Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. III. Непротиворечивость системы аксиом, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 7, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:43:35

УДК 515.124.62+515.125

С. М. Агеев

Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. III. Непротиворечивость системы аксиом

Устанавливается непротиворечивость системы аксиом пространств Небелинга.

Библиография: 8 названий.

Характеризационная теорема пространства Небелинга [1] утверждает, что k -мерное сильно k -универсальное польское $AE(k)$ -пространство X гомеоморфно пространству Небелинга $\nu^k = N_k^{2k+1}$ для всех $0 \leq k < \infty$. В первых двух частях работы (см. [1], [2]) эта теорема была редуцирована к доказательству непротиворечивости системы аксиом пространств Небелинга. Третья часть работы посвящена установлению того, что ядро Небелинга $X = \nu_{\mathcal{C}}^k(P)$ конструктивного многообразия P вместе с семейством $\mathcal{C}_X$ ядер Небелинга конструктивных подмногообразий $Q \subset P$ будет моделью системы аксиом, что будет вести к завершению доказательства характеризационной теоремы. В главе 1, играющей ключевую роль, устанавливается взаимосвязь конструктивных PL-многообразий и их ядер Небелинга, на основе которой все аксиомы сводятся к их кусочно линейным аналогам. Проверке каждой из введенных аксиом для модели системы аксиом посвящена глава 2.

Обращаем внимание читателя на один важный момент. Чтобы не отягощать восприятие и без того сложно структурированного текста, в работе рассматривалась более простая проблема характеристики пространств Небелинга. Однако если сделать в проведенных рассуждениях естественные поправки, то можно получить более сильный результат – характеризационную теорему для *многообразий Небелинга*, или ν^k -многообразий, т.е. польских пространств, имеющих базу открытых множеств, гомеоморфных ν^k .

ТЕОРЕМА 0.1. *Для всех $0 \leq k < \infty$ k -мерное сильно k -универсальное польское $ANE(k)$ -пространство X есть ν^k -многообразие.*

ТЕОРЕМА 0.2. *Если $f: X \rightarrow Y$ – отображение ν^k -многообразий, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп π_i , $i < k$, то $X \cong Y$.*

Эти и ряд других следствий предложенного аксиоматического метода будут изложены в других публикациях автора.

В [1; § 6] в определение $\mathcal{C}_X$ -разбиения вкралась неточность. Везде в настоящей работе под $\mathcal{C}_X$ -разбиением $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ абстрактного конструктивного пространства X (или удобным разбиением X , если при этом не будет возникать недоразумений) следует понимать такое разбиение X , что:

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712) и гранта Министерства образования Республики Беларусь. Автор также признателен за поддержку, оказанную NSERC № OGP 005616 во время визита в Университет Саскатчеван.

- (а) все его элементы вместе с их пересечениями принадлежат $\mathcal{C}_X$;
- (б) $p_{A' \cup \{\alpha\}}$ есть Z -множество $p_{A'}$ для всех $A' \subset A$, $\alpha \notin A'$.

Поскольку это понятие более сильное (дополнительно требуется выполнение (б)), то на содержании первых двух частей работы произведенное изменение почти никак не отражается. Следует лишь в определении допустимого вложения [1; определение 11.2] условие (3) заменить на то, которое сразу следует за (4). Кроме того, в предложении 15.2 [1] следует потребовать, чтобы дискретное семейство $\{N_\gamma\}$ состояло из совершенных относительно $\mathcal{Q}'$ множеств. Все рассуждения из работ [1] и [2] не претерпевают изменений. Наконец, при установлении непротиворечивости системы аксиом нам дополнительно нужно будет следить за выполнением условия (б), что, как будет видно, не составляет труда.

§ 1. Предварительные сведения и факты

1.1. Модифицированная теорема Борсука о продолжении гомотопии. Скажем, что семейство $\{B_\gamma \subset W \setminus D\}$ *примыкает* к $D \subset W$, если

- (а) для любого $z \in D$ и для любой окрестности $\mathcal{O}(z) \subset W$ существует окрестность $\mathcal{O}_1(z) \subset W$ такая, что $B_\gamma \subset \mathcal{O}(z)$, как только $B_\gamma \cap \mathcal{O}_1(z) \neq \emptyset$.

Из определения, в частности, следует, что для любого $a > 0$ и для любого замкнутого подмножества $F \subset W$

- (б) $W \setminus \bigcup \{B_\gamma \mid B_\gamma \cap F \neq \emptyset \text{ или } \text{diam } B_\gamma \geq a\}$ является (не обязательно открытой) окрестностью $D \setminus F$ в $W \setminus F$.

ТЕОРЕМА 1.1 (о равностепенном продолжении гомотопии). Пусть заданы компактное подмножество $D \subset W$, замкнутое подмножество $T \subset W$, а также отображение $h: W \rightarrow Y \in \text{ANE}$ и θ -гомотопия $F: (D \cup T) \times I \rightarrow Y$, $\theta \in \text{cov } Y$, такие, что

- (с) $F_0 = h|_{D \cup T}$ и $F(z, s) = h(z)$ для всех $(z, s) \in T \times I$.

Тогда для любого семейства $\{B_\gamma \subset W \setminus D\}$, замыкающего к D , и для любого покрытия $\omega \in \text{cov } Y$ существует θ -гомотопия $K: W \times I \rightarrow Y$, являющаяся продолжением F , такая, что $K_0 = h$, а также:

- (д) если $B_\gamma \cap T \neq \emptyset$, то $K(z, s) = h(z)$ для всех $(z, s) \in B_\gamma \times I$;
- (е) если $B_\gamma \cap T = \emptyset$, то множество $K_1(B_\gamma)$ содержится в $U \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какую-либо θ -гомотопию $H: W \times I \rightarrow Y$, являющуюся продолжением гомотопии F , с условием $H_0 = h$. Так как D компактно, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\left\{ H\left(N\left(a; \frac{1}{m}\right) \times \left[\frac{i-1}{m}; \frac{i}{m}\right]\right) \mid a \in D \right\} \prec \omega$$

для любого $1 \leq i \leq m$.

Пусть $D_0 = D \cap T$. Так как $T \subset W$ замкнуто и не пересекается с $D \setminus D_0$, то, многократно используя (б), возможно индуктивно построить убывающую последовательность окрестностей $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}_2 \supseteq \dots$ множества $D \setminus D_0 \subset W \setminus D_0$, $\bigcap \mathcal{O}_i = D \setminus D_0$, для которой:

- (ф) $\mathcal{O}_1 \subset W \setminus \bigcup \{B_\gamma \mid B_\gamma \cap T \neq \emptyset \text{ или } \text{diam } B_\gamma \geq 1/m\}$;

(g) если $B_\gamma \cap (W \setminus \mathcal{O}_1) \neq \emptyset$, то $B_\gamma \subset W \setminus \mathcal{O}_2$;

(h) если $B_\gamma \subset \mathcal{O}_n$ и $B_\gamma \cap (\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_{n+1}) \neq \emptyset$ для $n \geq 1$, то $B_\gamma \subset \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_{n+2}$.

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $\lambda: W \setminus D_0 \rightarrow [0, 1]$, для которой $\lambda = 0$ на $W \setminus \mathcal{O}_2$, $(i-1)/(3m) \leq \lambda \leq i/(3m)$ на $\mathcal{O}_{i+1} \setminus \mathcal{O}_{i+2}$ при $1 \leq i \leq 3m$ и $\lambda = 1$ на $\mathcal{O}_{3m+2}$.

Тогда искомая θ -гомотопия $K: W \times I \rightarrow Y$ задается формулами $K(z, s) = H(z, s \cdot \lambda(z))$ при $z \in W \setminus D_0$ и $K(z, s) = h(z)$ при $(z, s) \in D_0 \times I$. Непосредственно осуществляется проверка непрерывности K и остальных ее свойств.

1.2. Аппроксимативное продолжение отображений. Канонические отображения образуют открытое множество в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $\omega \in \text{cov } Z$, а $\beta: Z \rightarrow \mathcal{N}\langle\omega\rangle$ – каноническое отображение. Тогда существует такое отображение $\varepsilon: Z \rightarrow (0, 1)$, что $\beta': Z \rightarrow \mathcal{N}\langle\omega\rangle$ является каноническим отображением, если $\text{dist}(\beta(z), \beta'(z)) < \varepsilon(z)$ для любого $z \in Z$.

Пусть $Y \in \text{ANE}(k)$, $k \leq \infty$, а $f: A \rightarrow Y$ есть отображение, заданное на (не обязательно замкнутом) подмножестве $A \subset Z$, $\dim Z \leq k$. Тогда:

- (а) для любого отображения $\delta: Y \rightarrow (0, 1)$ существует такое отображение $\tilde{f}: \mathcal{O}(A) \rightarrow Y$, заданное на окрестности $A \subset \mathcal{O}(A) \subset Z$, что

$$\text{dist}(f(a), \tilde{f}(a)) < \delta(f(a))$$

для любого $a \in A$;

- (b) для любого $\varepsilon: A \rightarrow (0, 1)$ существует такое отображение $\tilde{f}: \mathcal{O}(A) \rightarrow Y$, заданное на окрестности $A \subset \mathcal{O}(A) \subset Z$, что

$$\text{dist}(f(a), \tilde{f}(a)) < \varepsilon(a)$$

для любого $a \in A$.

Отображение $\tilde{f}$ в (а) ищется в виде композиции канонического отображения и отображения нерва подходящего покрытия (см., например, [3]). Если теперь применить (а) для $f' \Leftarrow f \times \varepsilon: A \rightarrow Y' \Leftarrow Y \times (0, 1) \in \text{ANE}(k)$ и $\delta \Leftarrow \text{pr}_2: Y' \rightarrow (0, 1)$, то легко получить доказательство (b).

Известно, что локально конечное семейство замкнутых множеств допускает *раздутие*, состоящее из открытых множеств [4; 7.1.G(c)]. Отсюда, из (b) и предложения 1.2 с помощью техники канонических отображений доказывается более общий факт.

ТЕОРЕМА 1.3. Для любого замкнутого локально конечного покрытия $\{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ (не обязательно замкнутого) подмножества $A \subset Z$, $\dim Z < \infty$, конечной кратности существует такое семейство $\{\mathcal{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, состоящее из открытых в Z множеств, что $\mathcal{O}(p_\alpha) \supset p_\alpha$ и $\bigcap \{\mathcal{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \{p_\alpha \mid \alpha \in A'\} \neq \emptyset$.

Пусть ограничение $\{P_\alpha\}$ на $B \subset Z$ обладает некоторым свойством. Найдем достаточные условия, гарантирующие, что ограничение $\{P_\alpha\}$ на некоторую окрестность V , $B \subset V \subset Z$, также обладает этим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть семейство множеств $\{P_\alpha\}$ пространства Z и плотное подмножество $B \subset Z$ таковы, что $P_\alpha \cap B$ плотно в P_α для каждого α . Тогда:

- (а) если $\{P_\alpha \cap B\}$ – локально конечное покрытие B , то существует такая окрестность V , $B \subset V \subset Z$, что $\{P_\alpha \cap V\}$ – локально конечное семейство V ;
- (б) если $\{P_\alpha\}$ локально конечно, $\{P_\alpha \cap B\}$ – замкнутое покрытие B и каждое P_α локально замкнуто, то существует такая окрестность V , $B \subset V \subset Z$, что $\{P_\alpha \cap V\}$ – замкнутое покрытие V ;
- (с) если семейство $\{P_\alpha \subset Z\}$ замкнуто и локально конечно, а семейство $\{P_\alpha \cap B\}$ дискретно в B , то существует такая окрестность V , $B \subset V \subset Z$, что семейство $\{P_\alpha \cap V\}$ дискретно в V .

Этот факт доказывается с помощью теоремы 1.3 и свойства (б) об аппроксимативном продолжении. Из предложения 1.2 и (б) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть замкнутое локально конечное покрытие $\{P_\alpha\}$ конечномерного пространства Z и плотное подмножество $B \subset Z$ таковы, что $P_{A'} \cap B \neq \emptyset$ плотно в $P_{A'}$ для любого $A' \subset A$. Тогда для любого аккомпанемента $\beta': B \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ некоторой трансформации $T': \{P_\alpha \cap B\} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ и для любого $\lambda \in \text{cov } \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$ существуют открытое множество $V \subset P$, $B \subset V \subset Z$, и отображение $\beta: V \rightarrow \mathcal{N}\langle\widehat{\mathcal{Q}}\rangle$, $\text{dist}(\beta', \beta|_B) \prec \lambda$, такие, что $\mathcal{S}: \{P_\alpha \cap V\} \rightarrow \{P_\alpha \cap B\}$, $S(P_\alpha \cap V) = P_\alpha \cap B$, является трансформацией, а β является аккомпанементом композиции $T' \circ S: \{P_\alpha \cap V\} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$ трансформаций.

Глава 1. Разбиения конструктивных многообразий

§ 2. Конструктивные многообразия

Пусть фиксированы $\kappa \geq 0$, PL-многообразие M^m размерности $\geq 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L , и нуль-последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции L . Назовем κ -псевдограницей $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ многообразия M^m относительно $\mathfrak{L}$ следующее множество:

$$\bigcup \{ |(\delta^r L)^{(m-\kappa-1)}| \mid 0 \leq r < \infty \}.$$

Напомним, что $P \subset M^m$ называется $\mathfrak{L}$ -конструктивным полиэдром, если его можно представить в виде тела локально конечного в P семейства $\mathcal{L}$ симплексов, лежащих в $\bigcup \{\delta^r L \mid 0 \leq r < \infty\}$. Так как P локально компактно, то P является локально замкнутым в M . Семейство $\mathcal{L}$ называется смешанной триангуляцией P относительно $\mathfrak{L}$, если $P = \bigsqcup \{\text{rint } \Delta \mid \Delta \in \mathcal{L}\}$. Смешанная триангуляция $\mathcal{L}$ полиэдра P имеет естественную стратификацию $\mathcal{L}_n = \{\Delta \in \mathcal{L} \mid \Delta \in \delta^n L\}$, $n \geq 0$. Легко видеть, что если $\Delta \in \mathcal{L}_n$ и $\Delta' \in \mathcal{L}_m$, где $n < m$, то $\text{rint } \Delta \cap \Delta' = \emptyset$. Поэтому

- (1) если $\Delta \in \mathcal{L}_n$, $\Delta' \in \mathcal{L}_m$ и $\text{rint } \Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$, то $m \leq n$.

