гомотопической группы π_{k-1} .

Из (1) и теоремы 2.11 следует, что вложение $N \hookrightarrow X$ является $(k-1)$ -эквивалентностью. Соединяя это с (2), получаем, что $N \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп π_i при $i < k$. В силу предложения 2.14 условия (1), (2) эквивалентны тому, что

- (i) $N \hookrightarrow X$ является деформационной $(k-1)$ -ретракцией и k -ретракцией;
- (ii) $\text{Bd } N \hookrightarrow (X \setminus \text{Int } N)$ является деформационной $(k-1)$ -ретракцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Пусть фиксированы разбиение $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ пространства X и множество $N \in \mathcal{C}_X^k$, $N \neq X$. Скажем, что вложение $e: N \hookrightarrow X$ является допустимым относительно разбиения $\mathcal{P}$ пространства X , если для всех $p_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$,

- (3) $p_{A'} \cap N \in \mathcal{C}_X^{\dim p_{A'}}$, $p_{A'} \cap (X \setminus \text{Int } N) \in \mathcal{C}_X^{\dim p_{A'}}$ и $p_{A'} \cap \text{Bd } N \in \mathcal{C}_X^{\dim p_{A'}-1}$;
- (4) $p_{A'} \cap N$ является допустимым множеством в $p_{A'}$.

Заметим, что условие (3) эквивалентно тому, что ограничения $\mathcal{P}|_N$, $\mathcal{P}|_{\text{Bd } N}$ и $\mathcal{P}|_{X \setminus \text{Int } N}$ являются разбиениями N , $\text{Bd } N$ и $X \setminus \text{Int } N$ соответственно, а естественное вложение $\mathcal{P}|_N \hookrightarrow \mathcal{P}$ является трансформацией разбиений. Отметим также, что из (4) следует, что вложения

$$N \cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'} \quad \text{и} \quad \text{Bd } N \cap p_{A'} \hookrightarrow (X \setminus \text{Int } N) \cap p_{A'}$$

являются $(\dim p_{A'} - 1)$ -эквивалентностями, а вложение $N \cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'}$ индуцирует мономорфизм гомотопической группы $\pi_{\dim p_{A'} - 1}$ (напомним, что $\dim p_{A'} = k + 1 - |A'|$).

Будем говорить, если это не вызовет путаницы, что само множество N *допустимо относительно разбиения* $\mathcal{P}$. В силу предложения 2.14 условие (4) эквивалентно тому, что

- (iii) $N \cap p_{A'} \hookrightarrow p_{A'}$ является деформационной $(\dim p_{A'} - 1)$ -ретракцией и $\dim p_{A'}$ -ретракцией;
- (iv) $\text{Bd } N \cap p_{A'} \hookrightarrow (X \setminus \text{Int } N) \cap p_{A'}$ является деформационной $(\dim p_{A'} - 1)$ -ретракцией.

Приведем типичный пример допустимого вложения в кусочно линейном случае. Рассмотрим конечное разбиение $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ компактного PL-многообразия $X = M^m$, $m \geq 2k + 3$, заданного в триангуляции L , с элементами, являющимися подполиэдрами относительно L . Тогда регулярная окрестность N скелета $|L^{(m-k-1)}|$ является допустимым множеством относительно $\mathcal{P}$. В связи с этим наблюдением введем усиление понятия допустимости, которое и будет центральным понятием в аксиоме уединения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.3. Множество $N \in \mathcal{C}_X^k$ называется *совершенным относительно разбиения* $\mathcal{P}$, если N , а также $X \setminus \text{Int } N$ являются допустимыми относительно $\mathcal{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.4. Из определения 11.2, (4) следует, что ограничение любого l_r -разбиения $\mathcal{P}$, $l + r \leq k + 1$, пространства X на допустимое относительно $\mathcal{P}$ множество N вновь переходит в l_r -разбиение. Если же N является совершенным множеством относительно $\mathcal{P}$, то дополнительно $\mathcal{P}|_{X \setminus \text{Int } N}$ будет l_r -разбиением $X \setminus \text{Int } N$, а $\mathcal{P}|_{\text{Bd } N}$ будет $(l - 1)_r$ -разбиением $\text{Bd } N$. Отсюда индукцией по остовам разбиения несложно вывести, что

- (5) если $N \in \mathcal{C}_X^k$ допустимо относительно k -разбиения $\mathcal{P}$, то существует ретракция $r: X \rightarrow N$, удовлетворяющая условию $r(p_{A'}) \subset p_{A'} \cap N$ для всех $A' \subset A$.

Приведем еще ряд полезных свойств допустимых и совершенных множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.5. Если N совершенно относительно k -разбиения $\mathcal{P}$, то N совершенно относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 10.1 канонические отображения

$$v_X: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle \quad \text{и} \quad v_N: N \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P}|_N \rangle$$

являются k -эквивалентностями, а каноническое отображение

$$v_{\text{Bd } N}: \text{Bd } N \rightarrow \mathcal{N}\langle \mathcal{P}|_{\text{Bd } N} \rangle$$

является $(k - 1)$ -эквивалентностью. Так как

$$\mathcal{N}\langle \mathcal{P} \rangle \equiv \mathcal{N}\langle \mathcal{P}|_N \rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{N}\langle \mathcal{P}^{(k-1)} \rangle \equiv \mathcal{N}\langle \mathcal{P}|_{\text{Bd } N} \rangle,$$

то v_X можно подобрать так, что $v_N = v_X|_N$ и $v_{\text{Bd } N} = v_N|_{\text{Bd } N}$. Отсюда легко следуют (i), (ii). Аналогично устанавливается допустимость $X \setminus \text{Int } N$.

С помощью предложения 11.5 легко устанавливается его обобщение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.6. *Если N является совершенным относительно k -разбиения $\mathcal{P}$ пространства X , то N совершенно относительно любого его укрупнения $\mathcal{Q}$.*

Принципиально важная аксиома уединения, вводимая ниже, постулирует возможность построения копий исходного разбиения, определенных на дискретных семействах множеств, без ухудшения свойств его связности и с сохранением нерва.

АКСИОМА УЕДИНЕНИЯ. *Для любого $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{Q}$ пространства X и для любого дискретного семейства $\{X_i\}_{i \geq 1}$ Z -множеств $X_i \in \mathcal{C}_X$ существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$, состоящее из совершенных относительно $\mathcal{Q}$ множеств N_i , что $X_i \subset \text{Int } N_i$ для всех $i \geq 1$.*

По аксиоме конфинальности существует k -разбиения $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$. Если теперь применить аксиому уединения к $\mathcal{P}$, а затем использовать предложение 11.6, то в формулировке аксиомы уединения можно, не теряя общности, дополнительно считать, что

- (v) все N_i будут совершенными относительно любого укрупнения разбиения $\mathcal{Q}$.

Покажем, что семейство $\{N_i\}$ можно выбирать с дополнительным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.7. *Пусть $\{W_\alpha \in \mathcal{C}_X^k\}$ есть дискретное семейство совершенных множеств относительно разбиения $\mathcal{Q}$. Если $N_\alpha \in \mathcal{C}_X^k$ лежит в $\text{Int } W_\alpha$ и является совершенным относительно $\mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{Q}|_{W_\alpha}$, то дискретное семейство $\{N_\alpha\}$ состоит из совершенных относительно разбиения $\mathcal{Q}$ подмножеств, а также*

- (6) $X \setminus \bigsqcup \{\text{Int } N_\alpha \mid \alpha\}$ допустимо относительно $\mathcal{Q}$.

Предложение 11.7 является несложным следствием аксиом $(\mathcal{C})_4$, $(\mathcal{C})_2$, $(\mathcal{C})_{10}$, а также (iii), (iv). Отметим, что имеются примеры дискретных семейств совершенных подмножеств, не удовлетворяющих (6).

§ 12. Аксиомы Z -множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Замкнутое множество F пространства X называется

- (a) *поглощаемым Z -множеством* (кратко, $F \in \mathcal{Z}_{\text{eng}}$), если для любого удобного разбиения $\mathcal{P}$ пространства X существует совершенное относительно $\mathcal{P}$ множество $N \in \mathcal{C}_X^k$ такое, что $F \subset \text{Int } N$;
- (b) *трансверсальным Z -множеством* (кратко, $F \in \mathcal{Z}_{\text{tr}}$), если для любого удобного разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ пространства X $p_{A'} \cap F \subset_Z p_{A'}$ для любого $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \emptyset$.

Так как $X \in \mathcal{C}_X^k$, то, очевидно, $\mathcal{Z}_{\text{tr}} \subset \mathcal{Z}$. Отметим также, что из аксиомы конфинальности и леммы 6.2 несложно следует, что любое трансверсальное множество является Z -множеством, $\mathcal{Z}_{\text{eng}} \subset \mathcal{Z}$. Из $(\mathcal{C})_8$ следует, что любое компактное множество в $F \in \mathcal{C}_X$ является Z -множеством, и, следовательно, любое компактное множество в X является трансверсальным Z -множеством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. *Любое поглощаемое Z -множество $F \subset X$ является трансверсальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть разбиение X и $\varepsilon \in \text{cov } X$. По аксиоме конфинальности существует k -разбиение $\mathcal{Q} = \{q_{B'}\}$, $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$ и $\mathcal{Q} \prec \varepsilon$. Так как F поглощаемо, то существует совершенное относительно $\mathcal{Q}$ множество N , $N \cap F = \emptyset$, которое в силу предложения 11.6 является совершенным относительно $\mathcal{P}$. В силу замечания 11.4, (5) существует ретракция $r: X \rightarrow N$ такая, что $r(q_{B'}) \subset q_{B'} \cap N$ для всех $B' \subset B$. Следовательно, $\text{dist}(r, \text{Id}) \prec \varepsilon$. Так как $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$, то $r(p_{A'}) \subset p_{A'} \cap N$ для всех $A' \subset A$. Таким образом, нами установлено, что $r|_{p_{A'}}: p_{A'} \rightarrow p_{A'} \cap N$ ε -близко к $\text{Id}_{p_{A'}}$ и имеет образ, не пересекающийся с F .

С учетом предложения 12.2 и формулируемой ниже аксиомы классы трансверсальных и поглощаемых Z -множеств оказываются тождественными. Будем использовать в качестве их общего названия термин *ручные Z -множества*.

АКСИОМА $\mathcal{Z}_1$. *Любое трансверсальное Z -множество является поглощаемым Z -множеством.*

В силу предложения 11.6 эта аксиома легко сводится к проверке того, что если $F \subset X$ есть трансверсальное Z -множество, то для любого удобного k -разбиения $\mathcal{P}$ пространства X существует совершенное относительно $\mathcal{P}$ множество N такое, что $F \subset \text{Int } N$.

Тождественностью $\mathcal{Z}_{\text{tr}}$ и $\mathcal{Z}_{\text{eng}}$ будем пользоваться двояко. Свойства ручных Z -множеств проще устанавливать, пользуясь их трансверсальностью. При доказательстве теорем, в условии которых фигурируют ручные Z -множества, мы, как правило, используем их свойство поглощаемости. Следующие свойства ручных Z -множеств легко вытекают из их трансверсальности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.3 (аддитивность). *Если F_1 и F_2 являются ручными Z -множествами в X , то и $F_1 \cup F_2$ является ручным Z -множеством в X .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4. *Если $H \subset X$ является счетным объединением ручных Z -множеств, а F есть замкнутое множество X , содержащееся в H , то F является ручным Z -множеством в X .*

Ручные Z -множества составляют лишь часть всех Z -множеств. Только в случае $\dim X = 1$ любое Z -множество является ручным. Однако уже в случае $\dim X = 2$ существуют Z -множества, не являющиеся трансверсальными Z -множествами и, следовательно, ручными. В силу приводимого ниже предложения, которое легко следует из аксиомы уединения, такие множества не являются конструктивными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.5. *Любое Z -множество $F \in \mathcal{C}_X$ является ручным Z -множеством в X . Если $N \in \mathcal{C}_X^k$, то $\text{Bd } N \subset N$ является ручным Z -множеством.*

Вторая часть предложения 12.5 следует из первой, так как $\text{Bd } N \subset_Z N$ в силу $(\mathcal{C})_7$.

