Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Лалик, О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 101–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 07:32:25

УДК 517.53

М. А. Лапик

О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия

Получено обобщение функционала Маскара–Саффа для векторной задачи равновесия с внешним полем. В качестве приложения найдены носители равновесных мер для одной специальной задачи векторного равновесия с матрицей Никишина.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ – множество вероятностных борелевских мер μ с компактными носителями на Γ : $S_\mu \in \Gamma \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Логарифмическим потенциалом* меры $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z - y|} d\mu(y),$$

а *энергией меры во внешнем поле Q* называют величину

$$I^Q(\mu) = \iint \left(\log \frac{1}{|z - y|} + Q(y) + Q(z) \right) d\mu(y) d\mu(z) = \int (U^\mu + 2Q) d\mu, \quad (1.1)$$

где Q – непрерывная функция $Q: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (не равная тождественно бесконечности).

Равновесной или экстремальной мерой в поле Q называют меру λ_Q с минимальной энергией (1.1) в классе $\mathcal{M}^1(\Gamma)$:

$$I^Q(\lambda_Q) = \mathcal{J}_Q = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)} I^Q(\mu). \quad (1.2)$$

В случае, когда Γ – неограниченное замкнутое множество в $\overline{\mathbb{R}}$, для обеспечения компактности носителя равновесной меры S_{λ_Q} от поля Q дополнительно требуют, чтобы

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty, x \in \Gamma} \frac{Q(x)}{\log |x|} = +\infty. \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00522), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 4466.2006.1), Программы № 1 ОМН РАН и фонда INTAS (грант № 03-51-6637).

В работе Гончара и Рахманова [1] эта задача была изучена в связи с рациональными аппроксимациями аналитических функций. Известно, что существует единственная экстремальная мера λ_Q , которая характеризуется с помощью соотношений равновесия: существует единственная константа w_Q такая, что

$$\begin{aligned} U^{\lambda_Q} + Q &= w_Q \text{ на } S_{\lambda_Q}, \\ &\geq w_Q \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где константа w_Q называется константой равновесия. (Более подробно о свойствах задач (1.2), (1.4) см. [2] и [3].)

Решающую роль в определении равновесной меры λ_Q играет нахождение носителя S_{λ_Q} . Кроме того, процедура нахождения S_{λ_Q} имеет непосредственные приложения к некоторым задачам математической физики. Например (см. [4], [5]), если задача (1.2) рассматривается над классом $\mathcal{M}^x(\Gamma)$ борелевских мер массы x и поле Q специальным образом зависит от параметра t , то конечные точки носителя $S_{\lambda_Q} = [\alpha(x, t), \beta(x, t)]$ удовлетворяют некоторым гиперболическим системам уравнений с частными производными (по x и t). Другим примером являются контактные задачи теории упругости (см. [6]). Для расширения класса приложений задач равновесия логарифмического потенциала рассматривают различные обобщения задачи (1.2), (1.4). Например, в связи с рациональными аппроксимациями Эрмита–Паде Гончаром и Рахмановым был предложен векторный аналог задачи (1.2) (см. [7], [8], [2], [9]). В п. 2.1 настоящей работы мы приводим все необходимые определения и результаты векторной теории логарифмического потенциала.

Часто оказывается, что в решении задачи нахождения носителя S_{λ_Q} помогает рассмотрение функционала $F_Q(K)$ на регулярных компактах $K \subseteq \Gamma$, введенного Маскаром и Саффом в [10]. Пусть ω_K – мера Робена компакта K и через $\text{cap}(K)$ обозначена логарифмическая емкость компакта K . По определению

$$F_Q(K) := -\log \text{cap}(K) + \int Q(y) d\omega_K(y). \quad (1.5)$$

Оказывается (см. [10], [3], [11]), что носитель равновесной меры S_{λ_Q} минимизирует этот функционал, т.е. для любого компакта K справедливо

$$F_Q(K) \geq w_Q. \quad (1.6)$$

Одним из результатов настоящей работы является получение векторного обобщения функционала (1.5) и доказательство его экстремальных свойств, аналогичных (1.6) (см. теорему 1 настоящей работы). Также в § 2 рассмотрено поведение векторных экстремальных мер переменной массы. В § 3 проводится численная минимизация векторного обобщения функционала Маскара–Саффа (1.5) для одной специальной задачи векторного равновесия, а именно для двумерной системы Никишина с касающимися отрезками и внешним полем. Учитывая специальную геометрию этой задачи, ее также удалось решить методом, использующим связь задач равновесия для системы Никишина с алгебраическими функциями, описанную в [12].

Автор выражает глубокую признательность А. И. Аптекареву за внимание к этой работе.

§ 2. Векторная экстремальная задача теории потенциала. Носители меры

2.1. Постановка задачи для векторной проблемы теории потенциала во внешнем поле. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i=1}^p$ — непересекающиеся регулярные компакты в $\overline{\mathbb{R}}$ [2] (или $\text{cap}(\Gamma_i \cap \Gamma_j) = \emptyset$), тогда $\mathcal{M}^x$ — это множество векторных (в смысле прямого произведения) борелевских мер $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ с носителями $S_{\mu_i} \subseteq \Gamma_i$, $i = 1, \dots, p$, и компонентами массы x , т.е. $\mu_i(\mathbb{R}) = x > 0$. Обозначим через $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_p)$ непрерывную вектор-функцию,

$$Q_i: \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Пусть

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^p \quad (2.1)$$

— вещественная симметрическая невырожденная положительно определенная матрица. В случае, если компакт Γ_i является неограниченным множеством, мы дополнительно требуем, чтобы поле на нем росло достаточно быстро:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty, x \in \Gamma_i} \frac{Q_i(x)}{\log|x|} &= +\infty, & c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{ip} &> 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty, x \in \Gamma_i} Q_i(x) &= +\infty, & c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{ip} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\bar{\mu}} = (W_{\mathbf{Q},1}^{\bar{\mu}}, W_{\mathbf{Q},2}^{\bar{\mu}}, \dots, W_{\mathbf{Q},p}^{\bar{\mu}})$,