Оказывается, в смешанную триангуляцию $\mathcal{L}$ можно вписать обычную триангуляцию, плохо взаимодействующую с $\mathfrak{L}$. Доказательство соответствующего факта оставляется читателю.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $\mathcal{L}$ – смешанная триангуляция $\mathfrak{L}$ -конструктивного полиэдра P . Тогда существует триангуляция K полиэдра P , вписанная в $\mathcal{L}$.*

Пусть $P \subset M^m$ есть $\mathfrak{L}$ -конструктивное многообразие, причем $0 \leq \dim M - \dim P \leq \kappa$ (или $0 \leq k \leq \kappa - (\dim M - \dim P) \leq \kappa$). Назовем $P \setminus \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ k -ядром Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ многообразия P . Назовем P $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa}$ -конструктивным, если

(2) $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ есть замкнутое подмножество в $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M$.

Будем называть PL-многообразие P $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным, если оно является $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa}$ -конструктивным для соответствующего $k = \kappa - (\dim M - \dim P)$. Если Q и P являются $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивными многообразиями, а Q является PL-подмногообразием P , то будем говорить, что Q является $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным подмногообразием P .

Пусть $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k P$ есть ядро Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^s$ -конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathcal{C}_X^s$, $0 \leq s \leq k$, обозначим семейство

$$\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \text{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\text{-конструктивное подмногообразие } P\},$$

а через $\mathcal{C}_X$ – семейство $\{\mathcal{C}_X^s \mid 0 \leq s \leq k\}$. Важным фактом является то, что $\mathcal{C}_X$ не зависит от представления X в виде $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k P = \nu_{\mathfrak{L}}^k P'$, где $P' \subset M$ – другое $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное многообразие, то семейство*

$$\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \text{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\text{-конструктивное подмногообразие } P, 0 \leq s \leq k\}$$

совпадает с семейством

$$\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \text{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\text{-конструктивное подмногообразие } P', 0 \leq s \leq k\}.$$

Предваряя доказательство предложения, введем важное понятие, отслеживающее взаимоотношения между $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивными многообразиями в M и ν -конструктивными подмножествами в $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $Q \subset M$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^s$ -конструктивное многообразие, совпадающее с телом $|\mathcal{L}_Q|$ смешанной триангуляции $\mathcal{L}_Q$ относительно $\mathfrak{L}$.¹ Замыкание $\text{Cl}_M |\mathcal{L}_Q^{(q-s-1)}|$, где $q = \dim Q$, обозначаемое через $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(Q; \mathcal{L}_Q)$, назовем *дискриминантом* Q . Ясно, что $\mathcal{D}(Q) = (\text{Cl}_M Q \setminus Q) \cup |\mathcal{L}_Q^{(q-s-1)}|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. $\mathcal{D}(Q)$ содержится в псевдогранице $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $x \in \mathcal{D}(Q) \cap \nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M$. Тогда из определения дискриминанта следует $x \in \text{Cl}_M Q \setminus Q$. Следовательно, $x = \lim x_n$, где $x_n \in \nu_{\mathfrak{L}}^s Q$. Так как $\nu_{\mathfrak{L}}^s Q$ замкнуто в $\nu_{\mathfrak{L}}^{\kappa} M$, то $x \in \nu_{\mathfrak{L}}^s Q$, что противоречит $x \notin Q$.

¹Будем далее для тела семейства ω , состоящего из симплексов, использовать обозначение $|\omega|$.

Приведем еще ряд свойств дискриминанта. Пусть $x \in \text{Cl}_M Q$, но $x \notin \mathcal{D}(Q)$. Тогда

(3) $x \in Q$; если $x \in \text{rint } \Delta$, где $\Delta \in \mathcal{L}_Q$, то $\dim \Delta \geq q - s = m - \kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Пусть $P = |\mathcal{L}_P|$ и $P' = |\mathcal{L}_{P'}|$, где $\mathcal{L}_P$ и $\mathcal{L}_{P'}$ – смешанные триангуляции P и P' , а $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}(P; \mathcal{L}_P) \cup \mathcal{D}(P'; \mathcal{L}_{P'}) \subset \mathfrak{S}_{\mathcal{L}}$ – замкнутое подмножество M .

Для доказательства достаточно установить, что симметрическая разность $P \Delta P' \subset \mathcal{D}$. Предположим противное: например, существует $x \in P'$, но $x \notin P \cup \mathcal{D}$. Для определенности пусть $x \in \text{rint } \Delta$, где $\Delta \in \mathcal{L}_{P'}$. В силу свойства (3) для любой окрестности $\mathcal{O}(x)$ имеем $\emptyset \neq \Delta \cap \nu_{\mathcal{L}}^k P' \cap \mathcal{O}(x) \subset \nu_{\mathcal{L}}^k P' = \nu_{\mathcal{L}}^k P \subset P$, т.е. $x \in \text{Cl}_M P$. В силу (3) имеем $x \in P$, что находится в противоречии со сделанным предположением.

Пусть $X = \nu_{\mathcal{L}}^k P$ есть ядро Небелинга $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивного многообразия $P \subset M$. Пользуясь соображениями общего положения, легко показать, что

(4) вложение $X \hookrightarrow P$ является одновременно UV^{k-1} -отображением и k -эквивалентностью.

Остановимся на взаимоотношениях связностных свойств и свойств Z -множеств пространств P и X . Следующее свойство, очевидно, вытекает из (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если $F \subset_Z X$, то $\text{Cl}_P F \subset_{Z_k} P$.

Пусть Q есть $\nu_{\mathcal{L}}^s$ -конструктивное подмногообразие P , причем $\nu_{\mathcal{L}}^s Q = X \cap Q \in \mathcal{C}_X^s$ является Z -подмножеством X . В силу предложения 2.5 $Q \subset \text{Cl}_P \nu_{\mathcal{L}}^s Q \subset_{Z_k} P$, что в свою очередь влечет $Q \subset \partial P$ (поскольку $\dim P - \dim Q \leq k$). В итоге нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. $Q \subset \partial P$.

Из (4) легко следует $X \in \text{ANE}(k)$, а также $X \in C^a$, $a < k$, $\Leftrightarrow P \in C^a$. Аналогично устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $s \leq k$, а Q – $\nu_{\mathcal{L}}^s$ -конструктивное подмногообразие P . Если $\nu_{\mathcal{L}}^s(Q) \hookrightarrow X$ есть s -эквивалентность, то и $Q \hookrightarrow P$ таково. Обратно, если $Q \hookrightarrow P$ есть s -эквивалентность, то $\nu_{\mathcal{L}}^s(Q) \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм групп π_i , $i < s$.

Пусть далее $P \subset M^m$ будет $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивным многообразием, где $k = \kappa - (m - \dim P)$. Скажем, что замкнутое локально конечное покрытие

$$\mathcal{P} = \{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

многообразия P кратности $\leq k + 1$, состоящее из $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивных подмногообразий P , является $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивным разбиением P , если для любых $P_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$, и $\alpha \notin A'$:

- (i) $P_{A'}$ есть $\nu_{\mathcal{L}}^{k+1-|A'|}$ -конструктивное подмногообразие P ;
- (ii) $P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset \partial P_{A'}$.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}$ есть $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное разбиение P . Ясно, что $\mathcal{P}|_X = \{P_\alpha \cap X\}$ есть $\mathcal{C}_X$ -разбиение $X \Rightarrow \nu_{\mathcal{L}}^k P$. Из [5; 1.1.9(c)] следует также, что

- (iii) $P_{A'} \cap \partial P \subset \partial P_{A'}$.

Говорят, что ν_{Σ}^k -конструктивное разбиение $\{P_{\alpha}\}$ многообразия P есть k -разбиение, если $P_{A'} \in \text{AE}(k+1-|A'|)$ для любого $A' \subset A$. Обычным образом определяется понятие l_r -разбиения, $0 \leq l \leq k$, $l+r \leq k+1$ (см. [1; определение 8.2]).

Пусть N^P есть замкнутое ν_{Σ}^k -конструктивное подмногообразие P . Скажем, что N является k -допустимым в P , если:

- (a) вложение $\text{Bd } N \hookrightarrow (P \setminus \text{Int } N)$ является $(k-1)$ -эквивалентностью;
- (b) вложение $N \hookrightarrow P$ является k -эквивалентностью.

Скажем, что N является k -допустимым относительно ν_{Σ}^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P}$, если для всех $P_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$:

- (c) ограничения $\mathcal{P}|_N$, $\mathcal{P}|_{P \setminus \text{Int } N}$ и $\mathcal{P}|_{\text{Bd } N}$ являются ν_{Σ}^k -конструктивными разбиениями N , $P \setminus \text{Int } N$ и $\text{Bd } N$ соответственно, а естественное вложение $\mathcal{P}|_N \hookrightarrow \mathcal{P}$ является трансформацией разбиений;
- (d) $P_{A'} \cap N$ является допустимым подмногообразием в $P_{A'}$.

Заметим, что условие (c) влечет, что $P_{A'} \cap N$, $P_{A'} \cap (X \setminus \text{Int } N)$ являются ν_{Σ} -конструктивными подмногообразиями размерности $\dim P - |A'| + 1$, а $P_{A'} \cap \text{Bd } N$ является ν_{Σ} -конструктивным подмногообразием размерности $\dim P - |A'|$.

Скажем, что подмногообразие N является k -совершенным относительно ν_{Σ} -конструктивного разбиения $\mathcal{P}$ многообразия P , если N и $P \setminus \text{Int } N$ являются k -допустимыми относительно $\mathcal{P}$. Несложно установить, используя предложение 2.7, что

- (e) если ν_{Σ}^k -конструктивное подмногообразие N является k -допустимым (k -совершенным) относительно ν_{Σ}^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P}$, то $\nu_{\Sigma}^k N$ является k -допустимым (k -совершенным) относительно $\mathcal{C}_X$ -разбиения $\mathcal{P}|_{\nu^k P}$.

Доказательство следующего утверждения оставляется читателю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Если $N \subset P$ k -допустимо относительно разбиения $\mathcal{P}$, а $G \in N$ k -совершенно относительно $\mathcal{P}|_N$, то G k -совершенно относительно $\mathcal{P}$.

§ 3. Взаимосвязь конструктивных многообразий и их ядер Небелинга

Этот параграф играет ключевую роль при редуцировании вопросов, связанных с пространствами Небелинга, к их соответствующим кусочно линейным аналогам.

Пусть $\{P_i \subset P\}$ есть счетное локально конечное семейство ν_{Σ}^k -конструктивных подмногообразий P , $\mathcal{L}_i$ есть смешанная триангуляция P_i , а $\{\mathcal{L}_{in} \mid n \geq 0\}$ – естественная стратификация $\mathcal{L}_i$. Обозначим $\bigcup \{\text{rint } \Delta \mid \Delta \in \mathcal{L}_{in}\} \subset P_i$ через P_{in} . Легко видеть, что $\{P_{in} \mid n \geq 0\}$ дизъюнктно покрывает P_i . Следовательно, любой точке $x \in P_i$ соответствует единственное целое число $n(i, x) \geq 0$ такое, что $x \in P_{in(i, x)}$.

Через $\mathcal{D} \subset M$ обозначим объединение всех дискриминантов $\mathcal{D}(P_i; \mathcal{L}_i)$ подмногообразий P_i , являющееся замкнутым и в силу предложения 2.4 не пересекающимся с $\nu_{\Sigma}^k M$. Поэтому $P_i \cap U$ является ν_{Σ}^k -конструктивным подмногообразием $U \rightleftharpoons P \setminus \mathcal{D}$.

Пусть $x_0 \in (\bigcup P_i) \cap U$. Так как $x_0 \notin \mathcal{D} \supset \mathcal{D}(P_i)$, то $x_0 \notin |\mathcal{L}_i^{(p-k-1)}|$. Поэтому верна

ЛЕММА 3.1. *Пусть $\Delta_i \in \mathcal{L}_{in(i,x_0)}$ есть (единственный) симплекс такой, что $x_0 \in \text{rint } \Delta_i$. Тогда $\dim \Delta_i \geq p - k$.*

Так как $\{i \mid x_0 \in P_i\}$ конечно, то число $a \equiv \max\{n(i, x_0) \mid x_0 \in P_i\}$ совпадает с $n(i_0, x_0)$ для некоторого индекса i_0 . Обозначим через $\Delta(x_0)$ симплекс Δ_{i_0} из леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. $\Delta(x_0) \subset P_i$ для любого индекса i , $x_0 \in P_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $n(i_0, x_0) \geq n(i, x_0)$ и $x_0 \in \text{rint } \Delta_i \cap \text{rint } \Delta_{i_0}$, где $\Delta_i \in \delta^{n(i,x_0)}L$, а $\Delta_{i_0} \in \delta^{n(i_0,x_0)}L$, то $\text{rint } \Delta_{i_0} \subset \text{rint } \Delta_i$. Поэтому $\Delta(x_0) = \Delta_{i_0} \subset \Delta_i \subset P_i$.

Так как $\mathcal{L}_i$ локально конечно, то справедлива

ЛЕММА 3.3. *Существует окрестность $\mathcal{V}_i \subset U$ точки x_0 такая, что если некоторый симплекс $\Delta' \in \mathcal{L}_i$ имеет непустое пересечение с $\mathcal{V}_i$, то $x_0 \in \Delta'$, а $\Delta' \in \mathcal{L}_{in}$, где $n \leq a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_i \in \mathcal{L}_i$ есть симплекс из леммы 3.1. Так как $x_0 \in \text{rint } \Delta_i$ и $x_0 \in \Delta' \in \mathcal{L}_i$, то $\text{rint } \Delta_i \cap \Delta' \neq \emptyset$. Поскольку $\Delta_i \in \delta^{n(i,x_0)}L$ и $\Delta' \in \delta^n L$, то свойство (1) из § 2 влечет $n \leq n(i, x_0)$. Следовательно, $n \leq a = \max\{n(i, x_0) \mid x_0 \in P_i\}$.