Последняя из аксиом Z -множеств гарантирует замкнутость класса ручных Z -множеств относительно операции пересечения с конструктивными множествами.

АКСИОМА $\mathcal{Z}_2$. Если F является ручным Z -множеством в X , а $N \in \mathcal{C}_X^k$, то $F \cap N$ является ручным Z -множеством в N .

В дальнейшем мы будем пользоваться только следствием из приведенной аксиомы, которое устанавливается последовательным применением предложения 12.5, аксиомы $\mathcal{Z}_2$ и предложения 12.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.6. Если F является ручным Z -множеством в X , а $N \in \mathcal{C}_X^k$, то $\text{Bd } N \cup (F \cap N)$ является ручным Z -множеством в N .

Не каждое Z -множество является ручным Z -множеством, однако оно с любой степенью точности может быть приближено ручным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.7. Существует такое счетное дизъюнктивное семейство $\{X_i\}$ компактных множеств в X , что любое замкнутое множество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми X_i , является ручным Z -множеством.

В качестве такого семейства годится универсальный Z -детектор в X .

В завершение параграфа приведем в качестве следствия аксиомы уединения полезные в дальнейшем факты о ручных Z -множествах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.8. Для любого $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{Q}$ пространства X и для любого дискретного семейства $\{X_i\}_{i \geq 1}$ множеств $X_i \in \mathcal{C}_X$, $X_i \subset_Z X$, существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_i \subset \text{Int } N_i$ для всех $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{N'_i \subset X\}$ есть такое дискретное семейство совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, что $X_i \subset \text{Int } N'_i$. В силу предложения 12.5 $X_i \subset_Z N'_i$. Повторно применяя аксиому уединения к $\{X_i, \text{Bd } N'_i\} \subset N'_i$, найдем такие совершенные относительно $\mathcal{Q}|_{N'_i}$ множества $\{N_i \subset \text{Int } N'_i\}$, что $X_i \subset \text{Int } N_i$. В завершение следует применить предложение 11.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.9. Для любых $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{Q}$ пространства X и ручного Z -множества $F \subset X$ существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $F \subset \text{Int } N_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что F ручное, следует, что $F \subset \text{Int } N$ для совершенного относительно $\mathcal{Q}$ множества $N \in \mathcal{C}_X^k$. Из аксиомы $\mathcal{Z}_2$ следует, что F является ручным Z -множеством в N . Поэтому $F \subset \text{Int } N_1$ для некоторого совершенного относительно $\mathcal{Q}|_N$ множества $N_1 \subset \text{Int } N$. Ясно, что N_1 совершенно и относительно $\mathcal{Q}$. В силу предложения 12.8 существует дискретное семейство $\{N_i \subset X \setminus N\}_{i \geq 2}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}|_{X \setminus \text{Int } N}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6). Ясно, что дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств тоже удовлетворяет предложению 11.7, (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.10 (об ограничении k -эквивалентностей). Пусть отображение $f: X \rightarrow Y \in \text{ANE}$ есть k -эквивалентность относительно $\theta \in \text{cov } Y$, а $\mathcal{Q}$ есть разбиение X . Тогда для любых $\varepsilon \in \text{cov } X$ и ручного Z -множества $F \subset X$ существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $F \subset \text{Int } N_1$, а также

- (1) N_i является k -ретрактом относительно ε и деформационным $(k-1)$ -ретрактом относительно ε для всех $i \geq 1$;
- (2) $f|_{N_i}: N_i \rightarrow Y$ является k -эквивалентностью относительно θ^2 для всех $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma \in \text{cov } Y$ таково, что $\sigma \prec \theta$ удовлетворяет ANE_Y -тесту. В силу аксиомы конфинальности существует k -разбиение $\mathcal{P}$ пространства X такое, что $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q} \wedge \varepsilon$. Не теряя общности, можно считать, что $\varepsilon \prec f^{-1}\sigma$. Из предложения 12.9 следует, что $F \subset \text{Int } N_1$, где $\{N_i\}_{i \geq 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathcal{P}$ подмножеств, удовлетворяющих предложению 11.7, (6). Из предложения 11.6 следует, что $\{N_i\}_{i \geq 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, также удовлетворяющее предложению 11.7, (6).

В силу замечания 11.4, (5) вложение $N_i \hookrightarrow X$ является k -ретракцией относительно $\mathcal{P} \prec \varepsilon \prec f^{-1}\sigma$. Непосредственное применение теоремы 10.5 показывает, что ограничение $f|_{N_i}$ является k -эквивалентностью относительно θ^2 для всех $i \geq 1$.

§ 13. Локальная и глобальная аксиомы

Для облегчения понимания вводимых аксиом рассмотрим, как они преломляются в кусочно линейном случае, где их содержание не затемнено техническими деталями. Пусть $\mathcal{Q}' = \{Q'_i\}$ есть PL-разбиение PL-многообразия M^m , $m \geq 2k+3$, а PL-вложенная сфера S^l , $l < k$, в Q'_0 затягивается пленкой $D^{l+1} \subset M^m$, находящейся в общем положении к элементам разбиения.¹³ Тогда дополнение C до регулярной окрестности $\mathcal{R}$ пленки D^{l+1} является допустимым относительно $\mathcal{Q}'$. Достаточно общий способ перестройки $\mathcal{Q}'$ с целью улучшения связности Q'_0 заключается в следующем: к Q'_0 прибавляется $\mathcal{R}$, а из остальных элементов разбиения вычитается $\text{Int } \mathcal{R}$. Однако лишь в случае, когда пленка D^{l+1} мала (D^{l+1} содержится во внутренности Q'_0), получается новое разбиение $\mathcal{Q}$, изоморфное $\mathcal{Q}'$, причем $Q'_0 \cup \mathcal{R}$ будет иметь на одну образующую меньше.

В случае, когда пленка D^{l+1} не содержится в одном элементе разбиения, к Q'_0 прибавляют меньшую копию R регулярной окрестности пленки D^{l+1} , из остальных элементов разбиения вычитая $\text{Int } \mathcal{R}$. Получается разбиение $\mathcal{Q}^\bullet$, изоморфное $\mathcal{Q}'$, но заданное не на всем многообразии M^m . Важным обстоятельством является то, что $\mathcal{Q}^\bullet$ может быть конечно l -продолжено до разбиения $\mathcal{Q}$ всего M . Аксиоматизируем эти и некоторые другие наблюдения следующим образом.

¹³То есть $D^{l+1} \cap Q'_{i_1} \cap \dots \cap Q'_{i_s} - (\dim D^{l+1} + 1 - s)$ -мерное подмногообразие.

ЛОКАЛЬНАЯ АКСИОМА (или аксиома l_r -перестройки). Пусть

$$\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

есть l_r -разбиение X при $l + r \leq k$ и $l < k$,

$$T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}, \quad T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha,$$

есть трансформация, $X_0 \subset X$ – ручное Z -множество. Тогда для любых $r + 1$ элементов $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathcal{Q}}$ с $\widehat{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{q}_{r+1} \neq \emptyset$, для любого элемента $a \in \pi_{l-1}(E')$, $E' \ni q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1}$, существуют допустимое относительно $\mathcal{Q}'$ множество $C \in \mathcal{C}_X^k$, $X_0 \subset \text{Int } C$,¹⁴ l_r -разбиение $\mathcal{Q} = \{q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства X и трансформация $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, такие, что

- (i) если $\widehat{q}_\alpha \notin \{\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_{r+1}\}$, то $q_\alpha = q'_\alpha$, $T(q_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $q'_\alpha \subset C$;
- (ii) $E' \cap C$ содержится в $E \ni q_1 \cap \dots \cap q_{r+1}$, а вложение $E' \cap C \xrightarrow{\Psi} E$ является $(l - 1)$ -эквивалентностью;
- (iii) существует элемент $b \in \pi_{l-1}(E' \cap C)$, который свободно гомотопен элементу a в E' ¹⁵ и при вложении $E' \cap C \hookrightarrow E$ переходит в нулевой элемент.

Отметим, что название введенной аксиомы объясняется свойством (i): перестройка осуществляется в малой окрестности q_1 .

Локализовать перестройку в следующей аксиоме нельзя по принципиальным соображениям. Сначала дадим ряд необходимых определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Пусть $0 \leq l < k$. Вложение $E \hookrightarrow G$, где $E, G \in \mathcal{C}_X$, является

- (1) элементарной l -эквивалентностью, если $G \setminus \text{Int } E$ l -связно, а $\text{Bd}_G(E) = \text{Bd}_G(G \setminus \text{Int } E)$ непусто и является $(l - 1)$ -связным;
- (2) простой l -эквивалентностью, если существует конечная последовательность $E = E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_n = G$ элементарных l -эквивалентностей.

В силу теоремы 2.11 любая элементарная l -эквивалентность является l -эквивалентностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Разбиение $\mathcal{Q}_G$ множества $G \in \mathcal{C}_X^k$ называется элементарным l -продолжением разбиения $\mathcal{Q}_E$ множества $E \in \mathcal{C}_X^k$, $E \subset G$, $0 \leq l < k$, если

- (3) вложение $E \hookrightarrow G$ является элементарной l -эквивалентностью;
- (4) $\mathcal{Q}_E \subset \mathcal{Q}_G$ и $\mathcal{Q}_G \setminus \mathcal{Q}_E$ состоит из одного элемента $q'_0 = G \setminus \text{Int } E$.

Соответствие $T_G: \mathcal{Q}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ называется элементарным l -продолжением соответствия $T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, если дополнительно к определению 13.2 имеем $T_E = T_G|_{\mathcal{Q}_E}$. Усиление введенного понятия возникает, если от T_E к T_G можно перейти за конечное число элементарных l -продолжений.

¹⁴И тем самым естественное вложение $\Psi': E' \cap C \rightarrow E'$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп π_i при $i < l$.

¹⁵Элементы a и b свободно гомотопны в E , если любые их представители гомотопны в E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Разбиение $\mathcal{Q}_G$ множества $G \in \mathcal{C}_X^k$ называется *конечным l -продолжением* разбиения $\mathcal{Q}_E$ множества $E \in \mathcal{C}_X^k$, $E \subset G$, $0 \leq l < k$, если существует конечная последовательность разбиений $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_E, \mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_m = \mathcal{Q}_G$, каждое последующее из которых является элементарным l -продолжением предыдущего.¹⁶

Соответствие $T_G: \mathcal{Q}_G \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ называется *конечным l -продолжением* соответствия $T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, если существует конечная последовательность соответствий $T_0 = T_E, T_1, \dots, T_m = T_G$, каждая последующая из которых является элементарным l -продолжением предыдущей.

Фиксируем совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $\mathcal{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных Z -множеств.

ГЛОБАЛЬНАЯ АКСИОМА (или аксиома l -перестройки). Пусть $(\mathcal{Q}', T', \beta')$ – тройка, в которой $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ есть l -разбиение X , $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, $T'(q'_\alpha) = \hat{q}_\alpha$, есть трансформация разбиений, а $\beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ есть аккомпанемент T' , являющийся k -эквивалентностью относительно $\theta \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$, $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}} \prec \theta$.