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\mu}}(z) = \sum_{j=1}^p c_{ij} U^{\mu_j}(z) + Q_i(z), \quad (2.3)$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом меры $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x$ во внешнем поле $\mathbf{Q}$ с матрицей взаимодействия $\mathbf{C}$* . Соответственно, *энергия во внешнем поле для векторных мер $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x$ задается функционалом*

$$I^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) = I_1^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) + I_2^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) + \dots + I_p^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}), \quad (2.4)$$

где

$$I_i^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}) = \int (W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\mu}}(z) + Q_i(z)) d\mu_i(z) = \sum_{j=1}^p c_{ij} I_{ij} + 2 \int Q_i(z) d\mu_i(z).$$

Аналогично скалярному случаю ставится *экстремальная задача во внешнем поле*: найти меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^1$ такую, что

$$I^{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}) = \mathcal{J}_{\mathbf{Q}} = \inf_{\bar{\mu} \in \mathcal{M}^1} I^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}). \quad (2.5)$$

В [7] доказано, что если $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}} < +\infty$, то существует единственная мера $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^1$ такая, что $I^{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}}$. Там же приведены условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, а именно, существуют и единственны такие константы w_i , $i = 1, \dots, p$, что

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}(z) = w_i \text{ на } S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}}, \quad (2.6)$$

$$\geq w_i \text{ на } \Gamma_i$$

для экстремальной меры $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}$. И обратно, если для некоторой меры имеют место условия (2.6) с некоторыми константами w_i , $i = 1, \dots, p$, то это экстремальная мера для задачи (2.5).

2.2. Экстремальное свойство векторного функционала Маскара–Саффа. В этом пункте мы дадим определение векторного аналога функционала (1.5) и докажем, что он обладает аналогичными экстремальными свойствами.

Введем обозначение: $\bar{\omega}_{\mathbf{K}} := \bar{\lambda}_{0,\mathbf{K}}$ для вероятностной равновесной меры регулярного векторного компакта $\mathbf{K}$ в отсутствии внешнего поля. Запишем условия равновесия (2.6) для задачи в отсутствии внешнего поля с константами равновесия γ_i , $i = 1, \dots, p$:

$$W_{0,i}^{\bar{\omega}} = \gamma_i \text{ на } S_{\omega_{\mathbf{K},i}}, \quad (2.7)$$

$$\geq \gamma_i \text{ на } K_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторным функционалом Маскара–Саффа называется функционал $F_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}}(\mathbf{K})$, определенный на регулярных векторных компактах $\mathbf{K}$ формулой

$$F_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}}(\mathbf{K}) = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p + \int Q_1 d\omega_{\mathbf{K},1} + \int Q_2 d\omega_{\mathbf{K},2} + \dots + \int Q_p d\omega_{\mathbf{K},p}. \quad (2.8)$$

Напомним, что носитель векторной меры $\bar{\mu}$ в настоящей работе обозначается $S_{\bar{\mu}} = (S_{\mu_1}, \dots, S_{\mu_p})$. Для равновесной меры $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}$ векторное множество равновесия будем обозначать $S^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$, т.е. $S^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$ – множество с компонентами $S_i^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}} = \{y : W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}(y) = w_i\}$. Очевидно, что $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}} \subseteq S^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица взаимодействия $\mathbf{C} = (c_{ij})$ дополнительно к (2.1) удовлетворяет условиям

$$c_{ij} < 0, \quad i \neq j, \quad (2.9)$$

$$c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{ip} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

(из положительной определенности следует $c_{ii} > 0$). Тогда для любого регулярного векторного компакта $\mathbf{K} \subset \Gamma$ справедливо

$$F_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}}(\mathbf{K}) \geq w_1 + w_2 + \dots + w_p,$$

причем равенство достигается только при $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}} \subseteq \mathbf{K} \subseteq S^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого регулярного компакта $\mathbf{K} \subseteq \Gamma$ рассмотрим меру $\bar{\omega}_{\mathbf{K}}$. Докажем, что условия (2.9) гарантируют, что $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K}}} = \mathbf{K}$.

Поскольку логарифмический потенциал меры μ – функция супергармоническая в $\mathbb{C}$ и гармоническая вне носителя меры, т.е. в $\mathbb{C} \setminus S_{\mu}$, имеем, что

$$W_{\mathbf{0},i}^{\bar{\omega}} = c_{i1}U^{\omega_{\mathbf{K},1}}(z) + c_{i2}U^{\omega_{\mathbf{K},2}}(z) + \dots + c_{ip}U^{\omega_{\mathbf{K},p}}(z)$$

является субгармонической функцией в $\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},i}}$. Тогда для любого $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},i}}$ и $i = 1, \dots, p$ имеет место соотношение

$$W_{\mathbf{0},i}^{\bar{\omega}}(z) < \sup_{S_{\omega_{\mathbf{K},i}}} W_{\mathbf{0},i}^{\bar{\omega}}(z) \leq \gamma_i.$$

Первое неравенство выполняется по принципу максимума для субгармонических функций. Используя условия равновесия (2.7), получаем последнее неравенство. Таким образом, для $i = 1, \dots, p$ имеем

$$W_{\mathbf{0},i}^{\bar{\omega}} = \gamma_i \text{ на } S_{\omega_{\mathbf{K},i}}, \\ < \gamma_i \text{ на } \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},i}},$$

что дает $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K}}} = \mathbf{K}$.

