Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Критерий гладких порождающих множеств, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 3, 51–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:27:48

УДК 517.982.252

Г. Е. Иванов

Критерий гладких порождающих множеств

В работе для гладкого строго выпуклого множества в рефлексивном банаховом пространстве приведен критерий того, что это множество является порождающим. Приведенный критерий позволил обнаружить новые классы порождающих множеств.

Библиография: 6 названий.

Понятие порождающего множества было введено Е. С. Половинкиным в работе [1]. Исследованию порождающих множеств посвящена значительная часть монографии [2], а также работы [3], [4]. Название “порождающее” связано с тем, что каждое такое множество M порождает класс M -сильно выпуклых множеств, элементами которого являются множества, образованные всевозможными пересечениями сдвигов множества M . Для классов M -сильно выпуклых множеств получены важные аналоги классических теорем выпуклого анализа. Теория порождающих и M -сильно выпуклых множеств имеет важные приложения в задачах оптимизации, оптимального управления и дифференциальных играх.

Известны некоторые классы порождающих множеств. К ним относятся эллипсоиды, надграфики квадратичных положительно определенных функций, плоские выпуклые замкнутые множества. Однако полное описание порождающих множеств до сих пор остается открытой проблемой.

В настоящей работе для гладкого строго выпуклого множества в рефлексивном банаховом пространстве приведен критерий того, что это множество является порождающим. Приведенный критерий является весьма эффективным средством проверки порождаемости множества в случае, если множество гладкое, и не применим для негладких множеств. Последнее обстоятельство подобно тому, что известный критерий выпуклости функции в терминах неотрицательности ее второй производной применим лишь для гладких функций.

Приведенный в работе критерий позволил обнаружить новые классы порождающих множеств. Показано, что достаточно малая гладкая деформация эллипсоида в гильбертовом пространстве является порождающим множеством. Найдено семейство порождающих множеств в гильбертовом пространстве, предельными случаями этого семейства являются шар и полушар. Кроме того, обнаружены функции, эффективные множества которых ограничены, а надграфики этих функций являются порождающими множествами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00787) и гранта Президента РФ МД-10079.2006.1.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть E – рефлексивное банахово пространство.

Далее будут использоваться следующие определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Геометрической суммой* или, что то же самое, *суммой Минковского* множеств $A, B \subset E$ называется множество

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выпуклое замкнутое множество $M \subset E$ называется *порождающим множеством*, если для любого множества $X \subset E$ такого, что множество $A = \bigcap_{x \in X} (M - x)$ непусто, существует выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что замыкание суммы $A + B$ совпадает с M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Выпуклая собственная полунепрерывная снизу функция $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *порождающей функцией*, если надграфик функции f

$$\text{epi } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} : x_0 \in \mathbb{R}, x \in E, x_0 \geq f(x) \right\}$$

является порождающим множеством в пространстве $\mathbb{R} \times E$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Через $\langle p, x \rangle$ будем обозначать значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Через $s(\psi; M)$ будем обозначать значение *опорной функции* множества M на векторе $\psi \in E^*$

$$s(\psi; M) = \sup_{x \in M} \langle \psi, x \rangle.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Эффективным множеством* функции $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется множество

$$\text{dom } f = \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Барьерным конусом* множества $M \subset E$ называется множество

$$b(M) = \text{dom } s(\cdot; M) = \{\psi \in E^* : s(\psi; M) < +\infty\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для любого множества $M \subset E$ определим конус

$$\tilde{b}(M) = \left\{ \psi \in E^* : \text{существует } \max_{x \in M} \langle \psi, x \rangle \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Выпуклое множество $M \subset E$ будем называть *гладким*, если для любого единичного вектора $\psi_0 \in \tilde{b}(M)$ существуют числа $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что для любого единичного вектора $\psi \in \tilde{b}(M)$, удовлетворяющего неравенству $\|\psi - \psi_0\| < \delta$, и для любых векторов $x_0, x \in M$ таких, что $s(\psi_0; M) = \langle \psi_0, x_0 \rangle$, $s(\psi; M) = \langle \psi, x \rangle$, справедливо неравенство

$$\|\psi - \psi_0\| \leq C \|x - x_0\|.$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Через $\text{int } M$ будем обозначать внутренность, а через $\text{cl } M$ – замыкание множества $M \subset E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть задано множество $M \subset E$. Пусть опорная функция $s(\psi) = s(\psi; M)$ дважды дифференцируема в точке $\psi_0 \in \text{int } b(M)$. Используя рефлексивность пространства E , будем полагать, что первая производная $s'(\psi_0)$ является элементом пространства E , а вторая производная $s''(\psi_0)$ – линейный непрерывный оператор из E^* в E . Тогда для любого вектора $h \in E^*$ первый дифференциал функции s в точке ψ_0 равен $\langle h, s'(\psi_0) \rangle$, а второй дифференциал s в точке ψ_0 равен $\langle h, s''(\psi_0)h \rangle$. Через $\sigma(\psi_0, \ell)$ обозначим значение в точке $\ell \in E$ сопряженной функции к квадратичной форме $h \mapsto \langle h, s''(\psi_0)h \rangle$:

$$\sigma(\psi_0, \ell) = \sup_{h \in E^*} (\langle h, \ell \rangle - \langle h, s''(\psi_0)h \rangle). \quad (1)$$

По определению будем полагать, что $\sigma(0, \ell) = 0$ для любого $\ell \in E$.

§ 2. Критерии порождающих множеств и функций

ТЕОРЕМА 1 (критерий порождающего множества). Пусть $M \subset E$ – выпуклое замкнутое множество, $\text{int } M \neq \emptyset$. Пусть множество $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$ открыто и непусто. Пусть опорная функция $s(\psi) = s(\psi; M)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$. Тогда из условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{для любого вектора } \ell \in E \text{ функция } \psi \mapsto \sigma(\psi, \ell) \text{ (см. (1))} \\ \text{выпукла на множестве } \Psi(\ell) = \{\psi \in \tilde{b}(M) : \langle \psi, \ell \rangle = 0\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

следует, что множество M является порождающим.

Обратно. Если дополнительно множество M гладкое и его опорная функция трижды непрерывно дифференцируема на $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$, то из того, что множество M является порождающим, следует условие (2).

ТЕОРЕМА 2 (критерий порождающей функции). Пусть задана выпуклая собственная полунепрерывная снизу функция $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Через $g: E^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ обозначим функцию, сопряженную к f :

$$g(\psi) = \sup_{x \in E} (\langle \psi, x \rangle - f(x)).$$

Пусть эффективные множества $\text{dom } f$ и $\text{dom } g$ открыты в E и E^* соответственно. Пусть функция g дважды непрерывно дифференцируема на $\text{dom } g$ и для любого $\psi \in \text{dom } g$ оператор $g''(\psi): E^* \rightarrow E$ обратим. Тогда из условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{для любого числа } \ell_0 \in \mathbb{R} \text{ и любого вектора} \\ \ell \in E \text{ функция } \psi \mapsto \langle \ell, (g''(\psi))^{-1} \ell \rangle \text{ выпукла} \\ \text{на множестве } \{\psi \in \text{dom } g : \langle \psi, \ell \rangle = \ell_0\} \end{array} \right\} \quad (3)$$

следует, что функция f является порождающей.

Обратно. Если дополнительно функция g трижды непрерывно дифференцируема на $\text{dom } g$, то из того, что функция f является порождающей, следует условие (3).