Тогда для любого ручного Z -множества $X_0 \subset X$ и для любого элемента $a \in \pi_l(q'_{\alpha_0})$, $q'_{\alpha_0} \in \mathcal{Q}'$, существуют допустимое относительно $\mathcal{Q}'$ множество $C \in \mathcal{C}_X^k$, $X_0 \subset \text{Int } C$, и тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть разбиение X , T есть соответствие разбиений, а β есть аккомпанемент T , такие, что

- (a) существуют l -разбиение $\mathcal{Q}^\bullet = \{q_\alpha^\bullet \mid \alpha \in A\} \subset \mathcal{Q}$ конструктивного множества $E \in \mathcal{C}_X^k$, $E \supset C$, и трансформация $T^\bullet: \mathcal{Q}^\bullet \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, $T^\bullet(q_\alpha^\bullet) = \hat{q}_\alpha$, C -эквивалентная T' , которая допускает конечное l -продолжение в соответствие T ;
- (b) $\beta = \beta'$ на C и $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^2$;
- (c) $\beta(X \setminus C) \subset \mathcal{N}(\langle \hat{q}_{\alpha_0} \rangle; \theta^4)$;
- (d) $q'_{\alpha_0} \cap C \subset q_{\alpha_0}^\bullet$, а вложение $q'_{\alpha_0} \cap C \hookrightarrow q_{\alpha_0}^\bullet$ является l -эквивалентностью;
- (e) существует элемент $b \in \pi_l(q'_{\alpha_0} \cap C)$, который свободно гомотопен элементу a в q'_{α_0} , а при вложении $q'_{\alpha_0} \cap C \hookrightarrow q_{\alpha_0}^\bullet$ переходит в нулевой элемент.

Если, кроме того, известно, что $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$, то

- (f) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.

§ 14. Постулат Бествины и постулат о гомеоморфизме

Пусть $\mathcal{Q}$ есть разбиение X , причем его ограничение $\mathcal{R} \equiv \mathcal{Q}|_F$ на $F \in \mathcal{C}_X$ является разбиением F . Пусть также $T: \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ есть соответствие разбиений. Несложно проверить, что правилом $q \cap F \mapsto T(q)$, $q \in \mathcal{Q}$, корректно определяется соответствие из $\mathcal{R}$ в $\hat{\mathcal{Q}}$, называемое *ограничением соответствия T на F* и обозначаемое через $T|_F$ или $T|_{\mathcal{R}}$.

¹⁶Отсюда следует, в частности, что вложение $E \hookrightarrow G$ является простой l -эквивалентностью.

Вводимый ниже постулат Бествины в самой простой ситуации утверждает, что на X и $\widehat{X}$ имеется одинаковый запас k -разбиений.

ПОСТУЛАТ БЕСТВИНЫ. Пусть $\mathcal{Q}_0$ есть разбиение $F \in \mathcal{C}_X$, $F \subset_Z X$, а $T_0: \mathcal{Q}_0 \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ есть инъективное соответствие. Требуется, чтобы для любого отображения $\gamma: X_0 \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{Q})$, определенного на ручном Z -множестве $X_0 \subset X$, $F \subset X_0$, такого, что $\gamma|_F$ есть аккомпанемент T_0 , существовала тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{Q}))$, в которой $\mathcal{Q}$ – k -разбиение X , T – трансформация, а β – аккомпанемент T , обладающая следующими свойствами:

- (1) $\mathcal{Q}|_F = \mathcal{Q}_0$ и естественное соответствие $\mathcal{Q}_0 \hookrightarrow \mathcal{Q}$ является инъективным;
- (2) $T|_F = T_0$;
- (3) β есть k -эквивалентность и $\beta = \gamma$ на X_0 .

Хотя отслеживать k -эквивалентность аккомпанемента β в процессе построений довольно сложно, но, как было отмечено во введении, совершенно необходимо.

Тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ из постулата будем называть k -приемлемой; если $\mathcal{Q}$ есть всего лишь l_r -разбиение X , то тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ будем называть l_r -приемлемой. Исходным пунктом доказательства постулата Бествины служит следующий факт.

ТЕОРЕМА 14.1. Существует 0-приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$.

Доказательство теоремы 14.1 осуществляется во второй части работы и основывается на аксиоматизированном варианте известной теоремы о воротнике [29].

АКСИОМА ВОРОТНИКОВ. Пусть $\mathcal{Q}_0$ есть разбиение $F \in \mathcal{C}_X$, $F \subset_Z X$, а $\omega \in \text{cov } X$. Если $\mathcal{Q}_0 \prec \omega$, то существует такое разбиение $\mathcal{Q}$ пространства X , $\mathcal{Q} \prec \omega$, что $\mathcal{Q}|_F = \mathcal{Q}_0$ и естественное соответствие $\mathcal{Q}_0 \hookrightarrow \mathcal{Q}$ является инъективным.

Вообще говоря, разбиение $\mathcal{Q}$ из теоремы 14.1 не является даже 1_1 -разбиением. Дальнейший план доказательства постулата Бествины заключается в последовательном улучшении связностных свойств $\mathcal{Q}$ за счет перестроек его элементов, что достигается многократным применением следующих фактов, устанавливаемых в §§ 18, 19.

ТЕОРЕМА 14.2 (о перестройке l_r - в l_{r+1} -разбиение). Если существует l_r -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, $r + l < k + 1$, то существует l_{r+1} -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$.

ТЕОРЕМА 14.3 (о перестройке l - в $(l + 1)_1$ -разбиение). Если существует l -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, $l < k$, то существует $(l + 1)_1$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$.

В итоге многократного $(k(k + 1)/2)$ раз) применения теорем 14.2 и 14.3 мы построим требуемую постулатом Бествины k -приемлемую тройку.

Доказав таким образом постулат Бествины, мы тем самым найдем изоморфные k -разбиения на X и $\widehat{X}$. В этой ситуации постулируется существование гомеоморфизма между X и $\widehat{X}$ – об этом речь идет в последнем вводимом требовании.

ПОСТУЛАТ О ГОМЕОМОРФИЗМЕ. Пусть $\mathcal{P}$ и $\widehat{\mathcal{P}}$ суть k -разбиения X и $\widehat{X}$ соответственно, $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ – их трансформация, а $X_0 \subset X$ – ручное Z -подмножество. Требуется, чтобы существовал такой гомеоморфизм $f: X \rightarrow \widehat{X}$, что

- (4) $f(p) \subseteq N(Tp; \widehat{\mathcal{P}})$ для всех $p \in \mathcal{P}$;
- (5) $f(X_0) \subset \widehat{X}$ – ручное Z -подмножество.

Если $X = \widehat{X}$, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \cap \widehat{\mathcal{P}}$ и $T|_{\mathcal{P}_0} = \text{Id}$, а X_0 не пересекается с $\cup \mathcal{P}_0$, то дополнительно требуется, чтобы $f = \text{Id}$ на $\cup \mathcal{P}_0$.

Этот постулат будет выведен из системы аксиом во второй части работы.

Глава 3. Улучшение связности разбиений

Приступая к процедурам *улучшения связности разбиений*, напомним, что X и $\widehat{X}$ по-прежнему будут абстрактными ν^k -конструктивными АЕ(k)-пространствами, а все встречающиеся разбиения – удобными. Через $\widehat{\mathcal{Q}}$ всегда будем обозначать удобное k -разбиение $\widehat{X}$ с полным нервом $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, который в силу следствия 10.4, (4) есть АЕ(k).

§ 15. Соединение разбиений

Обсудим возможность собирать искомую трансформацию из трансформаций, определенных на подмножествах. Для этого введем необходимые понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Пусть $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_X$ и $X_0 \subset F_1 \cap F_2$ (допускается случай $X_0 = \emptyset$). Скажем, что трансформации $T_i: \mathcal{Q}_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, заданные на F_i , $i = 1, 2$, являются X_0 -эквивалентными, если $(T_1)^{-1}(\widehat{q}) \cap X_0 = (T_2)^{-1}(\widehat{q}) \cap X_0$ для любого элемента $\widehat{q} \in \widehat{\mathcal{Q}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.2. Пусть $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ есть трансформация, заданная на $N \in \mathcal{C}_X^k$, а $T_\gamma: \mathcal{Q}_\gamma \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $\gamma \geq 1$, суть трансформации, заданные на $N_\gamma \in \mathcal{C}_X^k$. Если $\{N_\gamma\}_{\gamma \geq 1}$ есть дискретное семейство N , а T_γ и T' являются $\text{Bd } N_\gamma$ -эквивалентными для всех $\gamma \geq 1$, то существуют единственные разбиение $\mathcal{Q}$ множества N и трансформация $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $(N \setminus \bigsqcup \text{Int } N_\gamma)$ -эквивалентная T' , ограничение которой на каждое N_γ совпадает с T_γ .

УКАЗАНИЕ. Пусть $\widehat{\mathcal{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $\mathcal{Q}_\gamma = \{q_\alpha^\gamma\}$, а $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\}$, причем $T_\gamma(q_\alpha^\gamma) = \widehat{q}_\alpha$, а $T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$. Для $\widehat{q}_\alpha \in \widehat{\mathcal{Q}}$ через q_α обозначим $(q'_\alpha \setminus \bigsqcup \{\text{Int } N_\gamma \mid \gamma\}) \cup \{\cup q_\alpha^\gamma \mid \gamma\}$. Искомое разбиение $\mathcal{Q}$ есть $\{q_\alpha \mid \widehat{q}_\alpha \in \widehat{\mathcal{Q}}\}$, а искомая трансформация T задается формулой $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$.

Назовем разбиение $\mathcal{Q}$ множества N , описанное в предложении 15.2, *соединением разбиений* $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$, а трансформацию T – *соединением трансформаций* T' и $\{T_\gamma\}$. Опишем ситуации, в которых можно будет гарантировать, что свойства связности разбиения $\mathcal{Q}$ не хуже, чем у разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$. Будем предполагать до конца параграфа, что $\{N_\gamma\}_{\gamma \geq 1}$ есть дискретное семейство совершенных относительно $\mathcal{Q}'$ подмножеств N , удовлетворяющее предложению 11.7, (6), а разбиения $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$ являются l_r -разбиениями при $l+r \leq k+1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.3. *Соединение $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$ разбиений*

$$\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\} \quad \text{и} \quad \{\mathcal{Q}_\gamma = \{q_\alpha^\gamma\}\}$$

есть l_r -разбиение.

