Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Дудов, Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 1, 43–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:33:47

УДК 519.853.3

С. И. Дудов

Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром

Рассматриваются и сравниваются конечномерные задачи о внешней, внутренней и равномерной оценке выпуклого компакта шаром произвольной нормы, а также задача об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем наименьшей толщины. Показано, что эти задачи можно параметрически связать задачей о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа оцениваемого компакта шаром фиксированного радиуса. Выяснилось, что можно указать диапазоны значений фиксируемого радиуса, в которых решения последней задачи дают решения вышеперечисленных. Однако при некоторых значениях радиуса эта задача может иметь самостоятельное значение.

Библиография: 12 названий.

Введение

Оценки и приближение сложных множеств множествами простой структуры – одно из направлений негладкого анализа. Математическая формализация таких задач обычно приводит к экстремальным задачам, в которых целевая функция или функции, задающие допустимое множество аргументов, сами являются результатом операций экстремума по некоторым параметрам. В качестве множеств простой структуры используются шары, эллипсоиды, ориентированные параллелепипеды и другие многогранники, конусы и пр. Видимо, одними из первых по времени постановки являются *задачи по оценке выпуклого компакта шаром некоторой нормы* (сначала евклидовой, а затем произвольной). К ним относятся:

- 1) *задача о внешней оценке*, под которой понимают построение шара наименьшего радиуса, содержащего оцениваемый компакт, или задачу о чебышёвском центре;
- 2) *задача о внутренней оценке*, под которой будем понимать построение шара наибольшего радиуса, содержащегося в оцениваемом компакте, или задачу о вписанном шаре;
- 3) *задача об оценке границы* выпуклого компакта шаровым слоем наименьшей толщины.

О свойствах решения этих задач для случая, когда использовался шар евклидовой нормы, см., например, [1] и указанные там по этому поводу работы. Для случая произвольной нормы эти задачи рассматривались соответственно в [2]–[4]. К этому перечню задач добавим

- 4) *задачу о равномерной оценке*, под которой будем понимать наилучшее приближение выпуклого компакта шаром некоторой нормы в метрике Хаусдорфа, порожденной используемой нормой. Эта задача рассматривалась в случае евклидовой нормы в [5] и для произвольной нормы в [6].

Цель статьи – указать на связь всех перечисленных задач через еще одну оценочную задачу. Это

- 5) *задача об оценке шаром фиксированного радиуса*, под которой будем понимать наилучшее приближение выпуклого компакта шаром фиксированного радиуса (т.е. варьируется только центр шара) в метрике Хаусдорфа, порожденной используемой нормой.

Как будет показано, можно указать некоторые диапазоны значений фиксированного радиуса в задаче 5), в которых решения этой задачи дают соответственно решения задач 1)–4). Однако при некоторых значениях радиуса шара задача 5) может иметь самостоятельное значение, т.е. ее решение может не иметь отношения к решению задач 1)–4).

§ 1. Постановки сравниваемых задач

Приведем математические формализации рассматриваемых далее задач, сопровождая их краткими сведениями о свойствах решения.

Везде далее $\mathcal{D}$ – оцениваемый выпуклый компакт из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, функция $n(x)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^p$ аксиомам нормы, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus \mathcal{D}}$ – замыкание дополнения компакта $\mathcal{D}$ до $\mathbb{R}^p$, $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шар нормы $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиусом r , $o_p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

1.1. Задача о внешней оценке. Под задачей о внешней оценке будем понимать

$$R(x) \equiv \max_{y \in \mathcal{D}} n(x - y) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (\text{P.1})$$

Ее также называют задачей о чебышёвском центре или задачей об описанном шаре. Функция $R(x)$ выражает радиус наименьшего шара с центром в точке x , содержащего в себе компакт $\mathcal{D}$. Это конечная выпуклая на $\mathbb{R}^p$ функция, формула ее субдифференциала $\partial R(x)$ известна (см., например, [2; гл. 4, § 4]). Следовательно, в соответствии с известным фактом выпуклого анализа критерием того, что точка $x^0 \in \mathbb{R}^p$ является решением задачи (P.1), является соотношение

$$o_p \in \partial R(x^0). \quad (1)$$

Давно известно (см. [1]), что в случае евклидовой нормы решение задачи единственно, причем центр описанного шара содержится в выпуклом компакте $\mathcal{D}$. Как показывают примеры, в ситуации, когда норма $n(x)$ неевклидова, решение задачи может быть неединственным, а центр описанного шара может не содержаться в $\mathcal{D}$, даже если решение единственно. Легко убедиться, что единственность решения задачи (P.1) обеспечивается строгой квазивыпуклостью нормы, т.е., другими словами, когда ее шар является строго выпуклым множеством.

Далее будем использовать обозначения

$$R^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x), \quad C_1 = \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x).$$

Нетрудно видеть, что C_1 , как множество решений задачи (P.1) (множество центров описанных шаров), является выпуклым компактом. Отметим, что в отличие от других обсуждаемых далее задач требование выпуклости компакта $\mathcal{D}$ в задаче (P.1) несущественно, поскольку ее решение для любого компакта $\mathcal{D}$ и его выпуклой оболочки будет одним и тем же.

