Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. II. Теорема о незаузленности, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 02:28:18

УДК 515.124.62+515.125

С. М. Агеев

Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. II. Теорема о незаузленности

Доказано, что пространство Небелинга незаузленно относительно Z -множеств. Установлены теоремы о существовании, улучшении и сжатии совершенных резольвент.

Библиография: 11 названий.

В первой части работы (см. [1]) на основе построенной аксиоматики пространств Небелинга была решена проблема улучшения связности разбиений. В настоящей статье мы развиваем этот аксиоматический подход и устанавливаем в первой главе два основополагающих факта теории пространств Небелинга: теорему о незаузленности и теорему о сжатии совершенных резольвент. Во второй главе на основании доказанной теоремы о незаузленности излагается теорема о существовании совершенной резольвенты, а также процедура улучшения резольвент. Тем самым для завершения доказательства характеристической теоремы пространств Небелинга [1; гипотеза 1.2] остается установить непротиворечивость системы аксиом пространств Небелинга. Третья глава частично решает эту задачу: справедливость постулата Бествины и постулата о гомеоморфизме сводится к непротиворечивости системы аксиом пространств Небелинга.

§ 1. Предварительные сведения и факты

В настоящей работе мы продолжаем использовать понятия и обозначения, принятые ранее [1]. В частности, все пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются сепарабельными метрическими (непрерывными).

1.1. UV^{k-1} -тест. Приведем конечномерный вариант ANE_Y -теста, обсуждавшегося в первой части работы. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $Y \in ANE(k)$. Будем говорить, что пара покрытий $\delta, \varepsilon \in \text{cov } Y$ удовлетворяет $ANE_Y(k)$ -тесту, если $\delta^2 \prec \varepsilon$ и для любого замкнутого подпространства $A \subset W$, $\dim W \leq k$, а также для любых отображений $\hat{\alpha}: W \rightarrow Y$ и $\beta: A \rightarrow Y$ с условием $\text{dist}(\hat{\alpha}|_A, \beta) \prec \delta$ существует продолжение $\hat{\beta}: W \rightarrow Y$, $\hat{\beta}|_A = \beta$, с условием $\text{dist}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \prec \varepsilon$. Будем говорить, что пара покрытий $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет s -кратному $ANE_Y(k)$ -тесту, $s \in \mathbb{N}$, если существует такая последовательность покрытий $\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \varepsilon$, что каждая соседняя пара покрытий удовлетворяет $ANE_Y(k)$ -тесту. Определение того, что пара чисел $0 < \delta < \varepsilon$ удовлетворяет $ANE_Y(k)$ -тесту, дается аналогично.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712) и гранта Министерства образования Республики Беларусь. Автор также признателен за поддержку, оказанную NSERC № OGP 005616 во время визита в Университет Саскатчеван.

Справедлив аналог утверждения, гарантирующего существование большого количества пар чисел, удовлетворяющих $\text{ANE}_Y(k)$ -тесту.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого $\text{ANE}(k)$ -пространства (Y, ρ) и для любого $c \in \text{cov } Y$ существует метрика $d \geq \rho$, совместимая с топологией на Y , такая, что $\{N_d(y; 1) \mid y \in Y\} \prec c$, а если $0 < 9\delta < \varepsilon < 1$, то $\delta < \varepsilon$ удовлетворяет $\text{ANE}_Y(k)$ -тесту.*

Из теоремы Дугунджи–Майкла о метриках [2; гл. 6] несложно вывести следующий факт об UV^{k-1} -отображении $f: X \rightarrow Y$ полных $\text{ANE}(k)$ -пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для любых покрытий $\bar{s}_X \in \text{cov } X$ и $\bar{c}_Y \in \text{cov } Y$ существуют метрика $\rho(x, x')$, совместимая с топологией на X , и метрика $d(y, y')$, совместимая с топологией на Y , такие, что*

- (а) $\{N_\rho(x; 1) \mid x \in X\} \prec \bar{s}_X$ и $\{N_d(y; 1) \mid y \in Y\} \prec \bar{c}_Y$;
- (б) *если $0 < 9\delta < \varepsilon < 1$, то пара чисел $\delta < \varepsilon$ удовлетворяет $\text{ANE}_X(k)$ - и $\text{ANE}_Y(k)$ -тестам, а также для любого замкнутого подпространства A метрического пространства W , $\dim W \leq k$, и для любых отображений $\hat{\alpha}: W \rightarrow X$ и $\beta: A \rightarrow X$ с условием $\text{dist}(f \circ \hat{\alpha}|_A, f \circ \beta) < \delta$ существует продолжение $\hat{\beta}: W \rightarrow X$, $\hat{\beta}|_A = \beta$, с условием $\text{dist}(f \circ \hat{\alpha}, f \circ \hat{\beta}) < \varepsilon$.*

Будем в этом случае для краткости говорить, что метрики $\rho(x, x')$ и $d(y, y')$ удовлетворяют UV^{k-1} -тесту относительно $\{f: X \rightarrow Y; \bar{s}_X, \bar{c}_Y\}$.

Если $\hat{\mathcal{Q}}$ есть разбиение X , а $A \subset X$, то через $\mathcal{N}_A \subset \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ мы обозначаем нерв разбиения $\hat{\mathcal{Q}}_A \triangleq \{\hat{q} \in \hat{\mathcal{Q}} \mid \hat{q} \cap A \neq \emptyset\}$ окрестности $N(A; \hat{\mathcal{Q}})$. Если $\sigma \in \text{cov } X$, то $\mathcal{N}_\sigma = \{\mathcal{N}_U \mid U \in \sigma\}$ есть замкнутое полиэдральное покрытие $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$. Напомним некоторые соотношения между образами и прообразами канонического отображения $\hat{v}: X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$.

ЛЕММА 1.3. *Для любых $A, B \subset X$ и $\sigma \in \text{cov } X$ справедливо:*

- (α) *если $\hat{v}(A) \subset \mathcal{N}_U$, $U \in \sigma$, то $A \subset N(U; \hat{\mathcal{Q}})$;*
- (β) *если $\hat{v}(B) \subset N(\hat{v}(A); \mathcal{N}_\sigma)$, то $B \subset N(A; \hat{\mathcal{Q}}^2 \circ \sigma \circ \hat{\mathcal{Q}})$;*
- (γ) *если $\sigma, \theta \in \text{cov } X$, то $\mathcal{N}_\sigma \circ \mathcal{N}_\theta \prec \mathcal{N}_{\sigma \circ \hat{\mathcal{Q}} \circ \theta}$;*
- (δ) *$\hat{v}(A) \subset N(\mathcal{N}_A; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$ и $\mathcal{N}_A \subset N(\hat{v}(A); \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$.*

Из (δ) и (β) легко следует

ЛЕММА 1.4. *Если $f, g: W \rightarrow X$ являются δ -близкими, то $\text{dist}(\hat{v} \circ f, \hat{v} \circ g) \prec \mathcal{N}_\delta \circ \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}$. Обратно, если $\text{dist}(\hat{v} \circ f, \hat{v} \circ g) \prec \mathcal{N}_\delta$, то $\text{dist}(f, g) \prec \delta \circ \hat{\mathcal{Q}}^2 \circ \delta \circ \hat{\mathcal{Q}}$.*

В первой части работы [1; теорема 10.1] было доказано, что каноническое отображение $\hat{v}$ является k -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}$, если $\hat{\mathcal{Q}}$ есть k -разбиение X . Отсюда и из леммы 1.4 непосредственно следует важный результат о выполнимости $\text{ANE}(k)$ -тестов в нервах разбиений:

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $X \cong \nu^k$, и пусть $\delta, \varepsilon \in \text{cov } X$ таковы, что пара $\delta \prec \varepsilon$ удовлетворяет 8-кратному $\text{ANE}_X(k)$ -тесту. Если $\hat{\mathcal{Q}} \prec \delta$ есть k -разбиение X , то пара покрытий $\mathcal{N}_\delta \prec \mathcal{N}_\varepsilon$ удовлетворяет $\text{ANE}_{\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}}(k)$ -тесту.*

1.2. Сжимающий критерий Бинга. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – два полных гомеоморфных пространства ограниченных диаметров. Множество $\mathcal{H}(X, Y)$ всех гомеоморфизмов естественно изучать в одной из следующих топологий:

- (1) топология, порожденная $\sup$ -метрикой

$$\rho_s(f, g) = \sup\{\text{dist}(f(x), g(x)) \mid x \in X\};$$

- (2) “limitation”-топология, в которой базис точки $f \in \mathcal{H}(X, Y)$ образуют множества $\mathcal{V}_\varepsilon$ вида

$$\{g \in \mathcal{H}(X, Y) \mid \text{dist}(g(x), f(x)) < \varepsilon(f(x))\}, \quad \varepsilon \in C(Y, \mathbb{R}^+),$$

или, что эквивалентно, множества $\mathcal{W}_{c_Y}$ вида

$$\{g \in \mathcal{H}(X, Y) \mid \text{dist}(g, f) \prec c_Y\}, \quad c_Y \in \text{cov } Y$$

(здесь $C(Y, \mathbb{R}^+)$ – пространство всех положительных непрерывных функций);

- (3) топология, порожденная гомеоморфной метрикой

$$\rho_h(f, g) = \max\{\rho_s(f, g), \rho_s(f^{-1}, g^{-1})\}.$$

Для компактных пространств все три топологии эквивалентны, причем метрика ρ_h является полной, а равномерный предел гомеоморфизмов, вообще говоря, гомеоморфизмом не является. В некомпактном случае “limitation”-топология неметризуема, а ρ_h не является полной метрикой. Однако $\mathcal{H}(X, Y)$ с “limitation”-топологией обладает свойством Бэра (т.е. счетное пересечение открытых плотных подмножеств является плотным), что легко следует из того, что оно является пространством Choquet.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Топологическое пространство X называется *пространством Choquet*, если для любой точки $x_1 \in X$ и любой ее окрестности $\mathcal{O}(x_1)$ можно индуктивно построить сколь угодно малую окрестность $\mathcal{O}(x_i) \subseteq \mathcal{O}(x_{i-1})$ произвольной точки $x_i \in \mathcal{O}(x_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots$, так, чтобы $\bigcap \{\mathcal{O}(x_i) \mid 1 \leq i < \infty\}$ было одноточечно.

То, что $\mathcal{H}(X, Y)$ с “limitation”-топологией является пространством Choquet, доказывается аналогично [3]. Отметим также, что пространство совершенных UV^{k-1} -отображений из $X \in \text{ANE}(k)$ в Y с “limitation”-топологией тоже является пространством Choquet.

Обычно рассматривают более просто устроенные расширения $\mathcal{H}(X, Y)$, замкнутые относительно равномерной сходимости (если X и Y компактны) и относительно “limitation”-сходимости (если X и Y не компактны). Минимально возможным таким расширением является класс почти гомеоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется (*сильным*) *почти гомеоморфизмом*, если для любого $c_Y \in \text{cov } Y$ (а также для любой окрестности $\mathcal{U}$, $\text{Cl}(\mathcal{N}_f) \subset \mathcal{U} \subset Y$) найдется такой гомеоморфизм $f': X \rightarrow Y$, что $\text{dist}(f, f') \prec c_Y$ (а также $f' = f$ вне $\mathcal{U}^\bullet \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$).¹

¹Точка $y \in Y$ называется *сингулярным значением* совершенного отображения $f: X \rightarrow Y$, если $|f^{-1}(y)| > 1$. Множество всех сингулярных значений отображения f обозначается через $\mathcal{N}_f \subset Y$.

Скажем, что совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ допускает (сильное) сжатие, если для любых $c_X \in \text{cov } X$ и $c_Y \in \text{cov } Y$ (а также для любой окрестности $\mathcal{U}$, $\text{Cl}(\mathcal{N}_f) \subset \mathcal{U} \subset Y$) существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, c_Y -близкий к f , такой, что $f \circ h$ есть c_X -отображение² (а также $h = \text{Id}$ вне $\mathcal{U}^\bullet$).

Почти гомеоморфизмы характеризуются как отображения, допускающие сжатие.

ТЕОРЕМА 1.8 (сжимающий критерий Бинга). *Для совершенных отображений полных пространств свойство допускать (сильное) сжатие и быть (сильным) почти гомеоморфизмом эквивалентны.*

Множеством сингулярных точек $\mathcal{H}_f \subset X$ называется прообраз $f^{-1}(\mathcal{N}_f)$ сингулярных значений. Его дескриптивный тип есть F_σ , что легко следует из приводимого ниже утверждения.

ЛЕММА 1.9. *Если $f: X \rightarrow Y$ совершенно, то для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{N}_f(\varepsilon) = \{y \in Y \mid \text{diam } f^{-1}(y) \geq \varepsilon\} \subset \mathcal{N}_f$ замкнуто в Y .*

Изучим теперь взаимоотношение между сингулярными значениями предельного $g: X \rightarrow Y$ и допредельных $\{f_n: X \rightarrow Y\}$ совершенных отображений.

ТЕОРЕМА 1.10. *Пусть $\{f_n: X \rightarrow Y\}$ равномерно сходится к $g: X \rightarrow Y$, а $A \subset Y$ есть компакт. Тогда $A \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$ в случае, если*

- (4) *А не пересекается с сингулярными значениями $\mathcal{N}_{f_n} \subset Y$ для всех n ;*
- (5) *$\text{dist}(f_n, f_{n+1}) < \delta_n$, где $0 < 2\delta_n < \delta_{n-1}$, и $\text{diam } f_n^{-1}(N(a; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ для всех $a \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существуют $a \in A$ и $x_1, x_2 \in g^{-1}(a)$, $\text{dist}(x_1, x_2) \geq 2^{-n_0}$. В силу выбора $\delta_{n_0} > 0$ для одной из точек $f_{n_0}(x_i)$ (например, $f_{n_0}(x_1)$) имеем $\text{dist}(a, f_{n_0}(x_1)) \geq 3\delta_{n_0}$. Так как $\text{dist}(g, f_{n_0}) < \delta_{n_0} + \delta_{n_0+1} + \dots \leq 2\delta_{n_0}$, то $\text{dist}(a, g(x_1)) \geq \text{dist}(a, f_{n_0}(x_1)) - \text{dist}(f_{n_0}(x_1), g(x_1)) > 0$ – противоречие с $g(x_i) = a$.

1.3. Универсальные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Польское пространство X будем называть *сильно k -универсальным польским* пространством, если любое отображение $\varphi: Z \rightarrow X$ из польского пространства Z , $\dim Z \leq k$, сколь угодно близко аппроксимируется замкнутым вложением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Пусть D^k есть k -мерный диск, а D – их счетное дискретное объединение $\bigsqcup \{(D^k)_i \mid 1 \leq i < \infty\}$. Пространство X называется *дискретно (локально конечно) D^k -аппроксимируемым*, если любое отображение $\varphi: D \rightarrow X$ сколь угодно близко аппроксимируется отображением $\tilde{\varphi}: D \rightarrow X$, для которого семейство $\{\tilde{\varphi}((D^k)_i) \mid 1 \leq i < \infty\}$ дискретно (локально конечно).

Для любого пространства понятия дискретной и локально конечной D^k -аппроксимируемости эквивалентны [4]; для польских $\text{ANE}(k)$ -пространств свойства сильной k -универсальности и дискретной D^k -аппроксимируемости эквивалентны [5; с. 127].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Замкнутое множество F пространства X называется

- (а) *Z_k -множеством, $0 \leq k < \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого отображения $\varphi: D^k \rightarrow X$ k -диска существует отображение $\tilde{\varphi}: D^k \rightarrow X \setminus F$, ε -близкое к φ ;*

²То есть $h(f^{-1}(y)) \prec c_X$ для всех $y \in Y$.

- (b) Z -множеством, если для любого покрытия $\omega \in \text{cov } X$ существует отображение $f: X \rightarrow X \setminus F$, ω -близкое к Id ;
- (c) *сильным Z -множеством*, если для любого покрытия $\omega \in \text{cov } X$ существуют окрестность U , $F \subset U$, и отображение $f: X \rightarrow X \setminus U$, ω -близкое к Id .

Известно [5], что в k -мерном польском сильно k -универсальном $\text{ANE}(k)$ -пространстве X понятия Z_k -, Z - и сильного Z -множества совпадают. Теперь изучим возможность “конструктивного” описания Z -множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Счетное дизъюнктивное объединение $\bigsqcup F_i \subset X$ компактных подмножеств F_i называется Z_k -детектором в X , если любое замкнутое подмножество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми F_i , является Z_k -множеством.

Аналогично определяется Z -детектор. Эти понятия (без названия) и доказательство теоремы их существования восходят к [3], [6]. Счетное семейство $\{\varphi_i: D^k \hookrightarrow X\}$ вложений k -дисков D^k называется *дизъюнктивным (плотным)*, если любые их образы не пересекаются (соответственно если $\{\varphi_i\}$ плотно в $C(D^k, X)$). Скажем, что семейство $\{\varphi_i\}$ порождает Z_k -детектор, если $\bigsqcup \{\varphi_i(D^k)\}$ есть Z_k -детектор в X .