Теперь, интегрируя каждое i -е из выражений (2.6) по мере $\omega_{\mathbf{K},i}$, соответственно получаем

$$\begin{aligned} \int (c_{i1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}}(z) + \dots + c_{ip}U^{\lambda_{\mathbf{Q},i}}(z) + Q_i(z)) d\omega_{\mathbf{K},i} &= \int w_i d\omega_{\mathbf{K},i} \text{ на } S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}} \supseteq S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}}, \\ &> \int w_i d\omega_{\mathbf{K},i} \text{ на } \Gamma_i \setminus S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}}. \end{aligned}$$

Далее складываем полученные выражения для $i = 1, \dots, p$. Используя симметричность $\mathbf{C} = (c_{ij})$ и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} w_1 + \dots + w_p &\leq \sum_{i=1}^p \int (c_{i1}U^{\omega_{\mathbf{K},1}} + \dots + c_{ip}U^{\omega_{\mathbf{K},p}}) d\lambda_{\mathbf{Q},i} \\ &\quad + \int Q_1 d\omega_{\mathbf{K},1} + \dots + \int Q_p d\omega_{\mathbf{K},p} \\ &= \int (W_{\mathbf{0},1}^{\bar{\omega}} - \gamma_1) d\lambda_{\mathbf{Q},1} + \dots + \int (W_{\mathbf{0},p}^{\bar{\omega}} - \gamma_p) d\lambda_{\mathbf{Q},p} + F_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}}(\mathbf{K}) \\ &\leq F_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}}(\mathbf{K}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

В первом неравенстве в (2.10) равенство достигается тогда и только тогда, когда $S_{\bar{\omega}_{\mathbf{K}}} \subseteq S^{\lambda_{\mathbf{Q}}}$ (так как $\omega_{\mathbf{K},i}(\bar{\mathbb{C}} \setminus S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}}) = 0 \Leftrightarrow S_{\omega_{\mathbf{K},i}} \subseteq S^{\lambda_{\mathbf{Q},i}}$), а во втором – тогда и только тогда, когда

$$\int (W_{\mathbf{0},1}^{\bar{\omega}} - \gamma_1) d\lambda_{\mathbf{Q},1} + \dots + \int (W_{\mathbf{0},p}^{\bar{\omega}} - \gamma_p) d\lambda_{\mathbf{Q},p} = 0. \tag{2.11}$$

Все интегралы в (2.11) меньше либо равны нулю, рассмотрим только первый из них:

$$\begin{aligned} 0 &= \int (c_{11}U^{\omega_{\mathbf{K},1}} + c_{12}U^{\omega_{\mathbf{K},2}} + \dots + c_{1p}U^{\omega_{\mathbf{K},p}} - \gamma_1) d\lambda_{\mathbf{Q},1} \\ &= \int_{S_{\omega_{\mathbf{K},1}}} (c_{11}U^{\omega_{\mathbf{K},1}} + \dots + c_{1p}U^{\omega_{\mathbf{K},p}} - \gamma_1) d\lambda_{\mathbf{Q},1} \\ &\quad + \int_{\mathbb{C} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}} (c_{11}U^{\omega_{\mathbf{K},1}} + \dots + c_{1p}U^{\omega_{\mathbf{K},p}} - \gamma_1) d\lambda_{\mathbf{Q},1}. \end{aligned}$$

Первый интеграл в последнем равенстве равен нулю, а второй равен нулю, только если $S_{\lambda_{\mathbf{Q},1}} \subseteq S_{\omega_{\mathbf{K},1}}$. Теорема доказана.

2.3. Равновесные меры переменной массы. В работе [11] изучено поведение равновесных мер массы x относительно параметра x . Для дальнейшего нам понадобится обобщение некоторых результатов из [11] на векторный случай.

Будем рассматривать экстремальную задачу в классе $\mathcal{M}^x$: найти меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x \in \mathcal{M}^x$ такую, что

$$I^{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}} = \inf_{\bar{\mu} \in \mathcal{M}^x} I^{\mathbf{Q}}(\bar{\mu}). \quad (2.12)$$

Очевидно, что все обозначения и утверждения предыдущих пунктов переносятся на такую постановку экстремальной задачи, поскольку

$$\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x = \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}/x}^1. \quad (2.13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть матрица взаимодействия $\mathbf{C} = (c_{ij})$ удовлетворяет условиям (2.9). Тогда для любых x и y таких, что $y > x > 0$, верно

$$\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^y > \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (2.14) достаточно показать, что

$$\bar{\nu} := \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x + \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon = \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}, \quad (2.15)$$

где $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon$ есть экстремальная мера во внешнем поле $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}$ и с весом $\varepsilon = y - x$. Принадлежность $\bar{\nu}$ классу $\mathcal{M}^{x+\varepsilon}$ очевидна. Запишем теперь условия равновесия для $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon$ и $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x$:

$$W_{\tilde{\mathbf{Q}},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon}(z) = W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\nu}}(z) = c_{i1}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon,1}(z) + \dots + c_{ip}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon,p}(z) + W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} = w_i^\varepsilon \text{ на } S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}, \quad (2.16)$$

$$\geq w_i^\varepsilon \text{ на } \Gamma_i,$$

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} = w_i^x \text{ на } S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x}, \quad (2.17)$$

$$\geq w_i^x \text{ на } \Gamma_i.$$

Докажем, что на $S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}$ имеет место неравенство

$$W_{\tilde{\mathbf{Q}},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon}(z) < w_i^\varepsilon.$$

Это будет означать, что $S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon} = S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}}$ и $\bar{\nu}$ удовлетворяет условиям равновесия, следовательно,

$$\bar{\nu} = \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^{x+\varepsilon}.$$

Учитывая условия (2.9), заключаем, что

$$c_{i1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^\varepsilon} + \dots + c_{ip}U^{\lambda_{\mathbf{Q},p}^\varepsilon} \in \text{SbH}(\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}).$$

Для $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}$ имеем

$$\begin{aligned} c_{i1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^\varepsilon}(z) + \dots + c_{ip}U^{\lambda_{\mathbf{Q},p}^\varepsilon}(z) &< \sup_{\bar{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}} (c_{i1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^\varepsilon} + \dots + c_{ip}U^{\lambda_{\mathbf{Q},p}^\varepsilon}) \\ &\leq \sup_{S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}} (c_{i1}U^{\lambda_{\mathbf{Q},1}^\varepsilon} + \dots + c_{ip}U^{\lambda_{\mathbf{Q},p}^\varepsilon}) = w_i^\varepsilon - \inf_{S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}} W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) \leq w_i^\varepsilon - w_i^x. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Первое неравенство получено согласно принципу максимума для субгармонических функций, во втором неравенстве также использован принцип непрерывности для логарифмического потенциала [2], последнее следует из условий (2.17). Получаем, что на $S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^x} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^\varepsilon}$ имеет место неравенство