§ 3. Новые классы порождающих множеств и функций

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство; $M(\lambda)$ – гладкая деформация единичного шара $M(0) = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$, т.е. задано многозначное отображение $M : [0, 1] \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ такое, что

- 1) для любого $\lambda \in [0, 1]$ множество $M(\lambda) \subset \mathcal{H}$ выпукло и замкнуто;
- 2) опорная функция $s(\psi, \lambda) = \sup_{x \in M(\lambda)} \langle \psi, x \rangle$ четырежды дифференцируема по ψ в любой точке $(\psi, \lambda) \in S_1 \times [0, 1]$, где $S_1 = \{\psi \in \mathcal{H} : \|\psi\| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathcal{H}$;
- 3) функция $s(\psi, \lambda)$ и все ее производные по ψ до четвертого порядка включительно равномерно непрерывны по совокупности переменных (ψ, λ) на множестве $S_1 \times [0, 1]$.

Тогда существует число $\lambda_0 \in (0, 1]$ такое, что для любого $\lambda \in [0, \lambda_0]$ множество $M(\lambda)$ является порождающим.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как линейный непрерывный обратимый оператор переводит порождающее множество в порождающее [2; теорема 4.2.3], то в силу теоремы 3 достаточно малая гладкая деформация эллипсоида в гильбертовом пространстве является порождающим множеством. В частности, из теоремы 3 следует, что если M , A – эллипсоиды, то существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda \in [0, \lambda_0]$ множество $M + \lambda A$ является порождающим.

ТЕОРЕМА 4. Пусть задано произвольное число $\gamma \in (0, 1)$. Определим числа

$$a = \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad b = \gamma(1 - \ln 2 - 2 \ln \gamma).$$

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Множество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} : x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{H}, x_0^2 + \|x\|^2 \leq 1, x_0 \geq -\gamma \ln(a^2 - \|x\|^2) - b \right\} \quad (4)$$

(рис. 1) является порождающим в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2; теорема 4.2.1]. Пусть в сепарабельном банаховом пространстве последовательность порождающих слабо компактных множеств M_k сходится в смысле метрики Хаусдорфа к слабо компактному множеству M , причем $\text{int } M \neq \emptyset$. Тогда множество M является порождающим.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как при $\gamma \rightarrow +0$ множества M , определяемые формулой (4), стремятся в смысле метрики Хаусдорфа к полушару, то в силу теоремы 4 и предложения 1 полушар в сепарабельном гильбертовом пространстве является порождающим множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях теоремы 4 множество (4) можно заменить центрально симметричным множеством

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} : x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{H}, x_0^2 + \|x\|^2 \leq 1, |x_0| \leq \gamma \ln(a^2 - \|x\|^2) + b \right\}.$$

Доказательство порождаемости этого множества аналогично доказательству теоремы 4.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово или конечномерное евклидово пространство размерности не менее 2. Функция (рис. 2)

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \|x\|^2}, & \|x\| \leq 1, \\ +\infty, & \|x\| > 1, \end{cases} \quad (5)$$

не является порождающей.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для функции (5) выполнены все условия теоремы 2, за исключением условия открытости множества $\text{dom } f$. Поэтому лемма 1 показывает существенность этого условия теоремы 2.

ТЕОРЕМА 5. Функция f (рис. 3), заданная на гильбертовом пространстве формулой

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(1 - \|x\|^2), & \|x\| < 1, \\ +\infty, & \|x\| \geq 1, \end{cases} \quad (6)$$

является порождающей.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Выполняя линейные непрерывные обратимые преобразования пространства аргументов и пространства значений функции, заданной формулой (6), получаем семейство порождающих функций с ограниченными эффективными множествами.

§ 4. Обоснование критерия порождающего множества

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (теорема Р.Н. Карасёва [4]). Пусть $M \subset E$ — выпуклое замкнутое множество. Пусть $\text{int } M \neq \emptyset$ и $\text{int } b(M) \neq \emptyset$. Пусть для любых двух точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $\text{int } A \neq \emptyset$, где $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$, существует выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что $A + B = M$. Тогда множество M является порождающим.

ЛЕММА 2. Пусть $M \subset E$ — выпуклое замкнутое множество, $\text{int } M \neq \emptyset$ и $\text{int } b(M) \neq \emptyset$. Пусть для любых двух точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $\text{int } A \neq \emptyset$, где $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$, функция $\psi \mapsto s(\psi; M) - s(\psi; A)$ выпукла на множестве $\text{int } b(M)$. Тогда множество M является порождающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предложением 2. Пусть заданы две точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $\text{int } A \neq \emptyset$, где $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$. Требуется доказать, что

$$\left. \begin{array}{l} \text{существует выпуклое замкнутое множество } B \subset E \text{ такое,} \\ \text{что } A + B = M. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Для любого $\psi \in E^*$ определим

$$f(\psi) = \begin{cases} s(\psi; M) - s(\psi; A), & \psi \in \text{int } b(M), \\ +\infty, & \psi \notin \text{int } b(M), \end{cases}$$

$$g(\psi) = \liminf_{\tilde{\psi} \rightarrow \psi} f(\tilde{\psi}).$$

Зафиксируем произвольный вектор $\psi_0 \in E^*$ и покажем, что

$$s(\psi_0; A) + g(\psi_0) = s(\psi_0; M). \quad (8)$$

Если $\psi_0 \notin \text{cl } b(M)$, то $s(\psi_0; M) = g(\psi_0) = +\infty$ и равенство (8) выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\psi_0 \in \text{cl } b(M)$. Зафиксируем вектор $\psi_1 \in \text{int } b(M)$ и для любого $\lambda \in (0, 1)$ обозначим

$$\psi_\lambda = (1 - \lambda)\psi_0 + \lambda\psi_1.$$

Поскольку множество $b(M)$ выпукло, то $\psi_\lambda \in \text{int } b(M)$ для любого $\lambda \in (0, 1]$. Следовательно,

$$s(\psi_\lambda; A) + f(\psi_\lambda) = s(\psi_\lambda; M) \quad \text{для любого } \lambda \in (0, 1]. \quad (9)$$

Покажем, что

$$s(\psi_0; A) + g(\psi_0) \leq s(\psi_0; M). \quad (10)$$

Если $\psi_0 \notin b(M)$, то $s(\psi_0; M) = +\infty$ и неравенство (10) выполнено. Пусть $\psi_0 \in b(M)$. Из выпуклости функции одной переменной $\lambda \mapsto s(\psi_\lambda; M)$ на отрезке $[0, 1]$ следует полунепрерывность сверху этой функции на данном отрезке, а значит, $s(\psi_0; M) \geq \liminf_{\lambda \rightarrow +0} s(\psi_\lambda; M)$. Отсюда, из равенства (9), полунепрерывности снизу функции $s(\cdot; A)$ и определения функции g следует неравенство (10).