1.2. Задача о внутренней оценке. Эту задачу также называют задачей о вписанном шаре:

$$\rho_\Omega(x) \equiv \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in \mathcal{D}}. \quad (\text{P.2})$$

Здесь функция $\rho_\Omega(x)$ выражает расстояние от точки x до множества Ω в норме $n(\cdot)$. Оптимизируя ее на $\mathcal{D}$, мы получаем радиус и центр наибольшего шара, вложенного в $\mathcal{D}$. Функция $\rho_\Omega(x)$ является вогнутой на $\mathcal{D}$. Формулу ее супердифференциала $\partial \rho_\Omega(x)$ для случая евклидовой нормы можно найти в [7; гл. 2, § 8], а для произвольной нормы – в [8]. В нетривиальном случае, когда $\text{int } \mathcal{D}$ – внутренность компакта $\mathcal{D}$ – непуста, критерием того, что точка $x^0 \in \text{int } \mathcal{D}$ является центром вписанного шара, т.е. решением задачи (P.2), является соотношение

$$o_p \in \overline{\partial \rho_\Omega}(x^0). \quad (2)$$

Даже в случае евклидовой нормы задача может иметь неединственное решение. Единственность гарантируется строгой выпуклостью $\mathcal{D}$ [3]. Далее обозначаем

$$\rho^* = \max_{x \in \mathcal{D}} \rho_\Omega(x), \quad C_2 = \text{Arg} \max_{x \in \mathcal{D}} \rho_\Omega(x).$$

Очевидно, множество центров вписанных шаров C_2 является выпуклым компактом.

1.3. Задача об оценке границы. Задача об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем наименьшей толщины может быть записана в виде

$$\Phi(x) \equiv R(x) - \rho_\Omega(x) \rightarrow \min_{x \in \mathcal{D}}. \quad (\text{P.3})$$

Для точек $x \in \mathcal{D}$ значение функции $\Phi(x)$ выражает толщину минимального шарового слоя с центром в точке x , содержащего границу компакта $\mathcal{D}$. Как отмечается в [1], первым, кто рассматривал близкую к (P.3) задачу на плоскости и для евклидовой нормы, был М. Д'Окань. В его работе [9] был предложен способ построения кругового кольца наименьшей ширины, содержащего заданное семейство точек. В работе А. Лебега [10] выяснено, что решение рассматриваемой там задачи наилучшего приближения выпуклой кривой с помощью окружности связано с нахождением кругового кольца наименьшей ширины, содержащего границу выпуклого компакта на плоскости. Впоследствии эта задача рассматривалась как на плоскости, так и в трехмерном пространстве (см. библиографию в [1] и [5]). Критерий ее решения в пространстве произвольной размерности p для случая евклидовой нормы был получен в [11], а для

произвольной нормы – в [4]. Как показано в [4], задача (P.3) может иметь неединственное решение. Единственность, в частности, обеспечивается строгой квазивыпуклостью нормы или строгой выпуклостью компакта $\mathcal{D}$ в сочетании с гладкостью нормы (непрерывная дифференцируемость всюду, за исключением точки o_p).

Далее будем понимать под

$$C_3 = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathcal{D}} \Phi(x)$$

множество центров шаровых слоев наименьшей толщины, содержащих границу выпуклого компакта $\mathcal{D}$, т.е. решение задачи (P.3). Нетрудно показать, что множество C_3 является выпуклым компактом.

1.4. Задача о равномерной оценке. Под задачей о равномерной оценке мы будем понимать

$$h(\mathcal{D}, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0}. \quad (\text{P.4})$$

Здесь $h(\cdot, \cdot)$ выражает расстояние Хаусдорфа, порожденное нормой $n(\cdot)$, между соответствующими множествами. Далее будем пользоваться формулой

$$h(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\},$$

где

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y)$$

– уклонение множества A от множества B . Таким образом, (P.4) – задача о наилучшем приближении выпуклого компакта $\mathcal{D}$ шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой.

Задача (P.4) была поставлена и рассматривалась для евклидовой нормы в работе [5]. В этом случае она имеет единственное решение, причем центр шара наилучшего приближения содержится в $\mathcal{D}$ и является одновременно единственным решением задачи (P.3). То есть для евклидовой нормы задачи (P.3) и (P.4) эквивалентны.

В случае произвольной нормы задача исследовалась в [6]. Как показывают примеры, среди шаров наилучшего приближения могут быть такие, центр которых не содержится в $\mathcal{D}$, а значит, задачи (P.3) и (P.4) могут быть неэквивалентными. Кроме того, решение задачи (P.4) может быть неединственным. Как показано в [6], задача (P.4) сводится к эквивалентной ей задаче

$$R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (3)$$

где $P(x) = \rho_{\mathcal{D}}(x) - \rho_{\Omega}(x)$. При этом множество центров шаров наилучшего приближения в задаче (P.4) совпадает с множеством решений задачи (3), и если точка x^0 является центром такого шара, то $r = (R(x^0) - P(x^0))/2$ – его радиус.

Было показано, что функция $P(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а следовательно, и вся целевая функция в задаче (3) является выпуклой. Получение в [6]

формулы ее субдифференциала позволило сформулировать критерий решения и на этой основе исследовать свойства решения. Далее обозначаем

$$\varphi(x, r) = h(\mathcal{D}, Bn(x, r)), \quad C_4 = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} (R(x) + P(x)).$$

Множество C_4 , как отмечено выше, является одновременно множеством центров шаров наилучшего приближения в задаче (P.4) и представляет собой выпуклый компакт.