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x}(z) = c_{i1}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x,1} + \dots + c_{ip}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x,p} + W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} < w_i^\varepsilon - w_i^x + w_i^x = w_i^\varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предыдущего утверждения имеем: для любых x и y таких, что $y > x > 0$, верно

$$S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^y} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения нам достаточно показать, что

$$S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^y}. \quad (2.19)$$

Положим $\varepsilon = y - x > 0$ и рассмотрим меру $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon$, определенную в (2.15). Из (2.18) следует, что на множестве $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} \cap (\mathbb{C} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^y})$ имеет место строгое неравенство

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} = W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon}(z) + W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} = c_{i1}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon,1}(z) + \dots + c_{ip}U^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^\varepsilon,p}(z) + W_{\mathbf{Q},i}^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} < w_i^\varepsilon - w_i^x + w_i^x,$$

откуда $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}^x} \cap (\mathbb{C} \setminus S_{\lambda_{\mathbf{Q},i}^y}) = \emptyset$, что дает (2.19).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если внешнее поле $\mathbf{Q}_\beta = \beta \mathbf{Q}_0$, $\beta > 0$, то носители равновесных мер $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}_\beta} \in \mathcal{M}^1$ убывают относительно параметра β ; для любых $\beta_1 > \beta_2 > 0$ имеем

$$S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}_{\beta_1}}} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}_{\beta_1}}} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}_{\beta_2}}} \subseteq S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}_{\beta_2}}}.$$

§ 3. Равновесие с матрицей взаимодействия Никишина для двух отрезков в поле

3.1. Основные определения. Рассмотрим систему двух отрезков $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2\}$ в $\mathbb{R}$, не пересекающихся по внутренним точкам. Пусть $\mathcal{M}(\Delta_i)$ – множество положительных конечных борелевских мер на Δ_i , $i = 1, 2$,

$$\mathcal{M}_{\text{Nik}} = \{\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2) : \mu_i \in \mathcal{M}(\Delta_i), \mu_1(\mathbb{R}) = 2, \mu_2(\mathbb{R}) = 1\}.$$

Мы будем рассматривать матрицу взаимодействия:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (n_{ij}). \quad (3.1)$$

В случае, если один (оба) из отрезков бесконечный, мы дополнительно требуем, чтобы поле на нем (на обоих отрезках) росло достаточно быстро:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty, x \in \Delta_1} \frac{Q_1(x)}{\log |x|} &= +\infty, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty, x \in \Delta_2} Q_2(x) &= +\infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Задачи равновесия векторных потенциалов мер $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ из $\mathcal{M}_{\text{Nik}}$ с матрицей взаимодействия (3.1) возникают при исследовании асимптотики аппроксимаций Паде системы Никишина (см. [9]).

Отметим, что меры в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_{\text{Nik}}$ имеют различные нормировки, тем не менее приведенные выше результаты для $\mathcal{M}$ легко переформулируются для $\mathcal{M}_{\text{Nik}}$.

Существуют и единственны такие константы $w_{Q,i}$, $i = 1, 2$, что для экстремальной меры $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_Q \in \mathcal{M}_{\text{Nik}}$ выполняются условия равновесия:

$$\begin{cases} 2U^{\lambda_1}(z) - U^{\lambda_2}(z) + Q_1(z) = w_{Q,1} \text{ на } S_{\lambda_1}, \\ \geq w_{Q,1} \text{ на } \Delta_1, \\ -U^{\lambda_1}(z) + 2U^{\lambda_2}(z) + Q_2(z) = w_{Q,2} \text{ на } S_{\lambda_2}, \\ \geq w_{Q,2} \text{ на } \Delta_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

И обратно, если для некоторой меры имеют место эти условия с некоторыми константами $w_{Q,i}$, $i = 1, 2$, то это есть экстремальная мера.

Векторный функционал Маскара–Саффа для матрицы взаимодействия Никишина (3.1) с внешним полем (3.3) имеет вид

$$F_Q^{\text{Nik}}(\mathbf{K}) = F_Q(\mathbf{K}) := 2\gamma_1 + \gamma_2 + \int Q_1 d\omega_{\mathbf{K},1} + \int Q_2 d\omega_{\mathbf{K},2}, \quad (3.4)$$

где $\bar{\omega}_{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}_{0,\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{\text{Nik}}$ – равновесная мера для векторной задачи на компакте $\mathbf{K}$ без поля с матрицей взаимодействия N , γ_1 и γ_2 – константы равновесия для $\bar{\omega}_{\mathbf{K}}$:

$$\bar{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{\text{Nik}} : \begin{cases} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}}(z) - U^{\omega_{\mathbf{K},2}}(z) = \gamma_1 \text{ на } S_{\omega_{\mathbf{K},1}} = K_1, \\ < \gamma_1 \text{ на } \mathbb{C} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}}(z) - U^{\omega_{\mathbf{K},1}}(z) = \gamma_2 \text{ на } S_{\omega_{\mathbf{K},2}} = K_2, \\ < \gamma_2 \text{ на } \mathbb{C} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},2}}. \end{cases} \quad (3.5)$$

С учетом перенормировки мер в $\mathcal{M}_{\text{Nik}}$, матрица взаимодействия (3.1) удовлетворяет условиям теоремы 1 (см. (2.9)), поэтому функционал (3.4) обладает экстремальным свойством

$$F_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}) \geq 2w_{\mathbf{Q},1} + w_{\mathbf{Q},2}, \quad (3.6)$$

причем только для $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}} \subseteq \mathbf{K} \subseteq S^{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$ достигается равенство.

3.2. Постановка задачи. Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [-\infty, 0], & Q_1(x) &= -\beta x, & \beta > 0, \\ \Delta_2 &= [0, 1], & Q_2 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим задачу нахождения носителя равновесной меры $S_{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}$ для задачи с матрицей взаимодействия Никишина. Ниже мы покажем (утверждение 3), что для задачи (3.3) носитель равновесной меры состоит из двух интервалов, т.е. на левом конце отрезка Δ_1 имеет место столкновение заряда:

$$S_{\lambda_1} = [a, 0], \quad a < 0, \quad S_{\lambda_2} = [0, 1].$$

Наша цель – найти зависимость $a(\beta)$.