Покажем теперь, что

$$s(\psi_0; M) \leq s(\psi_0; A) + g(\psi_0). \quad (11)$$

Поскольку функции $s(\cdot; M)$, $s(\cdot; A)$ непрерывны на $\text{int } b(M)$, то функция f также непрерывна на $\text{int } b(M)$, а значит, и в точке ψ_1 . Поэтому существуют числа $r > 0$, C такие, что

$$f(\psi) \leq C \quad \text{для любого } \psi \in E^*, \quad \|\psi - \psi_1\| \leq r. \quad (12)$$

По определению функции g существует последовательность $\{\psi_k\}$ такая, что

$$\psi_k \rightarrow \psi_0 \quad \text{и} \quad f(\psi_k) \rightarrow g(\psi_0) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Зафиксируем произвольное число $\lambda \in (0, 1)$. Так как

$$\psi_\lambda = (1 - \lambda)\psi_k + \lambda\left(\psi_1 - \frac{1 - \lambda}{\lambda}(\psi_k - \psi_0)\right),$$

то в силу выпуклости функции f имеем

$$f(\psi_\lambda) \leq (1 - \lambda)f(\psi_k) + \lambda f\left(\psi_1 - \frac{1 - \lambda}{\lambda}(\psi_k - \psi_0)\right). \quad (13)$$

Поскольку $\psi_k \rightarrow \psi_0$, то при достаточно больших k справедливо неравенство

$$\left\| \frac{1 - \lambda}{\lambda}(\psi_k - \psi_0) \right\| \leq r.$$

Отсюда, из условия (12) и неравенства (13) следует неравенство

$$f(\psi_\lambda) \leq (1 - \lambda)f(\psi_k) + \lambda C.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$f(\psi_\lambda) \leq (1 - \lambda)g(\psi_0) + \lambda C.$$

Отсюда и из (9) следует, что для любого $\lambda \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$s(\psi_\lambda; M) \leq s(\psi_\lambda; A) + (1 - \lambda)g(\psi_0) + \lambda C. \quad (14)$$

Если $s(\psi_0; A) = +\infty$ или $g(\psi_0) = +\infty$, то неравенство (11) выполнено. Рассмотрим случай $s(\psi_0; A) < +\infty$, $g(\psi_0) < +\infty$. Из выпуклости функции одной переменной $\lambda \mapsto s(\psi_\lambda; A)$ на отрезке $[0, 1]$ следует полунепрерывность сверху этой функции на данном отрезке, а значит, $s(\psi_0; A) \geq \liminf_{\lambda \rightarrow +0} s(\psi_\lambda; A)$. Поэтому, переходя к пределу в неравенстве (14) при $\lambda \rightarrow +0$ и учитывая полунепрерывность снизу функции $s(\cdot; M)$, получаем неравенство (11).

Из неравенств (10) и (11) вытекает равенство (8).

Так как функция g положительно однородна, выпукла и полунепрерывна снизу, то существует выпуклое замкнутое множество $B \subset E$ такое, что $s(\psi; B) = g(\psi)$ для любого $\psi \in E^*$. Отсюда и из равенства (8) получаем равенство $s(\psi; A) + s(\psi; B) = s(\psi; M)$ для любого $\psi \in E^*$. Тем самым доказано условие (7).

ЛЕММА 3. Пусть $A_1, A_2 \subset E$ – выпуклые замкнутые множества такие, что $\text{int}(A_1 \cap A_2) \neq \emptyset$. Тогда

(i) для любых $\psi, u \in E^*$ справедливо неравенство

$$2s(\psi; A_1 \cap A_2) \leq s(\psi + u; A_1) + s(\psi - u; A_2);$$

(ii) для любого $\psi \in b(A_1 \cap A_2)$ справедливо равенство

$$2s(\psi; A_1 \cap A_2) = \min_{u \in E^*} (s(\psi + u; A_1) + s(\psi - u; A_2)),$$

причем минимум достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множества A_i выпуклы и замкнуты, то функции, сопряженные к опорным функциям этих множеств, совпадают с индикаторными функциями этих множеств:

$$s^*(x; A_i) = \delta(x; A_i) = \begin{cases} 0, & x \in A_i, \\ +\infty, & x \notin A_i. \end{cases}$$

В силу [2; теорема 1.11.3] для любого

$$\psi \in b(A_1 \cap A_2) = \text{dom}((\delta(\cdot; A_1) + \delta(\cdot; A_2))^*)$$

справедливо равенство

$$(\delta(\cdot; A_1) + \delta(\cdot; A_2))^*(\psi) = \min_{\psi_1, \psi_2 \in E^*: \psi_1 + \psi_2 = \psi} (\delta^*(\psi_1; A_1) + \delta^*(\psi_2; A_2)),$$

т.е.

$$s(\psi; A_1 \cap A_2) = \min_{\psi_1, \psi_2 \in E^*: \psi_1 + \psi_2 = \psi} (s(\psi_1; A_1) + s(\psi_2; A_2)).$$

Отсюда вытекает утверждение (ii). Утверждение (i) доказываемой теоремы следует из [2; равенство (1.11.5)].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть X – линейное пространство. Верхней производной второго порядка функции $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $x \in \text{dom } f$ по направлению $h \in X$ будем называть

$$f''(x, h) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) + f(x - th) - 2f(x)}{t^2}.$$

Из [5; гл. VII, задача 1.14] вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть X – линейное пространство, и пусть эффективное множество $\text{dom } f$ функции $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ непусто и выпукло. Пусть ограничение функции f на любой отрезок, содержащийся в $\text{dom } f$, является полунепрерывной сверху функцией. Пусть $f''(x, h) \geq 0$ для любых $x \in \text{dom } f$, $h \in X$. Тогда функция f выпукла.

ЛЕММА 5. Пусть $M \subset E$ – выпуклое замкнутое множество. Пусть заданы точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $\text{int } A \neq \emptyset$, где $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$. Опорные функции множеств M и A обозначим соответственно через s и s_A : $s(\psi) = s(\psi; M)$, $s_A(\psi) = s(\psi; A)$ для любого $\psi \in E^*$. Тогда для любого вектора $\psi \in \text{int } b(M)$ существует вектор $u \in E^*$ такой, что $\psi + u \in \tilde{b}(M)$, $\psi - u \in \tilde{b}(M)$ и для любых векторов $h, v \in E^*$ справедливо неравенство

$$2s_A''(\psi, h) \leq s''(\psi + u, h + v) + s''(\psi - u, h - v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный вектор $\psi \in \text{int } b(M)$. Согласно п. (ii) леммы 3 существует вектор $u \in E^*$ такой, что

$$2s_A(\psi) = s(\psi + u; M - x_1) + s(\psi - u; M - x_2). \quad (15)$$

В силу [2; лемма 1.13.2] справедливо включение $\text{int } b(A) \subset \tilde{b}(A)$. Следовательно, $\psi \in \text{int } b(M) \subset \text{int } b(A) \subset \tilde{b}(A)$. Поэтому существует вектор $a \in A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$ такой, что $s_A(\psi) = \langle \psi, a \rangle$. Покажем, что

$$s(\psi + u; M - x_1) = \langle \psi + u, a \rangle. \quad (16)$$

Так как $a \in (M - x_1) \cap (M - x_2)$, то

$$s(\psi + u; M - x_1) \geq \langle \psi + u, a \rangle, \quad s(\psi - u; M - x_2) \geq \langle \psi - u, a \rangle.$$

Если равенство (16) не выполнено, то

$$s(\psi + u; M - x_1) + s(\psi - u; M - x_2) > \langle \psi + u, a \rangle + \langle \psi - u, a \rangle = 2\langle \psi, a \rangle = 2s_A(\psi),$$

что противоречит равенству (15). Это доказывает равенство (16). Поэтому $\psi + u \in \tilde{b}(M)$. Аналогично, $\psi - u \in \tilde{b}(M)$.