ТЕОРЕМА 1.15 (о существовании детекторов). Пусть X есть сильно k -универсальное польское $\text{ANE}(k)$ -пространство. Тогда

- (d) семейство $\{\varphi_i\}$ вложений D^k в X порождает Z_k -детектор в том случае, когда $\{\varphi_i\}$ является плотным и дизъюнктивным семейством;
- (e) существует плотное и дизъюнктивное семейство вложений D^k в X .

Напомним, что в [1] было установлено существование универсального Z -детектора D в $X = \nu^k$ (а именно, $D \cap F$ является Z -детектором в F для любого $F \in \mathcal{C}_X$).

1.4. Редуцированная склейка. Если заданы совершенное отображение $F: X \rightarrow W$ полных метрических пространств и замкнутое подмножество $Y \subset W$, то они порождают частичное отображение $X \hookrightarrow A \rightleftharpoons F^{-1}(Y) \xrightarrow{f \equiv F \upharpoonright_A} Y$. Редуцированной склейкой $X \cup_F Y$ отображения F по множеству Y называется склейка пространств X и Y по отображению f [7]. Несложно проверить, что $X \cup_F Y$ есть полное метрическое пространство.

Обозначим через $\mathcal{F}$ естественное отображение X в редуцированную склейку $X \cup_F Y$, а через $\mathcal{G}$ – отображение $X \cup_F Y \mapsto W$, заданное равенствами $\mathcal{G} = F$ на $X \setminus A$ и $\mathcal{G} = \text{Id}_Y$ на Y . Ясно, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ непрерывны и совершенны, а $F = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Отображение $\mathcal{G}$ устроено проще F , поскольку множество сингулярных значений $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ равно $\mathcal{N}_F \setminus Y$. Приведем более сложные свойства редуцированной склейки.

ТЕОРЕМА 1.16. Пусть $F: X \rightarrow W$ есть совершенное UV^{k-1} -отображение $\text{ANE}(k)$ -пространств, $Y \subset W$ – замкнутое $\text{ANE}(k)$ -подпространство. Тогда

- (i) $\mathcal{F}$ есть UV^{k-1} -отображение;
- (ii) редуцированная склейка $X \cup_F Y$ есть полное $\text{ANE}(k)$ -пространство;
- (iii) $\mathcal{G}$ есть UV^{k-1} -отображение.

Если дополнительно известно, что $Y \subset W$ есть Z_k -компакт, то Y является Z_k -компактом в $X \cup_F Y$, причем $Y \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$.

Сформулированное утверждение является следствием теоремы о делении UV^{k-1} -отображений:

ТЕОРЕМА 1.17. Пусть UV^{k-1} -отображение $f: X \rightarrow Y$ между $ANE(k)$ -пространствами представлено в виде композиции $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$, где $g \in UV^{k-1}$ и $Z \in ANE(k)$. Тогда $h \in UV^{k-1}$.

Частичное совершенное отображение $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y$ естественным образом порождает отображение $\mathcal{F}: X \rightarrow X \cup_f Y$ в склейку $X \cup_f Y$. Если f есть гомеоморфизм на свой образ $f(A) = \text{Cl } f(A) \subset Y$, то склейка называется отождествлением X и Y по A и $f(A)$ и будет обозначаться через $X \cup Y$ (если не возникает путаницы). Исследуем экстензорные свойства склеек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.18. Если $A \in AE(k)$ замкнуто и в X , и в Y , а отождествление $X \cup Y \in AE(k)$, то $X, Y \in AE(k)$.

ТЕОРЕМА 1.19. Пусть $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y$ есть частичное совершенное отображение полных метрических пространств. Если $X, Y \in AE(k)$, а $A \in AE(k-1)$, то $X \cup_f Y \in AE(k)$.

Эта теорема доказана для компактных пространств в [8]. Следующее утверждение является уточнением теоремы 1.19, если дополнительно известно, что $A \in AE(k)$, а $f \in UV^{k-1}$.

ТЕОРЕМА 1.20. Пусть $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y \in UV^{k-1}$ есть частичное совершенное отображение полных пространств. Если $X, Y, A \in AE(k)$, то естественное отображение $\mathcal{F}: X \rightarrow X \cup_f Y \in UV^{k-1}$.

Из теоремы 1.20 и теоремы 1.17 о делении UV^{k-1} -отображений легко следует

ТЕОРЕМА 1.21. Пусть частичное совершенное отображение $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y \in UV^{k-1}$ полных $AE(k)$ -пространств продолжается до $F: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$. Тогда естественное разложение F в композицию $X \xrightarrow{\mathcal{F}} X \cup_f Y \xrightarrow{g} Y$ состоит из UV^{k-1} -отображений.

Глава 1. Теорема о незаузленности

Приступая к доказательству теоремы о незаузленности, фиксируем в этой главе $AE(k)$ -пространство $X = \nu^k$, снабженное двумя системами (возможно, совпадающими) абстрактных ν -конструктивных множеств $\mathcal{C}_X$ и $\hat{\mathcal{C}}_X$ и совершенную k -резольвенту $f: X \rightarrow Y$ (т.е. UV^{k-1} -отображение из $X = \nu^k$ в польское пространство $Y \in AE(k)$). Пусть также задано k -разбиение $\hat{\mathcal{Q}} = \{\hat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $(X, \hat{\mathcal{C}}_X)$ с полным нервом. Ясно, что

(†) каноническое отображение $\hat{v}: X \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ есть k -эквивалентность относительно $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}} = \{\hat{\text{St}}(\hat{q}) \mid \hat{q} \in \hat{\mathcal{Q}}\} \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ (см. [1; § 10]).

§ 2. $\mathcal{S}_m$ -приемлемые тройки

Пусть фиксированы покрытия $\bar{c}_Y \in \text{cov } Y$ и $\bar{s}_X \in \text{cov } X$. В силу предложения 1.2 существуют метрика $\rho(x, x')$, совместимая с топологией на X , и метрика $d(y, y')$, совместимая с топологией на Y , удовлетворяющие UV^{k-1} -тесту относительно $\{f; \bar{s}_X, \bar{c}_Y\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{Y}(1) \prec \bar{c}_Y$ и $\mathcal{X}(1) \prec \bar{s}_X$, где $\mathcal{Y}(\alpha) = \{N_d(y; \alpha) \mid y \in Y\}$, $\alpha > 0$, а $\mathcal{X}(\alpha) = \{N(x; \alpha) \mid x \in X\}$. Воспользуемся теоремой 1.5, чтобы решить вопрос о выполнимости $\text{ANE}(k)$ -тестов в $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Существует такая константа $a > 0$, что если $0 < a\delta < \varepsilon < 1$ и $f(\hat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}(\delta)$, то пара покрытий $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}(\delta)\bullet} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}(\varepsilon)\bullet}$ удовлетворяет $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})}(k)$ -тесту.³*

Следствием теоремы об открытости класса k -эквивалентностей [1; теорема 10.6] является следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $Z \in \text{ANE}$, и пусть $\eta, \theta \in \text{cov } Z$ таковы, что пара покрытий $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 9-кратному $\text{ANE}_Z(k)$ -тесту. Если $\varphi': X \rightarrow Z$ есть k -эквивалентность относительно θ , то любое отображение $\varphi: X \rightarrow Z$, θ -близкое к φ' , является k -эквивалентностью относительно η .*

С помощью предложения 2.1, теоремы 2.2 и условия $(\dagger)$ можно оценить близость отображения к $\hat{v}$, которая гарантирует ему сохранение свойства k -эквивалентности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Существует такая константа⁴ $b > a$, что если $0 < b\delta < \varepsilon < 1$, а также $f(\hat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}(\delta)$, то любое отображение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$, $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}(\delta)\bullet}$ -близкое к $\hat{v}$, является k -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}(\varepsilon)\bullet}$.*

Введем в рассмотрение быстро убывающую последовательность чисел

$$\mathcal{S}_p = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{\pi p}\},$$

где $p = k(k+1)/2 + 1$, $\pi = 5$ и $(b+100)\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < 1$ для всех $0 \leq n < \pi p$, и ее подпоследовательности

$$\mathcal{S}_m = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{\pi m}\},$$

$0 \leq m \leq p$. Так как метрики на X и Y зависят только от выбора отображения f и покрытий $\bar{s}_X$ и $\bar{c}_Y$, то и последовательность $\mathcal{S}_p$ определяется ими.

Через $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{Y}_n$, $0 \leq n \leq \pi p$, обозначим покрытия $\mathcal{X}(\varepsilon_n) \in \text{cov } X$ и $\mathcal{Y}(\varepsilon_n) \in \text{cov } Y$ соответственно. Ясно, что $\mathcal{Y}_n^{20} \prec \mathcal{Y}_{n-1}$ и $\mathcal{X}_n^{20} \prec \mathcal{X}_{n-1}$. Далее, на k -разбиение $\hat{\mathcal{Q}}$ наложим дополнительное условие:

$$(1) \quad \hat{\mathcal{Q}} \prec \mathcal{X}_{\pi p} \text{ и } f(\hat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}_{\pi p} \text{ (и, следовательно, } f(\hat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}_0 \prec \mathcal{Y}(1) \prec \bar{c}).$$

По предложению 2.1 пара покрытий $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_n\bullet} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{n-1}\bullet}$ удовлетворяет $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})}(k)$ -тесту, а также заключению предложения 2.3. Фиксируем также открытое подмножество $\mathcal{V} \subset Y$, ручное (относительно $\mathcal{C}_X$) Z -множество $Z_1 \subset X$ и множество $Z_2 \subset X$, которые совпадают вне $\mathcal{V}^\bullet$, а также отображение $h: Z_1 \rightarrow Z_2$, тождественное вне $\mathcal{V}^\bullet$.

³Всюду в дальнейшем через $A^\bullet$ обозначается прообраз $f^{-1}(A)$.

⁴Точные значения встречающихся в дальнейшем констант могут быть вычислены, хотя для нас важен только факт их существования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть разбиение $(X, \mathcal{C}_X)$, T – трансформация, а β – аккомпанемент T , называется $\mathcal{S}_m$ -приемлемой, $0 \leq m < p$, если

- (i) β является k -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet$;
- (ii) $\text{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet$;
- (iii) $\mathcal{Q}_{\pi m} = \{q \in \mathcal{Q} \mid f(q) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi m}) = \emptyset\}$ содержится в $\widehat{\mathcal{Q}}$ и $T|_{\mathcal{Q}_{\pi m}} = \text{Id}$;
- (iv) $\beta|_{Z_1} = \widehat{v} \circ h$;
- (v) $\{\beta(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi m+1}}$ для всех $y \in Y$.

В качестве важного следствия из (ii) и (iv) имеем:

- (2) $f \circ h$ и $f|_{Z_1}$ являются $\mathcal{Y}_{\pi m-1}$ -близкими.

Изучим свойства $\mathcal{S}_m$ -приемлемых троек, связанные с близостью элементов $\mathcal{Q}$ и $\widehat{\mathcal{Q}}$, соответствующих при трансформации T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ является $\mathcal{S}_m$ -приемлемой тройкой, то

- (3) $q \subset N(Tq; \mathcal{Y}_{\pi m}^\bullet)$ для любого $q \in \mathcal{Q}$;
- (4) $f(\mathcal{Q}) \prec \mathcal{Y}_{\pi m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet$ и $\beta(q) \subset \mathcal{N}_{Tq}$, то $\widehat{v}(q) \subset N(\beta(q); \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet) \subset N(\mathcal{N}_{Tq}; \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet)$. В силу 1.3(δ) и 1.3(γ) имеем

$$N(\mathcal{N}_{Tq}; \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet) \subset N(\widehat{v}(Tq); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}} \circ \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet) \subset N(\widehat{v}(Tq); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}^2 \circ \mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet).$$

Из полученных вложений следует $\widehat{v}(q) \subset N(\widehat{v}(Tq); \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}^2 \circ \mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet)$. Отсюда и из 1.3(β) следует $q \subset N(Tq; \widehat{\mathcal{Q}}^4 \circ \mathcal{Y}_{\pi m+1}^\bullet \circ \widehat{\mathcal{Q}})$ – свойство (3) доказано.

Докажем (4). Из $\text{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet$ и 1.3(γ) следует

$$\widehat{v}(\mathcal{Q}) \prec \text{St}(\beta(\mathcal{Q}); \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet) \prec \text{St}(\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}; \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet) \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}^2 \circ \mathcal{Y}_{\pi m+1}}^\bullet.$$

Из 1.3(α) следует $\mathcal{Q} \prec \text{St}(\widehat{\mathcal{Q}}^2 \circ \mathcal{Y}_{\pi m+1}^\bullet; \widehat{\mathcal{Q}})$. Так как $f(\widehat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}_{\pi m+1}$ в силу (1), то отсюда следует, что $f(\mathcal{Q}) \prec \mathcal{Y}_{\pi m}$.

§ 3. Перестройки $\mathcal{S}_m$ -приемлемых троек

Покажем, что приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ с достаточно мелким k -разбиением $\mathcal{Q}$ порождает гомеоморфизм, аппроксимативно продолжающий h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ есть $\mathcal{S}_0$ -приемлемая тройка, в которой $\mathcal{Q}$ – k -разбиение $(X, \mathcal{C}_X)$. Пусть выбрана окрестность $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \subset Y$, так, что $N(\mathcal{V}; (\bar{c}_Y)^2) \subset \mathcal{U}$. Тогда существует такой гомеоморфизм $\tilde{h}: X \rightarrow X$, что

- (α) условие аппроксимативного продолжения: $\text{dist}(\tilde{h}|_{Z_1}, h) \prec \widehat{\mathcal{Q}}^4$;
- (β) $\text{dist}(f \circ \tilde{h}, f) \prec \bar{c}^4$;
- (γ) $\tilde{h} = \text{Id}$ на $X \setminus \mathcal{U}^\bullet$;
- (δ) $\tilde{h}(Z_1) \subset X$ есть ручное (относительно $\mathcal{C}_X$) Z -множество;
- (ε) условие сжатия слоев: $\tilde{h}(f^{-1}(y)) \prec \bar{s}_X$ для любого $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу постулата о гомеоморфизме [1; § 14] существует такой гомеоморфизм $\tilde{h}: X \rightarrow X$, что $\tilde{h}(q) \subseteq N(Tq; \hat{\mathcal{Q}})$ для всех $q \in \mathcal{Q}$ и выполнено условие (δ).

Проверим оставшиеся свойства. Возьмем точку $z \in Z_1 \cap q$, где $q \in \mathcal{Q}$. Поскольку $\beta|_{Z_1} = \hat{v} \circ h$, то $\hat{v}(h(z)) \in \mathring{\text{St}}(Tq)$. Поэтому $h(z) \in N(Tq; \hat{\mathcal{Q}}^2)$ и, стало быть, $Tq \subset N(h(z); \hat{\mathcal{Q}}^3)$. В итоге имеем $\tilde{h}(z) \in \tilde{h}(q) \subset N(Tq; \hat{\mathcal{Q}}) \subset N(h(z); \hat{\mathcal{Q}}^4)$ и $\text{dist}(\tilde{h}|_{Z_1}, h) \prec \hat{\mathcal{Q}}^4$ – свойство (α) доказано.

Пусть $x \in q$, где $q \in \mathcal{Q}$. Из 2.5(3) легко следует $Tq \subset N(q; \mathcal{Y}_0^\bullet)$ и, значит, $f(Tq) \subset N(f(q); \mathcal{Y}_0)$. В силу 2.5(4) и условия (1), § 2, $f(\mathcal{Q}) \prec \mathcal{Y}_0 \prec \bar{c}$ и поэтому $f(\mathcal{Q}) \prec \bar{c}$. Отсюда легко следует

- (ζ) $f(\tilde{h}(x)) \in f(N(Tq; \hat{\mathcal{Q}})) \subset N(f(Tq); f(\hat{\mathcal{Q}})) \subset N(f(Tq); \bar{c}) \subset N(f(q); \mathcal{Y}_0 \circ \bar{c}) \subset N(f(x); \bar{c}^4)$;
- (η) семейство $\mathcal{R} \Rightarrow \{q \in \mathcal{Q} \mid f(q) \cap N(\mathcal{V}; \bar{c}_Y) = \emptyset\}$ содержится в $\mathcal{Q}_0 = \{q \in \mathcal{Q} \mid f(q) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_0) = \emptyset\}$, а его тело $X_0 \Rightarrow \cup \mathcal{R} \in \mathcal{C}_X^k$ расположено следующим образом: $\text{Cl}(f^{-1}(\mathcal{V})) \subset X \setminus X_0 \subset \mathcal{W}^\bullet$.