Эту задачу мы будем решать двумя способами. Сначала с помощью некоторой алгебраической функции мы непосредственно предъявим равновесную меру задачи (3.3) без поля для любого фиксированного a . Это позволяет провести численную минимизацию функционала (3.4) и получить зависимость $a(\beta)$ (см. рис. 1, звездочки).

С другой стороны, мы рассмотрим общий вид алгебраической функции, дающей решение задачи (3.3) с полем. Анализ дискриминанта этой алгебраической функции позволяет по концу отрезка носителя равновесной меры (точке a) вычислять $\beta(a)$, $\beta > 0$ (см. рис. 1, кружки).

3.3. Равновесные меры и алгебраические функции.

3.3.1. Равновесные меры для задачи без поля и алгебраические функции.

В этом пункте мы докажем, что равновесные меры для задачи с матрицей Никишина (3.1) на отрезках $[a, 0]$ и $[0, 1]$ без поля

$$\Delta_1 = [a, 0], \quad \Delta_2 = [0, 1], \quad Q_1 = Q_2 \equiv 0, \quad (3.8)$$

можно представить как скачок некоторой алгебраической функции, которую мы найдем явно.

Рассмотрим трехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ с одной точкой ветвления третьего порядка в нуле и двумя двойными точками ветвления в точках a , $a < 0$, и 1:

$$\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}^0 \cup \mathfrak{R}^1 \cup \mathfrak{R}^2}, \quad (3.9)$$

где $\mathfrak{R}^0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a, 0]$, $\mathfrak{R}^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([a, 0] \cup [0, 1])$ и $\mathfrak{R}^2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$.

Матрицы монодромии поверхности $\mathfrak{R}$ суть

$$\begin{aligned} M_{a^0} &= M_{a^1} = \mathcal{E}_{01}, \\ M_{0^0} &= M_{0^1} = M_{0^2} = \mathcal{E}_{12} * \mathcal{E}_{01}, \\ M_{1^1} &= M_{1^2} = \mathcal{E}_{12}, \end{aligned}$$

где матрицы $\mathcal{E}_{ij}$ переставляют i -ю и j -ю координаты вектора ($i \neq j$). То есть поверхность $\mathfrak{R}$ состоит из “склеенных” последовательно листов $\mathfrak{R}^0$, $\mathfrak{R}^1$ и $\mathfrak{R}^2$ с отождествлением правого и левого “берегов” разрезов у соседних листов (см. [12]). Легко видеть, что поверхность $\mathfrak{R}$ есть сфера (проверить это можно при помощи формулы Римана–Гурвица).

Определим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рациональную функцию h как функцию, имеющую два полюса первого порядка в точках ветвления второго порядка a и 1 , один полюс второго порядка в точке ветвления третьего порядка 0 и нули первого порядка в точках $\infty^0 \in \mathfrak{R}^0$, $\infty^1 \in \mathfrak{R}^1$, $\infty^2 \in \mathfrak{R}^2$ и точке $c^1 \in \mathfrak{R}^1$, где c – некоторое действительное число, большее 1. То есть

$$\begin{aligned} h^0(z) &\in H(\mathfrak{R}^0), \\ h^1(z) &\in H(\mathfrak{R}^1), \\ h^2(z) &\in H(\mathfrak{R}^2) \end{aligned} \tag{3.10}$$

с дивизором

$$\frac{\infty^0 * \infty^1 * \infty^2 * c^1}{a^{01} * 0^{012} * 0^{012} * 1^{12}}, \tag{3.11}$$

где c – некоторое действительное число, большее 1. Фиксируем у функции h вычеты в бесконечностях

$$\begin{aligned} h^0(z) &= -\frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathfrak{R}^0, \\ h^1(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathfrak{R}^1, \\ h^2(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathfrak{R}^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Определенная таким образом функция h существует и единственна как мероморфная функция с заданным дивизором, поскольку мы, вместо того чтобы зафиксировать нуль в точке c , зафиксировали один из вычетов в бесконечности.

Заметим, что наша функция симметрична относительно действительной оси, иначе функция $\bar{h}(\bar{z})$ тоже была бы решением, что противоречит единственности. Следовательно, функция h на $\mathbb{R}$ вне разрезов принимает только действительные значения. Из простого соображения, что при “проходе” через полюс в точке ветвления второго порядка функция должна поменять знак, можно заключить, что нуль c больше 1, а из принципа аргумента следует, что этот нуль находится на первом листе.

Эта функция определяет равновесную меру для задачи (3.8) в отсутствии внешнего поля.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Плотность равновесной меры $\bar{\omega}_{\mathbf{K}} = (\omega_1, \omega_2) = \bar{\lambda}_{\mathbf{0}, \mathbf{K}}$ для задачи с матрицей Никкишина без поля на компакте $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$, где $K_1 = [a, 0]$ и $K_2 = [0, 1]$, равна скачку алгебраической функции $h(z)$ (3.10)–(3.12) на $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{h_+^0 - h_+^1}{2\pi i} dx, \\ d\omega_2 &= \frac{h_+^1 - h_+^2}{2\pi i} dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если положить меру $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ на отрезках $K_1 = [a, 0]$ и $K_2 = [0, 1]$ равной скачку функции $h(z)$ на этих отрезках

$$\begin{aligned} d\mu_1 &:= \frac{h_+^0 - h_+^1}{2\pi i} dx, \\ d\mu_2 &:= \frac{h_+^1 - h_+^2}{2\pi i} dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

то мера $\bar{\mu}$ будет равновесной мерой задачи (3.8), т.е. $\bar{\mu} = \bar{\omega}_{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}_{\mathbf{0}, \mathbf{K}}$. По теореме Коши мы имеем, что определенная таким образом мера имеет нужные массы:

$$\begin{aligned} \mu_1(K_1) &= \int_a^0 \frac{h_+^0 - h_+^1}{2\pi i} dx = \int_a^0 \frac{h_+^0 - h_-^0}{2\pi i} dx = \frac{1}{2\pi i} \oint h^0 dz = \operatorname{res}_{\infty} h^0 = 2, \\ \mu_2(K_2) &= \int_0^1 \frac{h_+^1 - h_+^2}{2\pi i} dx = \int_0^1 \frac{h_-^2 - h_+^2}{2\pi i} dx = \frac{1}{2\pi i} \oint h^2 dz = -\operatorname{res}_{\infty} h^2 = 1. \end{aligned}$$