В силу п. (i) леммы 3 для любого числа t и любых векторов $h, v \in E^*$ справедливо неравенство

$$s_A(\psi + th) \leq s(\psi + u + th + tv; M - x_1) + s(\psi - u + th - tv; M - x_2).$$

Отсюда, из определения верхней производной второго порядка и из равенства (15) для любого вектора $v \in E^*$ имеем

$$\begin{aligned} s''_A(\psi, h) &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (s_A(\psi + th) + s_A(\psi - th) - 2s_A(\psi)) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (s(\psi + u + th + tv; M - x_1) \\ &\quad + s(\psi + u - th - tv; M - x_1) - 2s(\psi + u; M - x_1)) \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (s(\psi - u + th - tv; M - x_2) \\ &\quad + s(\psi - u - th + tv; M - x_2) - 2s(\psi - u; M - x_2)) \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (s(\psi + u + th + tv) + s(\psi + u - th - tv) - 2s(\psi + u)) \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (s(\psi - u + th - tv) + s(\psi - u - th + tv) - 2s(\psi - u)) \\ &= s''(\psi + u, h + v) + s''(\psi - u, h - v). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если функция s дважды непрерывно дифференцируема в точке ψ , то верхняя производная второго порядка $s''(\psi, h)$ совпадает со значением второго дифференциала $\langle h, s''(\psi)h \rangle$. Поэтому для дважды дифференцируемой функции нет необходимости вводить понятие верхней производной второго порядка. Однако из того, что опорная функция множества M дважды дифференцируема, не следует дважды дифференцируемость опорной функции множества $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$. Пусть, например, $E = \mathbb{R}^2$,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (x - a)^2 + y^2 \leq 1, (x + a)^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

где $a \in (0, 1)$. Тогда опорная функция множества M дважды дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, а опорная функция множества A не является дважды дифференцируемой, например, в точке $\psi = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1 - a^2} \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 6. Пусть $M \subset E$ – выпуклое замкнутое множество такое, что $\text{int } M \neq \emptyset$. Для любого $\psi \in E^*$ обозначим $s(\psi) = s(\psi; M)$. Пусть

- (i) $s''(\psi, h) < +\infty$ для любых векторов $\psi \in \text{int } b(M) \setminus \{0\}$, $h \in E^*$ и
- (ii) $\inf_{v \in E^*} (s''(\psi + u, h + v) + s''(\psi - u, h - v)) \leq 2s''(\psi, h)$ для любого вектора $\psi \in \text{int } b(M) \setminus \{0\}$ и любых векторов $h, u \in E^*$ таких, что $\psi \pm u \in \tilde{b}(M)$.

Тогда множество M является порождающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы произвольные точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $\text{int } A \neq \emptyset$, где $A = (M - x_1) \cap (M - x_2)$. Обозначим $s_A(\psi) = s(\psi; A)$.

В силу леммы 2 достаточно доказать, что функция

$$f(\psi) = s(\psi) - s_A(\psi) \quad (17)$$

выпукла на множестве $\text{int } b(M)$.

Так как функции s и s_A выпуклы и конечны на множестве $b(M)$, то ограничения этих функций на любой отрезок, содержащийся в $\text{int } b(M)$, являются непрерывными функциями. Следовательно, этим же свойством обладает функция f .

Потому в силу леммы 4 достаточно показать, что для любых векторов $\psi \in \text{int } b(M)$, $h \in E^*$ справедливо неравенство

$$f''(\psi, h) \geq 0. \quad (18)$$

Если $\psi = 0$, то неравенство $f''(\psi, h) \geq 0$ следует из условия $f(\tilde{\psi}) \geq \langle \tilde{\psi}, x_1 \rangle$ для любого $\tilde{\psi} \in E^*$. Поэтому будем предполагать, что $\psi \in \text{int } b(M) \setminus \{0\}$.

Из равенства (17) следует, что $s(\psi) = s_A(\psi) + f(\psi)$ для любого $\psi \in \text{int } b(M)$. Поэтому для любых $\psi \in \text{int } b(M)$, $h \in E^*$ выполнено неравенство $s''(\psi, h) \leq s''_A(\psi, h) + f''(\psi, h)$. Отсюда и из условия (i) доказываемой леммы следует, что для доказательства условия (18) достаточно проверить, что для любых $\psi \in \text{int } b(M) \setminus \{0\}$, $h \in E^*$ справедливо неравенство

$$s''_A(\psi, h) \leq s''(\psi, h). \quad (19)$$

Из леммы 5 следует существование вектора $u \in E^*$ такого, что $\psi + u \in \tilde{b}(M)$, $\psi - u \in \tilde{b}(M)$ и

$$2s''_A(\psi, h) \leq \inf_{v \in E^*} (s''(\psi + u, h + v) + s''(\psi - u, h - v)).$$

Отсюда и из условия (ii) доказываемой леммы вытекает неравенство (19).

ЛЕММА 7. Пусть опорная функция $s(\psi) = s(\psi; M)$ множества $M \subset E$ дважды дифференцируема в точке $\psi \in \text{int } b(M) \setminus \{0\}$. Пусть функция σ определена формулой (1). Тогда справедливы соотношения

- (i) $s''(\psi)\psi = 0$;
- (ii) $s''(t\psi) = s''(\psi)/t$ для любого $t > 0$;
- (iii) $\sigma(\psi, \ell) = +\infty$ для любого вектора $\ell \in E$ такого, что $\langle \psi, \ell \rangle \neq 0$;
- (iv) $\sigma(t\psi, \ell) = t\sigma(\psi, \ell)$ для любых $\ell \in E$, $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу положительной однородности функции s для любого $t > 0$ справедливо равенство $s'(t\psi) = s'(\psi)$. Отсюда следуют пп. (i) и (ii) доказываемой леммы. Пункт (iii) следует из п. (i); п. (iv) следует из п. (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Шаг 1. Пусть выполнено условие (2) теоремы 1. Покажем, что множество M является порождающим.

Так как $\text{int } b(M) \subset \tilde{b}(M) \subset b(M)$ и множество $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$ открыто, то

$$\tilde{b}(M) \setminus \{0\} = \text{int } b(M) \setminus \{0\}.$$

Пусть задан вектор $\psi_0 \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\}$ и векторы $h, u \in E^*$ такие, что $\psi_0 \pm u \in \tilde{b}(M)$. В силу леммы 6 достаточно доказать неравенство

$$g(h) \leq 2s''(\psi_0, h), \quad (20)$$

где

$$g(h) = \inf_{v \in E^*} (s''(\psi_0 + u, h + v) + s''(\psi_0 - u, h - v)). \quad (21)$$

Поскольку функция s дважды непрерывно дифференцируема на $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$, то для любых векторов $\psi \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\}$, $h \in E^*$ справедливо равенство $s''(\psi, h) = \langle h, s''(\psi)h \rangle$. Отсюда и из равенства (1) следует, что для любых векторов $\psi \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\}$, $\ell \in E$ выполнено равенство

$$\sigma(\psi, \ell) = \sup_{h \in E^*} (\langle h, \ell \rangle - s''(\psi, h)). \quad (22)$$

Из условия $\text{int } M \neq \emptyset$ следует существование вектора $x_0 \in \text{int } M$ и числа $r > 0$ таких, что $s(\psi) \geq \langle \psi, x_0 \rangle + r\|\psi\|$ для любого $\psi \in E^*$. Отсюда и из равенства $s(0) = 0$ вытекает равенство

$$s''(0, h) = \begin{cases} +\infty, & h \neq 0, \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Поэтому для любого $\ell \in E$ имеем

$$\sup_{h \in E^*} (\langle h, \ell \rangle - s''(0, h)) = 0 = \sigma(0, \ell).$$

Следовательно, равенство (22) выполняется и при $\psi = 0$ и любом $\ell \in E$.