§ 2. Задача об оценке выпуклого компакта шаром фиксированного радиуса

Отдельно рассмотрим задачу

$$\varphi(x, r) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p} \quad (\text{P.5})$$

при некотором фиксированном значении $r \geq 0$. Как далее будет показано, этой задачей можно параметрически (r – параметр) связать все перечисленные в § 1 задачи. Функция $\varphi(x, r)$ в соответствии с принятым обозначением выражает расстояние Хаусдорфа в норме $n(\cdot)$ между компактом $\mathcal{D}$ и шаром $Bn(x, r)$. Иными словами, (P.5) является задачей наилучшего приближения компакта $\mathcal{D}$ шаром фиксированного радиуса в метрике Хаусдорфа. Автору не известны работы, где бы эта задача рассматривалась. В этом параграфе мы ограничимся приведением тех фактов, касающихся задачи (P.5), которые помогут обнаружить ее связь с задачами (P.1)–(P.4).

Прежде всего, важное значение для нас будет иметь формула для подсчета $\varphi(x, r)$ через значения функций $R(x)$ и $P(x)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $\mathcal{D}$ – выпуклый компакт, то при всех $x \in \mathbb{R}^p$ и $r \geq 0$ справедлива формула*

$$\varphi(x, r) = \max\{R(x) - r, P(x) + r\}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [6] получены следующие формулы взаимных уклонений выпуклого компакта $\mathcal{D}$ и шара $Bn(x, r)$:

$$\rho(\mathcal{D}, Bn(x, \rho)) = \begin{cases} 0, & r \geq R(x), \\ R(x) - r, & 0 \leq r < R(x), \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^p, \quad (5)$$

$$\rho(Bn(x, \rho), \mathcal{D}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq \rho_\Omega(x), \\ r - \rho_\Omega(x), & r > \rho_\Omega(x), \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (6)$$

$$\rho(Bn(x, \rho), \mathcal{D}) = r + \rho_{\mathcal{D}}(x), \quad \forall x \notin \mathcal{D}. \quad (7)$$

Поскольку

$$\varphi(x, r) = \max\{\rho(\mathcal{D}, Bn(x, \rho)), \rho(Bn(x, \rho), \mathcal{D})\},$$

то из (5)–(7) получаем

$$\varphi(x, r) = \begin{cases} \max\{R(x) - r, r - \rho_\Omega(x)\}, & x \in \mathcal{D}, \\ \max\{R(x) - r, r + \rho_{\mathcal{D}}(x)\}, & x \notin \mathcal{D}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $P(x) = -\rho_\Omega(x)$ при $x \in \mathcal{D}$ и $P(x) = \rho_{\mathcal{D}}(x)$ для $x \notin \mathcal{D}$, получаем (4).

Поскольку функции $R(x)$ и $P(x)$ являются выпуклыми конечными функциями, то и функция $\varphi(x, r)$, как это следует из (4), также является выпуклой конечной функцией по совокупности переменных на $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+$. В соответствии с известным фактом субдифференциального исчисления (см. [7; гл. 1, § 5]) из (4) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Субдифференциал выпуклой функции $\varphi(x, r)$ по $x \in \mathbb{R}^p$ при любом фиксированном значении $r \geq 0$ может быть выражен формулой*

$$\partial_x \varphi(x, r) = \begin{cases} \partial R(x), & R(x) - r > P(x) + r, \\ \partial P(x), & R(x) - r < P(x) + r, \\ \text{co}\{\partial R(x), \partial P(x)\}, & R(x) - r = P(x) + r. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь под $\text{co}\{A, B\}$ понимается выпуклая оболочка множеств A и B .

Теперь в соответствии с известным фактом выпуклого анализа (см., например, [2; гл. 4, § 2]) можем сформулировать критерий решения задачи (P.5).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Для того чтобы точка $x^0 \in \mathbb{R}^p$ была решением задачи (P.5), т.е. центром шара наилучшего приближения для $\mathcal{D}$ с фиксированным радиусом r , необходимо и достаточно, чтобы*

$$o_p \in \partial_x \varphi(x^0, r), \quad (9)$$

где $\partial_x \varphi(x^0, r)$ определяется формулой (8).

Критерий решения (9), формула (8) и формулы субдифференциалов $\partial R(x)$ и $\partial P(x)$, выраженные через субдифференциал нормы $n(\cdot)$ и конус возможных направлений компакта $\mathcal{D}$ в некоторых точках (см. [2; гл. 4, § 4] и [6] соответственно), могут использоваться как инструмент исследования задачи (P.5).

Далее обозначаем

$$f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r), \quad C_5(r) = \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x, r).$$

Нетрудно показать, что нижние лебеговы множества функций $R(x)$ и $P(x)$, а следовательно, в силу (4) и функции $\varphi(x, r)$ являются выпуклыми компактными. Поэтому поскольку множество $C_5(r)$ можно выразить в виде

$$C_5(r) = \{x \in \mathbb{R}^p : \varphi(x, r) \leq f(r)\},$$

то и оно является выпуклым компактом.