Положительность μ'_1 следует из того, что мнимые части h^0 и h^1 не обращаются в 0 на отрезке $K_1 = [a, 0]$, иначе функции совпадали бы и там был бы нуль дискриминанта уравнения для алгебраической функции h (в настоящем пункте независимо от этого доказательства будет показано, что дискриминант имеет единственный нуль, больший 1). Аналогично получаем положительность μ'_2 . Следовательно, это действительно некоторая положительная мера. Комплексные логарифмические потенциалы $\mathcal{U}^{\mu_1}$ и $\mathcal{U}^{\mu_2}$ являются первообразными функций h^0 и $-h^2$ соответственно:

$$(\mathcal{U}^{\mu_1}(z))'_z = \left(\oint \frac{h^0(t)}{2\pi i} \log \frac{1}{z-t} dt \right)'_z = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h^0(t)}{z-t} dt = h^0(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K_1, \quad (3.15)$$

аналогично,

$$(\mathcal{U}^{\mu_2}(z))'_z = -h^2(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K_2. \quad (3.16)$$

Легко видеть, что подынтегральные выражения суть голоморфные на множестве интегрирования функции. Это позволяет менять порядок интегрирования и дифференцирования.

Покажем, что мера $\bar{\mu}$ равновесная. Рассмотрим абелев интеграл

$$G(z) := \int_0^z h(\psi) d\psi. \quad (3.17)$$

Интеграл (3.17) имеет чисто мнимые периоды, следовательно, мы можем корректно определить $\operatorname{Re}(G)$ на поверхности $\mathfrak{R}$, причем

$$\operatorname{Re}(G(z)) = \begin{cases} -2 \log |z| + g^0 + \dots, & z \rightarrow \infty^0, z \in \mathfrak{R}^0, \\ + \log |z| + g^1 + \dots, & z \rightarrow \infty^1, z \in \mathfrak{R}^1, \\ + \log |z| + g^2 + \dots, & z \rightarrow \infty^2, z \in \mathfrak{R}^2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Из (3.15), (3.16) заключаем, что

$$\begin{aligned} U^{\mu_1}(z) &= \operatorname{Re}(G^0(z) - g^0), \\ U^{\mu_2}(z) &= \operatorname{Re}(-G^2(z) + g^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Запишем для потенциалов (3.19) условия равновесия (3.3)

$$\begin{aligned} 2U^{\mu_1}(z) - U^{\mu_2}(z) + (2g^0 + g^2) \\ = \operatorname{Re}(2G^0 + G^2) = \operatorname{Re}(G^0 - G^1) = 0 \quad \text{на } K_1 = [a, 0], \\ 2U^{\mu_2}(z) - U^{\mu_1}(z) - (2g^2 + g^0) \\ = \operatorname{Re}(-2G^2 - G^0) = \operatorname{Re}(G^1 - G^2) = 0 \quad \text{на } K_2 = [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Следовательно, $\bar{\mu}$ – это равновесная мера на $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ и $\bar{\mu} = \omega_{\mathbf{K}}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеет место равенство*

$$2\gamma_1 + \gamma_2 = -3 \int_0^{+\infty} \left(h^0(y) + \frac{2}{y+1} \right) dy, \quad (3.21)$$

где γ_1 и γ_2 суть константы равновесия из (3.5) для задачи (3.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Константы равновесия γ_1 и γ_2 для задачи (3.8) зависят от констант g^0 , g^1 и g^2 в бесконечностях абелева интеграла (3.17) следующим образом (3.20):

$$\begin{aligned} +(2g^0 + g^2) &= -\gamma_1, \\ -(2g^2 + g^0) &= -\gamma_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Константу g^0 абелева интеграла (3.17) в бесконечности легко найти, вычитая у функции h особенность на ∞^0 [13; с. 226]:

$$G^0(z) = \int_0^z \left(h^0(y) + \frac{2}{y+1} - \frac{2}{y+1} \right) dy = \int_0^z \left(h^0(y) + \frac{2}{y+1} \right) dy - 2 \log(z+1).$$

Учитывая симметричность h относительно $\mathbb{R}$ и (3.18), заключаем, что

$$\begin{aligned} G^0(x) &= -2 \log |x+1| + \int_0^{+\infty} \left(h^0(y) + \frac{2}{y+1} \right) dy + o(1) \\ &= -2 \log |x+1| + g^0 + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (3.22), получаем (3.21).

Так как h – алгебраическая функция на римановой поверхности, то существуют рациональные функции $R_0(z)$, $R_1(z)$ и $R_2(z)$ такие, что

$$h^3 + R_2(z)h^2 + R_1(z)h + R_0(z) = 0.$$

Сейчас мы явно найдем это уравнение.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебраическая функция $h(z)$ (3.10)–(3.12) удовлетворяет уравнению*

$$h^3 - \frac{3(z-d)}{(z-a)z(z-1)}h + \frac{2(z-c)}{(z-a)z^2(z-1)} = 0, \quad (3.23)$$

где

$$c = \frac{3}{8}(1-a)^{2/3}[(\sqrt{a}+1)^{2/3} + (1-\sqrt{a})^{2/3}] + \frac{a+1}{4}, \quad d = \frac{a+1+2c}{3},$$

ветви корней фиксируем как ветви с наименьшим положительным значением аргумента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Виета и теореме Лиувилля имеем $R_2(z) = (h^0 + h^1 + h^2) \equiv 0$. Легко видеть по теореме Виета и с учетом поведения h вблизи $z = 0$, что

$$|R_1(z)| = \left| -\frac{3(z-d)(z-v)}{(z-a)z^2(z-1)} \right| = |(h^0h^1 + h^1h^2 + h^0h^2)(z)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^{4/3}}\right),$$

откуда $v = 0$. Выражение для $R_0(z)$ очевидно. Нам осталось найти только явный вид неизвестных коэффициентов c , d из (3.23).