УКАЗАНИЕ. Предложение 15.3 легко следует из замечания 11.4 о свойствах совершенных множеств и теоремы 2.12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.4. *Если $l+r \leq k$ и для любых $r+1$ элементов $\hat{q}_i \in \hat{\mathcal{Q}}$ с $\hat{q}_1 \cap \dots \cap \hat{q}_{r+1} \neq \emptyset$ существует такой номер $\gamma_0 \geq 1$, что $q_1^{\gamma_0} \cap \dots \cap q_{r+1}^{\gamma_0} \in \text{AE}(l)$, а $(q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1}) \cap N_\gamma = q_1^\gamma \cap \dots \cap q_{r+1}^\gamma$ для всех $\gamma \neq \gamma_0$, то соединение $\mathcal{Q}$ разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$ есть l_{r+1} -разбиение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу предложения 15.3 $\mathcal{Q}$ является l_r -разбиением, то достаточно проверить, что $q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in C^{l-1}$. Если $\gamma_0 \geq 1$ – номер из условия, то

$$(1) \quad q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} = (q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1} \setminus \text{Int } N_{\gamma_0}) \cup (q_1^{\gamma_0} \cap \dots \cap q_{r+1}^{\gamma_0}).$$

В силу совершенности N_{γ_0} вложение

$$q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1} \cap \text{Bd } N_{\gamma_0} \hookrightarrow q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1} \setminus \text{Int } N_{\gamma_0}$$

является $(k-r-1)$ -эквивалентностью и, следовательно, $(l-1)$ -эквивалентностью, так как $k-r-1 \geq l-1$. Отсюда и из (1) следует, что вложение $q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \cap \text{Bd } N_{\gamma_0} \hookrightarrow q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \setminus \text{Int } N_{\gamma_0}$ является $(l-1)$ -эквивалентностью. Так как $q_1^{\gamma_0} \cap \dots \cap q_{r+1}^{\gamma_0} \in \text{AE}(l)$, то отсюда и из теоремы 2.11 следует, что вложение $q_1^{\gamma_0} \cap \dots \cap q_{r+1}^{\gamma_0} \hookrightarrow q_1 \cap \dots \cap q_{r+1}$ является $(l-1)$ -эквивалентностью, а $q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in C^{l-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.5. *Пусть $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\}$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma = \{q_\alpha^\gamma\}\}$ являются l -разбиениями, $l < k$, а для любого $\alpha \in A$ существует такое $C_\alpha \in \mathcal{C}_X^k$, $C_\alpha \subset q'_\alpha \cap q_\alpha$, что в естественно порожденной диаграмме*

$$q'_\alpha \xleftrightarrow{\Psi'_\alpha} C_\alpha \xleftrightarrow{\Psi_\alpha} q_\alpha$$

вложение Ψ'_α индуцирует изоморфизм гомотопических групп π_i , $i \leq l$, а Ψ_α есть l -эквивалентность. Пусть также для любой образующей $\sigma \in \pi_l(q'_\alpha)$ существуют индекс $\gamma \geq 1$ и элементы $a_\gamma \in \pi_l(q'_\alpha \cap N_\gamma)$ и $b_\gamma \in \pi_l(C_\alpha \cap N_\gamma)$ такие, что

$$(2) \quad \sigma \text{ и } a_\gamma \text{ свободно гомотопны в } q'_\alpha, \quad a_\gamma \text{ и } b_\gamma \text{ свободно гомотопны в } q'_\alpha \cap N_\gamma, \\ b_\gamma \text{ свободно гомотопен нулю в } q_\alpha^{17}$$

Тогда соединение $\mathcal{Q}$ разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение.

¹⁷ Легко видеть, что элемент a_γ , естественно, лежит в $\pi_l(q'_\alpha)$, а b_γ можно рассматривать как элемент $\pi_l(q'_\alpha \cap N_\alpha)$ и $\pi_l(q_\alpha^\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 15.3 $\mathcal{Q}$ является l -разбиением. Поэтому осталось установить, что $q_\alpha \in C^l$ для всех $\alpha \in A$, для чего достаточно проверить, что $(\Psi_\alpha)_*(g) = 0$ для любого $g \in \pi_l(C_\alpha)$ такого, что $(\Psi'_\alpha)_*(g)$ есть образующая группы $\pi_l(q'_\alpha)$, скажем σ .

Далее используем, что $b_\gamma \simeq a_\gamma$ в $q'_\alpha \cap N_\gamma$, $a_\gamma \simeq \sigma \simeq g$ в q'_α . Отсюда и из $(\Psi'_\alpha)_*(g) = \sigma$ следует, что b_γ и g свободно гомотопны в q'_α . Но в силу предложения 2.14 Ψ'_α является $(l+1)$ -ретракцией. Поэтому b_γ и g свободно гомотопны в C_α и, тем самым, в q_α . Так как q_α^γ содержится в q_α , а b_γ свободно гомотопен нулю в q_α^γ , то b_γ свободно гомотопен нулю в q_α . Следовательно, $g \simeq b_\gamma \simeq 0$ в q_α .

Выделим в чистом виде факт, использованный в доказательстве предложения 15.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.6. Пусть $s < k$, а также заданы такие $E, E', C \in \mathcal{C}_X$, что $C \subset E \cap E'$, и в естественно порожденной диаграмме

$$E' \xleftarrow{\Psi'} C \xrightarrow{\Psi} E$$

вложение Ψ' индуцирует изоморфизм гомотопической группы π_s , а Ψ есть s -эквивалентность. Тогда если для любой образующей $\sigma \in \pi_s(E')$ существуют элементы $a_\gamma \in \pi_s(E' \cap N_\gamma)$ и $b_\gamma \in \pi_s(C \cap N_\gamma)$, $\gamma \geq 1$, такие, что σ и a_γ свободно гомотопны в E' , a_γ и b_γ свободно гомотопны в $E' \cap N_\gamma$, b_γ свободно гомотопен нулю в $E \cap N_\gamma$, то $\pi_s(E) = 0$.

§ 16. Слабая перестройка l_r -разбиения

В качестве непосредственного следствия из локальной аксиомы и аксиомы уединения получим теорему о слабой перестройке l_r - в l_{r+1} -разбиение.

ТЕОРЕМА 16.1 (о слабой перестройке l_r -разбиения). Пусть $(\mathcal{Q}', T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}, \beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$ есть тройка, в которой $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\}$ — l_r -разбиение X при $l+r \leq k$ и $0 \leq l < k$, $T'(q'_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$ — трансформация, а β' — аккомпанемент T' . Тогда для любого ручного Z -множества $X_0 \subset X$ и для любых элементов $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathcal{Q}}, \widehat{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{q}_{r+1} \neq \emptyset$, существует тройка

$$(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})),$$

в которой $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$ — l_r -разбиение X , $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$ — трансформация, а β — аккомпанемент T , такая, что

- (1) $q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in \text{AE}(l)$;
- (2) T и T' являются X_0 -эквивалентными, а β совпадает с β' на X_0 ;
- (3) если $\widehat{q}_\alpha \notin \{\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_{r+1}\}$, то $q_\alpha = q'_\alpha$, $T(q_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta = \beta'$ на q_α ;
- (4) $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Q}}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема о сильной перестройке l_r - в l_{r+1} -разбиение будет отличаться от теоремы 16.1 требованием на $\mathcal{Q}$ быть l_{r+1} -разбиением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из аксиомы $(\mathcal{C})_3$ следует, что группа $\pi_{l-1}(E')$, где $E' \equiv q'_1 \cap \dots \cap q'_{r+1} \in \text{AE}(l-1)$, имеет счетное число образующих $\{\sigma_i \mid i \geq 2\}$. В силу предложения 12.9 существует такое дискретное семейство $\{N_i \subset X \mid i \geq 1\}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \text{Int } N_1$. Из совершенности N_i следует, что $\mathcal{Q}'_i \equiv \mathcal{Q}'|_{N_i}$ является l_r -разбиением пространства N_i , а вложение $N_i \cap E' \hookrightarrow E'$ есть $(k-r-1)$ -эквивалентность. Так как $l-1 \leq k-r-1$, то для любого $i \geq 2$

(5) существует элемент $a_i \in \pi_{l-1}(N_i \cap E')$, свободно гомотопный элементу σ_i в E' .

Рассмотрим случай $i \geq 2$. Трансформация $T'_i: \mathcal{Q}'_i \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, $T'_i(q'_\alpha \cap N_i) = \hat{q}_\alpha$, элемент $a_i \in \pi_{l-1}(N_i \cap E')$ и ручное Z -множество $X_i \equiv \text{Bd } N_i \subset N_i$ (в силу предложения 12.6) удовлетворяют условиям локальной аксиомы. В результате ее применения построим допустимое относительно $\mathcal{Q}'_i$ множество C_i , $X_i \subset \text{Int } C_i$, удобное l_r -разбиение $\mathcal{Q}_i = \{q_\alpha^i \mid \alpha \in A\}$ пространства N_i , трансформацию $T_i: \mathcal{Q}_i \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, $T_i(q_\alpha^i) = \hat{q}_\alpha$, и элемент $b_i \in \pi_{l-1}(E' \cap C_i)$ такие, что будут выполнены заключения (i)–(iii) этой аксиомы. Легко видеть, что существует аккомпанемент $\beta_i: N_i \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ трансформации T_i , совпадающий с $\beta|_{N_i}$ на C_i .

После этого в качестве искомого разбиения $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$ возьмем соединение разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_i \mid i \geq 2\}$, которое в силу предложения 15.3 является l_r -разбиением. Искомая трансформация T задается формулой $T(q_\alpha) = \hat{q}_\alpha$, а аккомпанемент β трансформации T – формулой $\beta = \beta_i$ на N_i и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigcup \{\text{Int } N_i \mid i \geq 2\}$. Из явных формул для q_α (см. предложение 15.2) и β следуют (2), (3).

В силу допустимости C_i относительно $\mathcal{Q}'_i$ и предложения 11.7, (6)

$$C \equiv \left(X \setminus \bigcup \{\text{Int } N_i \mid i \geq 2\} \right) \cup \bigcup \{C_i \mid i \geq 2\}$$

является допустимым множеством относительно $\mathcal{Q}'$. Из (5) и свойств (ii), (iii) локальной аксиомы следует, что естественные вложения $E' \cap C \xrightarrow{\Psi'} E'$ и $E' \cap C \xrightarrow{\Psi} E$, где $E \equiv q_1 \cap \dots \cap q_{r+1}$, удовлетворяют условию предложения 15.6. Следовательно, $E = q_1 \cap \dots \cap q_{r+1} \in \text{AE}(l)$.

Из (3) следует, что для установления (4) достаточно оценить $\text{dist}(\beta(x), \beta'(x))$, где $x \in q_i \cap q'_j$, $1 \leq i, j \leq r+1$. Но $\beta(x) \in \text{St}(\hat{q}_i)$, $\beta'(x) \in \text{St}(\hat{q}_j)$, а вершины $\langle \hat{q}_i \rangle$ и $\langle \hat{q}_j \rangle$ соединяются ребром. Это влечет $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2$.

§ 17. “Join crowd” перестройки

Составной частью любой перестройки l -разбиения в $(l+1)_1$ -разбиение является процесс инкорпорирования элементов, который в [10; 2.7.6, этап 6] назывался движением “join crowd”. Мы сочли уместным сохранить колорит этого термина.

17.1. Элементарная “join crowd” перестройка. Для формулировки теоремы об элементарной “join crowd” перестройке зафиксируем $\mathcal{Q}_E - (l+1)_1$ -разбиение $E \in \mathcal{C}_X^k$, $0 \leq l < k$, $T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ – инъективное соответствие,

$T_G: \mathcal{Q}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ – соответствие, заданное на $G \in \mathcal{C}_X^k$, $E \subset G$, являющееся элементарным l -продолжением T_E .

Пусть q_0 есть такой (единственный) элемент $\mathcal{Q}_E$, что $T_E(q_0) = T_G(q'_0)$ (напомним, что $q'_0 = G \setminus \text{Int } E \in \mathcal{Q}_G$), а $p_0 \rightleftharpoons q_0 \cup q'_0$. Через $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ обозначим укрупнение $\{p_0\} \cup \{q \in \mathcal{Q}_E \mid q \neq q_0\}$ разбиения $\mathcal{Q}_G$, а через $R: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ – соответствие, заданное формулой $R(p_0) = T_E(q_0) = T_G(q'_0)$ и $R(q) = T_E(q) = T_G(q)$ для $q \in \mathcal{Q}_E \setminus \{q_0\} = \mathcal{Q}_G \setminus \{q_0, q'_0\}$.