Для последующих ссылок выделим важное свойство окрестности $\mathcal{V}(x_0) \equiv \bigcap \{\mathcal{V}_i \mid x_0 \in P_i\} \subset U$ точки x_0 , являющееся следствием леммы 3.3:

(1) если $\mathcal{V}(x_0) \cap \Delta' \neq \emptyset$ для симплекса $\Delta' \in \mathcal{L}_i$, то $x_0 \in \Delta'$, а $\Delta' \in \mathcal{L}_{in}$, где $n \leq a$.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $x_0 \in P_i$. Если $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$, а $\text{rint } \sigma \cap P_i \neq \emptyset$, то $\text{rint } \sigma \cap \mathcal{V}(x_0) \subset P_i \cap U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что заключение леммы не выполняется. Тогда

(2) существует симплекс $\sigma \in \delta^a L$ с $x_0 \in \sigma$ такой, что $\text{rint } \sigma \cap \text{rint } \Delta' \neq \emptyset$ для некоторого симплекса $\Delta' \in \mathcal{L}_i$, но $\text{rint } \sigma \cap \mathcal{V}(x_0)$ не лежит в $P_i \cap U$.

Из свойства (1) следует, что $x_0 \in \Delta' \in \delta^{n_i} L$ и $n_i \leq a$. Так как (в силу свойства (2)) $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$ и $\text{rint } \sigma \cap \text{rint } \Delta' \neq \emptyset$, то, как легко видеть, $\text{rint } \sigma \subset \text{rint } \Delta'$. Поэтому $\text{rint } \sigma \cap \mathcal{V}(x_0) \subset \text{rint } \Delta' \cap \mathcal{V}(x_0) \subset P_i$. Так как $\mathcal{V}(x_0) \subset U$, то, стало быть, $\text{rint } \sigma \cap \mathcal{V}(x_0) \subset P_i \cap U$. Последнее противоречит сделанному предположению.

Через X далее обозначим $\nu_\Sigma^k P$. Следующий результат является ключевым.

ТЕОРЕМА 3.5. *Если $\{P_i \cap X\}$ является $\mathcal{C}_X$ -разбиением X , то существует такая окрестность V , $X \subset V \subset P$, что $\{P_i \cap V\}$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом теоремы 1.3 с самого начала можно считать, что $\{P_i\}$ есть локально конечное замкнутое покрытие P кратности $\leq k + 1$.

В качестве искомой окрестности V можно взять U , определенную выше. Нам необходимо проверить условия (i), (ii) из § 2:

- (i)' $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивный полиэдр $U \cap P_{A'}$ является подмногообразием U ;
- (ii)' $U \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset \partial(U \cap P_{A'})$.

Сначала установим (ii)', предполагая, что $U \cap P_{A'}$ и $U \cap P_{A' \cup \{\alpha\}}$ являются $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивными подмногообразиями U . По определению $\mathcal{C}_X$ -разбиения имеем $X \cap P_{A'}$, $X \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \in \mathcal{C}_X$ и $X \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset_Z X \cap P_{A'}$. Тогда из предложения 2.6, очевидно, следует (ii)'.

Наконец, установим (i)' методом от противного. Предположим, что существует точка $x_0 \in T \Rightarrow U \cap P_{A'}$, в которой $\mathfrak{L}$ -конструктивный полиэдр T не является локально плоским в U [6; гл. 4]. Для простоты обозначений будем считать, что $A' = \{i \leq t\}$. Из леммы 3.4 легко следует, что

- (3) если $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$, а $\text{rint } \sigma \cap P_i \neq \emptyset$ для всех $i \leq t$, то $\text{rint } \sigma \cap \mathcal{V}(x_0) \subset T$.

Пусть $W' = \bigcup \{\text{rint } \sigma \mid x_0 \in \sigma \in \delta^a L \text{ и } \text{rint } \sigma \cap P_i \neq \emptyset \text{ для всех } i \leq t\}$. Из (3) следует, что

- (4) $W = \mathcal{V}(x_0) \cap W' \subset T$ есть окрестность x_0 .

Легко видеть, что W в окрестности точки x_0 устроено, как произведение некоторого открытого подмножества $\text{rint } \Delta(x_0)$ на полиэдр. Это влечет однородность пары (U, T) в окрестности x_0 в следующем смысле:

- (5) существует такая окрестность $\mathcal{O}$ точки x_0 в U , что любые две точки из $\mathcal{O} \cap \Delta(x_0)$ переходят одна в другую при помощи кусочно линейного автогомеоморфизма пары (U, T) , тождественного вне $\mathcal{O}$.

Поскольку $\dim \Delta(x_0) \geq p - k$, то $x_0 \in \text{rint } \Delta(x_0)$ является предельной точкой $\text{rint } \Delta(x_0) \cap X$. Так как в силу (5) локальное строение T одинаково в близких к x_0 точках из $\text{rint } \Delta(x_0)$, то существует точка $x' \in T \cap X$, в которой T также не локально плоско в U . Последнее противоречит приведенному ниже предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $E \cap X \in \mathcal{C}_X$, где $E \subset P$ есть $\mathfrak{L}$ -конструктивный полиэдр. Тогда существует такое открытое подмножество O , $E \cap X \subset O \subset P$, что $E \cap O$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивное подмногообразие O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E \cap X \in \mathcal{C}_X$, то существует такое $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивное подмногообразие $W \subset P$, что $W \cap X = E \cap X$. За счет перехода к окрестности X в P (см. теорему 1.3, (b)) можно без потери общности считать, что E и W замкнуты в P . Поскольку $(E \setminus W) \cap X = \emptyset$, то

- (6) $E \setminus W$ открыто в E и $\dim(E \setminus W) < p - k$.

Из приведенного ниже факта, несложное доказательство которого опускается, следует, что в некоторой окрестности $E \cap X$ все точки из W содержатся в E .

ЛЕММА 3.7. Если $R \cap X \subset Q \cap X$, где R есть $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивное подмногообразие, а $Q \subset P$ локально компактно, то $R \subset Q$ в некоторой окрестности $R \cap X$.

Доказательство предложения 3.6 будет завершено, если мы покажем, что E и W совпадают в некоторой окрестности V множества $E \cap X$. Установим это методом от противного: пусть $E \cap X$ и $\text{Cl}_P(E \setminus W)$ имеют общую точку x . Рассмотрим такое подразделение $\delta^a L$, что W и E в окрестности x являются подполиэдрами относительно $\delta^a L$. Пусть $x \in \text{rint } \Delta_0$, где $\Delta_0 \in \delta^a L$. Так как $\dim \Delta_0 \geq p - k$ и $\Delta_0 \subset E$, то любое открытое подмножество E , лежащее рядом

с x , имеет $\dim \geq p - k$. Сопоставляя это со свойством (6), получаем противоречие.

Доказанная теорема 3.5 вместе с предложениями 1.4, 1.5, 2.6 и 2.7, а также теоремой об открытости класса k -эквивалентностей [1; теорема 10.6] позволяют без труда получить принципиально важную теорему о взаимоотношении между $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивными разбиениями и удобными разбиениями ядра Небелинга.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть такое семейство $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивных подмногообразий P , что $\mathcal{P} = \{P_\alpha \cap X\}_{\alpha \in A}$ есть удобное l_r -разбиение X при $l \leq k$, $l + r \leq k + 1$. Пусть также фиксированы счетное семейство $\{R_i\}$ $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивных подмногообразий P , для которых $\{E_i = R_i \cap X \in \mathcal{C}_X\}$ есть дискретное в X семейство Z -множеств. Пусть также заданы $\omega \in \text{cov } X$ и аккомпанемент $\beta': X \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ трансформации $T': \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$, являющийся k -эквивалентностью относительно $\theta \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$. Тогда для любого $\lambda \in \text{cov } \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$ существуют такое открытое подмножество U , $X \subset U \subset P$, отображение $\beta: U \rightarrow \mathcal{N}(\hat{\mathcal{Q}})$, $\text{dist}(\beta', \beta|_X) \prec \lambda$, и $\hat{\omega} \in \text{cov } U$, $\hat{\omega}|_X = \omega$, что:

- (α) $\{P_\alpha \cap U\}$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное l_r -разбиение U ;
- (β) $\{R_i \cap U\}$ является дискретным в U семейством Z -множеств;
- (γ) $\mathcal{S}: \{P_\alpha \cap U\} \rightarrow \mathcal{P}$, $S(P_\alpha \cap U) = P_\alpha \cap X$, является трансформацией, а β является аккомпанементом композиции $T' \circ S: \{P_\alpha \cap U\} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ трансформаций;
- (δ) β является k -эквивалентностью относительно $\theta \circ \lambda$.

В качестве следствия теоремы 3.8 и предложения 2.5 приведем критерий ручных Z -множеств.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. $F \subset X$ есть трансверсальное (поглощаемое) Z -множество в том и только том случае, когда для любого открытого подмножества U , $X \subset U \subset P$, и для любого его $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивного разбиения $\{Q_\alpha\}$ существует открытое подмножество V , $X \subset V \subset U$ (существуют открытое подмножество $X \subset V \subset U$ и k -совершенное относительно $\{Q_\alpha \cap V\}$ $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное подмногообразие $N \subset V$), для которого имеем

$$\text{Cl}_V(Q_{A'} \cap F) \subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'} \cap V$$

всякий раз, как только $Q_{A'} \neq \emptyset$ (для которого имеем $\text{Cl}_V F \subset \text{Int } N$).

§ 4. Теорема об изотопическом движении

Пусть $P \subset M^m$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное многообразие. В дальнейшем встретится ситуация, когда некоторые PL -подмногообразия P не будут являться $\mathfrak{L}$ -конструктивными. Преодолеть это неудобство помогает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{L}$ есть смешанная триангуляция P . Тогда для любого счетного числа PL -подмногообразий $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ в P существует изотопия $\Phi: P \times I \rightarrow P$, сохраняющая $\mathcal{L}$, такая, что $\Phi_1(P_i)$ является $\nu_{\mathfrak{L}}$ -конструктивным подмногообразием P для всех $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из двух приведенных ниже лемм, которые устанавливаются аналогично [5; 2.2].

ЛЕММА 4.2. Пусть $\{\mathcal{L}_n\}$ есть естественная стратификация $\mathcal{L}$, а $L, \theta L, \theta^2 L, \dots, \theta^r L$ есть такая последовательность многократных производных подразделений триангуляции L многообразия M , что для всех $i = 0, 1, \dots, r$ справедливо

(a)_i $\theta^i L$ совпадает с $\delta^i L$ на подполиэдре $\text{St}(|\mathcal{L}_i \cup \mathcal{L}_{i+1} \cup \dots|; \delta^i L) \subset M$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного подполиэдра $Q \subset M$ существует такое продолжение $L, \theta L, \theta^2 L, \dots, \theta^r L, \dots, \theta^R L$ последовательности производных подразделений L , что $\text{mesh } \theta^R L < \varepsilon$, Q является подполиэдром относительно $\theta^R L$, а также выполнены свойства (a)_i для всех $i = 0, 1, \dots, r, r+1, \dots, R$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\mathfrak{T} = \{\theta^r L\}$ есть альтернативная нуль-последовательность многократных производных подразделений M . Тогда существует изотопия $\Phi: M \times I \rightarrow M$ такая, что:

- (a) $\Phi_1(\delta^r L) = \theta^r L$ для всех $r \geq 0$;
- (b) если $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_r$, где $\Delta_i \in \delta^i L \cap \theta^i L$, то $\Phi_t(\Delta_r) = \Delta_r$ для всех $t \in I$ (и, стало быть, $\Phi_t(P \times I) = P$ для всех $t \in I$).

§ 5. Структура джойна на многообразиях

Напомним, что джойном $X * Y$ компактных пространств X и Y называется факторпространство произведения $X \times Y \times [0, 1]$ по разбиению, нетривиальными элементами которого являются лишь $X \times \{y\} \times \{0\}$ и $\{x\} \times Y \times \{1\}$. Проверка аксиом уединения и Z -множеств во многом основывается на понятии геометрического джойна, являющегося вариацией джойна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть непересекающиеся подмножества S и T полиэдра $V \subset \mathbb{R}^m$ являются подполиэдрами относительно триангуляции K . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $V = \{(1-t) \cdot x + t \cdot y \mid 0 \leq t \leq 1, x \in S \text{ и } y \in T \text{ лежат в одном симплексе } K\}$;
- (2) существует такое отображение $\mathfrak{J}: V \rightarrow [0, 1]$, являющееся кусочно линейным относительно K и стандартной триангуляции $[0, 1]$, что $S = \mathfrak{J}^{-1}(0)$ и $T = \mathfrak{J}^{-1}(1)$.

Ясно, что отображение $\mathfrak{J}$ из условия (2) задается формулой

$$\mathfrak{J}((1-t) \cdot x + t \cdot y) = t,$$

где $0 \leq t \leq 1$, $x \in S$ и $y \in T$ лежат в одном симплексе K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Полиэдр $V \subset \mathbb{R}^m$ называется геометрическим джойном непересекающихся подполиэдров $S, T \subset V$ относительно триангуляции K , если выполнено одно из двух эквивалентных условий (1), (2).

Назовем $\mathfrak{J}$ отображением геометрического джойна на V , а V — геометрическим джойном, порожденным $\mathfrak{J}$. Будем использовать запись $V = S *_K T$

(поскольку отображение J однозначно восстанавливается по S , T и K , в записи оно опущено).

Приведем примеры и свойства геометрических джойнов:

- (i) если триангуляция K одноэлементна, то $S *_K T$ есть обычный джойн;
- (ii) замкнутая симплицальная окрестность $R = N(Q, K)$, где K есть барицентрическое подразделение K' , полиэдра Q в V [6] (являющаяся регулярной окрестностью Q в V) есть геометрический джойн, порожденный естественным симплицальным отображением $\mathfrak{J}: R \rightarrow [0, 1]$, для которого $\mathfrak{J}^{-1}(0) = Q$ и $\mathfrak{J}^{-1}(1) = \dot{N}(Q, K)$;
- (iii) пусть кусочно линейное отображение $\mathfrak{J}: V \rightarrow [0, 1]$ относительно K и стандартной триангуляции $[0, 1]$ есть отображение геометрического джойна, а $R \subset V$ есть подполиэдр относительно K такой, что $\mathfrak{J}(R) = [0, 1]$; тогда $\mathfrak{J}|_R: R \rightarrow [0, 1]$ есть отображение геометрического джойна на R , которое называется *индуцированным*.