Свойство (β) легко следует из (ζ). Из (η) и из свойства 2.4(iii) следует $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{Q}}$ и $T|_{X_0} = \text{Id}$.

Поскольку $\text{Id}_{X_0}: X_0 \rightarrow X_0$ является частичным сильным аккомпанементом T , то в силу постулата о гомеоморфизме $\tilde{h}: X \rightarrow X$ можно выбрать с дополнительным условием: $\tilde{h} = \text{Id}$ на X_0 . Отсюда и из (ζ) легко следует (γ).

Так как $\beta(q) \subset \mathcal{N}_{T(q)}$ и $\hat{v} \circ h(q) \subset \hat{v}(N(T(q); \hat{\mathcal{Q}})) \subset N(\mathcal{N}_{T(q)}; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$, то

$$\text{dist}(\beta, \hat{v} \circ h) \prec \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2.$$

Следовательно,

$$\hat{v} \circ h(f^{-1}(y)) \subset N(\beta(f^{-1}(y)); \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2) \subset W \in \mathcal{X}_1 \circ \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2 \prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_1 \circ \hat{\mathcal{Q}}}^4.$$

Поскольку в силу 1.3(α) имеем $\hat{v}^{-1}(W) \subset V \in \mathcal{X}_1 \circ \hat{\mathcal{Q}}^5$, а $\mathcal{X}_1 \circ \hat{\mathcal{Q}}^6 \prec \mathcal{X}_0 \prec \bar{s}_X$, то $h(f^{-1}(y)) \subset \hat{v}^{-1}(\hat{v} \circ h(f^{-1}(y))) \subset \hat{v}^{-1}(W) \subset V' \in \bar{s}_X$ – свойство (ε) доказано.

В последующих двух предложениях описывается механизм, позволяющий улучшать свойства связности элементов разбиения $\mathcal{Q}$ в приемлемой тройке $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ за счет относительного ухудшения контроля над трансформацией T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любого $m < p - 1$ и для любой $\mathcal{S}_{m+1}$ -приемлемой тройки $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, в которой $\mathcal{Q}'$ есть l_r -разбиение X , где $r+l \leq k$, $l < k$, существует $\mathcal{S}_m$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть l_{r+1} -разбиение X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\theta \Rightarrow \mathcal{N}_{\pi(m+1)+2}^\bullet$ и $\eta \Rightarrow \mathcal{N}_{\pi(m+1)-2}^\bullet \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$. Очевидно, что $\mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}}^2 \prec \mathcal{N}_{\pi p-1}^\bullet \prec \theta$, а из предложения 2.1 следует, что $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})}(k)$ -тесту. Применим теорему о сильной перестройке l_r -разбиения в l_{r+1} -разбиение [1; теорема 18.1] к тройке $(\mathcal{Q}', T', \beta')$ и ручному Z -множеству $Z_1 \subset X$. В результате получим тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть l_{r+1} -разбиение X , T – трансформация разбиений, а β – аккомпанемент T , такую, что

- (1) трансформации T и T' являются Z_1 -эквивалентными, а также $\beta = \beta'$ на Z_1 ;
- (2) β является k -эквивалентностью относительно η^2 ;

$$(3) \text{ dist}(\beta, \beta') \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2;$$

$$(4) \text{ если } q' \in \mathcal{Q}' \text{ и } \beta'(q') \cap N(\mathcal{N}_{\mathfrak{E}}; \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}) = \emptyset, \text{ то } q' \in \mathcal{Q} \text{ и } T(q') = T'(q').$$

Напомним, что $\mathfrak{E} \subset X$ есть объединение тел плохих наборов, а набор из $r + 1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_s} \in \widehat{\mathcal{Q}}$, $\widehat{q}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widehat{q}_{\alpha_{r+1}} \neq \emptyset$, называется *плохим*, если $\bigcap \{q'_{\alpha_s} \mid 1 \leq s \leq r + 1\} \notin \text{AE}(l)$.

Из условия (2) следует, что β является k -эквивалентностью относительно $\eta^2 \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)-3}^\bullet} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}^\bullet}$, что доказывает 2.4(i) для β . Из (1) и 2.4(iv) для β' легко следует свойство 2.4(iv) для β : $\beta|_{Z_1} = \widehat{v} \circ h$. Свойство 2.4(ii) для β справедливо, так как в силу (3), 2.4(ii) для β' и леммы 1.3 имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}(\beta, \widehat{v}) &\prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2 \circ \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)+1}^\bullet} \prec \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}_3} \circ \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)+1}^\bullet} \\ &\prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{p-1}^\bullet} \circ \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)+1}^\bullet} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi m+1}^\bullet}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Для тройки $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ справедливо свойство 2.4(iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Пусть $f(q) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi m}) = \emptyset$ для $q \in \mathcal{Q}$, но $q \notin \widehat{\mathcal{Q}}$. Возьмем любой элемент $q' \in \mathcal{Q}'$, $q' \subset N(q; (\mathcal{Q}')^4)$. Так как в силу 2.5(4) $f(\mathcal{Q}') \prec \mathcal{Y}_{\pi(m+1)}$ и $\mathcal{Y}_{\pi(m+1)}^8 \prec \mathcal{Y}_{\pi m}$, то

$$f(q') \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi(m+1)}) \subset N(f(q); \mathcal{Y}_{\pi(m+1)}^4) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi(m+1)}) = \emptyset$$

и, следовательно, в силу 2.4(iii) для $\mathcal{S}_{m+1}$ -приемлемой тройки $(\mathcal{Q}', T', \beta')$ имеем $q' = T'(q') \in \widehat{\mathcal{Q}}$. Отсюда видно, что если набор из $r + 1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_i} \in \widehat{\mathcal{Q}}$, $q'_{\alpha_i} \in \mathcal{Q}'$, $q'_{\alpha_i} \subset N(q; (\mathcal{Q}')^3)$, то этот набор является хорошим. Отсюда следует, что если $q' \in \mathcal{Q}'$, $q' \cap q \neq \emptyset$, то $\beta'(q') \cap N(\mathcal{N}_{\mathfrak{E}}; \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}) = \emptyset$. Следовательно, в силу (4) и только что отмеченного факта имеем $q' \in \mathcal{Q}$ и $q' \in \widehat{\mathcal{Q}}$. Так как $q \notin \widehat{\mathcal{Q}}$, то q и q' – различные элементы $\mathcal{Q}$ и, следовательно, $\dim(q' \cap q) \leq k - 1$. Мы получили противоречие с тем, что $\dim N(q; \mathcal{Q}') = k$. Лемма 3.3 доказана.

В силу 2.4(v) и условия (3) имеем

$$\begin{aligned} \{\beta(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\} &\prec \text{St}(\{\beta'(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\}; \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2) \\ &\prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi(m+1)+1}} \circ \mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^2 \prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi m+1}}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство предложения 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Для любого $m < p - 1$ и для любой $\mathcal{S}_{m+1}$ -приемлемой тройки $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, в которой $\mathcal{Q}'$ есть l -разбиение X , где $0 \leq l < k$, существует $\mathcal{S}_m$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть $(l + 1)_1$ -разбиение X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\theta \equiv \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)+2}^\bullet}$ и $\eta \equiv \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(m+1)-3}^\bullet} \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$. Очевидно, что пара вписанных покрытий $\theta^{32} \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\text{ANE}_{\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})}(k)$ -тесту и $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$, где $\omega \equiv \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi(m+1)}^\bullet}$. Применим теорему о сильной перестройке l -разбиения в $(l + 1)_1$ -разбиение [1; теорема 19.1] к тройке $(\mathcal{Q}', T', \beta')$ и ручному Z -множеству Z_1 . В результате получим тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть $(l + 1)_1$ -разбиение X , T – трансформация разбиений, а β – аккомпанемент T , такую, что

- (i) β является k -эквивалентностью относительно η^2 и совпадает с β' на Z_1 ;
- (ii) $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \theta^{32}$;

- (iii) если $q' \in \mathcal{Q}'$ и $\beta'(q') \cap N(\mathcal{N}; \theta^{14}) = \emptyset$, где $\mathfrak{C} \subset \widehat{X}$ есть тело плохого семейства $\{\widehat{q} \mid q' = (T')^{-1}(\widehat{q}) \text{ не является } l\text{-связным}\} \subset \widehat{\mathcal{Q}}$, то $q' \in \mathcal{Q}$ и $T(q') = T'(q')$;
- (iv) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$ (так как $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}}^5 \prec \omega$).

Из (i) и 2.4(iv) для β' легко следует свойство 2.4(iv) для β . Из (ii) следует, что β является k -эквивалентностью относительно $\eta^2 \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}^\bullet, \pi(m+1)-4} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}^\bullet, \pi m+1}$, что доказывает 2.4(i) для β . Свойство 2.4(ii) для β справедливо, так как в силу (ii) и 2.4(ii) для β' имеем

$$\text{dist}(\beta, \widehat{\nu}) \prec \theta^{32} \circ \mathcal{N}_{\pi(m+1)+1}^\bullet \prec \mathcal{N}_{\pi(m+1)-2}^\bullet \prec \mathcal{N}_{\pi m+1}^\bullet.$$

ЛЕММА 3.5. Для тройки $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ справедливо свойство 2.4(iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Пусть $f(q) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi m}) = \emptyset$ для $q \in \mathcal{Q}$, но $q \notin \widehat{\mathcal{Q}}$. Возьмем любой элемент

$$q' \in \mathcal{P} \Rightarrow \{q' \in \mathcal{Q}' \mid q' \subset N(q; \mathcal{Y}_{\pi(m+1)}^\bullet \circ (\mathcal{Q}')^4)\} \subset \mathcal{Q}'.$$

Аналогично лемме 3.3 имеем $q' = T'(q') \in \widehat{\mathcal{Q}}$. Тем самым, все элементы $T'(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \subset \widehat{\mathcal{Q}}$ являются l -связными, а стало быть, семейства $T'(\mathcal{P})$ и $\{\widehat{q} \mid q' = (T')^{-1}(\widehat{q}) \text{ не является } l\text{-связным}\} \subset \widehat{\mathcal{Q}}$ не пересекаются. Отсюда и из $\theta = \mathcal{N}_{\pi(m+1)+2}^\bullet$ следует, что условие (iii) выполнено, а следовательно, если $q' \cap q \neq \emptyset$ для некоторого $q' \in \mathcal{Q}'$, то $q' \in \mathcal{Q}$ и $q' \in \widehat{\mathcal{Q}}$. Так как $q \notin \widehat{\mathcal{Q}}$, то q и q' – различные элементы $\mathcal{Q}$ и, следовательно, $\dim(q' \cap q) \leq k-1$. Мы получили противоречие с тем, что $\dim N(q; \mathcal{Q}') = k$.

Лемма 3.5 доказана.

Свойство 2.4(v) для β справедливо, так как в силу (iv) имеет место вписанность $\{\beta(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\} \prec \omega^8 \prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi m+1}}$.

Предложение 3.4 доказано.

Если теперь $k(k+1)/2$ раз поочередно применять предложения 3.2 и 3.4, то свойство (-1) -связности разбиения $\mathcal{Q}'$ в начальной приемлемой тройке можно улучшить до свойства $(k-1)$ -связности разбиения $\mathcal{Q}$ в финальной приемлемой тройке. Как результат этого мы получаем более сильное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Для любой $\mathcal{S}_{p-1}$ -приемлемой тройки $(\mathcal{Q}', T', \beta')$ существует $\mathcal{S}_0$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть k -разбиение X .

§ 4. Теорема о ручной незаузленности

Напомним, что $f: X \rightarrow Y$ есть совершенное UV^{k-1} -отображение из $X = \nu^k$ в польское пространство $Y \in \text{AE}(k)$. Пусть фиксированы произвольные покрытие $c \in \text{cov } Y$ и окрестности $\mathcal{V} \Subset \mathcal{W} \subset Y$, а покрытие $\bar{c} \in \text{cov } Y$ выбрано исходя из условий $N(\mathcal{V}; (\bar{c})^2) \subset \mathcal{W}$ и $(\bar{c})^4 \prec c$ ($\bar{c} = c$, если $c = \{Y\}$, а $\mathcal{V} = \mathcal{W} = Y$). Рассмотрим последовательность $\mathcal{S}_p = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{\pi p}\}$, $p = k(k+1)/2 + 1$, из § 2, определяемую покрытием $\bar{c}$ (покрытие $\bar{s}$ берем тривиальным). В результате приведенных построений возникает покрытие $c' \equiv \mathcal{Y}_{\pi p} \in \text{cov } Y$. Если $c = \{Y\}$, а $\mathcal{V} = \mathcal{W} = Y$, то полагаем $c' = \{Y\}$.

ТЕОРЕМА 4.1 (о ручной незаузленности). Если $Z_1, Z_2 \subset X$ – ручные Z -множества (относительно $\mathcal{C}_X$ и $\widehat{\mathcal{C}}_X$ соответственно), совпадающие вне $\mathcal{V}^\bullet \equiv f^{-1}(\mathcal{V})$, а $h: Z_1 \rightarrow Z_2$, $\text{dist}(h, \text{Id}) \prec (c')^\bullet$, – гомеоморфизм, тождественный

вне $\mathcal{V}^\bullet$, то существует такой гомеоморфизм $\hat{h}: X \rightarrow X$, продолжающий h , что

- (1) $\text{dist}(\hat{h}, \text{Id}) \prec c^\bullet$;
- (2) $\hat{h} = \text{Id}_X$ вне $\mathcal{U}^\bullet$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дословно повторяя рассуждения из предыдущего параграфа, мы можем получить результаты о перестройке $\mathcal{S}_m$ -приемлемых троек в ситуации, когда нет контроля за сжатием слоев, а k -резольвента f не обязательно совершенна. Тем самым, теорема 4.1, как и последующие теоремы о незаузленности, справедлива для (не обязательно совершенных) k -резольвент. Однако для наших целей достаточно приводимого ниже более слабого результата.

Теорема 4.1 есть следствие аппроксимативной версии теоремы о незаузленности. Доказательство этой редукции аналогично [6; 3.1.1] и оставляется читателю.

ТЕОРЕМА 4.2 (аппроксимативная теорема о незаузленности). *Если $Z_1, Z_2 \subset X$ – ручные Z -множества (относительно $\mathcal{C}_X$ и $\hat{\mathcal{C}}_X$ соответственно), совпадающие вне $\mathcal{V}^\bullet \Leftarrow f^{-1}(\mathcal{V})$, а $h: Z_1 \rightarrow Z_2$, $\text{dist}(h, \text{Id}) \prec (c')^\bullet$, – гомеоморфизм, тождественный вне $\mathcal{V}^\bullet$, то для любого $\mu \in \text{cov } X$ существует такой гомеоморфизм $\tilde{h}: X \rightarrow X$, что будут выполнены условия (1), (2) из теоремы 4.1 (с естественной заменой $\hat{h}$ на $\tilde{h}$), а также*

- (3) условие аппроксимативного продолжения: $\text{dist}(\tilde{h}|_{Z_1}, h) \prec \mu$;
- (4) $\tilde{h}(Z_1) \subset X$ есть ручное Z -множество (относительно $\hat{\mathcal{C}}_X$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Пусть k -разбиение $\hat{\mathcal{Q}}$ пространства X , удовлетворяющее условию (1) из § 2, таково, что $(\hat{\mathcal{Q}})^4 \prec \mu$. Оценим близость канонического отображения $\hat{v}|_{Z_1}$ и $\hat{v} \circ h$.

ЛЕММА 4.3. $\text{dist}(\hat{v}|_{Z_1}, \hat{v} \circ h) \prec \mathcal{N}_{\pi p-1}^\bullet$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Так как

$$\text{dist}(h, \text{Id}) \prec (c')^\bullet = \mathcal{Y}_{\pi p}^\bullet,$$

то $\{x, h(x)\} \subset U^\bullet$, где $U \in \mathcal{Y}_{\pi p}$. Из 1.3(δ) следует $\hat{v}(x) \in N(\mathcal{N}_U^\bullet; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$ и $\hat{v}(h(x)) \in N(\mathcal{N}_U^\bullet; \mathcal{N}_{\hat{\mathcal{Q}}})$, что и доказывает принадлежность $\{\hat{v}(x), \hat{v}(h(x))\}$ элементу $\mathcal{N}_{\pi p-1}^\bullet$.

В силу приводимого ниже результата существует $\mathcal{S}_{p-1}$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, которая с помощью предложения 3.6 перестраивается в $\mathcal{S}_0$ -приемлемую тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ с k -разбиением $\mathcal{Q}$. Теперь доказательство теоремы 4.2 следует из предложения 3.1, примененного к $(\mathcal{Q}, T, \beta)$.