Дискриминант уравнения (3.23) есть

$$D = \frac{(27a + 27 + 54c - 81d)z^3 + \dots}{z^4(z-1)^3(z-a)^3}.$$

Поскольку у нас нет точек ветвления кроме тех, в которых имеются полюсы, мы можем сделать вывод, что у дискриминанта уравнения (3.23) все нули четного порядка, следовательно, в числителе стоит полный квадрат: $\text{const}(z-l)^2$. Корень дискриминанта l больше 1, поскольку ветви h^1 и h^2 принимают на $(1, +\infty)$ все действительные значения, а ветвь h^0 ограничена на этом интервале и на нем неизбежно есть точка совпадения ветвей. Это дает нам простое уравнение на коэффициент d в (3.23):

$$d = \frac{a+1+2c}{3},$$

и кубическое уравнение на нуль c :

$$c^3 - \frac{3(1+a)}{4}c^2 - \frac{15a^2 - 78a + 1}{64}c - \frac{(a+1)^3}{64} = 0.$$

Это кубическое уравнение имеет всегда три действительных решения:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3}{8}(1-a)^{2/3}[(\sqrt{a}+1)^{2/3} + (1-\sqrt{a})^{2/3}] + \frac{a+1}{4}, \\ c_2 &= -\frac{\sqrt{3}(1-a)^{2/3}}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{8}[(\sqrt{a}+1)^{2/3} + (1-\sqrt{a})^{2/3}] \right. \\ &\quad \left. + i[(\sqrt{a}+1)^{2/3} - (1-\sqrt{a})^{2/3}] \right] + \frac{a+1}{4}, \\ c_3 &= -\frac{\sqrt{3}(1-a)^{2/3}}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{8}[(\sqrt{a}+1)^{2/3} + (1-\sqrt{a})^{2/3}] \right. \\ &\quad \left. - i[(\sqrt{a}+1)^{2/3} - (1-\sqrt{a})^{2/3}] \right] + \frac{a+1}{4}. \end{aligned}$$

Мы выбираем корень c из условия, что двойной корень дискриминанта l и нуль c должны быть больше 1, где

$$l = \frac{1}{18} \frac{-42ac - 15c^2 + a^3 + 3a^2 + 6a^2c + 3a - 15ac^2 + 1 + 6c + 8c^3}{a^2 - a - 2ac + 1 - 2c + c^2}.$$

Если ветви корней зафиксированы как ветви с наименьшим положительным значением аргумента, тогда этому условию удовлетворяет только корень c_1 .

Корень $c_3 < a$ соответствует случаю, когда в бесконечности

$$h^2 \approx \frac{-2}{z}, \quad h^0, h^1 \approx \frac{1}{z}.$$

Корень c_2 соответствует случаю, когда в бесконечности

$$h^1 \approx \frac{-2}{z}, \quad h^0, h^2 \approx \frac{1}{z},$$

но в этом случае нуль дискриминанта l лежит на отрезке $[a, 0]$ или $[0, 1]$.

3.3.2. Равновесные меры для задачи с полем и алгебраические функции.

Определим рациональную функцию h_β на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Эта алгебраическая функция будет соответствовать задаче с полем (3.7).

Пусть теперь β – неизвестный параметр, зависящий от a . Выделим три голоморфные ветви функции h_β

$$\begin{aligned} h_\beta^0(z) &\in H(\mathfrak{R}^0), \\ h_\beta^1(z) &\in H(\mathfrak{R}^1), \\ h_\beta^2(z) &\in H(\mathfrak{R}^2). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Дивизор h_β есть

$$\frac{\infty^1 * \infty^2 * c^1}{0^{012} * 0^{012} * 1^{12}}. \tag{3.25}$$

Фиксируем u функции h вычеты на бесконечностях для некоторого $\beta > 0$

$$\begin{aligned} h_\beta^0(z) &= -\beta - \frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathbb{R}^0, \\ h_\beta^1(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathbb{R}^1, \\ h_\beta^2(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, & z \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

На втором листе на отрезке $(1, +\infty)$ ветвь $h_\beta^1(z)$ будет иметь один нуль c^1 первого порядка. Такая функция существует и единственна.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Плотность равновесной меры $\bar{\lambda}_Q = \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ для задачи с матрицей Никитина (3.7) равна скачку алгебраической функции $h_\beta(z)$ (3.24)–(3.26):*

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &:= \frac{h_{\beta+}^0 - h_{\beta+}^1}{2\pi i} dx, \\ d\lambda_2 &:= \frac{h_{\beta+}^1 - h_{\beta+}^2}{2\pi i} dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку функция $h_\beta(z)$ существует и единственна (для любого $a < 0$ существует единственное $\beta > 0$), то это вместе с теоремой о существовании и единственности равновесной меры дает нам обратимость функции $a(\beta)$, а следствие 2 дает строгую монотонность и непрерывность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве утверждения 2 проверяем, что мера $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$,

$$\begin{aligned} d\mu_1 &:= \frac{h_{\beta+}^0 - h_{\beta+}^1}{2\pi i} dx, \\ d\mu_2 &:= \frac{h_{\beta+}^1 - h_{\beta+}^2}{2\pi i} dx, \end{aligned} \quad (3.28)$$

действительно является мерой веса $(2, 1)$. Комплексные логарифмические потенциалы $\mathcal{U}^{\mu_1}$ и $\mathcal{U}^{\mu_2}$ являются первообразными функций $h_\beta^0 + \beta$ и $-h_\beta^2$ соответственно:

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}^{\mu_1}(z))'_z &= \left(\oint \frac{h_\beta^0(t)}{2\pi i} \log \frac{1}{z-t} dt \right)'_z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h_\beta^0(t)}{z-t} dt = h_\beta^0(z) + \beta, & z \in \mathbb{C} \setminus [a, 0], \end{aligned} \quad (3.29)$$