Заметим, что в силу равенства (21) для любого $\ell \in E$

$$\begin{aligned} g^*(2\ell) &= \sup_{h \in E^*} (\langle h, 2\ell \rangle - g(h)) \\ &= \sup_{h \in E^*} \sup_{v \in E^*} (\langle h + v, \ell \rangle + \langle h - v, \ell \rangle - s''(\psi_0 + u, h + v) - s''(\psi_0 - u, h - v)). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (22) вытекает равенство

$$g^*(2\ell) = \sigma(\psi_0 + u, \ell) + \sigma(\psi_0 - u, \ell). \quad (23)$$

Из п. (iii) леммы 7 и условия (2) теоремы 1 следует выпуклость функции $\psi \mapsto \sigma(\psi, \ell)$ на множестве $\tilde{b}(M)$. Отсюда и из п. (iv) леммы 7 получаем, что для любого вектора $\ell \in E$ справедливо неравенство

$$2\sigma(\psi_0, \ell) \leq \sigma(\psi_0 + u, \ell) + \sigma(\psi_0 - u, \ell).$$

Поэтому согласно равенству (23) имеем

$$2\sigma(\psi_0, \ell) \leq g^*(2\ell). \quad (24)$$

Из равенства (22) следует неравенство

$$s''(\psi_0, h) \geq \sup_{\ell \in E} (\langle h, \ell \rangle - \sigma(\psi_0, \ell)).$$

Отсюда и из неравенства (24) получаем

$$2s''(\psi_0, h) \geq \sup_{\ell \in E} (2\langle h, \ell \rangle - 2\sigma(\psi_0, \ell)) \geq \sup_{\ell \in E} (\langle h, 2\ell \rangle - g^*(2\ell)) = g^{**}(h). \quad (25)$$

Так как $\psi_0 \neq 0$, то $\psi_0 + u \neq 0$ или $\psi_0 - u \neq 0$. Для определенности будем предполагать, что $\psi_0 + u \neq 0$. Тогда по условию доказываемой леммы функция s дважды непрерывно дифференцируема в точке $\psi_0 + u$. Следовательно, $s''(\psi_0 + u, h) = \langle h, s''(\psi_0 + u)h \rangle$. Так как $s''(\psi_0 - u, 0) = 0$, то из равенства (21) следует, что $g(h) \leq s''(\psi_0 + u, 2h) = 4\langle h, s''(\psi_0 + u)h \rangle$ для любого $h \in E^*$. Поэтому функция g ограничена на любом ограниченном множестве. Отсюда и из выпуклости функции g следует непрерывность этой функции. По теореме Фенхеля–Моро имеем: $g^{**} = g$. Отсюда и из неравенства (25) следует неравенство (20). Поэтому множество M является порождающим.

Обратно. Пусть множество M порождающее, гладкое и его опорная функция трижды непрерывно дифференцируема на $\tilde{b}(M) \setminus \{0\}$. Покажем, что выполняется условие (2) теоремы 1.

Шаг 2. Зафиксируем произвольный единичный вектор $\psi \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\}$ и вектор $\ell \in E$ такой, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$. Покажем, что

$$\text{существует вектор } u \in E^*, \quad s''(\psi)u = \ell. \quad (26)$$

Так как множество M является гладким в смысле определения 8, то существует константа $C > 0$ такая, что для любого вектора $u \in E^*$ и для любого достаточно малого числа $t > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\psi + tu}{\|\psi + tu\|} - \psi \right\| \leq C \|s'(\psi + tu) - s'(\psi)\|.$$

Поскольку

$$\left\| \frac{\psi + tu}{\|\psi + tu\|} - \psi \right\| \geq \frac{t}{\|\psi + tu\|} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|u + \mu\psi\|,$$

то

$$\|s''(\psi)u\| \geq \frac{1}{C} \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|u + \mu\psi\| \quad \text{для любых } u, \psi \in E^*, \|\psi\| = 1. \quad (27)$$

Через L_ψ обозначим линейную оболочку вектора ψ :

$$L_\psi = \{\mu\psi : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Для каждого $u \in E^*$ через $\pi(u)$ обозначим класс смежности пространства E^* по L_ψ

$$\pi(u) = \{u + t\psi : t \in \mathbb{R}\}.$$

Классы смежности $\pi(u)$ являются элементами факторпространства E^*/L_ψ [6; п. 4.8]. Пространство E^*/L_ψ банахово, норма элемента $\pi(u) \in E^*/L_\psi$ определяется по формуле

$$\|\pi(u)\| = \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|u + t\psi\|,$$

где $\|u + t\psi\|$ – норма элемента $u + t\psi$ в пространстве E^* .

Из положительной однородности функции s следует, что $s'(t\psi) = s'(\psi)$ для любого $t > 0$. Поэтому $s''(\psi)\psi = 0$.

Для каждого $\pi(u) \in E^*/L_\psi$ определим $T\pi(u) = s''(\psi)u$.

Из равенства $s''(\psi)\psi = 0$ и из самосопряженности оператора $s''(\psi)$ следует равенство $\langle \psi, s''(\psi)u \rangle = 0$ для любого $u \in E^*$. Поэтому для любого $u \in E^*$ справедливо включение

$$s''(\psi)u \in L_\psi^\perp = \{x \in E : \langle \psi, x \rangle = 0\}.$$

Следовательно, T является линейным ограниченным оператором из E^*/L_ψ в $L_\psi^\perp$. В силу [6; теорема 4.9] с точностью до изометрического изоморфизма справедливо равенство $(E^*/L_\psi)^* = L_\psi^\perp$. Из самосопряженности оператора $s''(\psi)$ следует самосопряженность оператора T . Отсюда, из неравенства (27) и условия $\ell \in L_\psi^\perp$ в силу [6; теорема 4.15] следует условие (26).

Шаг 3. Пусть заданы произвольные векторы $\psi \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\}$, $u \in E^*$. Пусть $\ell = s''(\psi)u$. Покажем, что

$$\inf_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle) = 2s(\psi) - \varepsilon^2 \langle u, \ell \rangle + o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (28)$$

Определим вектор

$$\ell_\varepsilon = \frac{s'(\psi + \varepsilon u) - s'(\psi - \varepsilon u)}{2\varepsilon} \quad (29)$$

и функцию

$$g_\varepsilon(v) = s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell_\varepsilon \rangle \quad \text{при } v \in E^*. \quad (30)$$

Так как $g'_\varepsilon(v) = s'(\psi + v) - s'(\psi - v) - 2\varepsilon \ell_\varepsilon$, то в силу равенства (29) получаем: $g'_\varepsilon(\varepsilon u) = 0$. Отсюда и из выпуклости функции $g_\varepsilon(v)$ следует равенство

$$\inf_{v \in E^*} g_\varepsilon(v) = g_\varepsilon(\varepsilon u). \quad (31)$$

Из формулы (29) и трижды непрерывной дифференцируемости функции s следует, что

$$\ell_\varepsilon = s''(\psi)u + o(\varepsilon) = \ell + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (32)$$