Осталось разобрать вопрос о существовании приемлемых троек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. $\mathcal{S}_{p-1}$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$ существует в каждом из следующих случаев:

- (i) $\bar{s}_X \in \text{cov } X$ состоит из одного элемента;
- (ii) $\mathcal{H}_f \subset X$ является счетным объединением ручных Z -множеств, $Z_1 = Z_2 = \emptyset$, а $\mathcal{V} = Y$.⁵

⁵Ясно, что условия 2.4(v) (в случае 4.4(i)) и 2.4(iii), (iv) (в случае 4.4(ii)) оказываются тривиально выполненными.

Последний случай важен при доказательстве теоремы 6.2 о совершенном σZ -сжатии и устанавливается в § 6. Для упрощения доказательства предложения 4.4 приведем ряд вспомогательных фактов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Если отображение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ таково, что $\beta(X)$ пересекается с любым непустым $\bigcap \mathring{\text{St}}\langle\widehat{q}_i\rangle$, то β является аккомпанементом некоторой трансформации $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$.*

Будем называть T из предложения 4.5 *естественной трансформацией*, порожденной отображением β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.5. С помощью аксиомы конфинальности построим разбиение $\mathcal{Q}' = \{q'_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ пространства Небелинга X так, чтобы $\beta(\mathcal{Q}') \prec \{\mathring{\text{St}}\langle\widehat{q}\rangle \mid \widehat{q} \in \widehat{\mathcal{Q}}\}$. Если дополнительно принять во внимание условие предложения, то возможно наделить $\mathcal{Q}'$ еще одним свойством:

- (5) для любого $A' \subset A$, $\widehat{q}_{A'} \neq \emptyset$, существует такая биекция индексных подмножеств $\varphi(A'): A' \rightarrow \Gamma(A') \subset \Gamma$, $q'_{\Gamma(A')} \neq \emptyset$, что $\beta(q'_{\varphi(A')(\alpha)}) \subset \mathring{\text{St}}\langle\widehat{q}_\alpha\rangle$ для всех $\alpha \in A'$, а также $\Gamma(A') \cap \Gamma(A'') = \emptyset$ для всех $A' \neq A''$.

Легко видеть, что отображение $T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, заданное правилом

- (6) $T'(q')$ есть один из (многих) элементов $\widehat{q} \in \widehat{\mathcal{Q}}$, для которого $\beta(q') \subseteq \mathring{\text{St}}\langle\widehat{q}\rangle$, является сюръективным соответствием разбиений, а β является его аккомпанементом. С помощью (5) соответствие T' можно подчинить также следующему условию:

- (7) для любых $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathcal{Q}}$, $\bigcap \{\widehat{q}_i \mid 0 \leq i \leq t\} \neq \emptyset$, существуют такие элементы $q'_i \in \mathcal{Q}'$, $\bigcap \{q'_i \mid 0 \leq i \leq t\} \neq \emptyset$, что $T'(q'_i) = \widehat{q}_i$ для $i \leq t$.

Очевидно, что существуют (единственные) разбиение $\mathcal{Q}$ пространства X , получающееся из $\mathcal{Q}'$ укрупнением, и соответствие $H: \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$, порожденное $\mathcal{Q} \prec \mathcal{Q}'$, такие, что соответствие $T \equiv T' \circ H^{-1}: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ является биекцией. Ясно, что β также есть аккомпанемент T . В силу (7) T является трансформацией разбиений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4(i). Рассмотрим семейства

$$\widehat{\mathcal{Q}}_i \equiv \{\widehat{q} \mid N(\mathcal{V}; \mathcal{Y}_{\pi p-i}) \text{ не пересекается с } f(\widehat{q})\} \subset \widehat{\mathcal{Q}},$$

где $i = 1, 2$. Ясно, что $\widehat{\mathcal{Q}}_2 \subset \widehat{\mathcal{Q}}_1$. В силу (1), § 2, имеем

$$(a) \ N(\cup \widehat{\mathcal{Q}}_2; (\mathcal{Y}_{\pi p-1}^\bullet)^2) \subset \cup \widehat{\mathcal{Q}}_1.$$

Пусть $N \in \mathcal{E}_X^k$, $N \cap Z_1 = \emptyset$, есть объединение $\cup \widehat{\mathcal{Q}}_1$ и некоторого совершенного относительно $\widehat{\mathcal{Q}}$ множества E . Рассмотрим замкнутое подмножество $A \equiv Z_1 \sqcup N \subset X$ и отображение $\beta': A \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$, корректно определенное как $\widehat{v} \circ h$ на Z_1 и как $\widehat{v}$ на N . Из леммы 1.4, примененной к $h|_{Z_1} \sqcup \text{Id}|_N$ и $\text{Id}|_A$, следует $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi p-1}^\bullet}$ -близость частичного отображения $X \leftarrow A \xrightarrow{\beta'} \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ к $\widehat{v}|_A$. Так как метрика $d(y, y')$ на Y удовлетворяет UV^{k-1} -тесту относительно f и $\bar{c}_Y$, то существует продолжение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ отображения β' , являющееся $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi p-2}^\bullet}$ -близким к $\widehat{v}$. Принимая во внимание предложение 2.3, приходим к выводу:

- (b) отображение β является k -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(p-1)+1}^\bullet}$.

Так как $\beta|_N = \hat{v}|_N$, то отображение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ удовлетворяет условию предложения 4.5. Пусть $T: \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ есть естественная трансформация, порожденная отображением β . Принимая во внимание, что N содержит $\cup \hat{\mathcal{Q}}_1$, мы можем дополнительно потребовать, чтобы

(с) $T(q) \supset q$, если $q \subset \cup \hat{\mathcal{Q}}_1$.

Так как $\text{dist}(\beta, \hat{v}) \prec \mathcal{N}_{\pi_{p-2}}^\bullet$, то в силу 2.5(3) имеем $q \subset N(Tq; \mathcal{V}_{\pi_{p-3}}^\bullet)$ для любого $q \in \mathcal{Q}$. Отсюда и из (а) несложно вывести, что если $q \in \mathcal{Q}$, а $T(q) \in \hat{\mathcal{Q}}_2$, то $q \subset \cup \hat{\mathcal{Q}}_1$. Последнее в силу (с) влечет $q \subset T(q)$. Отсюда несложно вывести, что $q = T(q)$ для всех $T(q) \in \hat{\mathcal{Q}}_2$. Поэтому $\hat{\mathcal{Q}}_2$ является частью разбиения $\mathcal{Q}$, а $T|_{\cup \hat{\mathcal{Q}}_2} = \text{Id}$. В силу 2.5(4) $f(\mathcal{Q}) \prec \mathcal{V}_{\pi_{p-3}}$ и поэтому $\mathcal{Q}_{\pi(p-1)} = \{q \in \mathcal{Q} \mid f(q) \cap N(\mathcal{V}; \mathcal{V}_{\pi_{p-3}}) = \emptyset\}$ содержится в $\hat{\mathcal{Q}}_2$. Ясно, что все условия 2.4(i)–2.4(iv) оказываются выполненными.

Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 является важным элементом редукции общей теоремы о незаузленности к теореме о ручной незаузленности:

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\mathcal{V}' \in \mathcal{U}'$ – окрестности в $X \cong \nu^k$, $\varphi: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм, тождественный вне $\mathcal{V}'$. Тогда для любого покрытия $\varepsilon \in \text{cov } X$ существует такое покрытие $\delta \in \text{cov } X$, что для любых компактов $Z_1, Z_2 \subset X$ (которые, естественно, будут ручными Z -множествами), совпадающих вне $\mathcal{V}'$, и для любого гомеоморфизма $\psi: Z_1 \rightarrow Z_2$, $\text{dist}(\psi, \varphi|_{Z_1}) \prec \delta$, тождественного вне $\mathcal{V}'$, существует продолжающий ψ гомеоморфизм $\hat{\psi}: X \rightarrow X$, для которого $\text{dist}(\hat{\psi}, \varphi) \prec \varepsilon$ и $\hat{\psi} = \text{Id}$ вне $\mathcal{U}'$.

Указание. Применить теорему 4.1 для $X = Y$, $f = \text{Id}$, $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{V}') \in \mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathcal{U}')$, а также $c = \varphi^{-1}(\varepsilon)$ и частичного гомеоморфизма $h = \varphi^{-1} \circ \psi: Z_1 \rightarrow Z_2 = \varphi^{-1}(Z_2')$.

Наконец, отметим, что из приведенной в этой главе процедуры улучшения связности разбиений легко вывести следующий результат. Доказательство оставляем читателю.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $X \cong \nu^k$. Тогда для любых $\varepsilon \in \text{cov } X$ и $H: X \rightarrow X \in UV^{k-1}$ существует гомеоморфизм $\tilde{h}: X \rightarrow X$, для которого $\text{dist}(H, \tilde{h}) \prec \varepsilon$.

§ 5. Общая теорема о незаузленности

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ есть совершенная k -резольвента над польским $\text{AE}(k)$ -пространством Y .

ТЕОРЕМА 5.1 (общая теорема о незаузленности). Для любого покрытия $c \in \text{cov } Y$, любых окрестностей $\mathcal{V} \in \mathcal{U} \subset Y$ и любых Z -множеств $Z_1, Z_2 \subset \mathcal{V}^\bullet = f^{-1}(\mathcal{V})$ существует такое покрытие $c' \in \text{cov } Y$, что для любого гомеоморфизма $h: Z_1 \rightarrow Z_2$, $\text{dist}(h, \text{Id}) \prec (c')^\bullet$, существует гомеоморфизм $\hat{h}: X \rightarrow X$, продолжающий h , такой, что

- (1) $\text{dist}(\hat{h}, \text{Id}) \prec c'$;
- (2) $\hat{h} = \text{Id}_X$ вне $\mathcal{U}^\bullet$.

Сначала заметим, что из сильной универсальности X легко следует

ЛЕММА 5.2. Пусть $F \subset_Z X$, $\mathcal{V} \subset X$ – открытое множество. Тогда для любого компакта $A \subset X$ существует сколь угодно близкий к Id_X частичный гомеоморфизм $\xi: A \rightarrow A' = \xi(A)$ такой, что A совпадает с A' вне $\mathcal{U}$ и $A' \cap F = \emptyset$.

Из леммы 5.2 с помощью теоремы 4.6 и полноты пространства гомеоморфизмов (с “limitation”-топологией) следует важный факт о связи произвольных и ручных Z -множеств в ν^k , позволяющий редуцировать общую теорему о незаузленности к теореме о ручной незаузленности.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $F \subset_Z X \cong \nu^k$. Тогда для любых окрестностей $\mathcal{V} \in \mathcal{U} \subset X$, $F \subset \mathcal{V}$, и для любого $\varepsilon \in \text{cov } X$ существует гомеоморфизм $g: X \rightarrow X$, для которого $\text{dist}(g, \text{Id}) \prec \varepsilon$, $g = \text{Id}$ вне $\mathcal{U}$, а $g(F) \subset X$ есть ручное Z -множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем универсальный Z -детектор $\{X_i\}$, состоящий из компактов (теорема 1.15), а также последовательность $\mathcal{V}_0 \ni \mathcal{V} \in \mathcal{V}_1 \in \mathcal{V}_2 \in \dots \in \mathcal{U} \subset X$ окрестностей.

В силу леммы 5.2 существует сколь угодно близкий к $\varphi_0 \ni \text{Id}_X$ частичный гомеоморфизм $\xi_1: X_1 \rightarrow X'_1 = \xi_1(X_1)$ такой, что X_1 совпадает с X'_1 вне $\mathcal{V}_0$ и $X'_1 \cap F = \emptyset$. По теореме 4.6 существует сколь угодно близкий к φ_0 гомеоморфизм $\varphi_1: X \rightarrow X$, продолжающий ξ_1 , такой, что $\varphi_1 = \varphi_0$ вне $\mathcal{V}_1$.

Вновь из леммы 5.2 следует, что существует сколь угодно близкий к φ_1 частичный гомеоморфизм $\xi_2: X_2 \rightarrow X'_2 = \xi_2(X_2)$ такой, что X_2 совпадает с X'_2 вне $\mathcal{V}_1$ и $X'_2 \cap F = \emptyset$. По теореме 4.6 существует сколь угодно близкий к φ_1 гомеоморфизм $\varphi_2: X \rightarrow X$, продолжающий ξ_2 , такой, что $\varphi_2 = \varphi_1$ вне $\mathcal{V}_2$. При этом выбирается столь близкая аппроксимация, что условия, полученные на предыдущем шаге, не будут нарушены.

Теперь должно быть ясно, как продолжить эти построения, в результате которых мы получим последовательность таких гомеоморфизмов $\{\varphi_i: X \rightarrow X\}$, что $\varphi_i = \varphi_{i-1}$ вне $\mathcal{V}_i$ и $f(X_i) \cap F = \emptyset$ для всех i . Так как пространство гомеоморфизмов с “limitation”-топологией является пространством Choquet, то при условии достаточной близости соседних гомеоморфизмов $\varphi \ni \lim \varphi_i: X \rightarrow X$ также будет гомеоморфизмом (сколь угодно близким к Id). При этом можно считать, что условия, полученные на индуктивном шаге, не будут нарушены: $\varphi(X_i) \cap F = \emptyset$ для всех i .

В качестве искомого гомеоморфизма $g: X \rightarrow X$ берем φ^{-1} . Так как

$$g(F) \cap (\bigcup X_i) = \varphi^{-1}(F) \cap (\bigcup X_i) = \emptyset,$$

то $g(F) \subset X$ есть ручное Z -множество. Условие $g = \text{Id}$ вне $\mathcal{U}$ выполнено в силу построения.

Для доказательства теоремы 5.1 сначала применяем к Z -множествам F_1 и F_2 теорему 5.3, в результате чего они будут сколь угодно малым движением (гомеоморфизмом) переведены в ручные Z -множества F'_1 и F'_2 . Далее следует воспользоваться теоремой 4.1 о ручной незаузленности. Все детали этого плана оставляем читателю.

§ 6. Теоремы о совершенных сжатиях

Теорема 5.1 о незаузленности и сжимающий критерий (теорема 1.8) влекут следующий факт.

ТЕОРЕМА 6.1 (о совершенном Z -сжатии). *Если $X \cong \nu^k$, то любое совершенное UV^{k-1} -отображение $f: X \rightarrow Y$, $\text{Cl } \mathcal{H}_f \subset_{Z_k} X$, является сильным почти гомеоморфизмом (и, следовательно, Y есть k -мерное сильно k -универсальное $\text{AE}(k)$ -пространство).*

Значительно более сложным является доказательство теоремы о сжатии совершенного UV^{k-1} -отображения, у которого множество сингулярных точек есть σZ -множество.

ТЕОРЕМА 6.2 (о совершенном σZ -сжатии). *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – совершенная k -резольвента над k -мерным польским сильно k -универсальным $\text{AE}(k)$ -пространством Y . Если $\mathcal{H}_f \subset X$ является счетным объединением ручных Z -множеств, то f допускает сжатие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Пусть фиксированы покрытия $c_Y \in \text{cov } Y$ и $c_X \in \text{cov } X$. Полагаем $\bar{s}_X \Rightarrow c_X$ и находим такое покрытие $\bar{c}_Y \in \text{cov } Y$, что $(\bar{c}_Y)^4 \prec c_Y$. Для $Z_1 = Z_2 = \emptyset$ и $\mathcal{V} = Y$ рассмотрим быстро убывающую последовательность чисел $\mathcal{S}_p = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{\pi p}\}$, $p = k(k+1)/2 + 1$.

Пусть $\widehat{\mathcal{Q}}$ есть k -разбиение пространства X с полным нервом, для которого выполнено условие (1) из § 2: $\widehat{\mathcal{Q}} \prec \mathcal{X}_{\pi p}$ и $f(\widehat{\mathcal{Q}}) \prec \mathcal{Y}_{\pi p}$. В силу 4.4(ii) существует $\mathcal{S}_{p-1}$ -приемлемая тройка $(\mathcal{Q}', T', \beta')$, которая с помощью предложения 3.6 перестраивается в $\mathcal{S}_0$ -приемлемую тройку $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть k -разбиение X . Теперь возможно завершить доказательство теоремы 6.2 применением предложения 3.1.

Таким образом, доказательство теоремы 6.2 сводится к доказательству существования приемлемых троек (предложение 4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4(ii). Ясно, что существует дискретное семейство $\mathcal{F} \Rightarrow \{x_{A'} \in \widehat{q}_{A'} \mid A' \subset A\} \subset X$ точек, не пересекающееся с $\mathcal{H}_f$. При этом выполнено

$$(1) \quad \widehat{v}(x_{A'}) \in \bigcap \{\text{St}(\widehat{q}_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \text{ для любого } A' \subset A.$$

Так как $f \in UV^{k-1}$, а Y является сильно k -универсальным пространством размерности k , то существует аппроксимативное сечение $s: Y \rightarrow X$ отображения f такое, что

$$(2) \quad \cup \mathcal{F} \subset \text{Im}(s) \text{ и } \text{dist}(f \circ s, \text{Id}_Y) \prec \mathcal{Y}_{\pi p}.$$

Последнее влечет свойство 2.4(ii) для композиции $\beta \Rightarrow \widehat{v} \circ s \circ f: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$: $\text{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathcal{N}_{\pi p-1}$. Также очевидно, что $\beta(f^{-1}(y)) \prec \mathcal{N}_{\mathcal{X}_{\pi p}}$ для любого $y \in Y$ – свойство 2.4(v) также выполняется.