Пусть $V = S *_K T$ есть геометрический джойн, порожденный $\mathfrak{J}$. Рассмотрим прообразы $V[E]$ произвольных подмножеств $E \subset [0, \infty]$ относительно композиции $V \xrightarrow{\mathfrak{J}} [0, 1] \xrightarrow{\varphi} [0, \infty]$, где $\varphi(x) = -\lg_2(1-x)$ есть гомеоморфизм. Очевидно, что:

- (a) $V[0] = S$, $V[\infty] = T$ и $P(0, \infty) \cong V[1] \times (0, \infty)$;
- (b) $V[0, 1]$ есть регулярная окрестность S , а $V[1, \infty]$ – регулярная окрестность T ;
- (c) $V[E] = \{(1-t) \cdot x + t \cdot y \mid x \in V[0] \text{ и } y \in V[\infty] \text{ лежат в одном симплексе } K, \text{ а } 0 \leq t \leq 1 \text{ и } \varphi(t) \in E\}$.

В дальнейшем в целях упрощения терминологии будем говорить, что отображение $\mathfrak{J}: V \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на V *задает структуру* $\mathfrak{J} = \{V[E] \mid E \subset [0, \infty]\}$ *геометрического джойна*. Если не будет возникать путаницы, то будем отождествлять геометрический джойн и его структуру. Заметим, что структура индуцированного геометрического джойна на $R \subset V$ совпадает с $\{V[E] \cap R \mid E \subset [0, \infty]\}$.

Далее мы будем иметь дело с геометрическими джойнами на многообразии P относительно триангуляции K' и на его подмногообразиях. Так как $P[0, s]$ и $P[s, \infty]$ являются регулярными окрестностями соответственно $P[0]$ и $P[\infty]$, то из [6; 3.10] следует, что для отображения $\mathfrak{J}: P \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна

- (iv) $P[0, s]$, $P[s]$ и $P[s, \infty]$ являются подмногообразиями для любого $0 < s < \infty$.

Важную роль будет играть подмногообразие $P[1]$, которое назовем *серединной геометрического джойна*. В силу свойства (c) проекция $\mathfrak{R}: P(0, \infty) \rightarrow P[1]$, $\mathfrak{R}(t \cdot x + (1-t) \cdot y) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y$, на середину геометрического джойна корректно определена и является ретракцией. Отображения $\mathfrak{R}$ и $\varphi \circ \mathfrak{J}: P(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ задают естественную структуру произведения на $P(0, \infty)$: отображение $\Phi = \mathfrak{R} \times (\varphi \circ \mathfrak{J}): P(0, \infty) \rightarrow P[1] \times (0, \infty)$ является гомеоморфизмом. Отметим также, что

- (d) отображения $\mathfrak{R}$ и Φ сохраняют триангуляцию K , а следовательно, эта структура произведения наследственна относительно триангуляции K .

Предъявим достаточно общий способ представления многообразий в виде джойна. Пусть P есть многообразие размерности $p \geq 2k + 1$ относительно

триангуляции K' , а $R \subset P$ есть подмногообразие относительно K' размерности $(p - k) + s$, где $0 \leq s \leq k$. Каноническим образом построим отображение $\mathfrak{J}_{R,s}: R \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на R относительно барицентрического подразделения $K = \beta K'$. Пусть $S = S_R$ есть подполиэдр $(R \cap |(K')^{(t)}|) \cup \partial R$, где $t = \dim R - (s + 1)$. Так как $\partial R \subset S$ и $s + t + 1 \leq \dim R$, то

$$(3) \quad S \subset_{Z_s} R.$$

Так как S – подполиэдр относительно $K = \beta K'$, то $\Delta \cap S$ является гранью симплекса $\Delta \cap R$ для любого симплекса $\Delta \in K$. Обозначим через $T_\Delta \subset \Delta \cap R$ дополнительную грань $\Delta \cap S$, а через $T = T_R$ – полиэдр $\bigcup \{T_\Delta \mid \Delta \in K\}$ относительно K . Так как $\dim T_\Delta \leq s$, то

$$(4) \quad \dim T \leq s.$$

Легко проверить, что полиэдры S и T удовлетворяют условию (1) предложения 5.1 и, следовательно, существует отображение $\mathfrak{J}_{R,s}: R \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна относительно K , для которого $S = \mathfrak{J}_{R,s}^{-1}(0)$ и $T = \mathfrak{J}_{R,s}^{-1}(1)$. Так как $s + \dim T + 1 \leq \dim R$, то

$$(5) \quad T \subset_{Z_s} R.$$

Непосредственно из построения отображения $\mathfrak{J}_{P,k}$ и явной формулы для полиэдров S, T следует

ТЕОРЕМА 5.3. *Если $R \cap \partial P \subset \partial R$, то $\mathfrak{J}_{P,k}(R) = [0, 1]$, а отображение $\mathfrak{J}_{R,s}$ геометрического джойна на R и отображение $\mathfrak{J}_{P,k}|_R$ индуцированного геометрического джойна на R связаны соотношением $\mathfrak{J}_{R,s} = \mathfrak{J}_{P,k}|_R$.*

Пусть $\{Q_\alpha\}$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение многообразия P , элементы которого являются подполиэдрами относительно K . Тогда структура $\mathfrak{J}_{P,k} = \{P[E] \mid E \subset [0, \infty]\}$ геометрического джойна на P порождает допустимые и совершенные относительно $\{Q_\alpha\}$ подмногообразия:

- (е) для всех $0 < s < t < \infty$ $P[s, t]$ является k -допустимым подмногообразием относительно $\{Q_\alpha\}$, а $P[0, s]$ и $P[s, \infty]$ являются k -совершенными подмногообразиями относительно $\{Q_\alpha\}$.

Структура

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k} = \{P[E]\}$$

геометрического джойна обладает существенным изъяном: полиэдры $P[s, t]$, вообще говоря, не являются $\mathfrak{L}$ -конструктивными. Однако если допустить к рассмотрению “криволинейные” джойны, то эта сложность становится преодолимой. Произвольный гомеоморфизм $h: P \rightarrow P$ порождает композицию

$$\mathfrak{J}^h: P \xrightarrow{h^{-1}} P \xrightarrow{\varphi \circ \mathfrak{J}} [0, \infty],$$

и семейство $\mathfrak{J}^h = \{P^h(E) \doteq h(P[E])\}$ – образ структуры $\{P[E]\}$ геометрического джойна $\mathfrak{J}$. Таким образом, на P возникает “топологическая” копия исходного геометрического джойна.

Пусть $P \subset M^m$ есть ν_Σ^k -конструктивное многообразие размерности $p \geq 2k + 1$, а $\mathcal{L}$ есть его смешанная триангуляция. В силу леммы 2.1 существует триангуляция K' многообразия P , вписанная в $\mathcal{L}$. Рассмотрим каноническое отображение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k}: P \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на P относительно барицентрического подразделения $K = \beta K'$.

ТЕОРЕМА 5.4. Для любого счетного семейства подполиэдров $\{T_i \mid i \geq 1\}$ из середины $P[1] = \mathfrak{J}^{-1}(1)$ геометрического джойна $\mathfrak{J}$ существует такой гомеоморфизм $h: P \rightarrow P$, сохраняющий смешанную триангуляцию $\mathcal{L}$, для которого:

- (f) для рациональных $0 \leq s \leq t \leq \infty$ (включая $t = \infty$) множества $P^h[s, t] \subset P$ и $P^h[s, t] \cap h(\mathfrak{R}^{-1}(T_i)) \subset P$ являются $\mathcal{L}$ -конструктивными подполиэдрами;
- (g) $P^h[0] \sqcup P^h[\infty] \subset_{Z_k} P$ и $\partial P \subset P^h[0]$, а также $\dim P^h[\infty] \leq k$ и $P^h[\infty] \cap \nu_{\mathcal{L}}^k(P) = \emptyset$.

Доказательство этой теоремы является несложным следствием условий (3)–(5) и теоремы 4.1 об изотопическом движении, и его мы оставляем читателю.

Глава 2. Непротиворечивость системы аксиом

На протяжении всей главы фиксируем $\kappa \geq 0$, PL-многообразие M^m размерности $\geq 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L , и нуль-последовательность $\mathcal{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции L . Пусть $X = \nu_{\mathcal{L}}^k P$ есть ядро Небелинга $\nu_{\mathcal{L}}^s$ -конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathcal{C}_X^s$, $0 \leq s \leq k$, обозначим семейство

$$\{\nu_{\mathcal{L}}^s Q \mid Q \text{ есть } \nu_{\mathcal{L}}^s\text{-конструктивное подмногообразие } P\},$$

а через $\mathcal{C}_X$ – семейство $\{\mathcal{C}_X^s \mid 0 \leq s \leq k\}$. Как показано в предложении 2.2, $\mathcal{C}_X$ не зависит от представления X в виде $\nu_{\mathcal{L}}^k P$. Покажем, что ядро Небелинга X вместе с семейством $\mathcal{C}_X$ абстрактных конструктивных множеств будет моделью системы аксиом. В силу теоремы 3.8 и предложения 2.6 аксиомы редуцируются к своим кусочно линейным аналогам, которые и будут доказываться в соответствующих параграфах.

Всюду далее $\hat{\mathcal{Q}}$ есть удобное k -разбиение абстрактного ν^k -конструктивного АЕ(k)-пространства $\hat{X} \in \text{АЕ}$ с полным нервом.

§ 6. Проверка аксиом конструктивных множеств

Пусть $\mathcal{C}_P^s$ есть семейство всех $\nu_{\mathcal{L}}^s$ -конструктивных подмногообразий P , $0 \leq s \leq k$, $\mathcal{C}_P = \bigcup \{\mathcal{C}_P^s \mid 0 \leq s \leq k\}$. Ясно, что семейство $\mathcal{C}_P$ всех компактных $Q \in \mathcal{C}_P$ счетно.

АКСИОМЫ КОНСТРУКТИВНЫХ МНОЖЕСТВ (кусочно линейный вариант).

- ($\mathcal{C}$)₁ Аксиома базы: Множество всех $Q \in \mathcal{C}_P^k$ образует замкнутую базу P .
- ($\mathcal{C}$)₂ Аксиома двухэлементных разбиений: Если $Q \in \mathcal{C}_P^k$ является замкнутым, то $\{Q, P \setminus \text{Int } Q\}$ есть $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное разбиение P .
- ($\mathcal{C}$)₃ Аксиома образующих гомотопических групп: $P \in \text{АНЕ}$ и $\pi_l(P)$ имеет счетное число образующих при $l < k$.
- ($\mathcal{C}$)₄ Аксиома дискретности: Если $\{Q_\alpha \in \mathcal{C}_P^s\}$ есть дискретное семейство, где $0 \leq s \leq k$, то $\bigsqcup \{Q_\alpha \mid \alpha \in A\} \in \mathcal{C}_P^s$.
- ($\mathcal{C}$)₅ Аксиома укрупнения: Если $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}$ есть $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное разбиение P , то любое укрупнение $\mathcal{P}$ есть снова $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное разбиение.

- ($\mathcal{C}$)₆ Аксиома аддитивности: Если $Q, Q' \in \mathcal{C}_P^s$ замкнуты, а $Q \cap Q' \in \mathcal{C}_P^{s-1}$ лежит в ∂Q и $\partial Q'$, то $Q \cup Q' \in \mathcal{C}_P^s$.
- ($\mathcal{C}$)₇ Аксиома Z -множеств в разбиениях: Для любого ν_Σ^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия P и для любого $P_{A'} \neq \emptyset$, $A' \subset A$, относительная граница $\mathcal{W}\partial P_{A'} \in \mathcal{C}_P$ и $\mathcal{W}\partial P_{A'} \subset \partial P_{A'}$.
- ($\mathcal{C}$)₈ Аксиома универсальности: Ядро Небеллинга $X = \nu_\Sigma^k(P)$ является k -мерным сильно k -универсальным польским пространством.
- ($\mathcal{C}$)₉ Аксиома счетной порожденности: Для любого ν_Σ^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P}$ многообразия P существует ν_Σ^k -конструктивное разбиение R , вписанное в $\mathcal{P}$, пересечения элементов которого принадлежат $\mathcal{C}_P$.
- ($\mathcal{C}$)₁₀ Аксиома наследственности: Для любого $Q \in \mathcal{C}_P$ $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{C}_P$ и $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{C}_P$; для Q справедливы аксиомы ($\mathcal{C}$)₁–($\mathcal{C}$)₉, если заменить в них P на Q .

Проверка большинства аксиом представляет собой легкие упражнения из кусочно линейной теории (см., например, [5; 1.1]). Доказательство аксиомы универсальности изложено в [7]. В аксиоме ($\mathcal{C}$)₉ следует взять в качестве искомого ν_Σ^k -конструктивного разбиения разложение на ручки (см. проверку аксиомы конфинальности, § 7).

§ 7. Проверка аксиом трансверсальности, конфинальности, воротников и раздутья

АКСИОМА ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ (кусочно линейный вариант). Для любого ν_Σ^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}$ многообразия P , а также для любого его покрытия $\varepsilon = \{W_\gamma\} \in \text{cov } P$ существует ν_Σ^k -конструктивное k -разбиение $\mathcal{Q}$ многообразия P , трансверсальное $\mathcal{P}$ и вписанное в ε .

АКСИОМА КОНФИНАЛЬНОСТИ (кусочно линейный вариант). Для любого ν_Σ^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}$ многообразия P , а также для любого его покрытия $\varepsilon = \{W_\gamma\} \in \text{cov } P$ существует ν_Σ^k -конструктивное k -разбиение $\mathcal{Q}$ многообразия P , вписанное в $\mathcal{P}$ и ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из доказательства будет видно, что все непустые пересечения элементов разбиения $\mathcal{Q}$ являются клетками соответствующих размерностей.

ПРОВЕРКА АКСИОМ. Пусть $\mathcal{L} \prec \{W_\gamma\}$ есть такая смешанная триангуляция P (относительно $\mathcal{L}$), что любой элемент $P_\alpha \in \mathcal{P}$ является подполиэдром относительно $\mathcal{L}$. В силу леммы 2.1 существует триангуляция $L' \prec \mathcal{L}$. Рассмотрим последовательность $\{\beta^r L'\}$ барицентрических подразделений L' , а также перенумеруем элементы $\mathcal{P}$ различными натуральными числами $\{c_\alpha\}$.