Так как $\text{int } M \neq \emptyset$, то существуют вектор $x_0 \in \text{int } M$ и число $r > 0$ такие, что $s(w) \geq \langle w, x_0 \rangle + r\|w\|$ для любого $w \in E^*$. Следовательно,

$$\begin{aligned} s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle &\geq 2\langle \psi, x_0 \rangle + r(\|\psi + v\| + \|\psi - v\|) - 2\varepsilon \|\ell\| \|v\| \\ &\geq 2(r - \varepsilon \|\ell\|) \|v\| + 2\langle \psi, x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ из условия $\varepsilon_0 \|\ell\| \leq r/2$ и число C_1 из условия $C_1 > (2/r)(s(\psi) - \langle \psi, x_0 \rangle)$. Тогда для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $v \in E^*$ при $\|v\| > C_1$ имеем

$$s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle \geq r\|v\| + 2\langle \psi, x_0 \rangle > rC_1 + 2\langle \psi, x_0 \rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \inf_{v \in E^*: \|v\| > C_1} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle) &\geq rC_1 + 2\langle \psi, x_0 \rangle \\ &> 2s(\psi) \geq \inf_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\inf_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle) = \inf_{v \in E^*: \|v\| \leq C_1} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle).$$

Отсюда и из соотношения (32) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем равенство

$$\inf_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle) = \inf_{v \in E^*: \|v\| \leq C_1} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell_\varepsilon \rangle) + o(\varepsilon^2).$$

Поэтому в силу формул (30), (31) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\inf_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle) = g_\varepsilon(\varepsilon u) + o(\varepsilon^2) = 2s(\psi) - \varepsilon^2 \langle u, \ell \rangle + o(\varepsilon^2).$$

Тем самым соотношение (28) доказано.

Шаг 4. Зафиксируем произвольный вектор $\ell \in E$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ определим множество $A_\varepsilon = (M - \varepsilon \ell) \cap (M + \varepsilon \ell)$. Из условия $\text{int } M \neq \emptyset$ следует существование числа $\varepsilon_0 > 0$ такого, что $\text{int } A_\varepsilon \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Поскольку $s(\psi; M \pm \varepsilon \ell) = s(\psi) \pm \varepsilon \langle \psi, \ell \rangle$, то согласно лемме 3 для любого $\psi \in b(M)$ имеем

$$2s(\psi; A_\varepsilon) = \min_{v \in E^*} (s(\psi + v) + s(\psi - v) - 2\varepsilon \langle v, \ell \rangle).$$

В силу условия (26) для любого вектора $\psi \in \Psi(\ell) \setminus \{0\} = \{\psi \in \tilde{b}(M) \setminus \{0\} : \langle \psi, \ell \rangle = 0\}$ существует вектор $u = u(\psi) \in E^*$ такой, что $s''(\psi)u = \ell$.

Отсюда и из соотношения (28) вытекает равенство

$$s(\psi; A_\varepsilon) = s(\psi) - \frac{\varepsilon^2}{2} \langle u, \ell \rangle + o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (33)$$

Заметим, что в силу равенства (1)

$$\sigma(\psi, \ell) = \sup_{h \in E^*} (\langle h, \ell \rangle - \langle h, s''(\psi)h \rangle).$$

Так как функция $g(h) = \langle h, s''(\psi)h \rangle - \langle h, \ell \rangle$ выпукла и $g'(u/2) = s''(\psi)u - \ell = 0$, то

$$\inf_{h \in E^*} g(h) = g\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{1}{4} \langle u, s''(\psi)u \rangle = -\frac{1}{4} \langle u, \ell \rangle.$$

Поэтому $\sigma(\psi, \ell) = \frac{1}{4}\langle u, \ell \rangle$ и согласно соотношению (33) для любого вектора $\psi \in \Psi(\ell) \setminus \{0\}$ получаем:

$$s(\psi) - s(\psi; A_\varepsilon) = 2\varepsilon^2 \sigma(\psi, \ell) + o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (34)$$

Так как $s(0) = s(0; A_\varepsilon) = \sigma(0, \ell) = 0$, то соотношение (34) справедливо для любого $\psi \in \Psi(\ell)$. Поскольку множество M порождающее, то существует выпуклое замкнутое множество $B_\varepsilon \subset E$ такое, что $s(\psi) = s(\psi; A_\varepsilon) + s(\psi; B_\varepsilon)$. Поэтому функция $\psi \mapsto s(\psi) - s(\psi; A_\varepsilon)$ выпукла на множестве $b(M)$. Отсюда и из соотношения (34) вытекает выпуклость функции $\psi \mapsto \sigma(\psi, \ell)$ на множестве $\Psi(\ell)$, т.е. условие (2) теоремы 1.

§ 5. Обоснование критерия порождающей функции

ЛЕММА 8. Пусть D – выпуклое множество в линейном пространстве. Пусть задана функция $F: D \rightarrow \mathbb{R}$. Определим множество

$$\Psi = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} : \psi_0 < 0, -\frac{\psi}{\psi_0} \in D \right\}.$$

Для любого вектора $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \Psi$ определим $\sigma(\psi_0, \psi) = -\psi_0 F(-\psi/\psi_0)$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) функция σ выпукла на множестве Ψ ;
- (ii) функция F выпукла на множестве D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\sigma(-1, \psi) = F(\psi)$, то из условия (i) следует условие (ii).

Покажем, что из условия (ii) следует условие (i). Пусть выполнено условие (ii). Пусть заданы векторы $\begin{pmatrix} \psi_0^1 \\ \psi^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_0^2 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \in \Psi$ и число $\lambda \in [0, 1]$. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (1 - \lambda)\psi_0^1 + \lambda\psi_0^2, & \psi &= (1 - \lambda)\psi^1 + \lambda\psi^2, \\ \xi_1 &= -\frac{\psi^1}{\psi_0^1}, & \xi_2 &= -\frac{\psi^2}{\psi_0^2}, & \mu &= \frac{\lambda\psi_0^2}{\psi_0}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\xi_1, \xi_2 \in D$,

$$\mu \geq 0, \quad 1 - \mu = \frac{(1 - \lambda)\psi_0^1}{\psi_0} \geq 0, \quad (1 - \mu)\xi_1 + \mu\xi_2 = \frac{-(1 - \lambda)\psi^1 - \lambda\psi^2}{\psi_0} = -\frac{\psi}{\psi_0}.$$

В силу условия (ii) справедливо неравенство

$$(1 - \mu)F(\xi_1) + \mu F(\xi_2) \geq F((1 - \mu)\xi_1 + \mu\xi_2) = F\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right),$$

т.е.

$$\frac{(1 - \lambda)\psi_0^1}{\psi_0} F\left(-\frac{\psi^1}{\psi_0^1}\right) + \frac{\lambda\psi_0^2}{\psi_0} F\left(-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}\right) \geq F\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right).$$

Следовательно,

$$-(1 - \lambda)\psi_0^1 F\left(-\frac{\psi^1}{\psi_0^1}\right) - \lambda\psi_0^2 F\left(-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}\right) \geq -\psi_0 F\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right),$$

т.е.

$$(1 - \lambda)\sigma(\psi_0^1, \psi^1) + \lambda\sigma(\psi_0^2, \psi^2) \geq \sigma(\psi_0, \psi).$$

Поэтому выполняется условие (i).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для любых $\psi_0 \in \mathbb{R}$, $\psi \in E^*$ через $s(\psi_0, \psi)$ обозначим опорную функцию множества $\text{epi } f$:

$$s(\psi_0, \psi) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}, x \in E: x_0 \geq f(x)} (\psi_0 x_0 + \langle \psi, x \rangle). \quad (35)$$

Если $\psi_0 > 0$, то согласно равенству (35) имеем: $s(\psi_0, \psi) = +\infty$ и, следовательно, $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \notin \tilde{b}(\text{epi } f)$.