Так как $\widehat{v}: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ является k -эквивалентностью относительно $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi p}} \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, то из свойства 2.4(ii) и предложения 2.3 следует k -эквивалентность отображения β относительно $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi p-2}} \prec \mathcal{N}_{\mathcal{Y}_{\pi(p-1)+1}}$ – свойство 2.4(i) также выполнено.

В силу (2) отображение $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ удовлетворяет условию предложения 4.5. Следовательно, существует естественная трансформация $T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, порожденная отображением β (предложение 4.5).

Глава 2. Теория разложений

Теория разложений, развиваемая во второй главе, посвящена доказательству следующих теорем:

- (а) *о почти гомеоморфности совершенных k -резольвент*: любое совершенное UV^{k-1} -отображение $f: \nu^k \rightarrow Y$ из ν^k в польское k -мерное сильно k -универсальное $AE(k)$ -пространство Y является почти гомеоморфизмом;
- (б) *о существовании совершенных k -резольвент*: для любого польского k -мерного сильно k -универсального $AE(k)$ -пространства Y существует совершенное UV^{k-1} -отображение $f: \nu^k \rightarrow Y$,

из которых непосредственно получается характеристизационная теорема.

§ 7. Теорема об улучшении совершенной резольвенты

Теорема 7.1, являющаяся следствием теоремы 5.1 о незаузленности, совместно с теоремой 6.2 о совершенном σZ -сжатии доказывают свойство (а).

ТЕОРЕМА 7.1 (об улучшении совершенной резольвенты). *Если $f: \nu^k \rightarrow Y$ есть совершенная k -резольвента над польским сильно k -универсальным $AE(k)$ -пространством Y , то для любого $\theta \in \text{cov } Y$ существует совершенная k -резольвента $g: \nu^k \rightarrow Y$, θ -близкая к f , для которой $\mathcal{H}_g$ является ручным σZ_k -множеством ν^k , а $\mathcal{N}_g$ является σZ_k -множеством Y .*

Пространство X называется *гибким*, если для любого совершенного UV^{k-1} -отображения $f: X \rightarrow Y$ в сильно k -универсальное польское пространство Y , $\mathcal{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$, для любого открытого множества $\mathcal{U}$, $\text{Cl } \mathcal{N}_f \subset \mathcal{U} \subset Y$, а также для любых компактов $E_1, E_2 \subset_{Z_k} X$ и $F \subset_{Z_k} Y$ таких, что $E_1 \cap (\mathcal{H}_f \cup E_2) = \emptyset$ и $F \subset \text{Cl } \mathcal{N}_f$, и для любого $\theta \in \text{cov } Y$ существует совершенное UV^{k-1} -отображение $g: X \rightarrow Y$ такое, что

- (α) $\text{dist}(f, g) \prec \theta$;
- (β) $f = g$ на $(E_1 \cup (X \setminus \mathcal{U}^\bullet))$ (и, следовательно, $f^{-1}(\mathcal{U}) = g^{-1}(\mathcal{U})$);
- (γ) $\mathcal{N}_g = \mathcal{N}_f$, а также $g(E_2) \cap (\mathcal{N}_g \cup F) = \emptyset$ (и поэтому $g(E_1), g(E_2) \subset Y \setminus \mathcal{N}_g$ суть дизъюнктные Z_k -компакты, естественно гомеоморфные E_1 и E_2 соответственно).

Важным шагом на пути доказательства теоремы 7.1 является установление гибкости пространства Небелинга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Пространство $X \cong \nu^k$ является гибким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, можно считать, что $E_2 \subset \mathcal{U}^\bullet$. Из $F \subset_{Z_k} Y$, $\mathcal{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$ и сильной k -универсальности Y легко следует существование вложения $e: E_2 \hookrightarrow X \setminus (\mathcal{H}_f \cup f^{-1}F)$ такого, что $\text{dist}(f \circ e, f|_{E_2}) < \delta$. Так как пространство X незаузленно, то существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, продолжающий e , такой, что $\text{dist}(f \circ h, f) \prec \varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $h = \text{Id}$ вне окрестности $f^{-1}(N(f(E_2); \varepsilon))$, не пересекающейся с $E_1 \cup (X \setminus \mathcal{U}^\bullet)$. Отображение $g \doteq f \circ h$ будет искомым, если покрытие $\varepsilon \in \text{cov } Y$ и константа δ выбраны достаточно малыми. Действительно, $\mathcal{N}_{f \circ h = g} = \mathcal{N}_f$, $E_2 \cap g^{-1}F = h^{-1}(h(E_2) \cap f^{-1}F) = h^{-1}(e(E_2) \cap f^{-1}F) = \emptyset$ и $E_2 \cap \mathcal{H}_g = h^{-1}(h(E_2) \cap \mathcal{H}_f) = h^{-1}(e(E_2) \cap \mathcal{H}_f) = \emptyset$. Так как $h = \text{Id}$ на $E_1 \cup (X \setminus \mathcal{U}^\bullet)$, то $f = g$ на $E_1 \cup (X \setminus \mathcal{U}^\bullet)$.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть $X \cong \nu^k$, Y является сильно k -универсальным польским пространством, а отображение $f: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$ совершенно. Если $\text{Cl } \mathcal{N}_f \subset_{Z_k} Y$, то f есть почти гомеоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в силу теоремы 6.1 установить, что существует сколь угодно близко аппроксимирующее f совершенное отображение $g: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$ такое, что $\text{Cl } \mathcal{N}_g \subset \text{Cl } \mathcal{N}_f$, а $\text{Cl } \mathcal{H}_g \subset X$ есть ручное Z -множество.

Пусть $\{\theta_i \in \text{cov } Y\}_{i \geq 0}$ – фундаментальная последовательность покрытий, для которой $\theta_0 \circ \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \prec \theta$, и пусть $\text{Cl } \mathcal{N}_f$ – пересечение убывающей последовательности своих окрестностей $U_{n+1} \subseteq U_n$, $n \geq 1$.

Пусть $F_X = \bigsqcup \{B_i \mid i \geq 1\}$ – универсальный Z_k -детектор X (см. теорему 1.15). Обозначим компакт $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_n \subset_{Z_k} X$ через $B(n)$. Полагаем $f_0 = f$ и $B(0) = C(0) = \emptyset$.

Применяя гибкость X (предложение 7.2) к $f_{n-1} \in UV^{k-1}$, дизъюнктым Z_k -компактам $E_1 \rightleftharpoons B(n-1)$, $E_2 \rightleftharpoons B_n \subset X$ и $F \rightleftharpoons \text{Cl } \mathcal{N}_f \subset Y$, легко построить совершенное UV^{k-1} -отображение $f_n: X \rightarrow Y$ и число $\delta_n < 1$ такие, что будут выполнены условия (i)_n–(v)_n при $n = 1$:

- (i)_n $\text{diam } f_{n-1}^{-1}(N(y; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ для всех $y \in C(n-1) \rightleftharpoons f_{n-1}(B(n-1))$;
- (ii)_n $\text{dist}(f_n, f_{n-1}) \prec \sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \prec \theta_{n-1}$ и $\text{mesh } \sigma_{n-1} < \delta_n$;
- (iii)_n $\mathcal{N}_{f_n} = \mathcal{N}_{f_{n-1}}$, а также $f_n = f_{n-1}$ на $X \setminus U_n^\bullet$ и на $B(n-1)$;
- (iv)_n $f_n(B_n)$ не пересекается с $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{f_0} = \mathcal{N}_{f_1} = \dots = \mathcal{N}_{f_{n-1}}$ и, более того,
- (v)_n $f_n(B_n)$ не пересекается с Z_k -множеством $F = \text{Cl } \mathcal{N}_f$.

Теперь понятно, как, многократно используя гибкость X , построить последовательность $\{f_n: X \rightarrow Y\}_{n=2}^\infty$ совершенных UV^{k-1} -отображений и последовательность $\{2\delta_{n+1} < \delta_n\}_{n=2}^\infty$ чисел таких, что будут выполнены свойства (i)_n–(v)_n при $n \geq 2$.

Очевидно, что существует равномерный предел $g = \lim f_n$, и он является UV^{k-1} -отображением, θ -близким к f . Так как пространство Choquet, то g будет совершенным отображением при условии более тщательного выбора близости аппроксимаций в (ii)_n. В силу теоремы 1.10, примененной к последовательности $\{f_i\}_{i=n}^\infty$, имеем

- (vi) $C(n) \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$ для любого n и, тем самым, $\bigcup \{C(n) \mid n \geq 1\}$ дизъюнктно с $\mathcal{N}_g$.

Используя (iii)_n, $n \geq 1$, и соотношение $\bigcap U_i = \text{Cl } \mathcal{N}_f$, несложно получить, что

- (vii) $\text{Cl } \mathcal{N}_g \subset \text{Cl } \mathcal{N}_f$;
- (viii) $g|_{B(n)} = f_n|_{B(n)}$ и $C(n-1) \subset C(n) = f_n(B(n)) = g(B(n))$ для всех n ;
- (ix) $C(n) \cap \mathcal{N}_{f_n} = \emptyset$ для всех n и, более того, $C(n) \cap \text{Cl } \mathcal{N}_{f_n} = \emptyset$.

Из (vi) и (viii) легко следует, что

- (x) $\bigsqcup \{B_i \mid i \geq 1\}$ дизъюнктно с $\mathcal{H}_g$, т.е. $\mathcal{H}_g \subset X$ есть ручное Z -множество.

Дополнительно принимая во внимание (v)_n, $n \geq 1$, и (vii), получаем

$$\bigcup \{C(n) \mid n \geq 1\} \cap \text{Cl } \mathcal{N}_g = \emptyset \quad \text{и} \quad \bigsqcup \{B_i \mid i \geq 1\} \cap \text{Cl } \mathcal{H}_g = \emptyset,$$

что влечет требуемое $\text{Cl } \mathcal{H}_g \subset X \setminus F_X$.

Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 7.3 (формально заменяя $F = \text{Cl } \mathcal{N}_f$ на одноточечное множество, лежащее в $\text{Cl } \mathcal{N}_f$), несложно установить следующий факт.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $X \cong \nu^k$, Y является сильно k -универсальным польским пространством, а отображение $f: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$ совершенно. Если $\mathcal{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$, то f сколь угодно близко аппроксимируется совершенным UV^{k-1} -отображением $g: X \rightarrow Y$ с ручным σZ_k -множеством $\mathcal{H}_g$.

Если в теореме 7.1 установлено $\mathcal{H}_g \subset_{\sigma Z_k} \nu^k$, то отсюда следует, что $\mathcal{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$: композиция $X_0 \hookrightarrow \nu^k \xrightarrow{g} Y$, где $X_0 \cong \nu^k \setminus \mathcal{H}_g$, двух UV^{k-1} -отображений является UV^{k-1} -отображением, а $g_0 \cong g|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0 \cong Y \setminus \mathcal{N}_g$ есть гомеоморфизм. С учетом этого замечания доказательство теоремы 7.1 получается как результат последовательного применения приводимой ниже теоремы и теоремы 7.4.

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть $X \cong \nu^k$, Y есть сильно k -универсальное польское пространство, а отображение $f: X \rightarrow Y \in UV^{k-1}$ совершенно. Тогда f сколь угодно близко аппроксимируется совершенным UV^{k-1} -отображением $g: X \rightarrow Y$, для которого $\mathcal{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$.

Прежде всего установим вспомогательный факт.

ЛЕММА 7.6. Пусть выполнены условия теоремы 7.5. Тогда для любых дизъюнктивных компактов $F_1 \sqcup F_2 \subset_{Z_k} Y$ таких, что $F_2 \in \text{AE}(k)$ и $F_1 \cap \mathcal{N}_f = \emptyset$, а также для любого $\theta \in \text{cov } Y$ существует совершенное UV^{k-1} -отображение $g: X \rightarrow Y$ такое, что

- (δ) $\text{dist}(f, g) \prec \theta$;
- (ε) $\mathcal{N}_g \subset \mathcal{N}_f$;
- (ζ) $(F_1 \sqcup F_2) \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим совершенное отображение f в виде композиции $X \xrightarrow{f'} X \cup_f F_2 \xrightarrow{f''} Y$, где $X \cup_f F_2 \in \text{AE}(k)$ есть редуцированная склейка. В силу теоремы 1.16 $f', f'' \in UV^{k-1}$, компакт F_2 естественно лежит в $X \cup_f F_2$ в качестве Z_k -множества и содержит $\mathcal{N}_{f'}$. Отображение f' , являющееся почти гомеоморфизмом в силу теоремы 7.3, аппроксимируем гомеоморфизмом h : $\text{dist}(f', h) \prec \sigma$. Так как $\mathcal{N}_{f'' \circ h} = \mathcal{N}_{f''} = \mathcal{N}_f \setminus (F_1 \sqcup F_2)$, то легко проверить, что отображение $g \cong f'' \circ h$ будет искомым, если покрытие $\sigma \in \text{cov } Y$ выбрано достаточно мелким.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.5. Из теоремы 1.15 следует, что существует Z_k -детектор $F_Y = \bigsqcup A_i \subset Y$, состоящий из дизъюнктивного семейства $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ $\text{AE}(k)$ -компактов. Пусть $\{\theta_i \in \text{cov } Y\}_{i \geq 0}$ есть фундаментальная последовательность покрытий, для которой $\theta_0 \circ \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \prec \theta$. Полагая $f_0 \cong f$ и используя свойства (δ), (ε) и (ζ) из леммы 7.6, построим совершенное UV^{k-1} -отображение $f_1: X \rightarrow Y$ и число $\delta_1 < 1$ такие, что будут выполнены свойства (1) $_n$ –(4) $_n$ при $n = 1$:

- (1) $_n$ $\text{dist}(f_n, f_{n-1}) \prec \sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \prec \theta_{n-1}$ и $\text{mesh } \sigma_{n-1} < \delta_n$;
- (2) $_n$ $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) \cap \mathcal{N}_{f_n} = \emptyset$;
- (3) $_n$ $\mathcal{N}_{f_n} \subset \mathcal{N}_{f_{n-1}}$;
- (4) $_n$ $\text{diam } f_{n-1}^{-1}(N(a; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ для всех $a \in A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_{n-1}$.

Многokrратно используя свойства (δ), (ε) и (ζ) из леммы 7.6, построим последовательность $\{f_n: X \rightarrow Y\}_{n=2}^\infty$ совершенных UV^{k-1} -отображений и последовательность $\{2\delta_{n+1} < \delta_n\}_{n=2}^\infty$ чисел таких, что будут выполнены свойства (1) $_n$ –(4) $_n$ при $n \geq 2$.

Очевидно, что существует равномерный предел $g = \lim f_n \in UV^{k-1}$, который θ -близок к f . По той же причине, что и в доказательстве теоремы 7.3,

g можно считать совершенным отображением. В силу теоремы 1.10, примененной к последовательности $\{f_n\}_{n=m}^\infty$, имеем $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_m) \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$ для любого m . Следовательно, $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots) \cap \mathcal{N}_g = F_Y \cap \mathcal{N}_g = \emptyset$. Так как F_Y есть Z_k -детектор, то отсюда следует требуемое $\mathcal{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$.

§ 8. Переопределение совершенных UV^{k-1} -отображений

ТЕОРЕМА 8.1 (о переопределении совершенных UV^{k-1} -отображений). *Если $f: X \rightarrow Y$ есть совершенная k -резольвента над польским k -мерным сильно k -универсальным $\text{AE}(k)$ -пространством Y , то f допускает совершенное переопределение, т.е. для любого совершенного отображения $g: F \rightarrow Y$ Z -множества $F \subset X$ существует совершенное UV^{k-1} -отображение $\hat{g}: X \rightarrow Y$, $\hat{g}|_F = g$.*

Если всюду опустить совершенность, то теорема будет доказываться в духе рассуждений из [6; 5.1.2]. Однако имеющаяся ситуация сложнее и требует либо усиления этих рассуждений, либо привлечения резольвенты Дранишникова. Мы избираем вторую возможность.

ЛЕММА 8.2. *Для любого компактного полиэдра P существует совершенное UV^{k-1} -отображение $f: M \rightarrow P$ из менгеровского многообразия M такое, что*

- (1)_k *f является послойно k -универсальным отображением;*⁶
- (2)_k *$f^{-1}(F) \subset_Z M$ для любого $F \subset_{Z_k} P$.*

При доказательстве леммы 8.2 следует совместить [9; 1.3] и [10; 3.1] с известным фактом, что любое отображение k -мерного сепарабельного пространства в компакт допускает продолжение на компакт той же размерности k .