ТЕОРЕМА 17.1. *Если в ситуации, описанной выше, нерв $\mathcal{Q}_E$ совпадает со звездой вершины $\langle q_0 \rangle$, то для любого ручного Z -множества $X_0 \subset G$ существуют $(l+1)_1$ -разбиение $\mathcal{Q}$ множества G и соответствие $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ такие, что соответствия T и R являются X_0 -эквивалентными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N_0 и $N_1 \rightleftharpoons G \setminus \text{Int } N_0$ – такие совершенные относительно $\mathcal{P}$ множества, подчиняющиеся условию (v) из аксиомы уединения, что $X_0 \subset \text{Int } N_0$. После этого каждому $p \in \mathcal{P}$ сопоставим элемент

$$q(p) = \begin{cases} p \cup N_1, & \text{если } p = p_0, \\ p \setminus \text{Int } N_1 = p \cap N_0, & \text{если } p \neq p_0. \end{cases}$$

Ясно, что ограничения разбиений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q} \rightleftharpoons \{q(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ на N_0 совпадают. Следовательно, $\mathcal{Q}|_{X_0} = \mathcal{P}|_{X_0}$. Так как нерв $\mathcal{Q}_E$ совпадает со звездой вершины $\langle q_0 \rangle$, то в силу следствия 10.4, (4) $E \in \text{AE}(l+1)$. Поскольку $E \hookrightarrow G$ есть l -эквивалентность, то $G \in \text{AE}(l+1)$. Отсюда и из совершенности N_1 относительно $\mathcal{P}$ следует $N_1 \in \text{AE}(l+1)$, а также $(k-1)$ -эквивалентность вложения $p_0 \cap N_0 \cap N_1 \hookrightarrow q(p_0) \setminus \text{Int } N_1$. В силу теоремы 2.11 это влечет $(k-1)$ -эквивалентность вложения $N_1 \hookrightarrow q(p_0)$. Следовательно, $\pi_1(q(p_0)) = 0$ и, тем самым, $q(p_0) \in \text{AE}(l+1)$.

Изучим теперь связность пересечения $D \rightleftharpoons q(p_{i(1)}) \cap \dots \cap q(p_{i(a)}), 1 \leq a \leq k+1$. Прежде всего заметим, что если $q(p_{i(s)}) \neq q(p_0)$ для всех $s \leq a$, то $D = \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 1 \leq s \leq a\} \setminus \text{Int } N_1$ имеет ту же связность, что и $\bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 1 \leq s \leq a\}$ в силу совершенности N_0 . Поэтому разбиение $\mathcal{Q} \setminus \{q(p_0)\}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $q(p_{i(1)}) = q(p_0)$ и $a > 1$. Легко видеть, что $D = A \cup B$, где

$$\begin{aligned} A &= N_0 \cap p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leq s \leq a\}, \\ B &= N_0 \cap N_1 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leq s \leq a\}. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{P} \setminus \{p_0\}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение, а $\mathcal{P}$ есть l -разбиение, то

$$\begin{aligned} p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leq s \leq a\} &\in \text{AE}(\min\{l, k+1-a\}), \\ \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leq s \leq a\} &\in \text{AE}(\min\{l, k+2-a\}). \end{aligned}$$

Тогда в силу совершенности N_i имеем

$$\begin{aligned} A &\in \text{AE}(\min\{l, k+1-a\}) \\ B &\in \text{AE}(\min\{k+1-(a-1), \min\{l, k+2-a\}\}) \subset \text{AE}(\min\{l, k+2-a\}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$A \cap B = N_0 \cap N_1 \cap p_0 \cap \bigcap \{q(p_{i(s)}) \mid 2 \leq s \leq a\},$$

то $A \cap B \in \text{AE}(\min\{l, k+1-a\})$. В силу теоремы 2.12 о связности объединения имеем $D = A \cup B \in \text{AE}(\min\{l, k+1-a\})$, следовательно, $\mathcal{Q}$ является $(l+1)_1$ -разбиением.

Искомое соответствие T , X_0 -эквивалентное R , определяется формулой

$$T(q(p)) = R(p),$$

что следует из изоморфности $\mathcal{N}\langle\mathcal{P}\rangle$ и $\mathcal{N}\langle\mathcal{Q}\rangle$.

17.2. Конечная “join crowd” перестройка. Пусть имеются $(l+1)_1$ -разбиение $\mathcal{Q}_E$ множества $E \in \mathcal{C}_X^k$, $l < k$, и трансформация разбиений $T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$. Рассмотрим тройку

$$(\mathcal{Q}_G, T_G: \mathcal{Q}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta_G: G \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle),$$

в которой $\mathcal{Q}_G$ есть разбиение $G \in \mathcal{C}_X^k$, $E \subset G$, соответствие T_G получено конечным l -продолжением из T_E , а β_G есть аккомпанемент T_G . Для определенности полагаем $\mathcal{Q}_G \Rightarrow \mathcal{Q}_E \sqcup \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, а $\widehat{a}_i \Rightarrow T_G(a_i) \in \widehat{\mathcal{Q}}$.

Рассмотрим наименьший подполиэдр $\mathfrak{K} \subset \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ ($\mathfrak{K}_i \subset \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$), содержащий все вершины звезд $\text{St}(\widehat{a}_i)$, $i \leq m$ (звезды $\text{St}(\widehat{a}_i)$).¹⁸ Поскольку элементы $q \in \mathcal{Q}_E$, β_G -образ которых далек от $\mathfrak{K}$, в процессе конечной “join crowd” перестройки не будут меняться, то подполиэдр $\mathfrak{K}$ естественно назвать *контролирующим конечную “join crowd” перестройку*. Отметим несложные свойства таких подполиэдров:

- (α) $\mathfrak{K}_i$ содержится в элементе $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2$, а $\mathfrak{K} \subset \text{N}(\beta_G(G \setminus \text{Int } E); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2)$;
- (β) $\beta_G(G \setminus \text{Int } E) \subset \mathfrak{K}$.

Фиксируем совершенное отображение $f: G \rightarrow Y$, для которого

- (1) $\mathcal{H}_f \subset G$ есть счетное объединение ручных Z -множеств.

ТЕОРЕМА 17.2. В описанной выше ситуации для любого ручного Z -подмножества $X_0 \subset E$ существует тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: G \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение G , T – трансформация разбиений, а β – аккомпанемент T , такая, что

- (a)_f $\beta = \beta_G$ на X_0 ;¹⁹
- (b)_f $\text{dist}(\beta, \beta_G) \prec \mathfrak{K}$;
- (c)_f трансформации T и T_E являются X_0 -эквивалентными;
- (d)_f если $q \in \mathcal{Q}_G$ и $\beta_G(q) \cap \mathfrak{K} = \emptyset$, то $q \in \mathcal{Q}$, $T(q) = T_G(q)$ и $\beta|_q = \beta_G|_q$;
- (e)_f если дополнительно известно, что для некоторого покрытия $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$, $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$, справедливо $\beta_G(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$.

Так как $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{K}_i$, то теорему 17.2 достаточно доказать лишь в случае $m = 1$: $\mathcal{Q}_G = \mathcal{Q}_E \sqcup \{a_1\}$, далее действовать индукцией по m .

¹⁸То есть дважды итерированную замкнутую симплициальную окрестность всех вершин $\langle\widehat{a}_i\rangle$, $i \leq m$, относительно естественной триангуляции $\mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$.

¹⁹Индекс f есть первая буква слова “finite”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T_E есть трансформация, то $\hat{a}_1 = T_E(a')$ для единственного элемента $a' \in \mathcal{Q}_E$. Через E' обозначим окрестность $N(a'; \mathcal{Q}_E) \subset E$.

ЛЕММА 17.3 (см. [10; 2.7]). *Пересечение $E' \cap a_1$ непусто и совпадает с $E \cap a_1$.*

Ясно, что

- (i) $\mathcal{Q}_{E'} \rightleftharpoons \{q \in \mathcal{Q}_E \mid q \subset E'\}$ является $(l+1)_1$ -разбиением E' , а нерв $\mathcal{Q}_{E'}$ совпадает со звездой вершины $\langle a' \rangle$;
- (ii) соответствие $T_{E'} \rightleftharpoons T_E|_{\mathcal{Q}_{E'}} : \mathcal{Q}_{E'} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ является инъективным.

Пусть $G' \rightleftharpoons E' \cup a_1 = \bigcup \{q \in \mathcal{Q}_G \mid T_G(q) \cap \hat{a}_1 \neq \emptyset\}$, $\mathcal{Q}_{G'} \rightleftharpoons \mathcal{Q}_{E'} \cup \{a_1\} = \mathcal{Q}_G|_{G'}$. Тогда соответствие $T_{G'} \rightleftharpoons T_G|_{\mathcal{Q}_{G'}} : \mathcal{Q}_{G'} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ совпадает с $T_{E'}$ на E' и $T_{G'}(a_1) = \hat{a}_1$. Так как T_G получается из T_E элементарным l -продолжением, то из леммы 17.3 легко следует, что соответствие $T_{G'}$ получается из $T_{E'}$ также элементарным l -продолжением.

Через $\mathcal{P}$ обозначим укрупнение $\{a' \cup a_1\} \cup \{q \in \mathcal{Q}_{E'} \mid q \neq a'\}$ разбиения $\mathcal{Q}_{E'}$, а через $R : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ – соответствие, определенное формулой $R(a' \cup a_1) = \hat{a}_1$ и $R(q) = T_{E'}(q)$.

Так как f совершенно, то следующее множество

$$D \rightleftharpoons \bigcup \{f^{-1}(y) \mid \beta_G(f^{-1}(y)) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}\} \subset G$$

замкнуто. Поэтому в силу (1) оно является ручным Z -множеством. Так как $X_1 \rightleftharpoons X_0 \cup D \subset G$ является ручным Z -множеством, то в силу предложения 12.6 множество $F \rightleftharpoons \text{Bd}_G(G') \cup (X_1 \cap G')$ также является ручным Z -множеством в G' . Ясно, что в описанной выше ситуации применима теорема 17.1 об элементарной “join crowd” перестройке: существуют $(l+1)_1$ -разбиение $\mathcal{S}$ пространства G' и соответствие $S : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ такие, что

- (iii) разбиения $\mathcal{S}$ и $\mathcal{P}$ совпадают на F , а соответствие S является F -эквивалентным соответствием $R : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$.

Ясно, что $\mathcal{Q}_E \setminus \mathcal{Q}_{E'}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение $C \rightleftharpoons G \setminus \text{Int}_G(G')$. Так как соответствия S и R являются $\text{Bd}_G(G')$ -эквивалентными, то $\mathcal{Q} \rightleftharpoons \mathcal{S} \sqcup (\mathcal{Q}_E \setminus \mathcal{Q}_{E'})$ является $(l+1)_1$ -разбиением G , а $T \rightleftharpoons S \cup (T_E|_{\mathcal{Q}_E \setminus \mathcal{Q}_{E'}}) : \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ является трансформацией разбиений. При этом будет выполнено свойство (c)_f.

Так как $\beta_G|_{G'}$ есть аккомпанемент R , то в силу (iii) $\beta_G|_F$ есть частичный аккомпанемент $\mathcal{S}$. Поэтому в силу предложения 7.7 существует такой аккомпанемент $\beta' : G' \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ соответствия $\mathcal{S}$, что $\beta'|_F = \beta_G|_F$. Так как $\beta'(G') \subset N(\langle \hat{a} \rangle; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$, то отображение $\beta : G \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$, совпадающее с β' на G' и с β_G на C , является, как несложно видеть, аккомпанементом T и удовлетворяет условиям (a)_f–(b)_f и (d)_f.

Так как β' и β_G совпадают на любом слое $f^{-1}(y)$, который не содержится в одном элементе $(\beta_G)^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$, то для проверки (e)_f достаточно установить, что

- (iv) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ в случае, когда $\beta_G(f^{-1}(y))$ содержится в элементе $W \in \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}$.

Так как подполиэдр $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$ содержится в элементе $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2$, то в силу (b)_f имеем $\beta(f^{-1}(y)) \subset N(\beta_G(f^{-1}(y)); \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2) \subset N(W; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2)$. Но последнее множество есть элемент $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$.