Если $\psi_0 = 0$, то в силу открытости множества $\text{dom } f$ супремум

$$s(\psi_0, \psi) = \sup_{x \in \text{dom } f} \langle \psi, x \rangle$$

не достигается. Поэтому снова $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \notin \tilde{b}(\text{epi } f)$. Итак, доказано, что

$$\text{если } \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \tilde{b}(\text{epi } f), \quad \text{то } \psi_0 < 0. \quad (36)$$

Из равенства (35) следует, что для любого числа $\psi_0 < 0$ и вектора $\psi \in E$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} s(\psi_0, \psi) &= -\psi_0 \sup_{x_0 \in \mathbb{R}, x \in E: x_0 \geq f(x)} \left(-x_0 + \left\langle -\frac{\psi}{\psi_0}, x \right\rangle \right) \\ &= -\psi_0 \sup_{x \in \text{dom } f} \left(\left\langle -\frac{\psi}{\psi_0}, x \right\rangle - f(x) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Следовательно, для любого числа $\psi_0 < 0$ и вектора $\psi \in E$ имеем:

$$s(\psi_0, \psi) = -\psi_0 g\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right). \quad (38)$$

Так как множество $\text{dom } g$ открыто, то для любого числа $\psi_0 < 0$ и вектора $\psi \in E$ таких, что $-\frac{\psi}{\psi_0} \in \text{dom } g$, супремум (37) достигается, а значит, $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \tilde{b}(\text{epi } f)$. Отсюда и из условия (36) вытекает равенство

$$\tilde{b}(\text{epi } f) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} : \psi_0 \in \mathbb{R}, \psi \in E, \psi_0 < 0, -\frac{\psi}{\psi_0} \in \text{dom } g \right\}. \quad (39)$$

Дифференцируя равенство (38), для любых $h_0 \in \mathbb{R}$, $h \in E^*$, $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \tilde{b}(\text{epi } f)$ получаем равенство

$$\left\langle \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix}, s''(\psi_0, \psi) \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\psi_0^3} \left\langle \psi_0 h - \psi h_0, g''\left(-\frac{\psi}{\psi_0}\right)(\psi_0 h - \psi h_0) \right\rangle. \quad (40)$$

Для любых $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in E$ в соответствии с формулой (1) определим

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = \sup_{h_0 \in \mathbb{R}} \sup_{h \in E^*} \left(h_0 \ell_0 + \langle h, \ell \rangle - \left\langle \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix}, s''(\psi_0, \psi) \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix} \right\rangle \right). \quad (41)$$

Из равенства (40) получаем

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = \sup_{h_0 \in \mathbb{R}} \sup_{h \in E^*} \left(h_0 \ell_0 + \langle h, \ell \rangle + \frac{1}{\psi_0^3} \left\langle \psi_0 h - \psi h_0, g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) (\psi_0 h - \psi h_0) \right\rangle \right). \quad (42)$$

Зафиксируем произвольные $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in E$, $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \tilde{b}(\text{epi } f)$. Из выпуклости функции g следует, что оператор $g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) : E^* \rightarrow E$ неотрицательно определен. Отсюда и из неравенства $\psi_0 < 0$ следует, что для любого $h_0 \in \mathbb{R}$ функция

$$h \mapsto \langle h, \ell \rangle + \frac{1}{\psi_0^3} \left\langle \psi_0 h - \psi h_0, g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) (\psi_0 h - \psi h_0) \right\rangle$$

вогнута. Из условия равенства нулю производной найдем точку максимума $h_{\max}$ этой функции:

$$\ell = -\frac{2}{\psi_0^2} g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) (\psi_0 h_{\max} - \psi h_0),$$

т.е.

$$h_{\max} = -\frac{\psi_0}{2} \left(g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) \right)^{-1} \ell + \frac{h_0 \psi}{\psi_0}.$$

Подставляя это выражение в формулу (42), имеем

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = \sup_{h_0 \in \mathbb{R}} \left(-\frac{\psi_0}{4} \left\langle \ell, \left(g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) \right)^{-1} \ell \right\rangle + \frac{h_0}{\psi_0} \langle \psi, \ell \rangle + h_0 \ell_0 \right).$$

Для любых $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in E$ определим множество

$$\Psi(\ell_0, \ell) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \tilde{b}(\text{epi } f) : \psi_0 \ell_0 + \langle \psi, \ell \rangle = 0 \right\}.$$

Тогда для любых $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in E$, $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \in \Psi(\ell_0, \ell)$ справедливо равенство

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = -\frac{\psi_0}{4} \left\langle \ell, \left(g'' \left(-\frac{\psi}{\psi_0} \right) \right)^{-1} \ell \right\rangle. \quad (43)$$

В силу леммы 8 для любых $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in E$ выпуклость функции $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell)$ на множестве $\Psi(\ell_0, \ell)$ эквивалентна выпуклости функции $\psi \mapsto F(\psi) = \langle \ell, (g''(\psi))^{-1} \ell \rangle$ на множестве $D = \{\psi \in \text{dom } g : \langle \psi, \ell \rangle = \ell_0\}$. Поэтому для множества $M = \text{epi } f$ условие (2) теоремы 1 эквивалентно условию (3) теоремы 2.

В силу равенства (39) и открытости множества $\text{dom } g$ множество $\tilde{b}(\text{epi } f)$ также является открытым. Из условий доказываемой теоремы следует, что множество $\text{epi } f$ является гладким в смысле определения 8.

Применяя теорему 1, получаем доказываемое утверждение.

§ 6. Обоснование порождаемости новых классов множеств и функций

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Через $s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda)$ обозначим вторую производную (линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$) функции $\psi \mapsto s(\psi, \lambda)$ в точке ψ . Так как функция $(\psi, \lambda) \mapsto s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda)$ равномерно непрерывна на множестве $S_1 \times [0, 1]$, то существует число $\lambda_1 \in (0, 1]$ такое, что

$$\|s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda) - s''_{\psi\psi}(\psi, 0)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{для любых } \psi \in S_1, \lambda \in [0, \lambda_1]. \quad (44)$$

Для любых $\psi \in S_1, \lambda \in [0, \lambda_1]$ определим линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$:

$$G(\psi, \lambda) = I + s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda) - s''_{\psi\psi}(\psi, 0), \quad (45)$$

где I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Через $G^{-1}(\psi, \lambda)$ обозначим линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, обратный к оператору $G(\psi, \lambda)$. Из условий теоремы следует, что функция $(\psi, \lambda) \mapsto G(\psi, \lambda)$ вместе со своими производными по ψ до второго порядка включительно равномерно непрерывна на множестве $S_1 \times [0, \lambda_1]$. Отсюда и из неравенства (44) следует, что функция $(\psi, \lambda) \mapsto G^{-1}(\psi, \lambda)$ вместе со своими производными по ψ до второго порядка включительно равномерно непрерывна на множестве $S_1 \times [0, \lambda_1]$.