§ 3. Связь задач (P.1) и (P.2) с задачей (P.5)

3.1. Введем дополнительные обозначения:

$$R^{\pm} = \max_{x \in C_2}(\min) R(x), \quad P^{\pm} = \max_{x \in C_1}(\min) P(x), \quad (10)$$

$$r_1^{\pm} = \frac{R^* - P^{\pm}}{2}, \quad r_2^{\pm} = \frac{R^{\pm} + \rho^*}{2}. \quad (11)$$

Очевидно, для всех $x \in \mathbb{R}^p$ выполняется неравенство $R(x) \geq P(x)$. Поэтому из (10)–(11) вытекает, что значения $r_1^{\pm}$ и $r_2^{\pm}$ располагаются на числовой оси следующим образом:

$$0 \leq r_1^- \leq r_1^+ \leq r_2^- \leq r_2^+ < \infty. \quad (12)$$

Ясно, что если множество C_1 является одноточечным, т.е. задача (P.1) имеет единственное решение, то $r_1^- = r_1^+$. А если множество C_2 является одноточечным, т.е. задача (P.2) имеет единственное решение, то $r_2^- = r_2^+$. Простые примеры показывают, что при неединственности решений задач (P.1) и (P.2) возможно выполнение строгих неравенств $r_1^- < r_1^+$ и $r_2^- < r_2^+$ соответственно. Автор также располагает примером, когда решение задачи (P.2) неединственно, но при этом $R^- = R^+$, а следовательно, $r_2^- = r_2^+$. Однако не удалось пока ответить на вопрос: возможна ли ситуация, когда решение задачи (P.1) неединственно и при этом $r_1^- = r_1^+$?

Представляет интерес ситуация, когда $r_1^+ = r_2^-$.

ЛЕММА 3.1. *Равенство $r_1^+ = r_2^-$ возможно тогда и только тогда, когда $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $r_1^+ = r_2^-$ в силу (10)–(11) эквивалентно тому, что

$$\min_{x \in C_2} R(x) + \min_{x \in C_1} P(x) = R^* - \rho^*. \quad (13)$$

Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Действительно, в противном случае с учетом

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} P(x) = -\max_{x \in \mathcal{D}} \rho_{\Omega}(x) = -\rho^*$$

выполняются строгие неравенства

$$\min_{x \in C_2} R(x) > R^*, \quad \min_{x \in C_1} P(x) > -\rho^*,$$

и мы получаем противоречие с (13).

3.2. Будем обозначать

$$T_1(r) = \{x \in C_1 : P(x) \leq R^* - 2r\}, \quad T_2(r) = \{x \in C_2 : R(x) \leq 2r - \rho^*\}.$$

Связь задач (P.1) и (P.2) с задачей (P.5) выражает

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Имеет место формула*

$$C_5(r) = \begin{cases} C_1, & r \in [0, r_1^-], \\ T_1(r), & r \in [r_1^-, r_1^+], \\ T_2(r), & r \in [r_2^-, r_2^+], \\ C_2, & r \in [r_2^+, \infty). \end{cases} \quad (14)$$

2) *Если $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, то $r_1^+ = r_2^- = (R^* + \rho^*)/2$ и*

$$C_5\left(\frac{R^* + \rho^*}{2}\right) = C_1 \cap C_2. \quad (15)$$

3) *Если $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, то*

$$C_5(r) \cap \{C_1 \cap C_2\} = \emptyset \quad \forall r \in (r_1^+, r_2^-), \quad (16)$$

т.е. на интервале (r_1^+, r_2^-) среди решений задачи (P.5) нет решений задач (P.1) и (P.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем справедливость формулы (14).

а) Сначала покажем, что

$$C_5(r) = T_1(r) \quad \forall r \in [0, r_1^+]. \quad (17)$$

Действительно, пусть

$$r \leq r_1^+ = \frac{1}{2}(R^* - \min_{x \in C_1} P(x)).$$

Отсюда, поскольку C_1 – компакт и $P(x)$ – непрерывная функция, следует существование хотя бы одной точки $x \in C_1$, для которой выполняется неравенство $P(x) \leq R^* - 2r$. Поэтому множество $T_1(r)$ непусто.

Если $x \in C_1$, то в соответствии с критерием (1) решения задачи (P.1) выполняется

$$o_p \in \partial R(x). \quad (18)$$

Если эта точка, кроме того, содержится в $T_1(r)$, то

$$R^* - r = R(x) - r \geq P(x) + r. \quad (19)$$

Поэтому из (18)–(19) и (8) вытекает

$$o_p \in \partial_x \varphi(x, r),$$

что в соответствии с критерием (9) решения задачи (P.5) означает $x \in C_5(r)$. Тем самым мы доказали включение

$$T_1(r) \subset C_5(r). \quad (20)$$

Отсюда и из формулы (4) следует

$$f(r) = R^* - r \quad \forall r \in [0, r_1^+]. \quad (21)$$

Теперь докажем обратное к (20) включение. Если допустить противное, то найдется точка $x \in C_5(r)$ такая, что $x \notin T_1(r)$. Это означает, что либо $x_1 \notin C_1$ и тогда

$$\varphi(x, r) \geq R(x) - r > R^* - r, \quad (22)$$

либо $x \in C_1$, но $P(x) > R^* - 2r$ и, следовательно,

$$\varphi(x, r) \geq P(x) + r > R^* - r. \quad (23)$$

Ввиду (21) в обоих случаях неравенства (22) и (23) противоречат тому, что $x \in C_5(r)$. Тем самым мы доказали обратное к (20) включение, а значит, и равенство (17).