Для проверки первой аксиомы следует взять разложение $\mathcal{Q}'$ многообразия P на ручки, ассоциированное с L' [1; § 3]. Для проверки второй аксиомы следует взять сначала разложение $\mathcal{Q}_\alpha$ элемента $P_\alpha \in \mathcal{P}$ на ручки, ассоциированное с $\beta^{c_\alpha}(L')$, затем семейство $\mathcal{Q}' = \{\mathcal{Q}_\alpha\}$ (которое, как видно из [5; 1.1.8], является разбиением P). В обоих случаях к элементам $\mathcal{Q}'$ следует применить теорему 4.1 об изотопическом движении. В результате получим сохраняющую $\mathcal{L}$ изотопию $\Phi: P \times I \rightarrow P$, переводящую элементы разбиения $\mathcal{Q}'$ в ν_Σ^k -конструктивные многообразия. Легко проверить, что $\mathcal{Q} = \Phi_1(\mathcal{Q}')$ есть искомое разбиение P как для первой, так и для второй аксиомы.

АКСИОМА ВОРОТНИКОВ (кусочно линейный вариант). Пусть $\mathcal{Q}_0$ есть ν_{Σ}^{k-1} -конструктивное разбиение ν_{Σ}^{k-1} -конструктивного подмногообразия $N \subset \partial P$, а $\omega \in \text{cov } P$. Если $\mathcal{Q}_0 \prec \omega$, то существует ν_{Σ}^k -конструктивное разбиение $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \prec \omega$, многообразия P такое, что $\mathcal{Q}|_N = \mathcal{Q}_0$, а естественное соответствие $\mathcal{Q}_0 \hookrightarrow \mathcal{Q}$ является инъективным.

Для проверки этой аксиомы следует воспользоваться теоремой о воротнике для многообразий и теоремой 4.1 об изотопическом движении.

АКСИОМА РАЗДУТИЯ (кусочно линейный вариант). Для любого ν_{Σ}^k -конструктивного разбиения $\mathcal{P} = \{P_{\alpha}\}$ многообразия P существует раздутие $\{\mathcal{O}(P_{\alpha})\} \in \text{cov } P$ такое, что для всех $A' \subset A$ вложение

$$P_{A'} \hookrightarrow \bigcap \{\mathcal{O}(P_{\alpha}) \mid \alpha \in A'\}$$

есть $(k+1 - |A'|)$ -эквивалентность.

Доказательство аксиомы оставляем читателю, заметив лишь, что в качестве $\mathcal{O}(P_{\alpha})$ следует взять регулярную окрестность P_{α} относительно достаточно мелкой триангуляции.

§ 8. Проверка аксиомы уединения

Пусть $\mathcal{Q} = \{Q_{\alpha}\}$ есть ν_{Σ}^k -конструктивное разбиение P , а $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ – дискретное в P семейство ν_{Σ} -конструктивных подмногообразий, лежащих в ∂P .

АКСИОМА УЕДИНЕНИЯ (кусочно линейный вариант). Существует такое семейство $\{N_i \mid i \geq 1\}$ k -совершенных относительно $\mathcal{Q}$ ν_{Σ}^k -конструктивных подмногообразий, что $\{N_i \cap X \mid i \geq 1\}$ есть дискретное в $X = \nu_{\Sigma}^k P$ семейство и $H_i \subset \text{Int } N_i$ для всех i .

В свою очередь это утверждение редуцируется к проверке более простого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Существуют:*

- (а) семейство $\{N_i \mid 1 \leq i\}$ k -допустимых относительно $\mathcal{Q}$ ν_{Σ}^k -конструктивных подмногообразий таких, что $\{N_i \cap X \subset X \mid i \geq 1\}$ дискретно, а также $H_i \subset N_i$ для всех i ;
- (б) k -совершенное относительно $\mathcal{Q}$ ν_{Σ}^k -конструктивное подмногообразие G такое, что $H_1 \subset G$ и $H_2 \cap G = \emptyset$.

РЕДУКЦИЯ АКСИОМЫ УЕДИНЕНИЯ К ПРЕДЛОЖЕНИЮ 8.1. Пусть $\{H'_i\}$ и $\{H''_i\}$ – дискретные семейства ν_{Σ}^{k-1} -конструктивных подмногообразий таких, что $H_i \in H'_i \in H''_i \subset \partial P$ для всех i . В силу (а) существует семейство $\{N_i\}_{i \geq 1}$ k -допустимых относительно $\mathcal{Q}$ ν_{Σ}^k -конструктивных подмногообразий таких, что $\{N_i \cap X \subset X \mid i \geq 1\}$ дискретно, а также $H''_i \subset N_i$ для всех i . Для разбиения $\mathcal{Q}|_{N_i}$ подмногообразия N_i и двухэлементного дискретного семейства $\{H'_i, \text{Bd}_P N_i\}$, лежащего в ∂N_i , применим (б): существует такое семейство $\{G_i\}$ k -совершенных относительно $\mathcal{Q}|_{N_i}$ ν_{Σ}^k -конструктивных подмногообразий N_i , что $H'_i \subset G_i$ и $\text{Bd}_P N_i \cap G_i = \emptyset$. Так как $H_i \in G_i$, то из предложения 2.8 следует, что G_i является k -совершенным относительно $\mathcal{Q}$ ν_{Σ}^k -конструктивным подмногообразием P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8.1. В силу [1; лемма 5.2] существует такая смешанная триангуляция $\mathcal{L}$, что:

- (с) все Q_α и H_i являются подполиэдрами относительно $\mathcal{L}$;
- (d) семейство $\{N(H_i; \mathcal{L}) \mid 1 \leq i\}$ замкнутых симплициальных окрестностей является дискретным в P .

Воспользуемся леммой 2.1 и введем в рассмотрение триангуляцию K' многообразия P , вписанную в $\mathcal{L}$. Переходя, если надо, к $\beta^2 K'$, будем считать, что замкнутая симплициальная окрестность $R_i \triangleq N(H_i; K')$ является регулярной окрестностью H_i в P , а $R_i \cap Q_{A'}$ есть регулярная окрестность $H_i \cap Q_{A'}$ в $Q_{A'}$ для всех $A' \subset A$. Отсюда в силу [6; 3.10] следует

$$(e) \quad R_i \cap \partial P \subset \partial R_i \text{ и } R_i \cap \partial Q_{A'} = (R_i \cap Q_{A'}) \cap \partial Q_{A'} \subset \partial(R_i \cap Q_{A'}).$$

Из (d) следует, что семейство $\{R_i \mid 1 \leq i\}$ дискретно в P и $H_i \subset \partial P \cap \text{Int } R_i$. Обозначим через $\mathcal{S}$ семейство $\{P, R_i, Q_{A'}, R_i \cap Q_{A'} \mid i \geq 1, A' \subset A\}$, которое является, как несложно видеть, локально конечным и состоит из счетного числа подмногообразий (относительно триангуляции K').

ЛЕММА 8.2. Для любого $R \in \mathcal{S}$ справедливо $R \cap \partial P \subset \partial R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $Q_{A'} \cap \partial P \subset \partial Q_{A'}$ следует из [5; 1.1.9(c)]. Поэтому $R_i \cap (Q_{A'} \cap \partial P) \subset R_i \cap \partial Q_{A'}$. Отсюда с учетом (e) имеем

$$(R_i \cap Q_{A'}) \cap \partial P = R_i \cap (Q_{A'} \cap \partial P) \subset R_i \cap \partial Q_{A'} \subset \partial(R_i \cap Q_{A'}).$$

Для $\emptyset \neq R \in \mathcal{S}$ имеем $\dim R = p + s - k$, где $0 \leq s \leq k$. В § 5 определены отображение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k}: P \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на P относительно барицентрического подразделения $K = \beta K' \prec \mathcal{L}$ и отображение $\mathfrak{J}_R = \mathfrak{J}_{R,s}: R \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на R относительно K . В силу леммы 8.2 и теоремы 5.3 имеем

$$(f) \quad \mathfrak{J}|_R = \mathfrak{J}_{R,s}.$$

Через $\{R[E] \mid E \subset [0, \infty]\}$, $R \in \mathcal{S}$, обозначим структуру геометрического джойна $\mathfrak{J}_R$. В силу свойств (iv) и (3)–(5) из § 5 имеем

$$(g) \quad R[1] \text{ и } R[0, 1] \text{ являются многообразиями, а также}$$

$$R[0] \subset_{Z_{\dim R - \dim P + k}} R[0, 1]$$

для любого $R \in \mathcal{S}$.

Более подробно исследуем *середину* $P[1]$ геометрического джойна $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_P$, которую для краткости обозначим через Π . Так как $P[0, 1] \subset P$ есть регулярная окрестность полиэдра $P[0]$, то Π является подмногообразием. Заметим, что границей $\partial \Pi$ является $\partial P \cap \Pi$. Так как $\partial P \subset P[0]$ (свойство (4) из § 5) и $\partial \Pi \subset P[1]$, то $\partial \Pi = \emptyset$.

Так как семейство $\mathcal{S}|_\Pi$ локально конечно, то в силу [1; лемма 5.2] и леммы 2.1 существует триангуляция T' многообразия Π , вписанная в K , относительно которой все элементы этого семейства являются полиэдрами. Поскольку $m \geq 2\kappa + 3$ и $k = \kappa + p - m$, то $p \geq 2k + 3$ и $\dim \Pi = p - 1 \geq 2k + 1$. Так как $\mathcal{S}|_\Pi$ есть семейство подмногообразий относительно триангуляции T' и для любого $\emptyset \neq R \in \mathcal{S}|_\Pi$ имеем $\dim R = \dim \Pi + s - k$, где $0 \leq s \leq k$, то можно рассмотреть отображение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\Pi,k}: \Pi \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на Π

относительно барицентрического подразделения $T \rightleftharpoons \beta T' \prec K \prec \mathcal{L}$ и отображение $\mathfrak{D}_R = \mathfrak{D}_{R,s}: R \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на R относительно T , введенные в § 5. В силу $\partial\Pi = \emptyset$ и теоремы 5.3 имеем

$$(h) \quad \mathfrak{D}|_R = \mathfrak{D}_{R,s}.$$

Пусть $\mathfrak{R}: P(0, \infty) \rightarrow \Pi$ есть ретракция на середину Π геометрического джойна, порожденная $\mathfrak{J}$. Как правило, прообразы $\mathfrak{R}^{-1}(T)$ подполиэдров $T \subset \Pi$ не являются $\mathfrak{L}$ -конструктивными подполиэдрами. Чтобы обойти это обстоятельство, применим теорему 5.4. Для любого счетного семейства подполиэдров P существует гомеоморфизм $h: P \rightarrow P$, сохраняющий $\mathcal{L}$ и переводящий это семейство в семейство $\mathfrak{L}$ -конструктивных подмногообразий и подполиэдров, при этом $h(P[\infty])$ лежит вне ядра Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$. Так как мы используем лишь топологические свойства джойнов (а не их линейную структуру), то ради упрощения обозначений элементы преобразованного и исходного семейств отождествляются. С учетом этого замечания, а также имея в виду, что семейство встречающихся далее полиэдров счетно, мы будем предполагать, что все эти полиэдры исходно являлись $\mathfrak{L}$ -конструктивными.

Обозначим середину $R_j \cap \Pi$ геометрического джойна $\mathfrak{J}_{R_j}$ через Π_j , а

$$\mathfrak{D}_{\Pi_j}^{-1}[s, t] = \Pi_j \cap \mathfrak{D}^{-1}[s, t]$$

обозначим через $\Pi_j[s, t]$. Так как $\Pi_j[0] \sqcup \Pi_j[\infty] \subset_{Z_k} \Pi_j$ и $\Pi_j(0, \infty) \cong \Pi_j[1] \times (0, \infty)$, то имеем

- (1) $\Pi_j[0, 1] \hookrightarrow \Pi_j$, $\Pi_j[1, \infty] \hookrightarrow \Pi_j$ и $\Pi_j[i] \hookrightarrow \Pi_j[i, \infty]$ являются k -эквивалентностями.

Пусть $\Phi = \mathfrak{R} \times (\varphi \circ \mathfrak{J}): P(0, \infty) \rightarrow \Pi \times (0, \infty)$ есть гомеоморфизм из § 5. Так как $\mathfrak{R}$ сохраняет триангуляцию K , а R_j есть полиэдр относительно K , то $W_{i,j} \rightleftharpoons \mathfrak{R}^{-1}(\Pi_j[i, \infty])$ лежит в R_j и гомеоморфен $\Pi_j[i, \infty] \times (0, \infty)$. Ясно, что

$$A_i \rightleftharpoons W_{i,i} \cap P[i, 2i]$$

естественно гомеоморфен $\Pi_i[i, \infty] \times [i, 2i]$, а

$$B_j \rightleftharpoons P[2i, 2i+1] \setminus \bigsqcup \{\text{Int } W_{i,j} \mid j > i\}$$

естественно гомеоморфен $(\Pi \setminus \bigsqcup \{\text{Int}_{\Pi} \Pi_j[i, \infty] \mid j > i\}) \times [2i, 2i+1]$.

Теперь мы в состоянии определить требуемые в предложении 8.1, (а), (b) многообразия N_i и G :

$$N_i \rightleftharpoons R_i[0, 1] \cup A_i \cup B_i, \quad i \geq 1, \quad G \rightleftharpoons R_1[0, 1] \cup A_1 \cup P[2, \infty].$$

Из $B_i \cap A_j = \emptyset$ для $i < j$ легко следует, что $\{N_i\}$ есть дискретное семейство в $P \setminus P[\infty]$, и, следовательно, в силу $P[\infty] \cap \nu_{\mathfrak{L}}^k P = \emptyset$ семейство $\{N_i \cap X\}$ является дискретным в $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k P$. Поскольку все полиэдры в определении N_i и G являются $\mathfrak{L}$ -конструктивными подмногообразиями и подполиэдрами, то, как легко видеть, N_i и G являются $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивными подмногообразиями. Легко видеть, что $H_1 \subset G$ и $H_2 \cap G = \emptyset$, а также $H_i \subset N_i$ для любого $i \geq 1$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для любого $A' \subset A$:

- (2) $N_i \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ является $\dim Q_{A'}$ -эквивалентностью;

- (3) $\text{Bd } N_i \cap Q_{A'} \hookrightarrow (P \setminus \text{Int } N_i) \cap Q_{A'}$ является $(\dim Q_{A'} - 1)$ -эквивалентностью;
- (4) $G \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ и $(P \setminus \text{Int } G) \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ являются $\dim Q_{A'}$ -эквивалентностями;
- (5) $\text{Bd } G \cap Q_{A'} \hookrightarrow G \cap Q_{A'}$ и $\text{Bd } G \cap Q_{A'} \hookrightarrow (P \setminus \text{Int } G) \cap Q_{A'}$ являются $(\dim Q_{A'} - 1)$ -эквивалентностями.