Применяя слегка модифицированное рассуждение из [10; 7.1] к лемме 8.2, можно получить следующий факт.

ЛЕММА 8.3. *Существуют совершенные UV^{k-1} -отображения $f: \nu^k \rightarrow \nu^k$ и $g: \nu^k \rightarrow \nu^{k+1}$, обладающие свойствами (1)_k, (2)_k.*

Из (1)_k легко следует, что отображение f в лемме 8.3 есть совершенная UV^{k-1} -ретракция. Так как совершенное отображение $g \rightleftharpoons f \sqcup f: \nu^k \sqcup \nu^k \rightarrow \nu^k$ может быть послойно Z -вложено в f , то справедлива

ЛЕММА 8.4. *В пространстве ν^k существуют дизъюнктные Z -множества K и L , гомеоморфные ν^k , для которых существует совершенная UV^{k-1} -ретракция $r: \nu^k \rightarrow K$ такая, что $r|_L: L \rightarrow K$ есть гомеоморфизм.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. *Пусть $g: F \rightarrow Y \subset \nu^k$ есть совершенное отображение k -мерного польского пространства F , а f есть совершенная UV^{k-1} -ретракция из леммы 8.3. Тогда существует Z -вложение $h: F \rightarrow \hat{F}$ в k -мерное польское пространство $\hat{F} \rightleftharpoons f^{-1}(Y)$ такое, что $\hat{g} \circ h = g$, где $\hat{g} = f|: \hat{F} \rightarrow Y$ есть совершенное UV^{k-1} -отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Так как f совершенно, а X сильно k -универсально, то Y является локально конечно D^k -аппроксимируемым, а в силу замечания, сделанного после определения 1.12, и дискретно D^k -аппроксимируемым. Из полноты $Y \in \text{AE}(k)$ следует сильная k -универсальность Y . Тогда

⁶То есть для любого совершенного отображения $g: Z \rightarrow g(Z) \subset P$ польского пространства Z , $\dim Z \leq k$, существует такое замкнутое вложение $h: Z \hookrightarrow g^{-1}(g(Z))$, что $f \circ h = g \circ g$ и $h(Z)$ есть послойное Z -множество.

из теоремы о почти гомеоморфности совершенных k -резольвент (п. (a), см. начало гл. 2) следует, что f есть почти гомеоморфизм, а $Y \cong \nu^k$.

В силу леммы 8.4 существует такая совершенная UV^{k-1} -ретракция $r: \hat{Y} \rightarrow Y$, что $\hat{Y} \cong \nu^k$ и $Y \subset_Z \hat{Y}$. Поскольку $X = \nu^k$ сильно k -универсально, то в силу предложения 8.5 можно считать, что g является совершенным UV^{k-1} -отображением.

Как легко видеть, фактор-отображение $p: X \rightarrow X \cup_g g(F)$ является совершенным UV^{k-1} -отображением, а склейка $X \cup_g g(F)$ есть польское k -мерное сильно k -универсальное $AE(k)$ -пространство. Поэтому в силу теоремы о почти гомеоморфности совершенных k -резольвент p есть почти гомеоморфизм и $X \cup_g g(F) \cong \nu^k$. Ясно также, что $p(F) = g(F)$ естественно лежит в $X \cup_g g(F)$ как Z -множество.

По теореме 5.1 о незаузленности, примененной к частичному гомеоморфизму $h = \text{Id}: p(F) = g(F) \rightarrow g(F)$, существует гомеоморфизм $\hat{h}: X \cup_g g(F) \rightarrow \hat{Y}$, продолжающий h . Легко видеть, что искомым совершенным UV^{k-1} -отображением $\hat{g}: X \rightarrow Y$ является композиция $r \circ \hat{h} \circ p$.

§ 9. Теорема о существовании совершенной резольвенты

Пусть $0 \leq s \leq k$. Под s -резольвентой понимается любое UV^{s-1} -отображение из пространства Небелинга ν^k в Y . Будем говорить, что Y допускает s -резольвенту. Целью этого параграфа будет следующая

ТЕОРЕМА 9.1 (о существовании совершенной резольвенты). *Если Y есть k -мерное польское сильно k -универсальное $AE(k)$ -пространство, то существует совершенная k -резольвента $f: \nu^k \rightarrow Y$.*

Доказательство теоремы отложим до конца параграфа, а сначала приведем ряд вспомогательных фактов, среди которых следующий широко известен.

- (i) Пусть A, B и C — компакты, лежащие в одном пространстве, и $s < k$. Тогда $A \cup B \in UV^s$, если $A, B \in UV^s$, а $A \cap B \in UV^{s-1}$; $A \cup B \cup C \in UV^s$, если $A, B, C \in UV^s$, $A \cap B, B \cap C \in UV^{s-1}$, а $A \cap C = \emptyset$.

Теорема 8.1 о переопределении совершенных UV^{k-1} -отображений влечет ряд утверждений о допустимости совершенных резольвент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Пусть пространство N есть объединение своих замкнутых подмножеств N_i , $i = 1, 2$, причем N_1, N_2 и $N_0 \equiv N_1 \cap N_2$ гомеоморфны ν^k . Тогда пространство $N = N_1 \cup N_2$ допускает совершенную k -резольвенту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ^N есть симплекс размерности $N = 2k + 3$. Так как $U \equiv \nu_{\Sigma}^{k-1}(\Delta^{N-1} \times \{1\})$ и $V \equiv \nu_{\Sigma}^{k-1}(\Delta^{N-1} \times \{2\})$ гомеоморфны ν^{k-1} , то в силу леммы 8.3 существуют совершенные UV^{k-2} -сюръекции $g_U: U \rightarrow N_0$ и $g_V: V \rightarrow N_0$. Так как $U \sqcup V \subset_Z \nu_{\Sigma}^k(\Delta^{N-1} \times [1, 2]) \cong \nu^k$, то в силу теоремы 8.1 существует совершенное UV^{k-1} -отображение $\hat{g}: \nu_{\Sigma}^k(\Delta^{N-1} \times [1, 2]) \rightarrow N_0$ такое, что $\hat{g}|_U = g_U$ и $\hat{g}|_V = g_V$.

Так как $U \subset_Z \nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{1\})$, то в силу теоремы 8.1 существует совершенное UV^{k-1} -отображение $f_1: \nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{1\}) \rightarrow N_1$ такое, что $f_1|_U = g_U|_U$. Аналогично строится совершенное UV^{k-1} -отображение $f_2: \nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{2\}) \rightarrow N_2$, $f_2|_V = g_V|_V$.

В силу (i) отображение $f: \nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{1\} \cup \Delta^{N-1} \times [1, 2] \cup \Delta^N \times \{2\}) \rightarrow N_1 \cup N_2$, определяемое формулами $f|_{\nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{1\})} = f_1$, $f|_{\nu_{\Sigma}^k(\Delta^{N-1} \times [1, 2])} = \hat{g}$ и $f|_{\nu_{\Sigma}^k(\Delta^N \times \{2\})} = f_2$, есть UV^{k-1} -отображение. Ясно, что f совершенно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3 (об улучшении s -резольвент). Пусть A , B и $A \cap B$ являются $AE(k)$ -пространствами, при этом A и B допускают совершенную k -резольвенту, а $A \cap B$ — совершенную s -резольвенту. Тогда $A \cup B$ допускает совершенную $\min(s+1, k)$ -резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_0 \cong \nu^k$ лежит в $N_1 \cong \nu^k$ и $N_2 \cong \nu^k$ как Z -множество; $f_1: N_1 \rightarrow A$ и $f_2: N_2 \rightarrow B$ являются совершенными k -резольвентами, а $f_0: N_0 \rightarrow A \cap B$ — совершенной s -резольвентой. В силу теоремы 8.1 существуют совершенные UV^{k-1} -отображения $f'_1: N_1 \rightarrow A$ и $f'_2: N_2 \rightarrow B$ такие, что $f'_1|_{N_0} = f_0$ и $f'_2|_{N_0} = f_0$. Тем самым корректно определено совершенное отображение $h: N_1 \cup N_2 \rightarrow A \cup B$, $h|_{N_0} = f_0$, $h|_{N_1} = f'_1$ и $h|_{N_2} = f'_2$. В силу (i) отображение h является совершенным $UV^{\min(s, k-1)}$ -отображением. В силу предложения 9.2 существует совершенное UV^{k-1} -отображение $\varphi: \nu^k \rightarrow N_1 \cup N_2$. Легко видеть, что композиция $h \circ \varphi$ является искомым совершенным $UV^{\min(s, k-1)}$ -отображением.

В качестве легкого применения предложений 9.2 и 9.3 получается способ построения резольвенты замкнутого $AE(k)$ -подпространства ν^k , который в случае $k = \infty$ содержится в [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. Пусть строго k -универсальное $AE(k)$ -пространство Y замкнуто вложено в пространства L_1 и L_2 , гомеоморфные ν^k . Предположим также, что $L_1 \cup L_2$ является замкнутым подпространством в $AE(k)$ -пространствах S_1 и S_2 , допускающих совершенную k -резольвенту. Если существует совершенное UV^{k-1} -отображение $\lambda: S_1 \cup S_2 \rightarrow Y$, то Y допускает совершенную k -резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $Y \in AE(k)$, то Y является ретрактом $L_1 \cong \nu^k$. Ввиду сильной k -универсальности Y существует такая замкнутая ретракция $r: L_1 \rightarrow Y$, что $r|_{L_1 \setminus Y}: L_1 \setminus Y \rightarrow Y$ есть вложение. Поэтому Y является совершенным ретрактом $L_1 \cong \nu^k$, т.е. Y допускает совершенную (-1) -резольвенту. Поэтому $L_1 \cup L_2 = S_1 \cap S_2$ допускает совершенную 0-резольвенту. В силу предложения 9.3 $S_1 \cup S_2$ допускает совершенную 1-резольвенту. Так как $\lambda: S_1 \cup S_2 \rightarrow Y \in UV^{k-1}$, то Y тоже допускает совершенную 1-резольвенту. Далее, повторяя многократно (k раз) предыдущее рассуждение, мы приходим к выводу, что $S_1 \cap S_2$ допускает совершенную 2-резольвенту, $S_1 \cup S_2$ допускает совершенную 3-резольвенту, Y допускает совершенную 3-резольвенту и т.д., Y допускает совершенную $\min(k, 2k+1)$ -резольвенту. В итоге пространство Y допускает совершенную k -резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.1. Пусть M и N гомеоморфны ν^k , $K \cong \nu^k$ замкнуто лежит в M и N и является там Z -множеством. В силу предложения 9.2 $M \cup K$ допускает совершенную k -резольвенту. Пусть $L_1 \cong \nu^k$ является Z -множеством в M , и пусть $L_1 \cap K = \emptyset$. В силу леммы 8.4 существует совершенная UV^{k-1} -ретракция $c: M \rightarrow K$ такая, что $c|_{L_1}: L_1 \rightarrow K$ есть гомеоморфизм. Будем рассматривать L_1 и K как “верхнее” и “нижнее основания” “произведения”, которое задается ретракцией c .

Не теряя общности, можно считать, что $Y \in AE(k)$ замкнуто лежит в K . Из сильной k -универсальности Y следует, что существует совершенная ретракция

$r: K \rightarrow Y$, $r^2 = r$. Через c_1 обозначим ретракцию $c|_{c^{-1}(Y)}: c^{-1}(Y) \rightarrow Y$. Тогда редуцированную склейку $P \Leftarrow M \cup_{c_1} Y$, порожденную c , можно рассматривать как замену редуцированного произведения в M . Отметим, что L_1 и K естественно лежат в P и $L_1 \cap K = Y$. В силу теоремы 1.16 $P \in \text{AE}(k)$, а ретракция c разлагается в композицию $M \xrightarrow{c'} P \xrightarrow{c''} K$ совершенных UV^{k-1} -отображений c' и c'' .

В результате аналогичных рассуждений, проведенных для N и $K \subset N$, будут построены совершенная UV^{k-1} -ретракция $d: N \rightarrow K$, Z -множество $L_2 \cong \nu^k$ в N такие, что $L_2 \cap K = Y$, $d(L_2) = K$ и $d|_{L_2}: L_2 \rightarrow K$ является гомеоморфизмом. Отображение d задает структуру “произведения” в пространстве Небелинга N , при этом K и L_2 рассматриваются как “верхнее” и “нижнее основания” N . Пусть $d_1 \Leftarrow d|_{d^{-1}(Y)}: d^{-1}(Y) \rightarrow Y$. Редуцированная склейка $Q \Leftarrow N \cup_{d_1} Y$, порожденная d , рассматривается как “редуцированное произведение” в N . Отметим, что K и L_2 естественно лежат в $Q \in \text{AE}(k)$ и $K \cap L_2 = Y$, а d разлагается в композицию $N \xrightarrow{d'} Q \xrightarrow{d''} K$ совершенных UV^{k-1} -отображений d' и d'' .

Далее рассмотрим склейку $T \Leftarrow P \cup_K N$, которая в силу предложения 9.3 допускает совершенную k -резольвенту.

ЛЕММА 9.5. *Существует совершенное UV^{k-1} -отображение $F: T \rightarrow L_2$ такое, что*

- (1) $f \Leftarrow F|_N: N \rightarrow L_2$ есть совершенное UV^{k-1} -отображение;
- (2) $F|_K$ совпадает с ретракцией $r: K \rightarrow Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.5. Так как $N \cong L_2 \cong \nu^k$, а K есть Z -множество в N , то в силу теоремы 8.1 существует такое совершенное отображение $f: N \rightarrow L_2 \in UV^{k-1}$, что $f|_K = r: K \rightarrow Y$. Зададим искомое совершенное отображение $F: T \rightarrow L_2$ формулами $F|_N = f$ и $F|_P = r \circ c'$. Ясно, что F корректно определено. Отображение F допускает представление в виде композиции $T \xrightarrow{\tilde{c}} N \xrightarrow{f} L_2$, где $\tilde{c}: P \rightarrow K$, задаваемое формулами $\tilde{c}|_P = c''$ и $\tilde{c}|_N = \text{Id}$, как легко проверить, является совершенным UV^{k-1} -отображением. Как композиция UV^{k-1} -отображений $F \in UV^{k-1}$. Лемма 9.5 доказана.

В силу теоремы 1.21 склейка $S_1 \Leftarrow T \cup_f L_2 \in \text{AE}(k)$, а F разлагается в композицию совершенных UV^{k-1} -отображений $T \xrightarrow{\mathcal{F}} S_1 \xrightarrow{\mathcal{G}} L_2$. Несложно проверить, что L_1 и L_2 естественно лежат в S_1 и $L_1 \cap L_2 = Y$.

Проведем аналогичные построения для $R \Leftarrow M \cup_K Q$. Тогда существует совершенное UV^{k-1} -отображение $\Phi: R \rightarrow L_1$ такое, что $\varphi \Leftarrow \Phi|_M: M \rightarrow L_1$ есть совершенное UV^{k-1} -отображение и $\Phi|_K$ совпадает с ретракцией $r: K \rightarrow Y$. В силу теоремы 1.21 склейка $S_2 \Leftarrow R \cup_\varphi L_1 \in \text{AE}(k)$, а Φ разлагается в композицию совершенных UV^{k-1} -отображений $R \xrightarrow{\Delta} S_2 \xrightarrow{\Upsilon} L_1$, при этом L_1 и L_2 естественно лежат в S_2 и $L_1 \cap L_2 = Y$.

Так как S_1 и S_2 допускают совершенную k -резольвенту, то в силу предложения 9.4 для завершения доказательства нам осталось построить совершенное UV^{k-1} -отображение $\lambda: S_1 \cup S_2 \rightarrow Y$.

ЛЕММА 9.6. *Рассмотрим естественно вложенные в S_1 подпространства $Y \subset L_2$. Тогда $W_1 \Leftarrow S_1 \setminus (L_2 \setminus Y) \subset S_1$ является $\text{AE}(k)$ -пространством, $\mathcal{G}(W_1) = Y$ и $\mathcal{G}|_{W_1}: W_1 \rightarrow Y$ является совершенной UV^{k-1} -ретракцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.6. Так как $L_2 \setminus Y$ открыто в S_1 , то W_1 замкнуто в S_1 . Так как $S_1 \in \text{AE}(k)$ и $Y = L_2 \cap W_1 \in \text{AE}(k)$, то из предложения 1.18

следует $W_1 \in \text{AE}(k)$. Равенства $\mathcal{G}(W_1) = Y$ и $\mathcal{G}(L_2 \setminus Y) = L_2 \setminus Y$ следуют из очевидных соотношений $r \circ c''(P) = Y$ и $\mathcal{G}|_{L_2} = \text{Id}$. Из $\mathcal{G}(L_2 \setminus Y) = L_2 \setminus Y$, $Y \in \text{AE}(k)$ и $W_1 \in \text{AE}(k)$ легко следует $\mathcal{G}|_{W_1} \in \text{UV}^{k-1}$. Лемма 9.6 доказана.