б) Однако если $r \in [0, r_1^-]$, т.е.

$$0 \leq r \leq r_1^- = \frac{1}{2}(R^* - \max_{x \in C_1} P(x)),$$

то для всех $x \in C_1$ выполняется $P(x) \leq R^* - 2r$. Поэтому, учитывая (12) и доказанную формулу (17), получаем

$$C_5(r) = C_1 \quad \forall r \in [0, r_1^-].$$

Таким образом, мы доказали формулу (14) для случаев $r \in [0, r_1^-]$ и $r \in [r_1^-, r_1^+]$.

в) Для случаев $r \in [r_2^-, r_2^+]$ и $r \in [r_2^+, \infty)$ формула доказывается аналогичными рассуждениями. При этом в процессе доказательства показывается, что

$$f(r) = r - \rho^* \quad \forall r \in [r_2^-, \infty). \quad (24)$$

2) Рассмотрим случай, когда $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Тогда, поскольку

$$\min_{x \in C_2} R(x) = R^*, \quad \min_{x \in C_1} P(x) = -\rho^*,$$

в силу леммы 3.1 имеем

$$r^* = r_1^+ = r_2^- = \frac{1}{2}(R^* + \rho^*). \quad (25)$$

Теперь, используя уже доказанную формулу (14), получаем

$$C_5(r^*) = T_1(r^*) \cap T_2(r^*) = \{x \in C_1 \cap C_2 : R(x) \leq 2r^* - \rho^*, P(x) \leq R^* - 2r^*\}.$$

Отсюда с учетом (25) и вытекает (15).

3) Пусть $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Тогда из леммы 3.1 следует, что $(r_1^+, r_2^-) \neq \emptyset$. Для $r \in (r_1^+, r_2^-)$ одновременно выполняются неравенства

$$R^* - r < \min_{x \in C_1} P(x) + r, \quad (26)$$

$$\min_{x \in C_2} R(x) - r > r - \rho^*. \quad (27)$$

Предположим, что найдется точка $x^0 \in C_1 \cap C_5(r)$. Тогда из (4) и (26) следует

$$\varphi(x^0, r) = P(x^0) + r > R(x^0) - r. \quad (28)$$

Теперь из (8)–(9) и (28) ввиду того, что $x^0 \in C_5(r)$, получаем

$$o_p \in \partial_x \varphi(x^0, r) = \underline{\partial P}(x^0).$$

Это означает, что точка x^0 является решением задачи

$$P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p},$$

которая, очевидно, эквивалентна задаче (P.2), а значит, $x^0 \in C_2$. Таким образом, оказалось, что $x^0 \in C_1 \cap C_2$, что противоречит исходному предположению о том, что $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Аналогичными рассуждениями с использованием неравенства (27) доказывается, что $C_2 \cap C_5(r) = \emptyset$.

Теорема 3.1 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Простые примеры показывают, что возможны ситуации, когда:

- 1) $C_1 \cap C_2 = \emptyset$;
- 2) $C_1 \subset C_2$, $C_1 \neq C_2$;
- 3) $C_2 \subset C_1$, $C_1 \neq C_2$;
- 4) $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, $C_1 \not\subset C_2$, $C_2 \not\subset C_1$;
- 5) $C_1 = C_2$.

Как следует из теоремы 3.1, если $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, то задача (P.5) не имеет самостоятельного, относительно задач (P.1) и (P.2), значения.

Непосредственно из теоремы 3.1, непрерывности и выпуклости функций $R(x)$ и $P(x)$ и определения (11) чисел $r_1^\pm$, $r_2^\pm$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. 1) Если $P^- < P^+$, то на отрезке $[r_1^-, r_2^+]$ множество $C_5(r)$ ведет себя непрерывно по Хаусдорфу и строго монотонно убывает по включению, т.е.

$$C_5(r_2) \subset C_5(r_1), \quad C_5(r_1) \neq C_5(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in [r_1^-, r_2^+], \quad r_1 < r_2,$$

со значения $C_5(r_1^-) = C_1$ до значения $C_5(r_1^+) = \{x \in C_1 : P(x) \leq P^-\}$.

2) Если $R^- < R^+$, то на отрезке $[r_2^-, r_2^+]$ множество $C_5(r)$ непрерывно по Хаусдорфу и строго монотонно по включению возрастает со значения $C_5(r_2^-) = \{x \in C_2 : R(x) \leq R^-\}$ до значения $C_5(r_2^+) = C_2$.

Приведем простой пример динамики множества $C_5(r)$ на положительной полуоси.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $p = 2$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $n(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}$, $\mathcal{D} = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}$ – отрезок. Нетрудно убедиться, что

$$C_1 = \text{co}\{(0, -1), (0, 1)\}, \quad C_2 = \mathcal{D}, \quad R^* = 1, \quad \rho^* = 0, \quad C_1 \cap C_2 = \{(0, 0)\}.$$

В соответствии с (10)–(11) имеем

$$r_1^- = 0, \quad r_1^+ = 0.5, \quad r_2^- = 0.5, \quad r_2^+ = 1.$$

Теперь, используя теорему 3.1, получаем

$$C_5(r) = \begin{cases} \text{co}\{(0, 2r - 1), (0, 1 - 2r)\}, & r \in [0, 0.5], \\ \text{co}\{(1 - 2r, 0), (2r - 1, 0)\}, & r \in [0.5, 1], \\ \mathcal{D}, & r \in [1, \infty). \end{cases}$$

§ 4. Связь задач (P.3) и (P.4) с задачей (P.5)

4.1. Для того чтобы указать на связь задач (P.3) и (P.4) с задачей (P.5), рассмотрим поведение оптимального значения целевой функции задачи (P.5), т.е. функции $f(r)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Функция $f(r)$ является конечной и выпуклой на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & r \in [0, r_1^+], \\ r - \rho^*, & r \in [r_2^-, \infty). \end{cases} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (29) уже доказана (см. (21) и (24)) в процессе доказательства теоремы 3.1. Выпуклость и конечность функции $f(r)$ обеспечивается выпуклостью и конечностью функции $\varphi(x, r)$ по совокупности переменных (см. [7; гл. 1, § 4]), следующих из формулы (4) и соответствующих свойств функций $R(x)$ и $P(x)$.