17.3. Дискретная “join crowd” перестройка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.4. Пусть $T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ есть трансформация, заданная на $E \in \mathcal{C}_X^k$, причем $X \setminus \text{Int } E$ есть тело дискретного семейства $\{H_\gamma \mid \gamma \geq 1\}$, где $H_\gamma \in \mathcal{C}_X^k$. Пусть $T'_\gamma: \mathcal{Q}'_\gamma \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ есть соответствие между разбиением $\mathcal{Q}'_\gamma$ конструктивного множества $E_\gamma \rightleftharpoons E \cup H_\gamma \in \mathcal{C}_X^k$ и $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, являющееся конечным l -продолжением T_E при $l < k$. Тогда

- (γ) разбиение $\mathcal{Q}' \rightleftharpoons \mathcal{Q}_E \sqcup \bigsqcup \{\mathcal{Q}'_\gamma \setminus \mathcal{Q}_E \mid \gamma\}$ пространства X и соответствие $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, заданное формулой $T' = T_E$ на $\mathcal{Q}_E$ и $T' = T'_\gamma$ на $\mathcal{Q}'_\gamma \setminus \mathcal{Q}_E$, называются *дискретными l -продолжениями разбиения $\mathcal{Q}_E$ и трансформации T_E соответственно*.

Пусть $\mathfrak{K}_\gamma \subset \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ есть подполиэдр, контролирующий l -конечную перестройку T_E в T'_γ . Тогда

- (δ) семейство $\{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geq 1\}$ и подполиэдр $\mathfrak{K} \rightleftharpoons \bigcup \{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geq 1\} \subset \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ будем называть *контролирующими дискретную “join crowd” перестройку*.

Из (α) и (β) следует, что для аккомпанемента $\beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ соответствия T'

- (ε) $\mathfrak{K} \subset N(\beta'(X \setminus \text{Int } E); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2)$ и $\beta'(X \setminus \text{Int } E) \subset \mathfrak{K}$.

Пусть $(\mathcal{Q}', T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$ есть тройка, в которой разбиение $\mathcal{Q}'$ пространства X есть дискретное l -продолжение $(l+1)_1$ -разбиения $\mathcal{Q}_E$, заданного на $E \in \mathcal{C}_X^k$, $l < k$; соответствие T' есть дискретное l -продолжение трансформации T_E , β' есть аккомпанемент соответствия T' . Фиксируем также совершенное UV^{k-1} -отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию (1) из п. 17.2.

ТЕОРЕМА 17.5. В описанной выше ситуации для любого ручного Z -подмножества $X_0 \subset X$ существует тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение X , T есть трансформация разбиений, а β есть аккомпанемент T , такая, что

- (a)_d $\beta = \beta'$ на X_0 ;²⁰
- (b)_d $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \{\mathfrak{K}_\gamma \mid \gamma \geq 1\}$;
- (c)_d трансформации T и T' являются X_0 -эквивалентными;
- (d)_d если $q' \in \mathcal{Q}'$ и $\beta'(q') \cap \mathfrak{K} = \emptyset$, то $q' \in \mathcal{Q}$, $T(q') = T'(q')$ и $\beta|_{q'} = \beta'|_{q'}$;
- (e)_d если дополнительно $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ и $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\text{Bd } H_\gamma$ является ручным Z -множеством E . В силу предложения 12.8 – следствия аксиомы уединения – существует такое дискретное семейство $\{M_\gamma \subset E\}_{\gamma \geq 1}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}_E$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $\text{Bd } H_\gamma \subset \text{Int}_E M_\gamma$. Пусть $X_\gamma \rightleftharpoons M_\gamma \cup H_\gamma \in \mathcal{C}_X^k$.

Пусть $(\mathcal{Q}'_\gamma, T'_\gamma: \mathcal{Q}'_\gamma \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta'_\gamma: X_\gamma \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, $\gamma \geq 1$, есть тройка, в которой $\mathcal{Q}'_\gamma \rightleftharpoons \mathcal{Q}'|_{X_\gamma}$, $T'_\gamma = T'|_{\mathcal{Q}'_\gamma}$, а $\beta'_\gamma \rightleftharpoons \beta'|_{X_\gamma}$ есть аккомпанемент T'_γ . Очевидно, что

²⁰Индекс d есть первая буква слова “discrete”.

$\mathcal{Q}_{M_\gamma} \Rightarrow \mathcal{Q}_E \upharpoonright_{M_\gamma}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение M_γ , а $T_{M_\gamma} \Rightarrow T_E \upharpoonright_{M_\gamma}$ есть трансформация, которая допускает конечное l -продолжение до соответствия T'_γ .

Пусть $\mu \in \text{cov } X$ таково, что семейство $\{N(M_\gamma; \mu)\}$ дискретно в X . В силу совершенности f следующее множество

$$D = \bigcup \{f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mu\} \subset X$$

замкнуто и в силу условия (1) является ручным Z -множеством.

Так как $X_1 \Rightarrow X_0 \cup D \subset X$ является ручным Z -множеством, то в силу предложения 12.6 $X_0^\gamma \Rightarrow \text{Bd } X_\gamma \cup (X_1 \cap X_\gamma) \subset X_\gamma$ является ручным Z -множеством. Поэтому к тройке $(\mathcal{Q}'_\gamma, T'_\gamma, \beta'_\gamma)$ и X_0^γ возможно применить теорему 17.2. Следовательно, существует тройка $(\mathcal{Q}_\gamma, T_\gamma: \mathcal{Q}_\gamma \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta_\gamma: X_\gamma \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}_\gamma$ есть $(l+1)_1$ -разбиение X_γ , T_γ есть трансформация разбиений, а β_γ есть аккомпанент T_γ , удовлетворяющая свойствам (a)_f–(e)_f.

Определим разбиение $\mathcal{Q}$ как соединение разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_\gamma\}$ (см. предложение 15.2), трансформацию T – как соединение T' и $\{T_\gamma\}$. Аккомпанент $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ трансформации T определяется формулами $\beta \upharpoonright_{X_\gamma} = \beta_\gamma$ и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigcup \text{Int } X_\gamma$. Покажем, что введенные объекты являются искомыми.

Так как в силу замечания 11.4 $\mathcal{Q}' \upharpoonright_{E \setminus \bigcup \text{Int } M_\gamma}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение, $\mathcal{Q}' \upharpoonright_{\text{Bd } M_\gamma}$ есть l_1 -разбиение, а $\mathcal{Q}_\gamma$ есть $(l+1)_1$ -разбиение X_γ , то $\mathcal{Q}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение X .

Так как на множестве D отображения β и β' совпадают, то для проверки (e)_d достаточно рассмотреть слои $f^{-1}(y)$, лежащие в одном из элементов μ . В силу определения покрытия μ они пересекают не более одного $\{M_\gamma\}$, скажем M_γ . Так как $k > l \geq 0$, а $f \in \text{UV}^{k-1}$, то $f^{-1}(y)$ связно. Если $\xi \in f^{-1}(y) \cap \text{Bd } M_\gamma$, то

$$\beta(\xi) \in \beta(f^{-1}(y)) \subset \beta'(f^{-1}(y) \cap (X \setminus M_\gamma)) \cup \beta(f^{-1}(y) \cap M_\gamma).$$

Отсюда и из (e)_f следует $\beta(f^{-1}(y)) \subset N(\xi; \omega) \prec \omega^2$. Если же $f^{-1}(y) \cap \text{Bd } M_\gamma = \emptyset$, то либо $f^{-1}(y) \subset X \setminus M_\gamma$, либо $f^{-1}(y) \subset M_\gamma$. В первом случае $\beta(f^{-1}(y)) = \beta'(f^{-1}(y))$, во втором случае в силу (e)_f имеем $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$. Таким образом, свойство (e)_d установлено.

Все остальные требуемые свойства проверяются без особого труда.

§ 18. Сильная перестройка l_r -разбиения в l_{r+1} -разбиение, $r + l \leq k$, $l < k$

Полученные здесь и в следующем параграфе результаты будут использоваться во второй части работы при доказательстве теоремы о незаузленности. Фиксируем покрытия $\theta, \eta \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, $\theta \prec \eta$, такие, что

(α) $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2 \prec \theta$ и пара покрытий $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})}$ -тесту.

Пусть $\widehat{\mathcal{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ есть трансформация удобного l_r -разбиения $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\}$ пространства X , переводящая q'_α в $\widehat{q}_\alpha$, а $\beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ есть аккомпанент T' , являющийся k -эквивалентностью относительно θ . Набор из $r+1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_s} \in \widehat{\mathcal{Q}}$ с $\widehat{q}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widehat{q}_{\alpha_{r+1}} \neq \emptyset$ назовем *плохим*, если пересечение $\bigcap \{q'_{\alpha_s} \mid 1 \leq s \leq r+1\} \in \text{AE}(l-1)$ соответствующих элементов не является $\text{AE}(l)$. Ясно, что имеется не более счетного числа плохих наборов. Через $\mathfrak{C} \subset \widehat{X}$ обозначим объединение тел всех плохих наборов.

ТЕОРЕМА 18.1 (о сильной перестройке l_r -разбиения в l_{r+1} -разбиение). Для любого ручного Z -множества $X_0 \subset X$ существует тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть l_{r+1} -разбиение X , T есть трансформация разбиений, а β есть аккомпанемент T , такая, что

- (1) трансформации T и T' являются X_0 -эквивалентными, а также $\beta = \beta'$ на X_0 ;
- (2) β является k -эквивалентностью относительно η^2 ;
- (3) $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2$;
- (4) выполняется условие неизменяемости элементов $\mathcal{Q}'$: если $q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ и

$$\beta'(q'_\alpha) \cap N(\mathcal{N}; \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}) = \emptyset,$$

то q'_α есть элемент $\mathcal{Q}$, $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta|_{q'_\alpha} = \beta'|_{q'_\alpha}$.

Самый простой вариант теоремы, используемый при выводе постулата Бествины, получается в случае одноэлементных покрытий θ и η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 12.9 существует такое дискретное семейство $\{N_i \mid i \geq 1\}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}'$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \text{Int } N_1$. Из совершенности N_i следует, что $\mathcal{Q}'_i = \{(q')_\alpha^i = q'_\alpha \cap N_i\}$ является l_r -разбиением N_i .

Отождествим $\{i \geq 2\} \subset \mathbb{N}$ со всевозможными плохими наборами: $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \dots$. Легко видеть, что разбиение $\mathcal{Q}'_i$, трансформация

$$T'_i: \mathcal{Q}'_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \quad T'_i((q')_\alpha^i) = T'(q'_\alpha),$$

аккомпанемент $\beta'_i = \beta'|_{N_i}$, ручное Z -множество $X_i = \text{Bd } N_i \subset N_i$ и плохой набор $\mathcal{P}_i = \{\widehat{q}_{\alpha_s}\}$ удовлетворяют условию теоремы 16.1 о слабой перестройке l_r -в l_{r+1} -разбиение. Поэтому существуют l_r -разбиение $\mathcal{Q}_i = \{q_\alpha^i\}$ множества N_i , трансформация $T_i: \mathcal{Q}_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $T_i(q_\alpha^i) = \widehat{q}_\alpha$, и аккомпанемент β_i трансформации T_i такие, что

- (5) $q_{\alpha_1}^i \cap \dots \cap q_{\alpha_{r+1}}^i \in \text{AE}(I)$;
- (6) T_i X_i -эквивалентна T'_i ;
- (7) если $\widehat{q}_\alpha \notin \mathcal{P}_i$, то $q_\alpha^i = (q')_\alpha^i$, $T_i(q_\alpha^i) = T'_i((q')_\alpha^i) = \widehat{q}_\alpha$ и $\beta_i = \beta'_i$ на q_α^i ;
- (8) $\text{dist}(\beta_i, \beta'_i) \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2$.

После этого в качестве искомого разбиения $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$ возьмем соединение разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}_i \mid i \geq 2\}$. Из предложения 15.4 легко следует, что $\mathcal{Q}$ является l_{r+1} -разбиением X .