Аналогичные рассуждения верны и для S_2 . Замкнутое подпространство $W_2 = S_2 \setminus (L_1 \setminus Y) \subset S_2$ есть $\text{AE}(k)$, $\Upsilon(W_2) = Y$ и $\Upsilon|_{W_2}: W_2 \rightarrow Y$ является совершенной UV^{k-1} -ретракцией. Рассмотрим склейку $S_1 \cup_Y S_2$. Очевидно, что $S_1 \cap S_2 = L_1 \cup L_2$, $S_1 \cup_Y S_2 = W_1 \cup_Y W_2$ и $W_1 \cap W_2 = Y$. Отображение $\lambda: S_1 \cup_Y S_2 \rightarrow Y$ зададим как $\mathcal{G}$ на W_1 и как Υ на W_2 . Из (i) легко следует $\lambda \in \text{UV}^{k-1}$. Теорема 9.1 доказана.

Глава 3. Зависимость постулатов

В заключительном разделе, посвященном доказательству зависимости постулатов от системы аксиом, предполагаются заданными абстрактное ν^k -конструктивное $\text{AE}(k)$ -пространство X , k -разбиение $\hat{\mathcal{Q}} = \{\hat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ абстрактного ν^k -конструктивного $\text{AE}(k)$ -пространства $\hat{X}$ с полным нервом. Ранее доказывалось, что $\mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$ есть $\text{AE}(k)$ -пространство.

§ 10. Доказательство постулата Бествины

Как было сказано в первой части работы [1], доказательство постулата Бествины сводится к доказательству существования 0-приемлемой тройки $(\mathcal{Q}, T, \beta)$. Напомним ее определение.

Пусть $\mathcal{Q}_0$ есть разбиение $F \in \mathcal{C}_X$, $F \subset_Z X$, $\hat{\mathcal{Q}}$ — k -разбиение $\hat{X} \in \text{AE}(k)$ с полным нервом, а $T_0: \mathcal{Q}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ — инъективное соответствие. Пусть также фиксировано отображение $\gamma: X_0 \rightarrow \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$, заданное на ручном Z -множестве $X_0 \subset X$, $F \subset X_0$, такое, что $\gamma|_F$ есть аккомпанемент T_0 . Тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathcal{Q}$ есть 0-разбиение X , T — трансформация $\mathcal{Q}$ и $\hat{\mathcal{Q}}$, а $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$ — аккомпанемент T , называется 0-приемлемой, если

- (1) $\mathcal{Q}|_F = \mathcal{Q}_0$, а естественное соответствие $\mathcal{Q}_0 \hookrightarrow \mathcal{Q}$ является инъективным;
- (2) $T|_F = T_0$;
- (3) β есть k -эквивалентность и $\beta = \gamma$ на X_0 .

ТЕОРЕМА 10.1. *Существует 0-приемлемая тройка $(\mathcal{Q}, T, \beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X является сильно k -универсальным польским пространством [1; аксиома $(\mathcal{C})_3$], то существует замкнутое вложение

$$s: \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle \hookrightarrow X, \quad \text{Im}(s) \cap X_0 = \emptyset.$$

Пусть $\beta: X \rightarrow \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle \in \text{AE}(k)$ есть продолжение γ и s^{-1} , удовлетворяющее условию предложения 4.5. Поскольку X и $\mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$ суть $\text{AE}(k)$ -пространства, то β есть k -эквивалентность.

В силу аксиомы воротников существует такое разбиение $\mathcal{Q}'$ пространства X , что

- (4) $\mathcal{Q}'|_F = \mathcal{Q}_0$, а естественное соответствие $\mathcal{Q}_0 \hookrightarrow \mathcal{Q}'$ является инъективным;
- (5) $\mathcal{Q}' \prec (\beta')^{-1}(\{\text{St}(\hat{q}) \mid \hat{q} \in \hat{\mathcal{Q}}\})$.

Пусть $T: \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ есть естественная трансформация, порожденная β , аккомпанементом которой является β . Принимая во внимание (1), (2), мы можем дополнительно потребовать, чтобы $\mathcal{Q}|_F = \mathcal{Q}_0$ и $T|_F = T_0$.

§ 11. Трансверсальность семейств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Пусть $s \leq k$, а $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ есть разбиение X . Пусть для любого $p_{A'} \neq \emptyset$, $|A'| \geq k+1-s$, фиксировано $(k+1-|A'|)$ -разбиение $\mathcal{Q}_{A'}$, имеющее полный нерв. Семейство разбиений $\{\mathcal{Q}_{A'} \mid |p_{A'}| \geq k+1-s\}$ называется *трансверсальным к основу $\mathcal{P}^{(s)}$* , если

- ($\mathcal{T}$)_i $\mathcal{Q}_{\partial A'} \equiv \mathcal{Q}_{A'}|_{\partial p_{A'}}$ есть $(k-|A'|)$ -разбиение относительной границы $\partial p_{A'}$, а соответствие $\mathcal{Q}_{\partial A'} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{A'}$ является инъективным;
- ($\mathcal{T}$)_{ii} если $A'' \supset A'$ и $p_{A''} \neq \emptyset$, то $\mathcal{Q}_{A'}|_{p_{A''}} = \mathcal{Q}_{A''}$ и $\mathcal{Q}_{\partial A'}|_{p_{A''}} = \mathcal{Q}_{A''}$, а соответствия $\mathcal{Q}_{A''} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{A'}$ и $\mathcal{Q}_{A''} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{\partial A'}$ являются инъективными;
- ($\mathcal{T}$)_{iii} для любого $q \in \mathcal{Q}_{A'}$, $p_{A'} \neq \emptyset$, семейство $\{A'' \supset A' \mid q \cap p_{A''} \neq \emptyset\}$ конечных подмножеств имеет наибольший элемент, который мы будем называть *терминальным индексным подмножеством* и обозначать через A_q ;
- ($\mathcal{T}$)_{iv} если $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$ для $q_1 \in \mathcal{Q}_{A_1}$, $q_2 \in \mathcal{Q}_{A_2}$, то $A_{q_1} \subset A_{q_2}$ либо $A_{q_2} \subset A_{q_1}$.

Мы будем использовать обозначение $\{\mathcal{Q}_{A'}\} \curvearrowright \mathcal{P}^{(s)}$. Если $s = k$, то говорят о *трансверсальном семействе к разбиению $\mathcal{P}$* , $\{\mathcal{Q}_{A'}\} \curvearrowright \mathcal{P}$.

Из ($\mathcal{T}$)_{ii} следует, что если $A'' \supset A'$ и $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_{A'}$, то

- (1) из $q_1 \cap p_{A''} = q_2 \cap p_{A''} \neq \emptyset$ следует, что $q_1 = q_2$;
- (2) из $q_1 \cap p_{A''}, q_2 \cap p_{A''} \neq \emptyset$ и $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$ следует, что $q_1 \cap q_2 \cap p_{A''} \neq \emptyset$.

ЛЕММА 11.2. Если $q_1 \cap p_{A_3} = q_2 \cap p_{A_3}$, где $q_i \in \mathcal{Q}_{A_i}$ и $A_1 \cup A_2 \subset A_3$, то $q_1 \cap p_{\bar{A}} = q_2 \cap p_{\bar{A}}$ для всех $\bar{A}$ таких, что $A_1 \cup A_2 \subset \bar{A} \subset A_3$.

Следующий факт вытекает из условия ($\mathcal{T}$)_{iv}.

ЛЕММА 11.3. Если $q_i \in \mathcal{Q}_{A_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$, и $q_i \cap q_j \neq \emptyset$ для любых $i \neq j$, то $A_{q_1} \subset A_{q_2} \subset \dots \subset A_{q_t}$ после некоторой перестановки терминальных индексных подмножеств.

Отметим, что $\mathcal{Q}$ трансверсально к $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \curvearrowright \mathcal{P}$ (см. [1]), тогда и только тогда, когда семейство $\{\mathcal{Q}_{A'} \equiv \mathcal{Q}|_{p_{A'}} \mid A' \subset A\}$ трансверсально к $\mathcal{P}$. Установим обратную теорему.

ТЕОРЕМА 11.4. Если семейство $\{\mathcal{Q}_{A'}\}$ трансверсально к $\mathcal{P}$, то существует единственное разбиение $\mathcal{Q}$ пространства X , трансверсальное к $\mathcal{P}$, такое, что $\mathcal{Q}|_{p_{A'}} = \mathcal{Q}_{A'}$ для всех $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \emptyset$. При этом $\mathcal{Q}$ будет k -разбиением с полным нервом.

Будем говорить, что разбиение $\mathcal{Q}$, описанное в теореме, порождено трансверсальным к разбиению $\mathcal{P}$ семейством $\{\mathcal{Q}_{A'}\}$. Предположим доказательству теоремы ряд вспомогательных фактов. Рассмотрим отношение между элементами разбиений $\{\mathcal{Q}_{A'}\}_{A' \subset A}$:

$$\mathcal{Q}_{A'} \ni q' \sim q'' \in \mathcal{Q}_{A''} \iff q' \cap p_{A' \cup A''} = q'' \cap p_{A' \cup A''}.$$

Пусть $q_1 \in \mathcal{Q}_{A_1}$ и $A_{q_1} \subset A$ – его терминальное индексное подмножество. Терминальным элементом для q_1 называется пересечение $q_1 \cap p_{A_{q_1}}$, которое в силу ($\mathcal{T}$)_{ii} есть элемент $\mathcal{Q}_{A_{q_1}}$.

Из леммы 11.2 несложно вывести факт, характеризующий введенное отношение.

ЛЕММА 11.5. $q_1 \sim q_2$ тогда и только тогда, когда совпадают их терминальные индексные подмножества, а также совпадают их терминальные элементы.

Отсюда следует, что $q' \sim q''$ является отношением эквивалентности. Если $\mathcal{Q}_{A_1} \ni q_1 \sim q_2 \in \mathcal{Q}_{A_2}$, то $q \cap q' \subset q \cap p_{A_1 \cup A_2} = q' \cap p_{A_1 \cup A_2} \subset q \cap q'$. Тем самым нами установлено, что

(3) если $\mathcal{Q}_{A_1} \ni q_1 \sim q_2 \in \mathcal{Q}_{A_2}$, то $\emptyset \neq q \cap q' \in \mathcal{Q}_{A_1 \cup A_2}$.

Обозначим через $[q']$ класс эквивалентности элемента $q' \in \mathcal{Q}_{A'}$. Через $B[q']$ обозначим $\bigcup \{q'' \mid q'' \in \mathcal{Q}_{A''}, q'' \sim q'\}$. Из условия $(\mathcal{T})_{iv}$ следует, что если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \emptyset$, то либо $A_{q_i} \subset A_{q_j}$, либо $A_{q_j} \subset A_{q_i}$. Поэтому справедлив следующий факт.

ЛЕММА 11.6. Если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \emptyset$ для всех $1 \leq i \neq j \leq t$, то

$$A_{q_1} \subset A_{q_2} \subset \dots \subset A_{q_t}$$

после некоторой перестановки терминальных индексных подмножеств.

Покажем, что из условия леммы 11.6 можно извлечь дополнительную информацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.7. Если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \emptyset$ для всех $i \neq j$, то

$$\bigcap \{B[q_i] \mid 1 \leq i \leq s\} \neq \emptyset.$$

Доказательство предложения 11.7 непосредственно следует из леммы 11.6 и формулируемых ниже лемм.

ЛЕММА 11.8. Если $q \in \mathcal{Q}_{A'}$ и $A'' \subset A$, то $B[q] \cap p_{A''}$ либо пусто, либо есть элемент $q' \in \mathcal{Q}_{A''}$, эквивалентный q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $B[q] \cap p_{A''} \neq \emptyset$. Тогда $A'' \subset A_q$. Из леммы 11.5 следует, что $q_0 \equiv B[q] \cap p_{A_q} \in \mathcal{Q}_{A_q}$. Пусть q' есть тот единственный элемент $\mathcal{Q}_{A''}$, ограничение которого на $\mathcal{Q}_{A_q}$ дает q_0 . Легко проверить, что $q' \sim q$ и $B[q] \cap p_{A''} = q'$.

ЛЕММА 11.9. Если $B[q_1] \cap B[q_2] \neq \emptyset$ и $C \subset A_{q_1} \subset A_{q_2}$, то

$$B[q_1] \cap B[q_2] \cap p_C \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что $q' \cap q'' \neq \emptyset$, где $q_1 \sim q' \in \mathcal{Q}_{A'}$ и $q_2 \sim q'' \in \mathcal{Q}_{A''}$. Отсюда, из леммы 11.8 и из (3) следует, что $B[q_1] \cap p_{A'} = q'$, $B[q_2] \cap p_{A''} = q''$ и $\emptyset \neq q' \cap q'' \in \mathcal{Q}_{A' \cup A''}$. Так как $q' \cap p_{A_{q_1}} \neq \emptyset$ и $q'' \cap p_{A_{q_1}} \neq \emptyset$, то в силу (2) имеем $\emptyset \neq q' \cap q'' \cap p_{A_{q_1}} \subset B[q_1] \cap B[q_2] \cap p_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11.4. Поскольку единственность разбиения $\mathcal{Q}$ очевидна, то оставшаяся часть доказательства посвящена его существованию.

Полагаем в качестве искомого разбиения $\mathcal{Q} \equiv \{B[q] \mid q \in \mathcal{Q}_{A'}, A' \subset A\}$. Из предложения 11.7 следует полнота его нерва. Из леммы 11.8 следует, что $\mathcal{Q}$ порождает исходное трансверсальное семейство. Проверим, что $B[q]$ является абстрактным $\text{AE}(k)$ -множеством. Для этого заметим, что семейство $\{F_{A'} \equiv B[q] \cap p_{A'} \in \mathcal{C}_{p_{A'}} \mid A' \subset A_q\}$ удовлетворяет условию следующей леммы.

ЛЕММА 11.10. Если $F_i \in \text{AE}(k) \cap \mathcal{C}_X^k$, $1 \leq i \leq t$, $u \cap \{F_i \mid i = 1, \dots, t\} \neq \emptyset$, а также всегда $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_s} \subset_Z F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_{s-1}} \in \text{AE}(k+2-s) \cap \mathcal{C}_X^{k+2-s}$, то $\bigcup \{F_i \mid i = 1, \dots, t\} \in \text{AE}(k) \cap \mathcal{C}_X^k$.

Доказательство леммы 11.10 осуществляется индукцией по t с использованием аксиомы $(\mathcal{C})_6$ [1] и теоремы 1.19 о склейке $\text{AE}(k)$ -множеств.

Из леммы 11.10 следует, что $B[q] = \bigcup \{F_{A'} \mid A' \subset A_q\} \in \text{AE}(k) \cap \mathcal{C}_X^k$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 11.4 осталось проверить, что $B[q_1] \cap \dots \cap B[q_t]$ является абстрактным конструктивным $\text{AE}(k+1-t)$ -множеством. Поскольку этот вопрос решается аналогично случаю $t = 1$, то его обоснование мы оставляем читателю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.11. Пусть разбиение $\mathcal{Q} \looparrowright \mathcal{P}$ порождено семейством $\{\mathcal{Q}_{A'} \mid A' \subset A\}$, трансверсальным к $\mathcal{P}$. Тогда разбиение $\mathcal{Q}_{\partial A_0}$ границы $\mathcal{B}\partial r_{A_0} \neq \emptyset$ порождено семейством $\{\mathcal{Q}_{A'} \mid A' \supset A_0, |A'| > |A_0|, p_{A'} \neq \emptyset\}$, трансверсальным к $\mathcal{P}|_{\mathcal{B}\partial r_{A_0}}$.

Доказательство непосредственно следует из явных формул для разбиений.

Следующее утверждение, доказываемое непосредственной проверкой, мы также оставляем на рассмотрение читателю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.12 (о продолжении трансверсальных семейств). Пусть семейство $\mathcal{F}_s = \{\mathcal{Q}_{A'} \mid A' \subset A, p_{A'} \neq \emptyset, |A'| \geq k+1-s\}$ трансверсально к s -остову $\mathcal{P}^{(s)}$, где $s < k$. Если для любого $A_0 \subset A$, $|A_0| = k-s$, задано $(s+1)$ -разбиение $\mathcal{Q}_{A_0}$ множества p_{A_0} с полным нервом такое, что

- (α) $\mathcal{Q}_{A_0}|_{\mathcal{B}\partial r_{A_0}}$ совпадает с $\mathcal{Q}_{\partial A_0}$ — s -разбиением границы $\mathcal{B}\partial r_{A_0}$, порожденным семейством $\{\mathcal{Q}_{A'} \mid A' \supset A_0, |A'| > |A_0|, p_{A'} \neq \emptyset\} \looparrowright \mathcal{P}|_{\mathcal{B}\partial r_{A_0}}$;
- (β) естественное соответствие разбиений $\mathcal{Q}_{\partial A_0} \hookrightarrow \mathcal{Q}_{A_0}$ является инъективным,

то $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F}_s \cup \{\mathcal{Q}_{A'} \mid A' \subset A, p_{A'} \neq \emptyset, |A'| = k-s\} \looparrowright \mathcal{P}^{(s+1)}$.