Поскольку все принципиальные сложности этой проверки реализуются уже при установлении k -эквивалентности вложений $v: N_1 \hookrightarrow P$ и $\eta: P \setminus \text{Int } G \hookrightarrow P$, мы займемся именно этим, оставив проверку остального читателю.

$v: N_1 \hookrightarrow P$ есть k -эквивалентность. В силу (g) для установления k -эквивалентности v достаточно показать, что естественное вложение $\tilde{v}: N_1 \setminus P[0] \hookrightarrow P \setminus (P[0] \sqcup P[\infty])$ является k -эквивалентностью. В свою очередь, разобьем эту задачу на ряд простых. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную естественными вложениями:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Pi \times (0, 3] & \xleftarrow{\zeta} & \Pi_1 \times (0, 2] \cup \Pi \times [2, 3] \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \Pi \times (0, \infty) & & & & \\
 \cong P \setminus (P[0] \sqcup P[\infty]) & \xleftarrow{\xi} & P[0, 3] \setminus P[0] & \xleftarrow{\beta} & \Pi_1 \times (0, 2] \cup P[2, 3] \\
 & & \uparrow \alpha & & \uparrow \gamma \\
 & & N_1 \setminus P[0] & \xrightarrow{\delta} & \Pi_1 \times (0, 1] \cup (\Pi_1[1, \infty] \times [1, 2]) \cup P[2, 3] \\
 & \nwarrow \tilde{v} & & &
 \end{array}$$

Так как очевидно, что ξ и ζ , а также β являются гомотопическими эквивалентностями, то требуемая проверка сводится к установлению k -эквивалентности вложений γ и δ .

Следующий факт, по-видимому, является известным.

ЛЕММА 8.3. *Если вложение $N \hookrightarrow M$ полиэдров является k -эквивалентностью, то вложения*

$$N \times [-1, 1] \cup M \times \{-1, 1\} \hookrightarrow M \times [-1, 1] \quad \text{и} \quad N \times [-1, 1) \cup M \times \{-1\} \hookrightarrow M \times [-1, 1)$$

также являются k -эквивалентностями.

Из леммы 8.3 и свойства (1) легко следует, что вложение

$$\gamma_1: \Pi_1[1, \infty] \times [1, 2] \cup \Pi_1 \times \{1, 2\} \hookrightarrow \Pi_1 \times [1, 2]$$

является k -эквивалентностью. Отсюда легко следует k -эквивалентность вложения γ . Проверка k -эквивалентности δ легко сводится к проверке k -эквивалентности вложения $\delta_1: (\Pi \sqcup \{\text{Int } \Pi_j[1, \infty] \mid j > 1\}) \times [2, 3] \hookrightarrow \Pi \times [2, 3]$, которая очевидна в силу (1) и приведенного ниже достаточного условия эквивалентности (см. [1; теорема 2.11]).

ЛЕММА 8.4. *Если X есть объединение $X_0 \cup X_1$ замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, $X_i \in \text{ANE}(r+1)$, $X_0 \cap X_1 \in \text{ANE}(r)$ и вложение $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_1$ является r -эквивалентностью, то вложение $i: X_0 \hookrightarrow X$ также есть r -эквивалентность.*

$\eta: P \setminus \text{Int } G \hookrightarrow P$ есть k -эквивалентность. Чтобы установить k -эквивалентность η , достаточно в силу (g) показать, что

$$\theta: P \setminus (P[0] \cup \text{Int } G) \hookrightarrow P \setminus (P[0] \sqcup P[\infty])$$

является k -эквивалентностью. В свою очередь, разобьем эту задачу на ряд простых. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную естественными вложениями:

$$\begin{array}{ccccc} \Pi \times (0, \infty) & & & & \\ \cong P \setminus (P[0] \cup P[\infty]) & \xleftarrow{\pi} & P[0, 2] \setminus P[0] & & \\ & \swarrow \theta & \uparrow & \nwarrow j & \\ & & P \setminus (P[0] \cup \text{Int } G) & \xhookrightarrow{i} & (\Pi \setminus \text{Int } \Pi_1[1, \infty]) \times (0, 2] \cup P[2] \end{array}$$

Из свойства (g) легко следует, что π является гомотопической эквивалентностью. Поэтому требуемая проверка сводится к установлению k -эквивалентности вложений i и j .

Проверка k -эквивалентности i с помощью (1) и леммы 8.4 легко сводится к установлению k -эквивалентности вложения

$$(\Pi \setminus \text{Int } \Pi_1) \times (0, 1] \cup \Pi_1[0, 1] \times \{1\} \hookrightarrow (\Pi \setminus \text{Int } \Pi_1[1, \infty]) \times (0, 1].$$

Последнее вновь с помощью леммы 8.4 легко сводится к установлению k -эквивалентности вложения

$$\Pi_i[0] \times (0, 1] \cup \Pi_1[0, 1] \times \{1\} \hookrightarrow \Pi_1[0, 1] \times (0, 1],$$

что является следствием (1) и леммы 8.3.

Вложение j совпадает с естественным вложением

$$(\Pi \setminus \text{Int } \Pi_1[1, \infty]) \times (0, 2] \cup \Pi \times \{2\} \hookrightarrow \Pi \times (0, 2],$$

чья k -эквивалентность следует из леммы 8.3, примененной к k -эквивалентности $l: \Pi \setminus \text{Int } \Pi_1[1, \infty] \hookrightarrow \Pi$. В свою очередь, k -эквивалентность вложения l следует из (1) и леммы 8.4.

§ 9. Проверка глобальной аксиомы

Пусть $0 \leq l < k$, $(\mathcal{Q}', T': \mathcal{Q}' \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta': P \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$ есть тройка, в которой $\mathcal{Q}' = \{Q'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть ν_Σ^k -конструктивное l -разбиение P , T' есть трансформация разбиений, а β' есть аккомпанент T' , являющийся k -эквивалентностью относительно $\theta \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}} \prec \theta$. Фиксируем также $\omega \in \text{cov } \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$ и совершенное отображение $f: X = \nu_\Sigma^k \rightarrow Y$, для которых $\mathcal{H}_f \subset X$ есть счетное объединение ручных Z -множеств, а $\beta'(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$.

ГЛОБАЛЬНАЯ АКСИОМА (кусочно линейный вариант). Для любых $Q'_0 \in \mathcal{Q}'$, $a \in \pi_l(Q'_0)$ и ручного Z -множества $X_0 \subset X$ существуют допустимое относительно $\mathcal{Q}'$ ν_Σ^k -конструктивное подмногообразие C , $X_0 \subset \text{Int } C$, и тройка $(\mathcal{Q}, T: \mathcal{Q} \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta: P \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}}))$, в которой $\mathcal{Q}$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение P , T есть соответствие разбиений, а β есть аккомпанент T , такая, что:

- (a) существуют $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное l -разбиение $\mathcal{Q}^\bullet = \{Q_\alpha^\bullet \mid \alpha \in A\} \subset \mathcal{Q}$ $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивного подмногообразия $E \subset P$, $C \subset E$, и трансформация $T^\bullet: \mathcal{Q}^\bullet \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$, $T^\bullet(Q_\alpha^\bullet) = \widehat{Q}_\alpha$, C -эквивалентная T' , которая допускает конечное l -продолжение в соответствие T ;
- (b) $\beta = \beta'$ на C и $\text{dist}(\beta, \beta') \prec \theta$;
- (c) $\beta(P \setminus C) \subset N(\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta^3)$, где $\widehat{q}_0 \rightleftharpoons T'(Q'_0)$;
- (d) $Q'_0 \cap C \subset Q_0^\bullet$, причем вложение $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q_0^\bullet$ является l -эквивалентностью;
- (e) существует элемент $b \in \pi_l(Q'_0 \cap C)$, который свободно гомотопен элементу a в Q'_0 и при вложении $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q_0^\bullet$ переходит в нулевой элемент;
- (f) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ для всех $y \in Y$.

Предварим доказательство этой аксиомы рядом вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 9.1. Пусть $R \subset P$ — $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное подмногообразие, (W, A) — компактная s -мерная пара PL-многообразий, $s \leq k$. Тогда в пространстве отображений из (W, A) в (P, R) всюду плотно множество $\{\tau: (W, A) \rightarrow (P, R)\}$ кусочно линейных вложений пар, для которых:

- (1) $\text{Im } \tau$ есть $\mathfrak{L}$ -конструктивное подмногообразие, находящееся в общем положении с элементами $\mathcal{Q}'$, т.е. каждое непустое пересечение $\text{Im } \tau \cap Q'_{A'}$ есть $(\dim W + 1 - |A'|)$ -мерное $\mathfrak{L}$ -конструктивное подмногообразие;
- (2) $N(\text{Im } \tau; \delta) \cap \text{Cl}_P(X_0) = \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$.

Указание. Так как $\dim P = \dim R \geq 2s + 1$, то применима теорема об общем положении [6] для вложений по отношению к элементам $\mathcal{Q}'$. Далее использовать теорему 4.1 об изотопическом движении и соотношение $\text{Cl}_P(X_0) \subset_{Z_k} P$ (предложение 2.5).

При проверке аксиомы используется следующий достаточно общий способ построения конечных l -продолжений. Доказательство этого способа осуществляется в духе [5; 2.6].

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть компактное $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное подмногообразие $\mathfrak{F} \subset P \setminus \partial P$ содержит такой подполиэдр $\mathfrak{F}_0 \subset \text{Int}_P \mathfrak{F}$, что $\dim \mathfrak{F} - \dim \mathfrak{F}_0 \geq l + 1$, а $\mathfrak{F} \setminus \text{Int } R$ вминается в $\partial \mathfrak{F}$, где $R \subset \text{Int } \mathfrak{F}$ есть регулярная окрестность $\mathfrak{F}_0$. Тогда для любой тройки

$$(\mathcal{Q}_E, T_E: \mathcal{Q}_E \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta_E: E \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})),$$

в которой $\mathcal{Q}_E$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное разбиение $E \rightleftharpoons P \setminus \text{Int } \mathfrak{F}$, T_E — соответствие разбиений, а β_E — аккомпанемент T_E , продолжающийся до отображения $\beta_P: P \rightarrow \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{Q}})$, существует тройка $(\mathcal{Q}_P, T_P: \mathcal{Q}_P \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}}, \beta_P)$, в которой $\mathcal{Q}_P$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^k$ -конструктивное разбиение P , T_P — соответствие разбиений, являющееся конечным l -продолжением T_E , β_P — аккомпанемент T_P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГЛОБАЛЬНОЙ АКСИОМЫ. Элемент $a \in \pi_l(Q'_0)$ зададим вложением $\varphi': S^l \hookrightarrow \text{Int } \mathcal{Q}'_0$. Так как $\beta'(Q'_0) \subset \text{St}(\widehat{q}_0) \in \text{AE}$, то $\beta' \circ \varphi'$ имеет продолжение $\psi': D^{l+1} \rightarrow \text{St}(\widehat{q}_0)$. Поскольку β' есть k -эквивалентность, то φ' имеет такое продолжение $\widehat{\varphi}_1: D^{l+1} \rightarrow X$, что

- (3) $\beta' \circ \widehat{\varphi}_1 \simeq^H \psi'$, где гомотопия $H: D^{l+1} \times I \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$ такова, что $H[\text{rel } S^l]$ и $H[\text{rel } \theta]$.

Следовательно, $\beta'(\text{Im } \widehat{\varphi}_1) \subset N(\text{St}\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta)$. В силу леммы 9.1 с самого начала можем считать, что $\widehat{\varphi}_1$ есть кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_1: D^{l+1} \hookrightarrow P \setminus \partial P$, $\widehat{\varphi}_1(S^l) \subset Q'_0$, удовлетворяющее условиям (1), (2) леммы 9.1 (естественно, с заменой τ на $\widehat{\varphi}_1$). Отсюда и из условия (3) следует существование такой малой регулярной окрестности $\mathcal{W}_1$ PL-диска $\text{Im } \widehat{\varphi}_1$, что

- (4) $\beta'(\mathcal{W}_1) \subset N(\text{St}\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta)$, а также $N(\mathcal{W}_1; \delta) \cap \text{Cl}_P X_0 = \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$.

Если $\text{Im } \widehat{\varphi}_1 \cap Q_{A'} \neq \emptyset$ для $A' \subset A$, то из условия (1) леммы 9.1 следует, что $\mathcal{W}_1 \cap Q_{A'}$ есть регулярная окрестность $(l+2-|A'|)$ -мерного полиэдра $\text{Im } \widehat{\varphi}_1 \cap Q_{A'}$. Отсюда и из соображений общего характера следует справедливость приведенного ниже условия $(\alpha)_n$ при $n = 1$. Важно, что диск $\text{Im } \widehat{\varphi}_1$ можно чуть расширить так, что $\text{Bd } \mathcal{W}_1 \cap \text{Im } \widehat{\varphi}_1$ совпадет с $\widehat{\varphi}_1(A) = \varphi'(A) \subset \text{Int } Q'_0$ (см. [5; 2.7.4]).

Так как $\mathcal{H}_f \subset_{\sigma Z_k} X = \nu_{\Sigma}^k P$ и $P \setminus X \subset_{\sigma Z_k} P$, то

- (5) $(P \setminus X) \cup \mathcal{H}_f$ содержится в σZ_k -множестве $\bigcup \{X_i \mid i \geq 1\}$, где $X_i \subset_{Z_k} P$.

В силу леммы 9.1 существуют кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_2: D^{l+1} \hookrightarrow \mathcal{W}_1$ и регулярная окрестность $\mathcal{W}_2$ диска $\text{Im } \widehat{\varphi}_2$ в $\mathcal{W}_1$ такие, что при $n = 2$ выполнены следующие условия:

- (α) $_n$ $C_n \rightleftharpoons P \setminus \text{Int } \mathcal{W}_n$ является k -допустимым относительно $\mathcal{Q}'$ ν_{Σ}^k -конструктивным подмногообразием;
 (β) $_n$ $\widehat{\varphi}_n(S^l) = \text{Im } \widehat{\varphi}_n \cap \text{Bd}_P \mathcal{W}_n = \text{Im } \widehat{\varphi}_n \cap \text{Bd}_P \mathcal{W}_{n-1} = \dots = \text{Im } \widehat{\varphi}_n \cap \text{Bd } \mathcal{W}_1$;
 (γ) $_n$ $\mathcal{W}_n \cap \text{Bd}_P \mathcal{W}_{n-1} = \mathcal{W}_n \cap \text{Bd}_P \mathcal{W}_{n-2} = \dots = \mathcal{W}_n \cap \text{Bd } \mathcal{W}_1 \subset \text{Int } Q'_0$;
 (δ) $_n$ $\mathcal{W}_n \cap X_{n-1} = \emptyset$ и $\text{dist}(\widehat{\varphi}_n, \widehat{\varphi}_{n-1}) < c_n < 2^{-n}$.