Искомая трансформация T задается формулой $T(q_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, а аккомпанемент β трансформации T – формулой $\beta = \beta_i$ на N_i и $\beta = \beta'$ на $X \setminus \bigcup \{\text{Int } N_i\}$. Из явных формул для q_α (см. предложение 15.2) и β следует (1).

Ясно, что из (8) следует $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2$ – свойство (3) установлено. Отсюда и из (α) следует, что условия теоремы 10.6 выполнены, что влечет за собой k -эквивалентность β относительно η^2 . Таким образом, (2) доказано.

Установим теперь справедливость (4). Если предположить противное ($q'_\alpha \notin \mathcal{Q}$), то из явной конструкции $\mathcal{Q}$ следует, что $\widehat{q}_\alpha = T'(q'_\alpha) \in \widehat{\mathcal{Q}}$ содержится в каком-либо плохом наборе. Поэтому $\beta'(q'_\alpha) \subset \text{St}(\widehat{q}_\alpha) \subset N(\mathcal{N}; \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}})$, что противоречит предположению, сделанному в (4). Следовательно, элемент

$q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ в процессе перестройки не изменился – $q'_\alpha \in \mathcal{Q}$. Отсюда следует, что $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta|_{q'_\alpha} = \beta'|_{q'_\alpha}$.

§ 19. Сильная перестройка l -разбиения в $(l+1)_1$ -разбиение, $0 \leq l < k$

До конца параграфа фиксируем такие покрытия $\theta, \eta \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, $\theta^{32} \prec \eta$, что

(α) $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}} \prec \theta$ и пара покрытий $\theta^{32} \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})}$ -тесту.

Пусть $\widehat{\mathcal{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha\}$, $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ есть трансформация удобного l -разбиения $\mathcal{Q}' = \{q'_\alpha\}$ пространства X , переводящая q'_α в $\widehat{q}_\alpha$, а $\beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ есть аккомпанемент T' , являющийся k -эквивалентностью относительно θ . Через $\mathfrak{E} \subset \widehat{X}$ обозначим тело плохого семейства

$$\{\widehat{q}_\alpha \mid q'_\alpha \in \mathcal{Q}' \text{ не является } l\text{-связным}\} \subset \widehat{\mathcal{Q}}.$$

Фиксируем также совершенное UV^{k-1} -отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого $\mathcal{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных Z -множеств.

ТЕОРЕМА 19.1 (о сильной перестройке l -разбиения в $(l+1)_1$ -разбиение). *Для любого ручного Z -множества $X_0 \subset X$ существует тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть удобное $(l+1)_1$ -разбиение X , T есть трансформация, X_0 -эквивалентная T' , а β есть аккомпанемент T , такая, что*

- (i) β является k -эквивалентностью относительно η^2 и совпадает с β' на X_0 ;
- (ii) $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^{32}$;
- (iii) выполняется условие неизменяемости элементов $\mathcal{Q}'$: если $q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ и

$$\beta'(q'_\alpha) \cap N(\mathcal{N}_{\mathfrak{E}}; \theta^{14}) = \emptyset,$$

то q'_α является элементом $\mathcal{Q}$, $T(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\beta|_{q'_\alpha} = \beta'|_{q'_\alpha}$;

- (iv) если, кроме того, известно, что $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ и $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$, то $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$.

Эта наиболее мощная теорема о перестройке. Наипростейший ее случай ($\theta = \eta$ суть одноэлементные покрытия, а $X_0 \in \mathcal{C}_X$, $X_0 \subset_Z X$) используется при выводе постулата Бествины. При доказательстве теоремы о незаузленности ω тривиально. В общем виде теорема применяется при доказательстве сжатия совершенной резольвенты.

Доказательство теоремы сводится к последовательному применению приводимой ниже перестройки разбиений и дискретной “join crowd” перестройки.

ТЕОРЕМА 19.2 (о слабой перестройке l -разбиения в $(l+1)_1$ -разбиение). *В условиях теоремы 19.1 существует тройка $(\overline{\mathcal{Q}}, \overline{T}: \overline{\mathcal{Q}} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \overline{\beta}: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\overline{\mathcal{Q}}$ есть разбиение X , $\overline{T}$ есть соответствие разбиений, а $\overline{\beta}$ есть аккомпанемент $\overline{T}$, такая, что*

- (1) $\bar{T}$ является дискретным l -продолжением трансформации $T^\bullet: \mathcal{Q}^\bullet \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ $(l+1)_1$ -разбиения $\mathcal{Q}^\bullet = \{q_\alpha^\bullet\}$, заданного на ν^k -конструктивном множестве $E \in \mathcal{C}_X^k$, и $\widehat{\mathcal{Q}}$;
- (2) семейство $\{\mathfrak{K}_i \mid i \geq 1\}$ и подполиэдр $\mathfrak{K} \subset \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$, контролирующие дискретную “join crowd” перестройку, таковы, что $\{\mathfrak{K}_i \mid i \geq 1\} \prec \theta^{28}$ и $\mathfrak{K} \subset N(\mathcal{N}_\mathfrak{E}; \theta^{14})$;
- (3) $X_0 \subset \text{Int } E$, а трансформации $T^\bullet$ и T' являются X_0 -эквивалентными;
- (4) $\text{dist}(\bar{\beta}, \beta') \prec \theta^4$ и $\bar{\beta}$ совпадает с β' на X_0 ;
- (5) условие неизменяемости элементов $\mathcal{Q}'$: если $q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ и

$$\beta'(q'_\alpha) \cap N(\mathcal{N}_\mathfrak{E}; \theta^9) = \emptyset,$$

то q'_α является элементом $\widehat{\mathcal{Q}}$, $\bar{T}(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\bar{\beta}|_{q'_\alpha} = \beta'|_{q'_\alpha}$;

- (6) если $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$, где $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$ и $\mathcal{N}_\widehat{\mathcal{Q}}^5 \prec \omega$, то $\bar{\beta}(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Главное отличие двух приведенных выше теорем заключается в том, что фигурирующее в ней $(l+1)_1$ -разбиение задано не на всем пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19.2. В силу предложения 12.10 существует такое дискретное семейство $\{N_i\}_{i \geq 0}$ совершенных относительно $\mathcal{Q}'$ подмножеств, удовлетворяющее предложению 11.7, (6), что $X_0 \subset \text{Int } N_0$ и при всех $i \geq 0$

- (7) N_i есть деформационный $(k-1)$ -ретракт относительно $(\beta')^{-1}(\theta)$;
- (8) $\beta'_i \equiv \beta'|_{N_i}: N_i \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$ является k -эквивалентностью относительно $\vartheta \equiv \theta^2$.

Пусть $\mu \in \text{cov } X$ таково, что семейство $\{N(N_i; \mu)\}$ дискретно в X . Поскольку f совершенно, а $\mathcal{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных Z -множеств, то следующее множество

$$D \equiv \bigcup \{f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \text{ не содержится ни в одном элементе } \mu\} \subset X$$

замкнуто и является ручным Z -множеством. Обозначим пересечение q'_α с N_i через $(q')_\alpha^i \in \mathcal{C}_X^k$. Из (7), (8) следует, что для всех $i \geq 1$

- (9) $\mathcal{Q}'_i \equiv \mathcal{Q}'|_{N_i} = \{(q')_\alpha^i\}$ является l -разбиением N_i , β'_i есть аккомпанемент трансформации $T'_i: Q'_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $T'_i((q')_\alpha^i) = \widehat{q}_\alpha$.

Для определенности будем отождествлять индексное подмножество A с натуральным рядом $\mathbb{N}$. Представим натуральный ряд $\mathbb{N}$ в виде дизъюнктного объединения

$$\bigsqcup \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \geq 1\}$$

счетных подмножеств. В силу $(\mathcal{C})_3$ для всех $q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ группа $\pi_l(q'_\alpha)$ имеет не более счетного числа образующих $\{\zeta_i \in \pi_l(q'_\alpha)\}_{i \in \Gamma_\alpha}$, которые отождествим с Γ_α . Если элемент q'_α является l -связным, то считаем $\Gamma_\alpha = \emptyset$ и все последующие процедуры заклеивания образующих для него не проводим.

Так как вложение $(q')_\alpha^i \hookrightarrow q'_\alpha$ является $(k-1)$ -эквивалентностью для всех $i \in \mathbb{N}$, то

- (10) для любых $i \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, существует $a_i \in \pi_l((q')_\alpha^i)$, свободно гомотопный ζ_i в q'_α .

Рассмотрим элемент $q'_{\alpha_0} \in \mathcal{Q}'$, $q'_{\alpha_0} \notin C^l$. Для каждого $i \in \Gamma_{\alpha_0} \subset \mathbb{N}$ рассмотрим тройку $(\mathcal{Q}'_i, T'_i, \beta'_i)$, ручное Z -множество $X_i = \text{Bd } N_i \cup (D \cap N_i) \subset N_i$, а также $a_i \in \pi_l((q')^i_{\alpha})$, к которым применима глобальная аксиома. В результате получим допустимое относительно $\mathcal{Q}'_i$ множество $C_i \in \mathcal{C}^k_{N_i}$, $X_i \subset \text{Int } C_i \subset N_i$, и тройку $(\mathcal{Q}_i, T_i: \mathcal{Q}_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta_i: N_i \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}_i$ есть разбиение N_i , T_i есть соответствие разбиений, а β_i есть аккомпанемент T , такую, что выполнены следующие условия:

- (a)_i существуют l -разбиение $\mathcal{Q}^\bullet_i = \{(q^\bullet)_\alpha^i \mid \alpha \in A\} \subset \mathcal{Q}_i$ конструктивного множества $E_i \in \mathcal{C}^k_{N_i}$, $E_i \supset C_i$, и трансформация $T_i^\bullet: \mathcal{Q}^\bullet_i \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $T_i^\bullet((q^\bullet)_\alpha^i) = \widehat{q}_\alpha$, C_i -эквивалентная T'_i , которая допускает конечное l -продолжение в соответствие T_i ;
- (b)_i $\beta_i = \beta'_i$ на C_i и $\text{dist}(\beta_i, \beta'_i) \prec \vartheta^2 = \theta^4$;
- (c)_i $\beta_i(N_i \setminus \text{Int } C_i) \subset N(\langle \widehat{q}_{\alpha_0} \rangle; \vartheta^4) = N(\langle \widehat{q}_{\alpha_0} \rangle; \theta^8)$;
- (d)_i $(q')^i_{\alpha_0} \cap C_i \subset (q^\bullet)^i_{\alpha_0}$, а соответствующее вложение является l -эквивалентностью;
- (e)_i существует элемент $b_i \in \pi_l((q')^i_{\alpha_0} \cap C_i)$, который свободно гомотопен элементу a_i в $(q')^i_{\alpha_0}$, а при вложении $(q')^i_{\alpha_0} \cap C_i \hookrightarrow (q^\bullet)^i_{\alpha_0}$ переходит в нулевой элемент;
- (f)_i $\beta_i(f^{-1}(y) \cap N_i) \prec \omega^2$ для всех $y \in Y$.