Ясно, что минимальное по $r \in [0, \infty)$ значение функции $f(r)$ совпадает с минимальным значением целевой функции задачи (P.4). Поэтому в силу выпуклости функции $f(r)$ на $[0, \infty)$ и ее поведения на $[0, r_1^+]$ и $[r_2^-, \infty)$, отражаемого формулой (29), можно сделать следующий вывод.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Справедливо соотношение $\text{Arg min}_{r \in [0, \infty)} f(r) \equiv [r_-^*, r_+^*] \subset [r_1^+, r_2^-]$.*

Понятно, что совокупность множеств решений задачи (P.5) для значений $r \in [r_-^*, r_+^*]$ образует множество центров шаров наилучшего приближения в задаче (P.4). Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. *Решения задач (P.4) и (P.5) связаны следующим образом:*

$$C_4 = \bigcup_{r \in [r_-^*, r_+^*]} C_5(r). \quad (30)$$

В [6] доказано, что хотя бы один центр шара наилучшего приближения задачи (P.4) содержится в приближаемом выпуклом компакте $\mathcal{D}$, т.е.

$$C_4 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset. \quad (31)$$

Поскольку для точек $x \in \mathcal{D}$ выполняется $P(x) = -\rho_\Omega(x)$, то значения целевых функций задачи (3) и задачи (P.3) на множестве $\mathcal{D}$ совпадают. Поэтому из эквивалентности задач (P.4) и (3) и соотношения (31) следует

$$C_3 = C_4 \cap \mathcal{D}. \quad (32)$$

Из (30) и (32) получаем соответствующий вывод.

ТЕОРЕМА 4.3. *Решения задач (P.3) и (P.5) связаны следующим образом:*

$$C_3 = \left\{ \bigcup_{r \in [r_-^*, r_+^*]} C_5(r) \right\} \cap \mathcal{D}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В [6] доказано, что справедливо включение $C_4 \subset \mathcal{D}$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $n(\cdot)$ – строго квазивыпуклая норма, т.е. ее шар является строго выпуклым множеством;
- 2) $n(\cdot)$ – гладкая норма, т.е. непрерывно дифференцируема всюду, за исключением точки $x = o_p$;
- 3) выпуклый компакт $\mathcal{D}$ обладает центральной симметрией;
- 4) размерность пространства $p = 2$.

Понятно, что в перечисленных случаях задачи (P.3) и (P.4) являются эквивалентными и $C_3 = C_4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если задача (P.4) имеет единственное решение (условия единственности приведены в [6] и [12]), то из теоремы 4.2 следует $r_-^* = r_+^* = r^*$ и при этом $C_5(r^*)$ является одноточечным множеством. Нижеследующий пример говорит о том, что возможны ситуации, когда $r_-^* = r_+^* = r^*$ и при этом множество $C_5(r^*)$ может быть неодноточечным.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $p = 3$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$,

$$n(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|, |x^{(3)}|\},$$

$$\mathcal{D} = \text{co}\{(0, 1, 0.5), (0, 1, -0.5), (0, -1, 0.5), (0, -1, -0.5)\}.$$

В данном случае

$$C_1 = \text{co}\{(-1, 0, -0.5), (-1, 0, 0.5), (1, 0, -0.5), (1, 0, 0.5)\}, \quad C_2 = \mathcal{D},$$

$R^* = 1$, $\rho^* = 0$. Поскольку $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, то по теореме 3.1 и следствию 4.1

$$r^* = r_1^+ = r_2^- = r_-^* = r_+^* = \frac{1}{2}(R^* + \rho^*) = \frac{1}{2},$$

$$C_5(r^*) = C_1 \cap C_2 = \text{co}\{(0, 0, -0.5), (0, 0, 0.5)\}.$$

4.2. Отметим некоторые свойства решения задачи (P.5) на (r_1^+, r_2^-) .

ТЕОРЕМА 4.4. *Пусть $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Тогда выполняются соотношения*

$$R(x) - r = P(x) + r \quad \forall r \in (r_1^+, r_2^-), \quad x \in C_5(r), \quad (33)$$

$$C_5(r_1) \cap C_5(r_2) = \emptyset \quad \forall r_1, r_2 \in (r_1^+, r_2^-), \quad r_1 \neq r_2. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 условие $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ обеспечивает непустоту интервала (r_1^+, r_2^-) .

1) Пусть $r \in (r_1^+, r_2^-)$ и $x \in C_5(r)$. Предположим, что $R(x) - r > P(x) + r$. Тогда в силу (8)–(9) выполняется

$$o_p \in \partial_x \varphi(x, r) = \underline{\partial} R(x). \quad (35)$$

В соответствии с критерием (1) решения задачи (P.1) соотношение (35) означает, что $x \in C_1$ и, следовательно, $C_5(r) \cap C_1 \neq \emptyset$. Это противоречит соотношению (16) теоремы 3.1. Предположение о выполнении неравенства $R(x) - r < P(x) + r$ с помощью аналогичных рассуждений приводит к соотношению $C_5(r) \cap C_2 \neq \emptyset$ и также противоречит (16). Тем самым соотношение (33) доказано.