Ясно, как продолжить это построение и предъявить для любого $n > 2$ кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_n: D^{l+1} \hookrightarrow \mathcal{W}_{n-1}$ и регулярную окрестность $\mathcal{W}_n$ диска $\text{Im } \widehat{\varphi}_n$ в $\mathcal{W}_{n-1}$ такие, что будут выполнены условия (α) $_n$ –(δ) $_n$. Из (β) $_n$, (γ) $_n$ легко следует, что $\widehat{\varphi}_n(S^l) \subset \text{Int } Q'_0$.

Из (δ) $_n$, $n \geq 1$, и из полноты X следует существование предела $\widehat{\varphi} = \lim \widehat{\varphi}_n$. Принимая во внимание условие (5), а также то, что константы $c_n > 0$ можно выбирать произвольно малыми, мы можем дополнительно добиться того, чтобы

- (ε) $\widehat{\varphi}$ было вложением диска D^{l+1} в $X \setminus \mathcal{H}_f$.

Пусть $D \rightleftharpoons \text{Im } \widehat{\varphi}$ есть топологический $(l+1)$ -диск, лежащий в X , а $S \rightleftharpoons \widehat{\varphi}(S^l)$ есть топологическая l -сфера. Заметим, что если $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_1$ достаточно близки друг к другу, то для отображения $\eta \rightleftharpoons \beta'|_D: D \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle \in \text{ANE}$, как и в условии (3), справедливо

- (6) $\eta \stackrel{\Phi}{\simeq} \chi$, где $\chi: D \rightarrow \text{St}\langle \widehat{q}_0 \rangle$ есть такое отображение, что $\chi|_S = \eta|_S$, а гомотопия $\Phi: D \times I \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$ такова, что $\Phi[\text{rel } S]$ и $\Phi[\text{rel } \theta]$.

Покажем, что существуют требуемое аксиомой отображение $\beta: P \rightarrow \mathcal{N}\langle \widehat{\mathcal{Q}} \rangle$, а также ручка $R \rightleftharpoons \mathcal{W}_{n_0}$, для которой:

- (i) $\beta(R) \subset \text{St}\langle \widehat{q}_0 \rangle$;
 (ii) $\beta|_{\mathcal{W}_1} \stackrel{K}{\simeq} K\beta'|_{\mathcal{W}_1}$, где для гомотопии K справедливо $K[\text{rel Bd } \mathcal{W}_1]$ и $K[\text{rel } \theta]$ (и, следовательно, в силу условия (4) и $\mathcal{N}_{\widehat{\mathcal{Q}}} \prec \theta$ справедливо $\text{Im } K \subset N(\text{St}\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta^2) \subset N(\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta^3)$).

Для этого воспользуемся теоремой 1.1 о равностепенном продолжении гомотопии. Пусть $Y \rightleftharpoons N(\dot{\text{St}}\langle\hat{q}_0\rangle; \theta) \in \text{ANE}$, $W \rightleftharpoons \mathscr{W}_1$ и $T \rightleftharpoons \text{Bd } \mathscr{W}_1 \subset W$. Из условия (ε) легко следует, что

(ζ) семейство $\{B_\gamma\} \rightleftharpoons \{f^{-1}(y) \cap W \mid y \in Y\} \subset W \setminus D$ примыкает к $D = \text{Im } \hat{\varphi} \subset W$.

В силу условий (4) и (6) $\beta'(D)$ и $\Phi(D \times I)$ содержатся в Y , причем β' и Φ_s согласуются на $D \cap T$. Тем самым возникают отображение $h \rightleftharpoons \beta'|_W: W \rightarrow Y$ и θ -гомотопия $F: (T \cup D) \times I \rightarrow Y$, определенная формулами $F(z, s) = \beta'(z)$ для $(z, s) \in T \times I$ и $F|_{D \times I} = \Phi$. Ясно, что $\theta, \omega \in \text{cov } \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$, а также построенные пространства D, T, W и Y , семейство $\{B_\gamma\}$, отображения h и F подчиняются условиям теоремы 1.1. Следовательно, существует такая θ -гомотопия $K: W \times I \rightarrow Y$, являющаяся продолжением F , что $K_0 = h$, а также выполнены условия (d), (e) теоремы 1.1. Так как $F_1(D) = \Phi_1(D) = \chi(D) \subset \dot{\text{St}}\langle\hat{q}_0\rangle$, то $K_1(\mathscr{W}_{n_0}) \subset \dot{\text{St}}\langle\hat{q}_0\rangle$ для некоторого n_0 . В качестве искомой ручки R возьмем $\mathscr{W}_{n_0}$, а в качестве искомого отображения β – отображение, совпадающее с K_1 на W и с β' на $P \setminus W$. Ясно, что свойства (i), (ii), а также (b) и (f) будут выполнены.

В качестве искомого $\nu_{\mathcal{E}}^k$ -конструктивных подмногообразий возьмем

$$C \rightleftharpoons P \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1 \quad \text{и} \quad E \rightleftharpoons (P \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1) \cup R.$$

Ясно, что C допустимо относительно $\mathscr{Q}'$ и $X_0 \subset \text{Int } C$. В силу (ii) имеем

$$\beta(P \setminus C) \subset K_1(\mathscr{W}_1) \subset N(\langle\hat{q}_0\rangle; \theta^3)$$

– условие (с) установлено.

Искомое разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$ состоит из элементов

$$Q_0^\bullet = (Q'_0 \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1) \cup R \quad \text{и} \quad Q_\alpha^\bullet = Q_\alpha \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1$$

для всех $Q_\alpha \neq Q'_0$; искомая трансформация $T^\bullet: \mathscr{Q}^\bullet \rightarrow \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle$ определяется формулой $T^\bullet(Q_\alpha^\bullet) = T'(Q_\alpha)$. Ясно, что $\beta|_E$ является аккомпанементом $T^\bullet$.

Так как $R = \mathscr{W}_{n_0}$ есть регулярная окрестность диска $\text{Im } \hat{\varphi}_{n_0}$ в $\mathscr{W}_{n_0-1}$, то R есть регулярная окрестность $\text{Im } \hat{\varphi}_{n_0}$ в $\mathscr{W}_1$. Отсюда и из $(\beta)_{n_0}, (\gamma)_{n_0}$ следует, что R есть ручка индекса $l+1$, приклеенная к $\text{Bd } \mathscr{W}_1$ вдоль a -трубки $R \cap \text{Bd } \mathscr{W}_1$, у которой срединный диск есть $\text{Im } \hat{\varphi}_{n_0}$ (см. [6], [5; 2.7.4]). Так как $R \cap \text{Bd } \mathscr{W}_1 \cong S^l \times D^{p-1-l}$, а $R \cong D^{l+1} \times D^{p-1-l} = D^p$, то

(7) вложение $R \cap \text{Bd } \mathscr{W}_1 \hookrightarrow R$ является l -эквивалентностью.

Компакт

$$\mathfrak{F} \rightleftharpoons \mathscr{W}_1 \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1 R = P \setminus \text{Int } E,$$

называемый *окраиной ручки* R , кусочно линейно гомеоморфен $D^{l+2} \times S^{p-l-2}$, а $(\mathfrak{F}, \text{Bd}_P \mathfrak{F}) \cong (D^{l+2}, \text{Bd } D^{l+2}) \times S^{p-l-2}$ [5; 2.6]. Пусть $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ таково, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0) \cong (D^{l+2}, \{0\}) \times S^{p-l-2}$. Так как $\dim \mathfrak{F} - \dim \mathfrak{F}_0 \geq l+1$, то для пары $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0)$ выполнены условия теоремы 9.2, и поэтому тройка $(\mathscr{Q}^\bullet, T^\bullet, \beta|_E)$ может быть переведена в тройку $(\mathscr{Q}, T: \mathscr{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \beta: P \rightarrow \mathcal{N}\langle\hat{\mathcal{Q}}\rangle)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $\nu_{\mathcal{E}}^k$ -конструктивное разбиение P , соответствие T есть конечное l -продолжение $T^\bullet$, а β есть аккомпанемент T .

Проверим требуемые свойства для введенных разбиений и соответствий. Разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$ является l -разбиением в силу k -допустимости $P \setminus \text{Int } \mathscr{W}_1$ относительно $\mathscr{Q}'$ и свойства (7). Отсюда и из леммы 8.4 следует, что вложение

$Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q_0^\bullet$ будет l -эквивалентностью. Из k -допустимости $P \setminus \text{Int } \mathcal{W}_1$ относительно $\mathcal{Q}'$ следует, что вложение $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q'_0$ индуцирует изоморфизм π_i , $i < k$. Так как $(Q'_0 \cap C) \cap R = \text{Bd } \mathcal{W}_1 \cap R$, $Q_0^\bullet = (Q'_0 \cap C) \cup R$, то из леммы 8.4 следует, что $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q_0^\bullet$ является l -эквивалентностью, что доказывает (d).

Для доказательства свойства (е) глобальной аксиомы заметим, что $\varphi', \widehat{\varphi} \upharpoonright : S^l \hookrightarrow Q'_0$ свободно гомотопны в Q'_0 , т.е. являются представителями $a \in \pi_l(Q'_0)$. В качестве представителя элемента $b \in \pi_l(Q'_0 \cap C)$ возьмем естественное вложение $\widehat{\varphi} \upharpoonright : S^l \hookrightarrow Q'_0 \cap C = Q'_0 \setminus \text{Int } \mathcal{W}_1$. То, что b при вложении $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q_0^\bullet$ переходит в нулевой элемент, легко следует из $R \cong D^p \in \mathcal{C}^l$ и коммутативности следующей диаграммы вложений:

$$\begin{array}{ccccc} S^l & \xhookrightarrow{\varphi} & R \cap \text{Bd } \mathcal{W}_1 & \xhookrightarrow{\quad} & R \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Q'_0 \cap C = Q'_0 \setminus \text{Int } \mathcal{W}_1 & \hookrightarrow & Q_0^\bullet \end{array}$$

§ 10. Проверка локальной аксиомы

Пусть $\mathcal{Q}'$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение P , а тело подсемейства $\mathcal{Q}'_r = \{Q'_i \mid 1 \leq i \leq r+1\} \subset \mathcal{Q}'$, $1 \leq r \leq k$, есть ν_Σ^k -конструктивное подмногообразие $G \subset P$, причем $E' \neq \bigcap \{Q'_i \mid 1 \leq i \leq r+1\} \neq \emptyset$. Пусть задано ручное Z -множество $X_0 \subset X = \nu_\Sigma^k(P)$. Читателю предоставляется возможность вывести локальную аксиому из теоремы 3.8, предложения 2.6 и приведенного ниже утверждения.

ЛОКАЛЬНАЯ АКСИОМА (кусочно линейный вариант). *Для любых отображений $\varphi: S^{l-1} \rightarrow E'$, $l+r \leq k$, $l < k$, и $\tau: D^l \rightarrow F' \neq Q'_1 \cap \dots \cap Q'_r$, $\tau|_{S^{l-1}} = \varphi$, существует k -допустимое относительно $\mathcal{Q}'$ ν_Σ^k -конструктивное подмногообразие $C \subset P$, удовлетворяющее условиям*

$$\text{Cl}_P(X_0) \subset \text{Int}_P C \quad \text{и} \quad R \neq P \setminus \text{Int } C \subset \text{Int}_M(G),$$

а также:

- (i) $\mathcal{Q}_r \neq \{Q_i = Q'_i \setminus \text{Int } R \mid i \leq r\} \cup \{Q_{r+1} = Q'_{r+1} \cup R\}$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение G ;
- (ii) естественные вложения $Q_{A'} \hookrightarrow Q'_{A'}$, где $\{r+1\} \in A' \subset \{i \mid 1 \leq i \leq r+1\}$, и $Q'_i \hookrightarrow Q_i$, где $1 \leq i \leq r$, являются l -эквивалентностями²; в частности, вложение $E' \cap C \hookrightarrow E \neq \bigcap \{Q_i \mid 1 \leq i \leq r+1\}$ является l -эквивалентностью;
- (iii) существует такое отображение $\zeta: S^{l-1} \rightarrow E' \cap C$, что ζ гомотопно φ в E' и $\zeta \simeq 0$ в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 9.1 и с самого начала будем считать, что τ и φ являются кусочно линейными вложениями, удовлетворяющими условиям (1), (2) леммы 9.1, и

$$(\alpha) \quad \text{Im } \tau \cap E' = \text{Im } \varphi, \text{ а также } N(\text{Im } \tau; \delta) \subset \text{Int}(G).$$

²В силу предложения 2.5 эти вложения при сужении на X переходят в $(l-1)$ -эквивалентности.

Выберем малую регулярную окрестность R , $R \subset N(\text{Im } \tau; \delta)$, диска $\text{Im } \tau$ в P так, чтобы $R \cap Q'_{A'}$ было регулярной окрестностью $\text{Im } \tau \cap Q'_{A'}$ для всех $A' \subset \{i \mid 1 \leq i \leq r+1\}$. Тогда $C = P \setminus \text{Int } R$. Свойства (i)–(iii) следуют из того, что:

- (β) R является ручкой индекса l , приклеенной к $Q'_{r+1} \setminus \text{Int } R$ вдоль a -трубки $\text{Bd } R \cap Q'_{r+1} \cong S^{l-1} \times D^{p-l}$ и имеющей косрединный диск D^{p-l} и b -сферу S^{p-l-1} ;
- (γ) $R \cap Q'_{A'}$, где $A' \subset \{i \mid 1 \leq i \leq r\}$, является ручкой индекса l , приклеенной к $Q'_{A'} \cap Q'_{r+1}$ вдоль a -трубки $R \cap Q'_{A'} \cap Q'_{r+1} \cong S^{l-1} \times D^{p-|A'|-l+1}$ и имеющей косрединный диск $D^{p-|A'|-l+1}$ и b -сферу $S^{p-|A'|-2}$.