Полагаем

$$C = Z \cup \left(\bigsqcup \{C_i \mid i \geq 1\} \right) \in \mathcal{C}^k_X, \quad E = Z \cup \left(\bigsqcup \{E_i \mid i \geq 1\} \right) \in \mathcal{C}^k_X,$$

где $Z = X \setminus \bigsqcup \{\text{Int } N_i \mid i \geq 1\} \in \mathcal{C}^k_X$. Очевидно, что $\text{Int } C \subset E$. Искомое разбиение $\mathcal{Q}^\bullet$, заданное на E , определяется как соединение разбиений $\mathcal{Q}'$ и $\{\mathcal{Q}^\bullet_i\}$ (см. предложение 15.2):

$$\mathcal{Q}^\bullet = \left\{ (q^\bullet)_\alpha = (q'_\alpha \cap Z) \cup \left(\bigsqcup \{(q^\bullet)_\alpha^i \mid i \geq 1\} \right) \mid \alpha \in A \right\}.$$

В силу предложения 15.3 $\mathcal{Q}^\bullet$ является l -разбиением E . Трансформация $T^\bullet: \mathcal{Q}^\bullet \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, определяемая формулой $T^\bullet(q^\bullet_\alpha) = \widehat{q}_\alpha$, есть X_0 -эквивалентная трансформация T' . Так как $X_0 \subset \text{Int } N_0$, а $N_0 \subset \text{Int } C \subset E$, то отсюда следует свойство (3).

Искомое разбиение $\bar{\mathcal{Q}}$, заданное на X , определяется как

$$\bar{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}^\bullet \sqcup \left(\bigsqcup \{\mathcal{Q}_i \setminus \mathcal{Q}^\bullet_i \mid i \geq 1\} \right).$$

Соответствие $\bar{T}: \bar{\mathcal{Q}} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ определяется требованием, чтобы

$$\bar{T}|_{\mathcal{Q}^\bullet} = T^\bullet, \quad \bar{T}|_{\mathcal{Q}_i \setminus \mathcal{Q}^\bullet_i} = T_i|_{\mathcal{Q}_i \setminus \mathcal{Q}^\bullet_i}.$$

Аккомпанемент $\bar{\beta}: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ соответствия $\bar{T}$ определяется как $\bar{\beta}|_{N_i} = \beta_i$ для всех $i \geq 1$ и $\bar{\beta} = \beta'$ в остальных точках. Так как $X_0 \subset N_0$, то $\bar{\beta} = \beta'$ на X_0 . Из (b)_i следует $\text{dist}(\bar{\beta}, \beta') \prec \theta^4$, что доказывает (4).

В силу (a)_i и дискретности семейства $\{N_i\}$ соответствие $\bar{T}$ является дискретным l -продолжением $T^\bullet$ (см. определение 17.4). Через $\{\mathfrak{K}_i \mid i \in \Gamma_{\alpha_0}, q'_{\alpha_0} \notin C^l\}$ и

$\mathfrak{K} \subset \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ обозначим семейство и подполиэдр, контролирующие эту дискретную “join crowd” перестройку. В силу $(b)_i$ и свойства (ε) , приведенного перед теоремой 17.5, имеем

$$\mathfrak{K}_i \subset N(\beta'_i(N_i \setminus \text{Int } E_i); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2) \subset N(\beta_i(N_i \setminus \text{Int } C_i); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2 \circ \theta^4).$$

Отсюда и из $(c)_i$ следует, что $\mathfrak{K}_i \subset N(\langle \widehat{q}_{\alpha_0} \rangle; \theta^{14})$, а стало быть,

$$\{\mathfrak{K}_i \mid i \in \Gamma_{\alpha_0}, q'_{\alpha_0} \notin C^l\} \prec \theta^{28}, \quad \mathfrak{K} = \bigcup \mathfrak{K}_i \subset N(\mathcal{N}_{\mathfrak{E}}; \theta^{14}).$$

Свойство (2) установлено.

Так как на множестве D отображения β' и $\bar{\beta}$ совпадают, то для проверки (6) достаточно рассмотреть слои $f^{-1}(y)$, лежащие в одном из элементов μ . В силу определения покрытия μ они пересекают не более одного $\{N_i\}$, скажем N_i . Так как $k > l \geq 0$, а $f \in UV^{k-1}$, то $f^{-1}(y)$ связно. Если $\xi \in f^{-1}(y) \cap \text{Bd } N_i$, то

$$\bar{\beta}(\xi) \in \bar{\beta}(f^{-1}(y)) \subset \beta'(f^{-1}(y) \cap Z) \cup \bar{\beta}(f^{-1}(y) \cap N_i).$$

Отсюда и из $(f)_i$ следует $\bar{\beta}(f^{-1}(y)) \subset N(\xi; \omega^2) \prec \omega^4$. Если же $f^{-1}(y) \cap \text{Bd } N_i = \emptyset$, то либо $f^{-1}(y) \subset Z$, либо $f^{-1}(y) \subset N_i$. В первом случае $\bar{\beta}(f^{-1}(y)) = \beta'(f^{-1}(y))$, во втором случае в силу $(f)_i$ имеем $\bar{\beta}(f^{-1}(y)) \prec \omega^2$. Свойство (6) установлено.

Для доказательства того, что $\mathcal{Q}^\bullet$ является $(l+1)_1$ -разбиением E , воспользуемся предложением 15.5. В силу допустимости C_i относительно $\mathcal{Q}_i^\bullet$ естественное вложение $\Psi_i^\bullet: C_i \cap (q'_i)^\alpha \hookrightarrow (q'_i)^\alpha$ является деформационной $(k-1)$ - и k -ретракцией для всех $i \geq 1$. Отсюда легко видеть, что и естественное вложение $\Psi: C \cap q'_\alpha \hookrightarrow q'_\alpha$ будет такой же ретракцией, что в силу предложения 2.14 влечет индуцирование Ψ изоморфизма π_i , $i < k$. Аналогичная проверка с помощью $(d)_i$ показывает, что $\Psi: C \cap q_\alpha^\bullet \hookrightarrow q_\alpha^\bullet$ есть l -эквивалентность. Принимая во внимание также $(e)_i$, видим, что все условия предложения 15.5 выполнены, а следовательно, верно его заключение: $q_\alpha^\bullet \in \text{AE}(l+1)$.

Для проверки (5) предположим противное: $q'_\alpha \notin \bar{\mathcal{Q}}$, т.е. q'_α каким-либо образом изменялся, а следовательно, q'_α пересекается с некоторым $N_i \setminus C_i$. Тогда

$$\beta'(q'_\alpha) \subset N(\beta_i(N_i \setminus C_i); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}) \subset N(\mathcal{N}_{\mathfrak{E}}; \theta^8 \circ \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}})$$

– противоречие со сделанным в (5) предположением. Следовательно, элемент $q'_\alpha \in \mathcal{Q}'$ в процессе перестройки не изменился – $q'_\alpha \in \bar{\mathcal{Q}}$. Отсюда следует, что $\bar{T}(q'_\alpha) = T'(q'_\alpha)$ и $\bar{\beta}|_{q'_\alpha} = \beta'|_{q'_\alpha}$.

Вернемся к теореме 19.1. Применим теорему 17.5 о дискретной “join crowd” перестройке. В результате найдется тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \bar{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть $(l+1)_1$ -разбиение X , T есть трансформация разбиений, а β есть аккомпанемент T , такая, что

- (a) $\beta = \bar{\beta}$ на X_0 ;
- (b) $\text{dist}(\bar{\beta}, \beta) \prec \{\mathfrak{K}_i\} \prec \theta^{28}$;
- (c) трансформации T и $T^\bullet$ являются X_0 -эквивалентными;
- (d) если $\bar{q}_\alpha \in \bar{\mathcal{Q}}$ и $\bar{\beta}(\bar{q}_\alpha) \cap \mathfrak{K} = \emptyset$, то $\bar{q}_\alpha \in \mathcal{Q}$, $T(\bar{q}_\alpha) = \bar{T}(\bar{q}_\alpha)$ и $\beta|_{\bar{q}_\alpha} = \bar{\beta}|_{\bar{q}_\alpha}$;
- (e) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$.

С учетом $\mathfrak{K} \subset N(\mathcal{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14})$ свойство (d) влечет

(d') если $\bar{q}_\alpha \in \bar{\mathcal{Q}}$ и $\bar{\beta}(\bar{q}_\alpha) \cap N(\mathcal{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14}) = \emptyset$, то $\bar{q}_\alpha \in \mathcal{Q}$, $T(\bar{q}_\alpha) = \bar{T}(\bar{q}_\alpha)$ и $\beta|_{\bar{q}_\alpha} = \bar{\beta}|_{\bar{q}_\alpha}$.

Условие (iii) сохранения элементов $\mathcal{Q}'$ при перестройке легко следует из (5) и (d'). Из (4) и (a)–(b) следует, что β совпадает с β' на X_0 и $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^{28+4}$. Отсюда, из (α) и из теоремы 10.6 следует, что β является k -эквивалентностью относительно η^2 . Проверка всего остального предоставляется читателю.

Список литературы

- [1] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Teubner, Leipzig, 1928.
- [2] G. Nöbeling, “Über eine n -dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$ ”, *Math. Ann.*, **104** (1931), 71–80.
- [3] R. Geoghegan, R. Summerhill, “Pseudo-boundaries and pseudo-interiors in Euclidean spaces and topological manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194** (1974), 141–165.
- [4] J. J. Dijkstra, J. van Mill, J. Mogilski, “Classification of finite-dimensional pseudo-boundaries and pseudo-interiors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **332**:2 (1992), 693–709.
- [5] A. Chigogidze, K. Kawamura, E. D. Tymchatyn, “Nöbeling spaces and the pseudo-interiors of Menger compacta”, *Topology Appl.*, **68** (1996), 33–65.
- [6] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Warszawa, 1975.
- [7] L. E. J. Brouwer, “On the structure of perfect sets of points”, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **12** (1910), 785–794.
- [8] R. D. Anderson, “A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity”, *Ann. of Math.* (2), **67**:2 (1958), 313–324.
- [9] H. Toruńczyk, “On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds”, *Fund. Math.*, **106**:1 (1980), 31–40.
- [10] M. Bestvina, *Characterizing k -dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., **71**, № 380, 1988.
- [11] P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn, “Über nulldimensionale Punktmengen”, *Math. Ann.*, **98**:1 (1928), 89–106.
- [12] H. Toruńczyk, “Characterizing Hilbert space topology”, *Fund. Math.*, **111**:3 (1981), 247–262.
- [13] K. Kawamura, M. Levin, E. D. Tymchatyn, “A characterization of 1-dimensional Nöbeling spaces”, *Topology Proc.*, **22** (1997), 155–174.
- [14] R. H. Bing, “Partitioning continuous curves”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 536–556.
- [15] J. C. Mayer, L. G. Oversteegen, E. D. Tymchatyn, “The Menger curve. Characterization and extension of homeomorphisms of non-locally-separating closed subsets”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **252** (1986), 45 pp.
- [16] S. M. Ageev, *Axiomatic method of partitions in the theory of Menger and Nöbeling spaces*, Preprint, 2000; <http://at.yorku.ca/v/a/a/a/87.htm>.
- [17] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [18] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: K. Borsuk, *Theory of retracts*, PWN, Warszawa, 1967.
- [19] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [20] J. Dugundji, E. Michael, “On local and uniformly local topological properties”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**:2 (1956), 304–307.

- [21] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: Е. Н. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [22] С. М. Агеев, С. А. Богатый, “О склейках некоторых классов метрических пространств”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 6, 19–23; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogatyĭ, “On adjunction spaces of certain types of spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:6 (1994), 18–21.
- [23] P. Alexandroff, “Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension”, *Ann. of Math.* (2), **30**:1/4 (1928–1929), 101–187.
- [24] A. Kurosh, “Kombinatorischer Aufbau der bikompacten topologischen Räumen”, *Compos. Math.*, **2** (1935), 471–476.
- [25] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, М., 1973.
- [26] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [27] M. Bestvina, J. Mogilskii, “Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts”, *Michigan Math. J.*, **33**:3 (1986), 291–313.
- [28] J. Dugundji, “A duality property of nerves”, *Fund. Math.*, **59** (1966), 213–219.
- [29] К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно линейную топологию*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, New York, 1972.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь

E-mail: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by

Поступила в редакцию
09.12.2005 и 29.11.2006