2) Предположим, что существуют $r_1, r_2 \in (r_1^+, r_2^-)$ и точка $x \in C_5(r_1) \cap C_5(r_2)$. Тогда в силу (33) выполняются равенства

$$R(x) - r_1 = P(x) + r_1, \quad R(x) - r_2 = P(x) + r_2,$$

из которых следует $r_1 = r_2$. Соотношение (34) доказано.

Непосредственно из теорем 3.1, 4.2–4.4 следует

ТЕОРЕМА 4.5. *Только в случае, когда $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, и для значений радиуса r из множества $(r_1^+, r_2^-) \setminus [r_-^*, r_+^*]$, если оно непустое, задача (P.5) имеет самостоятельное значение, т.е.*

$$C_5(r) \cap \left\{ \bigcup_{i=1,4} C_i \right\} = \emptyset \quad \forall r \in (r_1^+, r_2^-) \setminus [r_-^*, r_+^*].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с одной стороны, по теореме 3.1 у задачи (P.5) на всем интервале (r_1^+, r_2^-) нет общих решений с задачами (P.1) и (P.2). С другой стороны, по теореме 4.4 решения задачи (P.5) для $r \in (r_1^+, r_2^-) \setminus [r_-^*, r_+^*]$ не пересекаются с ее решениями для $r \in [r_-^*, r_+^*]$, где по теоремам 4.2 и 4.3 задача (P.5) дает решения задач (P.3) и (P.4).

Приведем пример, когда задача (P.5) при некоторых значениях r имеет самостоятельное значение.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $p = 2$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$,

$$n(x) = ((x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2)^{1/2},$$

$\mathcal{D}$ – треугольник с разными сторонами. Тогда $C_1 = \{z_1\}$, где точка z_1 – центр описанной окружности; $C_2 = \{z_2\}$, где z_2 – центр вписанной окружности. Пользуясь критерием решения задачи (P.4), полученным в [6], нетрудно показать, что $C_4 = \{z_3\}$, где z_3 – точка, являющаяся пересечением перпендикуляра к наибольшей стороне и биссектрисы наименьшего угла. Эта же точка (см. (32)) является и центром кольца наименьшей ширины, содержащего границу треугольника. В соответствии с (10)–(11) и формулой соответствия значения радиуса

шара наилучшего приближения в задаче (P.4) его центру (см. п. 1.4) имеем

$$\begin{aligned} r_1^- = r_1^+ &= \frac{1}{2}(R^* + \rho_\Omega(z_1)), & r_2^- = r_2^+ &= \frac{1}{2}(R(z_2) + \rho^*), \\ r^* &= r_-^* = r_+^* = \frac{1}{2}(R(z_3) + \rho_\Omega(z_3)), \end{aligned}$$

где R^* и ρ^* – радиусы описанной и вписанной окружностей. Нетрудно видеть, что в данном случае

$$R^* < R(z_3) < R(z_1), \quad \rho_\Omega(z_1) < \rho_\Omega(z_3) < \rho^*$$

и, следовательно, $r_1^+ < r^* < r_2^-$. Таким образом, по теореме 4.5 в интервалах (r_1^+, r^*) и (r^*, r_2^-) задача (P.5) имеет самостоятельное значение. С помощью критерия (9) можно показать, что для значений $r \in [r_1^+, r^*]$ множество $C_5(r)$, являясь одноточечным, с ростом r перемещается из точки z_1 в точку z_3 по отрезку, их соединяющему:

$$C_5(r(\alpha)) = z(\alpha), \quad z(\alpha) = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_3, \quad \alpha \in [0, 1].$$

При этом $r(0) = r_1^+$, $r(1) = r^*$ и в соответствии с (33)

$$r(\alpha) = \frac{1}{2}(R(z(\alpha)) + \rho_\Omega(z(\alpha))).$$

Для значений $r \in [r^*, r_2^-]$ множество $C_5(r)$, также являясь одноточечным, с ростом r перемещается из точки z_3 в точку z_2 по соединяющему их отрезку:

$$C_5(r(\beta)) = z(\beta), \quad z(\beta) = (1 - \beta)z_3 + \beta z_2, \quad \beta \in [0, 1].$$

При этом $r(0) = r^*$, $r(1) = r_2^-$ и в соответствии с (33)

$$r(\beta) = \frac{1}{2}((R(z(\beta)) + \rho_\Omega(z(\beta)))).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Как показывают примеры, возможны следующие случаи:

- 1) $[r_-^*, r_+^*] \subset (r_1^+, r_2^-)$;
- 2) $r_-^* = r_1^+$, $r_+^* < r_2^-$;
- 3) $r_-^* > r_1^+$, $r_+^* = r_2^-$;
- 4) $r_-^* = r_1^+$, $r_+^* = r_2^-$.