и, аналогично,

$$(\mathcal{U}^{\mu_2}(z))'_z = -h_\beta^2(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]. \quad (3.30)$$

Покажем, что мера $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ дает равновесие для нашей задачи. Рассмотрим абелев интеграл

$$G_\beta(z) := \int_a^z h_\beta(\psi) d\psi = \begin{cases} -\beta z - 2 \log |z| + g^0 + \dots, & z \rightarrow \infty, z \in \mathbb{R}^0, \\ + \log |z| + g^1 + \dots, & z \rightarrow \infty, z \in \mathbb{R}^1, \\ + \log |z| + g^2 + \dots, & z \rightarrow \infty, z \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.31)$$

Тогда

$$\begin{aligned} U^{\mu_1}(z) &= \operatorname{Re}(G_\beta^0(z) + \beta z - g^0), \\ U^{\mu_2}(z) &= \operatorname{Re}(-G_\beta^2(z) + g^2). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Проверим для потенциалов (3.32) условия равновесия (3.3):

$$\begin{aligned} 2U^{\mu_1}(z) - U^{\mu_2}(z) + (2g^0 + g^2) &= \operatorname{Re}(2G_\beta^0 + G_\beta^2 + 2\beta z) = \beta x \quad \text{на } [a, 0], \\ 2U^{\mu_1}(z) - U^{\mu_2}(z) + (2g^0 + g^2) - \beta x &= \operatorname{Re}(G_\beta^0 - G_\beta^1) = \operatorname{Re}\left(\int_a^z (h_\beta^0 - h_\beta^1)(\psi) d\psi\right) > 0 \quad \text{на } [-\infty, a), \\ 2U^{\mu_2}(z) - U^{\mu_1}(z) - (2g^2 + g^0) &= \operatorname{Re}(-2G_\beta^2 - G_\beta^0 - \beta z) = 0 \quad \text{на } [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Следовательно, $\bar{\mu}$ – это равновесные меры на $([a, 0], [0, 1])$ и $\bar{\mu} = \bar{\lambda}$.

3.4. Численное решение экстремальной задачи во внешнем поле.

3.4.1. *Нахождение h_β , решение экстремальной задачи с полем.* Аналогично тому, как это было сделано в теореме 2, мы получаем алгебраическое уравнение для h_β :

$$h_\beta^3 + \beta h_\beta^2 - \frac{2\beta(z-d)}{z(z-1)} h_\beta + \frac{\beta(z-c)}{z^2(z-1)} = 0, \quad (3.34)$$

где d, c – неизвестные коэффициенты. Исследуем это уравнение.

Дискриминант алгебраического уравнения (3.34) равен

$$D = \frac{-(-4\beta^2 c - 4\beta^2 + 4\beta + 8d\beta^2)\beta^2 z^4 + \dots}{z^4(z-1)^3},$$

но теперь точка ветвления a регулярна (полос сократился с нулем) и, следовательно, в ней находится простой корень дискриминанта. Так как дискриминант должен быть нечетной степени, то старший коэффициент обращается в нуль, и мы имеем соотношение

$$d = \frac{-\beta c - \beta + 1}{2\beta}.$$

Теперь числитель D имеет один простой нуль a и один нуль кратности два (так как нет других точек ветвления, кроме $a, 0$ и 1). Это дает нам систему трех уравнений с тремя неизвестными a, l, c .

Такая система уравнений для каждого конкретного $\beta > 0$ решается численно. Аналогично предыдущему, мы выбираем действительное решение, у которого корень дискриминанта и нуль c больше 1. На рис. 1 (круги) показана зависимость точки столкновения a от параметра поля β .

3.4.2. *Решение экстремальной задачи во внешнем поле с помощью векторного функционала Маскара–Саффа.* Из следствия 2 и замечания 1 заключаем, что для задачи (3.7) для всех $\beta > 0$ верно

$$S_{\bar{\lambda}_Q} = S^{\bar{\lambda}_Q},$$

следовательно, функционал (3.4) имеет строгий минимум на носителе равновесной меры. Также мы показали (утверждение 3), что носитель $S_{\bar{\lambda}_Q}$ есть пара

Рис. 1. Решение экстремальной задачи с матрицей Никишина на отрезках с общим концом во внешнем поле с помощью алгебраических функций (кружки) и посредством минимизации векторного функционала Маскара–Саффа (звездочки)

отрезков $([a(\beta), 0], [0, 1])$. Следовательно, в векторном функционале (3.4) мы можем искать минимум не по всем векторным компактам, а только среди компактов вида $([a, 0], [0, 1])$, т.е. задача свелась к нахождению минимума функции одного переменного $F(a)$. По теореме 1, утверждению 2 и следствию 3 имеем

$$F(a) = -3 \int_0^{+\infty} \left(h^0(y) + \frac{2}{y+1} \right) dy - \int_a^0 \beta y \frac{h_+^0(y) - h_+^1(y)}{2\pi i} dy,$$

где значения h определяются из уравнения (3.23) явно. Эта задача была решена численно. На рис. 1 (звездочки) показана зависимость точки столкновения от поля.

Список литературы

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1 (1984), 117–127.
- [2] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, Физматлит, М., 1988.
- [3] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [4] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Asymptotics of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice”, *J. Phys. A*, **34** (2001), 10627–10637.
- [5] P. Deift, K. T.-R. McLaughlin, *A continuum limit of the Toda lattice*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [6] A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “A contact problem in elasticity related to weighted polynomials on the real line”, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. II (Italy, September 23–28, 1996), Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1998, 575–587.
- [7] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **157**, 1981, 31–48.
- [8] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156.
- [9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58.
- [10] H. N. Mhaskar, E. B. Saff, “Where does the sup norm of a weighted polynomial live? A generalization of incomplete polynomials”, *Constr. Approx.*, **1** (1985), 71–91.
- [11] В. С. Буяров, Е. А. Рахманов, “О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 11–22.
- [12] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44.
- [13] H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane”, *Adv. Math.*, **3** (1969), 127–232.

М. А. Лапик (M. A. Lapik)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: mashalapik@gmail.com

Поступила в редакцию
19.12.2005