§ 12. Доказательство постулата о гомеоморфизме

Зависимость постулата о гомеоморфизме состоит в следующем:

ТЕОРЕМА 12.1. Если справедливы аксиома трансверсальности и постулат Бествины, то постулат о гомеоморфизме также справедлив.

Далее рассмотрим частный случай постулата о гомеоморфизме ($\widehat{X} = X$), который только и будет использоваться. Пусть заданы k -разбиения $\mathcal{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $\widehat{\mathcal{P}} = \{\widehat{p}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства X , семейство $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \cap \widehat{\mathcal{P}}$, трансформация $T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$, $T|_{\mathcal{P}_0} = \text{Id}$, а также ручное Z -подмножество $X_0 \subset X$, не пересекающееся с $E = \bigcup \mathcal{P}_0 \in \mathcal{C}_X^k$. Постулат о гомеоморфизме состоит в построении такого гомеоморфизма $f: X \rightarrow X$, что

- (1) $f(p) \subseteq N(Tp; \widehat{\mathcal{P}})$ для всех $p \in \mathcal{P}$;
- (2) $f(X_0) \subset X$ есть ручное Z -подмножество;
- (3) $f = \text{Id}$ на E .

Следующее утверждение является ядром доказательства теоремы 12.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. Пусть $\widehat{\mathcal{H}}$ есть такое разбиение X , трансверсальное к $\widehat{\mathcal{P}}$, что $\widehat{\mathcal{H}}|_E$ есть разбиение E . Тогда для любого сильного аккомпанемента $\alpha: X \rightarrow X$ соответствия T существуют разбиение $\mathcal{H} \looparrowright \mathcal{P}$ пространства X

и такая трансверсальная к T трансформация $T': \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$,⁷ что $\mathcal{R}|_E = \widehat{\mathcal{R}}|_E$, $T'|_{\mathcal{R}|_E} = \text{Id}$, а $\widehat{v} \circ \alpha|_{X_0}: X_0 \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}} \rangle$ есть частичный аккомпанемент T' (здесь $\widehat{v}: X \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}} \rangle$ – каноническое отображение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}}_{A'} \rangle \subset \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}} \rangle$, где $\widehat{\mathcal{R}}_{A'} \equiv \widehat{\mathcal{R}}|_{\widehat{p}_{A'}}$. Для каждого $p_{A'} \neq \emptyset$ построим тройку

$$\mathcal{T}_{A'} = (\mathcal{R}_{A'}, T_{A'}: \mathcal{R}_{A'} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}_{A'}, \beta_{A'}: p_{A'} \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}}_{A'} \rangle),$$

в которой $\mathcal{R}_{A'}$ есть разбиение $p_{A'}$, $T_{A'}$ – трансформация разбиений, а $\beta_{A'}$ – аккомпанемент $T_{A'}$, такую, что для всех $A' \subset A'' \subset A$ будет справедливо

- (а) $\mathcal{R}_{A'}|_{p_{A''}} = \mathcal{R}_{A''}$, $T_{A'}|_{p_{A''}} = T_{A''}$ и $\beta_{A'}|_{p_{A''}} = \beta_{A''}$;
- (б) $\beta|_{X_0 \cap p_{A'}} = \widehat{v} \circ \alpha|_{X_0 \cap p_{A'}}$;
- (с) если $p_{A'} \subset E$, то $\mathcal{R}_{A'}|_{p_{A'}} = \mathcal{Q}|_{p_{A'}}$, $T_{A'} = \text{Id}$ и $\beta_{A'} = \widehat{v}|_{p_{A'}}$.

Построение троек $\mathcal{T}_{A'}$ будет вестись индукцией по $s = k + 1 - |A'|$, начиная с $s = 0$ и заканчивая $s = k$. При этом будем следить за тем, чтобы

$$(d)_s \{ \mathcal{R}_{A'} \mid |A'| \geq k + 1 - s \} \hookrightarrow \mathcal{P}^{(s)}.$$

Если тройки $\mathcal{T}_{A'}$ уже построены с соблюдением свойств (а)–(с) и $(d)_k$, то трансверсальное семейство $\{\mathcal{R}_{A'}\} \hookrightarrow \mathcal{P}$ в силу теоремы 11.4 порождает k -разбиение $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{P}$, $\mathcal{R}|_{p_{A'}} = \mathcal{R}_{A'}$. В силу явного задания $\mathcal{R} = \{B[r] \mid r \in \mathcal{R}_{A'}\}$ и свойства (с) имеем $\mathcal{R}|_E = \widehat{\mathcal{R}}|_E$. Искомая трансформация $T': \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$ задается формулой $T'(B[r]) = B[T_{A'}(r)]$, где $r \in \mathcal{R}_{A'}$.

Все оставшееся доказательство теоремы разбивается на следующие части.

База индукции основывается на том, что 0-остов $\mathcal{P}^{(0)}$ есть дискретное семейство нульмерных конструктивных множеств.

Индуктивный переход. В предположении, что тройки $\mathcal{T}_{A'}$ с соблюдением свойств (а)–(с) и $(d)_s$ уже построены, построим тройки $\mathcal{T}_B$, $B \subset A$, $|B| = k - s$, с соблюдением свойств (а)–(с) и $(d)_{s+1}$. Не теряя общности, можно считать, что p_B пересекается с E разве что по границе $\mathcal{B}\partial p_B$.

В силу теоремы 11.4 существует s -разбиение $\mathcal{R}_{\partial B}$ на $\mathcal{B}\partial p_B$, порождающее трансверсальное к $\mathcal{P}|_{\mathcal{B}\partial p_B}$ семейство $\{\mathcal{R}_{A'} \mid B \subsetneq A' \subset A\}$. Так как $\mathcal{R}_{\partial B}$ явно задается как $\{B[r'] \mid r' \in \mathcal{R}_{A'}, B \subsetneq A' \subset A\}$, то $\mathcal{R}_{\partial B}|_E = \widehat{\mathcal{R}}_{\partial B}$, а формулами $T_{\partial B}(B[r']) = B[T_{A'}(r')]$ и $\beta_{\partial B}|_{p_{A'}} = \beta_{A'}$ корректно определяются трансформация $T_{\partial B}: \mathcal{R}_{\partial B} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}_{\partial B}$ и ее аккомпанемент $\beta_{\partial B}: \mathcal{B}\partial p_B \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}}_{\partial B} \rangle$. Так как $\beta_{\partial B}$ и α совпадают на $X_0 \cap \partial B p_B$, то на $X'_0 = \mathcal{B}\partial p_B \cup (X_0 \cap p_B)$ корректно определено отображение $\gamma \equiv \beta_{\partial B} \cup \alpha|_{X'_0 \cap p_B}$.

Завершает доказательство индуктивного перехода применение постулата Бествины к $\text{Vd}_{\partial B}$, к инъективному соответствию $\mathcal{R}_{\partial B} \xrightarrow{T_{\partial B}} \widehat{\mathcal{R}}_{\partial B} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{R}}_B$ и отображению $\gamma: X'_0 \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}}_B \rangle$. В результате получим искомые $(s + 1)$ -разбиение $\mathcal{R}_B$ на p_B , трансформацию $T_B: \mathcal{R}_B \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}_B$ и ее аккомпанемент $\beta_B: p_B \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{R}}_B \rangle$. Необходимую проверку оставляем читателю, отметив лишь, что условие $(d)_{s+1}$ следует из предложения 11.12.

⁷Будем говорить, что трансформация T' трансверсальна к T , если $\bigcap r_i \cap p_{A'} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\bigcap T'(r_i) \cap \widehat{p}_{A'} \neq \emptyset$ для всех $r_i \in \mathcal{R}$ и $A' \subset A$. Кратко это записывается так: $T' \hookrightarrow T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12.1. Пусть $\{\epsilon_i\}$ и $\{\hat{\epsilon}_i\}$ суть фундаментальные последовательности открытых покрытий X , через $F_X = \bigsqcup \{B_{2i-1} \mid i \geq 1\}$ обозначим универсальный Z -детектор X . Положим $\mathcal{P}_1 \rightleftharpoons \mathcal{P}$, $\widehat{\mathcal{P}}_1 \rightleftharpoons \widehat{\mathcal{P}}$, $T_1 \rightleftharpoons T: \mathcal{P} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ и выберем $\alpha_1: X \rightarrow X$ – сильный аккомпанемент T_1 , $\alpha_1(X_0) \cap B_1 = \emptyset$.

Нашей ближайшей целью будет построение последовательностей k -разбиений $\mathcal{P}_{i+1} \looparrowright \mathcal{P}_i$ и $\widehat{\mathcal{P}}_{i+1} \looparrowright \widehat{\mathcal{P}}_i$ пространства X , трансформаций $T_i: \mathcal{P}_i \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_i$, сильных аккомпанементов $\alpha_{2i+1}: X \rightarrow X$ трансформаций T_{2i+1} , а также аккомпанементов $\beta_{2i}: X \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{P}}_{2i})$ трансформаций T_{2i} , так чтобы при этом были выполнены условия

- (α) $_{i \geq 1}$ $\widehat{\mathcal{P}}_{2i} \prec \hat{\epsilon}_{2i}$, а $\mathcal{P}_{2i+1} \prec \epsilon_{2i+1}$;
- (β) $_{i \geq 1}$ трансформация T_{i+1} трансверсальна к T_i , $T_{i+1} \looparrowright T_i$;
- (γ) $_{i \geq 1}$ $\mathcal{P}_{2i}|_E = \widehat{\mathcal{P}}_{2i}|_E$ и $\mathcal{P}_{2i+1}|_E = \widehat{\mathcal{P}}_{2i+1}|_E$, а также $T_{2i}|_E = T_{2i+1}|_E = \text{Id}$;
- (δ) $_{i \geq 1}$ $N(\alpha_{2i-1}(X_0); \widehat{\mathcal{P}}_{2i}^3) \cap B_{2i-1} = \emptyset$.

За счет перехода к еще более мелким покрытиям $\{\epsilon_i\}$ и $\{\hat{\epsilon}_i\}$ добьемся того, что

- (i) если $\hat{p}, \hat{p}' \in \widehat{\mathcal{P}}_{2i-1}$ и $\hat{p} \cap \hat{p}' = \emptyset$, то $N(\hat{p}; \hat{\epsilon}_{2i}^6) \cap N(\hat{p}'; \hat{\epsilon}_{2i}^6) = \emptyset$;
- (ii) если $p, p' \in \mathcal{P}_{2i}$ и $p \cap p' = \emptyset$, то $N(p; \epsilon_{2i+1}^6) \cap N(p'; \epsilon_{2i+1}^6) = \emptyset$.

Скажем, что последовательность $\{p_i\}$ ($\{\hat{p}_i\}$) элементов разбиений $\mathcal{P}_i$ ($\widehat{\mathcal{P}}_i$) образует *цепочку*, если $p_i \cap p_{i+1} \neq \emptyset$ ($\hat{p}_i \cap \hat{p}_{i+1} \neq \emptyset$) для всех i . Ясно, что $\{p_i\}$ является цепочкой в том и только том случае, когда $\{T_i(p_i)\}$ является цепочкой.

При изложении аксиомы трансверсальности [1] было показано, что

- (iii) если $\mathcal{R}' \looparrowright \mathcal{R}$, то $N(r'; \mathcal{R}') \subset \text{Int}(N(r; \mathcal{R}))$ для любых $r \in \mathcal{R}$, $r' \in \mathcal{R}'$, $r \cap r' \neq \emptyset$;
- (iv) если $\{p_i\} \in \mathcal{P}_i$ ($\{\hat{p}_i\} \in \widehat{\mathcal{P}}_i$) образует цепочку, то $\bigcup \{p_i \mid i \geq n\} \subset \text{Int } N(p_n; \mathcal{P}_n)$ ($\bigcup \{\hat{p}_i \mid i \geq n\} \subset \text{Int } N(\hat{p}_n; \widehat{\mathcal{P}}_n)$) для любого n .

Отсюда легко следует, что

- (v) любая цепочка $\{p_i\} \in \mathcal{P}_i$ ($\{\hat{p}_i\} \in \widehat{\mathcal{P}}_i$) имеет предел в X ; если x есть предел двух цепочек $\{p_i \in \mathcal{P}_i\}$ и $\{p'_i \in \mathcal{P}_i\}$, то $p_n \subset N(p'_n; \mathcal{P}_n^3)$, а $p'_n \subset N(p_n; \mathcal{P}_n^3)$.

Если все вышеперечисленные условия (α) $_{i \geq 1}$ –(δ) $_{i \geq 1}$ удастся реализовать, то искомый гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$ будет задаваться следующим правилом: если $x \in X$ есть предел цепочки $\{p_i\} \in \mathcal{P}_i$, то $f(x)$ есть предел цепочки $\{T_i(p_i)\} \in \widehat{\mathcal{P}}_i$.

Из (iv) следует $f(p_1) \subset N(T_1(p_1); \widehat{\mathcal{P}}_1)$, из (γ) $_{i \geq 1}$ следует $f_E = \text{Id}_E$, а из (δ) $_{i \geq 1}$ имеем $f(X_0) \cap F_X = \emptyset$, т.е. $f(X_0)$ есть ручное Z -множество. Установление корректности определения, биективности, а также непрерывности f и f^{-1} несложно, и его мы оставляем читателю.

Построим для r требуемые объекты, предполагая выполненными условия (α) $_{r-1}$ –(δ) $_{r-1}$. Сначала возьмем $r = 2i$. В силу аксиомы трансверсальности существует k -разбиение $\widehat{\mathcal{P}}_r \prec \hat{\epsilon}_r$, трансверсальное $\widehat{\mathcal{P}}_{r-1}$, для которого выполнено (δ) $_r$. Для построения искомого k -разбиения $\mathcal{P}_r \looparrowright \mathcal{P}_{r-1}$, трансформации $T_r: \mathcal{P}_r \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_r \looparrowright T_{r-1}$ и аккомпанемента β_{2r} следует прибегнуть к помощи предложения 12.2.

Пусть теперь $r = 2i + 1$. Выберем у T_{r-1} какой-либо сильный аккомпанемент. В силу аксиомы трансверсальности существует k -разбиение $\mathcal{P}_r \prec \epsilon_r$, трансверсальное $\mathcal{P}_{r-1}$. Для построения искомого k -разбиения $\widehat{\mathcal{P}}_r \curlywedge \widehat{\mathcal{P}}_{r-1}$, трансформации $T_r \curlywedge T_{r-1}$ вновь прибегнем к помощи предложения 12.2. Далее следует выбрать такой сильный аккомпанемент $\alpha_r: X \rightarrow X$ трансформации T_r , чтобы $\alpha_r(X_0) \cap B_r = \emptyset$ (что возможно, так как X_0 есть ручное Z -множество).

Список литературы

- [1] С. М. Агеев, “Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 3–50; англ. пер.: S. M. Ageev, “Axiomatic method of partitions in the theory of Nöbeling spaces. I. Improvement of partition connectivity”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 299–342.
- [2] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] R. D. Edwards, “Characterizing infinite dimensional manifolds topologically [after Henryk Toruńczyk]”, *Séminaire Bourbaki*, vol. 1978/79, Exposés 525–542, Lecture Notes in Math., **770**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980, 278–302.
- [4] T. Banach, “Characterization of spaces admitting a homotopy dense embedding into a Hilbert manifold”, *Topology Appl.*, **86**:2 (1998), 123–131.
- [5] P. L. Bowers, “Dense embeddings of sigma-compact, nowhere locally compact metric spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 123–130.
- [6] M. Bestvina, *Characterizing k -dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., **71**, № 380, 1988.
- [7] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, MI, 1965.
- [8] С. М. Агеев, С. А. Богатый, “О склейках некоторых классов метрических пространств”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, № 6, 19–23; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogaty, “Sewing in some classes of spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:6 (1994), 18–21.
- [9] A. Chigogidze, “ UV^n -equivalence and n -equivalence”, *Topology Appl.*, **45**:3 (1992), 283–291.
- [10] A. Chigogidze, K. Kawamura, E. D. Tymchatyn, “Nöbeling spaces and the pseudo-interiors of Menger compacta”, *Topology Appl.*, **68**:1 (1996), 33–65.
- [11] J. E. West, “Mapping Hilbert cube manifolds to ANR’s: A solution of a conjecture of Borsuk”, *Ann. of Math. (2)*, **106**:1 (1977), 1–18.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь

E-mail: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by

Поступила в редакцию

09.12.2005 и 19.02.2007