Приведем пример, когда имеет место случай 4). А это значит, что даже если $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, то задача (P.5) может не иметь самостоятельного значения.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $p = 2$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $n(x) = |x^{(1)}| + |x^{(2)}|$, $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)} \geq 0, (x^{(1)} + 1)^2 + (x^{(2)})^2 \leq 2\}$. Нетрудно убедиться, что $C_1 = \{z_1\}$, $C_2 = \{z_2\}$, где $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (0, (\sqrt{2} - 1)/2)$, и $R^* = 1$, $\rho^* = (\sqrt{2} - 1)/2$. В соответствии с (10)–(11) получаем

$$r_1^- = r_1^+ = \frac{1}{2}(R^* + \rho_\Omega(z_1)) = \frac{1}{2}, \quad r_2^- = r_2^+ = \frac{1}{2}(R(z_2) + \rho^*) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решая задачу (P.5) для значений $r \in [r_1^+, r_2^-]$, убеждаемся в том, что множество $C_5(r)$ является одноточечным и с ростом r перемещается из точки z_1 в точку z_2 :

$$C_5(r(\alpha)) = z(\alpha), \quad z(\alpha) = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2, \quad r(\alpha) = (1 - \alpha)r_1^+ + \alpha r_2^-,$$

причем $\varphi(r(\alpha), z(\alpha)) \equiv 0.5$ для $\alpha \in [0, 1]$. Таким образом, в данной ситуации $r_-^* = r_1^+$, $r_+^* = r_2^-$ и $C_3 = C_4 = \text{co}\{z_1, z_2\}$.

4.3. Рассмотрим другие варианты постановок задач о внешней и внутренней оценках выпуклого компакта шаром.

Второй вариант задачи о внешней оценке: построить шар, содержащий выпуклый компакт $\mathcal{D}$, уклонение которого от $\mathcal{D}$ минимально.

Учитывая, что $Bn(x, R(x))$ – шар наименьшего радиуса с центром в точке x , содержащий компакт $\mathcal{D}$, эту задачу можно записать в виде

$$\rho(Bn(x, R(x)), \mathcal{D}) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (\text{P.6})$$

Второй вариант задачи о внутренней оценке: построить шар, содержащийся в выпуклом компакте $\mathcal{D}$, уклонение $\mathcal{D}$ от которого минимально.

Поскольку для $x \in \mathcal{D}$ шар $Bn(x, \rho_\Omega(x))$ обладает максимальным радиусом из всех шаров с центром в точке x и вложенных в $\mathcal{D}$, то последнюю задачу можно записать в виде

$$\rho(\mathcal{D}, Bn(x, \rho_\Omega(x))) \rightarrow \min_{x \in \mathcal{D}}. \quad (\text{P.7})$$

Учитывая, что $R(x) \geq \rho_\Omega(x)$ для всех $x \in \mathcal{D}$, из формул (5)–(7) следует

$$\begin{aligned} \rho(Bn(x, R(x)), \mathcal{D}) &= R(x) + P(x) & \forall x \in \mathbb{R}^p, \\ \rho(\mathcal{D}, Bn(x, \rho_\Omega(x))) &= R(x) - \rho_\Omega(x) & \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду того, что задача (P.4) эквивалентна задаче (3), приходим к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 4.6. *Задача (P.6) эквивалентна задаче (P.4), а задача (P.7) эквивалентна задаче (P.3).*

Автор выражает глубокую признательность М. С. Никольскому и А. В. Дмитруку за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

- [1] Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002; пер. с нем.: T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
- [2] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] С. И. Дудов, “Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы”, *ЖВМ и МФ*, **36**:5 (1996), 153–159; англ. пер.: S. I. Dudov, “Inner estimation of a convex set by a norm body”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **36**:5 (1996), 683–688.

- [4] С. И. Дудов, “Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем”, *Изв. Саратовского ун-та*, **1**:2 (2001), 64–75.
- [5] М. С. Никольский, Д. Б. Силин, “О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, К 70-летию со дня рождения акад. Е. Ф. Мищенко, Тр. МИАН, **211**, Наука, Физматлит, М., 1995, 338–354; англ. пер.: M. S. Nikol'skii, D. B. Silin, “On the best approximation of a convex compact set by elements of addial”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **211** (1995), 306–321.
- [6] С. И. Дудов, И. В. Златорунская, “Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы”, *Матем. сб.*, **191**:10 (2000), 13–38; англ. пер.: S. I. Dudov, I. V. Zlatorunskaya, “Uniform estimate of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm”, *Sb. Math.*, **191**:10 (2000), 1433–1458.
- [7] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981; англ. пер.: V. F. Dem'yanov, L. V. Vasil'ev, *Nondifferentiable optimization*, Optimization Software, Inc., Publications Division, New York, 1985.
- [8] С. И. Дудов, “Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния”, *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 530–542; англ. пер.: S. I. Dudov, “Subdifferentiability and superdifferentiability of distance functions”, *Math. Notes*, **61**:4 (1997), 440–450.
- [9] M. D'Ocagne, “Sur certaine figures minimales”, *Bull. Soc. Math. France*, **12** (1884), 168–177.
- [10] H. Lebesgue, “Sur quelques questions de minimum, relatives and courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations”, *J. Math.* (8), **4** (1921), 67–96.
- [11] I. Barany, “On the minimal ring containing the boundary of convex body”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **52**:1–2 (1988), 93–100.
- [12] S. I. Dudov, I. V. Zlatorunskaya, “Best approximation of a compact set by a ball in an arbitrary norm”, *Adv. Math. Res.*, **2** (2003), 81–114.

С. И. Дудов (S. I. Dudov)

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Поступила в редакцию

15.12.2005