§ 11. Проверка аксиом $\mathcal{Z}$ -множеств

С учетом [1; предложение 12.2] нам остается проверить:

- (а) если $F \subset X$ есть трансверсальное Z -множество, то для любого удобного k -разбиения $\mathcal{P}$ пространства X существует совершенное относительно $\mathcal{P}$ множество N такое, что $F \subset \text{Int } N$ (часть аксиомы $\mathcal{Z}_1$);
- (б) если F является ручным Z -множеством в X , а $N \in \mathcal{C}_X^k$, то $F \cap N$ является ручным Z -множеством в N (аксиома $\mathcal{Z}_2$).

С помощью теоремы 3.8 и замечания 7.1 эти утверждения несложно свести к кусочно линейным фактам.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $\{Q_\alpha\}$ есть ν_Σ^k -конструктивное k -разбиение P , элементы которого и все непустые пересечения являются клетками соответствующих размерностей. Тогда для любого трансверсального Z -множества $F \subset X$ существует k -совершенное относительно $\mathcal{Q}$ ν_Σ^k -конструктивное подмногообразие $N \subset P$ такое, что $\text{Cl}_P F \subset \text{Int}_P N$.

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть F есть ручное Z -множество в X , $\{Q_\alpha\}$ есть ν_Σ^k -конструктивное разбиение ν_Σ^k -конструктивного подмногообразия $R \subset P$. Тогда $Q_{A'} \cap \text{Cl}_P F \subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'}$ для любого $A' \subset A$.

Доказательство теоремы 11.1 существенно зависит от продолжения изотопий. Напомним, что изотопией полиэдра T в полиэдре L называется такое кусочно линейное вложение $f: T \times I \hookrightarrow Q \times I$, что $f_0 = \text{Id}$ и $f(T \times \{t\}) \subset Q \times \{t\}$ для всех $t \in I$. Изотопия полиэдра L — это кусочно линейный гомеоморфизм $f: L \times I \rightarrow L \times I$, для которого $f_0 = \text{Id}$ и $f(T \times \{t\}) \subset Q \times \{t\}$ для всех $t \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. Пусть $g: T \times I \hookrightarrow Q \times I$ есть изотопия компактного полиэдра T , лежащего в компактном многообразии Q^q , такая, что

$$g^{-1}(\partial Q \times I) = T_0 \times I,$$

где $T_0 \subset T$ есть подполиэдр, возможно пустой. Пусть также задана изотопия $G: \partial Q \times I \rightarrow \partial Q \times I$ границы ∂Q , продолжающая изотопию $g|_{T_0 \times I}$ (т.е. $G|_{T_0 \times I} = g|_{T_0 \times I}$). Если

$$(1) \dim T_0 \leq \dim T - 1 \leq \dim Q - 4,$$

то существует изотопия $\hat{G}: Q \times I \rightarrow Q \times I$ многообразия Q , продолжающая G и g , т.е. $\hat{G}|_{\partial Q \times I} = G$ и $\hat{G}|_{T \times I} = g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись леммой о продолжении изотопии с границы на многообразие [5; 3.22], построим изотопию $M: Q \times I \rightarrow Q \times I$, продолжающую G . Поскольку изотопия $f \doteq M^{-1} \circ g: T \times I \rightarrow Q \times I$ полиэдра T постоянна на $T_0 \times I$, то к ней применима следующая лемма, являющаяся частным случаем [8; 9.8].

ЛЕММА 11.4. Если $f: T \times I \hookrightarrow Q \times I$ есть такая изотопия компактного полиэдра T в компактном многообразии Q^q , что $f|_{T_0 \times I} = \text{Id}$ и $f^{-1}(\partial Q \times I) = T_0 \times I$, а также справедливы размерностные ограничения (1), то существует изотопия $H: Q \times I \rightarrow Q \times I$, продолжающая f и такая, что $H|_{\partial Q \times I} = \text{Id}$.

Пусть изотопия $H: Q \times I \rightarrow Q \times I$ такова, что $H|_{T \times I} = f$ и $H|_{\partial Q \times I} = \text{Id}$. Искомая изотопия $\widehat{G}$ задается формулой $M \circ H: Q \times I \rightarrow Q \times I$. Действительно, $\widehat{G}|_{\partial Q \times I} = M|_{\partial Q \times I} = G$ и $\widehat{G}|_{T \times I} = (M \circ H)|_{T \times I} = M \circ f = M \circ M^{-1} \circ g = g$.

Следующее обобщение предложения 11.3 имеет дело с заменой ∂Q на подмногообразие $Q_0 \subset \partial Q$ размерности $q - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.5. Пусть $Q_0^{q-1} \subset \partial Q^q$ есть PL-подмногообразие,

$$g: T \times I \hookrightarrow Q \times I$$

есть изотопия компактного полиэдра T в компактном многообразии Q^q такая, что

$$g^{-1}(\partial Q \times I) = g^{-1}(Q_0 \times I) = T_0 \times I,$$

а изотопия $G': Q_0 \times I \rightarrow Q_0 \times I$ продолжает изотопию $g|_{T_0 \times I}$. Если выполнены размерностные ограничения (1), то существует изотопия $\widehat{G}: Q \times I \rightarrow Q \times I$, продолжающая G' и g , т.е. $\widehat{G}|_{Q_0 \times I} = G'$ и $\widehat{G}|_{T \times I} = g$.

Для доказательства предложения 11.5 следует продолжить изотопию G' до изотопии $G: \partial Q \times I \rightarrow \partial Q \times I$ и далее применить предложение 11.3 для g и G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11.1. В силу [1; лемма 5.2] и леммы 2.1 существует такая триангуляция K' многообразия P , что все Q_α являются подполиэдрами относительно K' . Так как $\dim Q_{A'} = p + s - k$, где $0 \leq s \leq k$, то можно рассмотреть введенные в § 5 отображение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k}: P \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на P относительно $K \Rightarrow \beta K'$ и отображение $\mathfrak{J}_R = \mathfrak{J}_{R,s}: R \rightarrow [0, 1]$ геометрического джойна на $R = Q_{A'}$ относительно K . В силу леммы 8.2 и теоремы 5.3 имеем $\mathfrak{J}|_R = \mathfrak{J}_R$. Через $\{Q_{A'}[E] \mid E \subset [0, \infty]\}$ обозначим структуру геометрического джойна $\mathfrak{J}_{Q_{A'}}$. В силу условий (iv) и (3)–(5) из § 5 имеем

- (с) для любого $R = Q_{A'}$ $R[1]$ и $R[0, 1]$ являются многообразиями, а также $R[0] \sqcup P[\infty] \subset_{Z_s} R[0, 1]$, где $s = \dim R - \dim P + k$.

В силу теоремы о регулярных окрестностях [5; 3.24]

- (2) существует такая изотопия $H_t: P \times I \rightarrow P \times I$, постоянная на $P[0] \sqcup P[\infty]$, что H_1 переводит регулярную окрестность $P[1, \infty]$ полиэдра $P[\infty]$ в сколь угодно малую окрестность $P[\infty]$. При этом можно считать, что изотопия H_t сохраняет $\mathcal{Q}$.

Поскольку K' – триангуляция $Q_{A'}$, то $Q_{A'}[\infty]$ есть компактный $(k+1-|A'|)$ -мерный полиэдр относительно K , не пересекающийся с $|(K')^{(p-k-1)}| \subset P[0]$. К сожалению, $Q_{A'}[\infty]$ может пересекаться с $\text{Cl}_P F$. Следующий факт позволяет преодолеть это обстоятельство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.6. *Существует изотопия $\Phi_t: P \times I \rightarrow P \times I$ такая, что:*

- (3) Φ_t сохраняет разбиение $\mathcal{Q}$;
- (4) $\Phi_1(P[\infty]) = \Phi_1(\mathfrak{T})$ есть подполиэдр P , не пересекающийся с $\text{Cl}_P F$.

Указание. Полагаем $\Phi_t = \text{Id}$ на $|(K')^{(p-k-1)}|$. Далее доказательство предложения 11.6 осуществляется индукцией по остовам разбиения с использованием предложения 11.5, примененного к $Q \rightleftharpoons Q_{A'}$, $T \rightleftharpoons Q_{A'}[\infty]$ и $T_0 \rightleftharpoons T \cap \text{Bd } Q_{A'}$. Необходимые для этого размерностные ограничения выполнены, так как $\dim Q_{A'} - \dim Q_{A'}[\infty] \geq 3$ и $\dim Q_{A'} - \dim T_0 \geq 4$. Заметим, что из $F \cap \nu^k(Q_{A'}) \subset_Z \nu^k(Q_{A'})$ следует, что $\text{Cl } F \cap Q_{A'} \subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'}$ (см. предложение 2.5). Поэтому малой изотопией T можно перевести в дополнение $Q_{A'} \setminus \text{Cl}_P F$, не меняя ее на $\text{Bd } Q_{A'}$. Все остальные детали доказательства мы оставляем читателю.

Из условия (4) следует, что $N(\Phi_1(P[\infty]); \mathcal{L})$ не пересекается с $N(\text{Cl}_P F; \mathcal{L})$ для некоторой очень малой смешанной триангуляции $\mathcal{L} \prec K$. Из условия (2) следует, что существует изотопия $H_t: P \times I \rightarrow P \times I$, постоянная на $P[0] \sqcup P[\infty]$ и сохраняющая разбиение $\mathcal{Q}$, для которой $H_1(P[1, \infty])$ лежит в окрестности $(\Phi_1)^{-1}(N(\Phi_1(P[\infty]); \mathcal{L}))$ полиэдра $P[\infty]$. Тем самым PL-многообразие $(\Phi_1 \circ H_1)(P[1, \infty])$ не пересекается с $\text{Cl}_P F$.

Очевидно, что внутренность PL-многообразия $N' \rightleftharpoons (\Phi_1 \circ H_1)(P[0, 1])$ содержит $\text{Cl}_P F$. Вообще говоря, N' не является $\nu_{\mathcal{L}}$ -конструктивным подмногообразием. Чтобы обойти это обстоятельство, применим теорему 5.4, в силу которой существует гомеоморфизм $F: P \rightarrow P$, сохраняющий $\mathcal{L}$ (и, следовательно, сохраняющий $N(\Phi_1(P[\infty]); \mathcal{L})$) и такой, что $F(N' \cap Q_{A'})$ есть $\nu_{\mathcal{L}}$ -конструктивное подмногообразие. Легко проверить, что $N \rightleftharpoons F(N')$ является искомым k -совершенным относительно $\mathcal{Q}$ $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивным подмногообразием, внутренность которого содержит $\text{Cl}_P F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11.2. Поскольку

$$Q_{A'} \cap \text{Bd } R \subset \partial Q_{A'}$$

(лемма 8.2), то достаточно установить

$$(Q_{A'} \setminus \text{Bd } R) \cap \text{Cl}_P F \subset_{Z_{k+1-|A'|}} (Q_{A'} \setminus \text{Bd } R).$$

С помощью следствия 3.9 требуемое несложно сводится к следующему утверждению.

ЛЕММА 11.7. *Пусть N – $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное подмногообразие P , а $\mathcal{P} = \{P_{\alpha}\} - \nu^k$ -конструктивное разбиение N . Тогда для любого $\varepsilon \in \text{cov } P$ существует $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивное подмногообразие $N_{\varepsilon} \Subset N$ такое, что:*

- (5) $N(N_{\varepsilon}; \varepsilon) \supset N$;
- (6) $\mathcal{P}_{\varepsilon} \equiv \mathcal{P}|_{N_{\varepsilon}}$ является $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивным разбиением N_{ε} ;
- (7) $\mathcal{P}_{\varepsilon} \cup \{X \setminus \text{Int } N_{\varepsilon}\}$ является $\nu_{\mathcal{L}}^k$ -конструктивным разбиением P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [1; лемма 5.2] существует такая смешанная триангуляция $\mathcal{L}$ многообразия P , что все элементы $\mathcal{P}$, а также N являются полиэдрами относительно $\mathcal{L}$. В силу леммы 2.1 существует триангуляция K , вписанная в $\mathcal{L}$ и ε . Тем самым $P_{A'}$ является подмногообразием относительно K .

Через $\mathfrak{R}$ обозначим регулярную окрестность $N(B; \beta^2 K)$ границы $B = \text{Bd}_P N$ в N , являющейся полиэдром относительно K . Тогда $\mathfrak{R} \cap P_{A'}$ есть регулярная окрестность $B \cap P_{A'}$ в $P_{A'}$ для любого $A' \subset A$. Так как регулярная окрестность полиэдра в многообразии, а также ее граница и дополнение являются подмногообразиями [6], то

(8) $\mathfrak{R} \cap P_{A'}$, $\text{Bd } \mathfrak{R} \cap P_{A'}$ и $P_{A'} \setminus \mathfrak{R}$ являются подмногообразиями для любого $A' \subset A$.

Рассмотрим подмногообразие $\dot{N}_\varepsilon = N \setminus \text{Int } \mathfrak{R}$. Свойство (5) для $\dot{N}_\varepsilon$ имеет место в силу вписанности $K \prec \varepsilon$. Свойства (6), (7) также справедливы, что легко следует из свойства (8). К сожалению, $\dot{N}_\varepsilon$, вообще говоря, ν_ε^k -конструктивным подмногообразием не является. Применив к $\dot{N}_\varepsilon$ теорему 4.1 об изотопическом движении, получим сохраняющую смешанную триангуляцию $\mathcal{L}$ изотопию $\Phi: P \times I \rightarrow P$, переводящую $\dot{N}_\varepsilon$ в ν_ε^k -конструктивное подмногообразие N_ε .

Список литературы

- [1] С. М. Агеев, “Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 3–50; англ. пер.: S. M. Ageev, “Axiomatic method of partitions in the theory of Nöbeling spaces. I. Improvement of partition connectivity”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 299–342.
- [2] С. М. Агеев, “Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. II. Теорема о незаузленности”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 3–32.
- [3] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, MI, 1965.
- [4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [5] M. Bestvina, *Characterizing k-dimensional universal Menger compacta*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **71**, № 380, 1988.
- [6] К. Рурк, Б. Сандерсон, “Введение в кусочно линейную топологию”, 1974; пер. с англ.: C. P. Rourke, B. J. Sanderson, “Introduction to piecewise-linear topology”, 1972.
- [7] P. L. Bowers, “Dense embeddings of sigma-compact, nowhere locally compact metric spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 123–130.
- [8] J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1969.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь

E-mail: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by

Поступила в редакцию

09.12.2005