Для любых $\psi \in S_1, \ell \in \mathcal{H}, \lambda \in [0, \lambda_1]$ определим вектор

$$h(\psi, \ell, \lambda) = \frac{1}{2} G^{-1}(\psi, \lambda) \ell. \quad (46)$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \text{функция } (\psi, \ell, \lambda) \mapsto h(\psi, \ell, \lambda) \text{ вместе со своими производными} \\ \text{по } \psi \text{ до второго порядка включительно равномерно непрерывна} \\ \text{на множестве } S_1 \times S_1 \times [0, \lambda_1] \end{array} \right\} \quad (47)$$

и для любых $(\psi, \ell, \lambda) \in S_1 \times \mathcal{H} \times [0, \lambda_1]$ справедливо равенство

$$\ell = 2G(\psi, \lambda) h(\psi, \ell, \lambda) = 2h(\psi, \ell, \lambda) + 2(s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda) - s''_{\psi\psi}(\psi, 0))h(\psi, \ell, \lambda). \quad (48)$$

Так как согласно п. (i) леммы 7 справедливы равенства

$$s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda)\psi = s''_{\psi\psi}(\psi, 0)\psi = 0$$

и операторы $s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda), s''_{\psi\psi}(\psi, 0)$ самосопряженные, то

$$\langle \psi, \ell \rangle = 2\langle \psi, h(\psi, \ell, \lambda) \rangle.$$

Поэтому для любых векторов $\psi \in S_1, \ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$, и для любого числа $\lambda \in [0, \lambda_1]$ справедливо равенство

$$\langle \psi, h(\psi, \ell, \lambda) \rangle = 0. \quad (49)$$

Поскольку $s(\psi, 0) = \|\psi\|$ – опорная функция единичного шара, то

$$s''_{\psi\psi}(\psi, 0)x = \frac{x}{\|\psi\|} - \frac{\langle \psi, x \rangle \psi}{\|\psi\|^3}$$

для любых векторов $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $x \in \mathcal{H}$. Отсюда и из равенства (49) следует, что для любых векторов $\psi \in S_1$, $\ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$, и для любого числа $\lambda \in [0, \lambda_1]$ справедливо равенство

$$s''_{\psi\psi}(\psi, 0) h(\psi, \ell, \lambda) = h(\psi, \ell, \lambda).$$

Поэтому согласно равенству (48) имеем:

$$\ell = 2s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda) h(\psi, \ell, \lambda) \quad (50)$$

для любого числа $\lambda \in [0, \lambda_1]$ и любых векторов $\psi \in S_1$, $\ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$.

Отсюда и из неотрицательной определенности оператора $s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda)$ следует, что

$$\sup_{h \in E^*} (\langle h, \ell \rangle - \langle h, s''_{\psi\psi}(\psi, \lambda) h \rangle)$$

достигается на векторе $h(\psi, \ell, \lambda)$.

Пусть величина $\sigma(\psi, \ell, \lambda)$ определяется равенством (1) по множеству $M(\lambda)$. Тогда согласно равенству (50) для любого числа $\lambda \in [0, \lambda_1]$ и любых векторов $\psi \in S_1$, $\ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$, имеет место равенство

$$\sigma(\psi, \ell, \lambda) = \frac{1}{2} \langle h(\psi, \ell, \lambda), \ell \rangle. \quad (51)$$

Поэтому в силу условия (47) функция $(\psi, \ell, \lambda) \mapsto \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda)$ равномерно непрерывна на множестве

$$\Omega_1 = \{(\psi, \ell, \lambda) : \psi, \ell \in \mathcal{H}, \|\psi\| = \|\ell\| = 1, \langle \psi, \ell \rangle = 0, \lambda \in [0, \lambda_1]\}.$$

Поэтому существует число $\lambda_0 \in (0, \lambda_1]$ такое, что

$$\|\sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, 0) - \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda)\| \leq \frac{1}{4} \quad (52)$$

для любых $(\psi, \ell, \lambda) \in \Omega_0$, где

$$\Omega_0 = \{(\psi, \ell, \lambda) : \psi, \ell \in \mathcal{H}, \|\psi\| = \|\ell\| = 1, \langle \psi, \ell \rangle = 0, \lambda \in [0, \lambda_0]\}.$$

Зафиксируем произвольный набор $(\psi, \ell, \lambda) \in \Omega_0$ и определим оператор $A = \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, 0) - \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda)$.

В силу п. (iv) леммы 7 функция $\sigma(\psi, \ell, \lambda)$ положительно однородна по ψ . Поэтому $\sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda)\psi = \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, 0)\psi = 0$, а значит, $A\psi = 0$. Следовательно, для любого вектора $\xi \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$\langle \xi, A\xi \rangle = \inf_{t \in \mathbb{R}} \langle \xi + t\psi, A(\xi + t\psi) \rangle.$$

Отсюда, из неравенства (52) и равенства $\|\psi\| = 1$ для любого $\xi \in \mathcal{H}$ имеем

$$\langle \xi, A\xi \rangle \leq \frac{1}{4} \inf_{t \in \mathbb{R}} \langle \xi + t\psi, \xi + t\psi \rangle = \frac{1}{4} (\|\xi\|^2 - \langle \psi, \xi \rangle^2),$$

т.е. для любого $\xi \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\langle \xi, (\sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, 0) - \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda))\xi \rangle \leq \frac{1}{4} (\|\xi\|^2 - \langle \psi, \xi \rangle^2). \quad (53)$$

Из равенств (45), (46), (51) следует, что

$$G(\psi, 0) = I, \quad h(\psi, \ell, 0) = \frac{1}{2}\ell, \quad \sigma(\psi, \ell, 0) = \frac{1}{4}\|\ell\|^2$$

для любых $\psi, \ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\|\psi\| = 1$, $\langle \psi, \ell \rangle = 0$. Отсюда и из положительной однородности функции $\sigma(\psi, \ell, 0)$ по ψ следует, что

$$\sigma(\psi, \ell, 0) = \frac{\|\psi\|}{4}\|\ell\|^2$$

для любых $\psi, \ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle \psi, \ell \rangle = 0$. Дифференцируя это равенство, получаем, что для любых векторов $\psi, \ell, \xi \in \mathcal{H}$ таких, что $\|\psi\| = \|\ell\| = 1$, $\langle \psi, \ell \rangle = \langle \xi, \ell \rangle = 0$, имеет место равенство

$$\langle \xi, \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, 0)\xi \rangle = \frac{1}{4}(\|\xi\|^2 - \langle \psi, \xi \rangle^2).$$

Отсюда и из неравенства (53) следует, что для любого числа $\lambda \in [0, \lambda_0]$ и для любых векторов $\psi, \ell, \xi \in \mathcal{H}$ таких, что $\|\psi\| = \|\ell\| = 1$, $\langle \psi, \ell \rangle = \langle \xi, \ell \rangle = 0$, справедливо неравенство $\langle \xi, \sigma''_{\psi\psi}(\psi, \ell, \lambda)\xi \rangle \geq 0$. Следовательно, это неравенство справедливо для любых $\lambda \in [0, \lambda_0]$, $\ell \in \mathcal{H}$ и $\psi, \xi \in \Psi(\ell) = \{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \ell \rangle = 0\}$. Поэтому для любых $\lambda \in [0, \lambda_0]$, $\ell \in \mathcal{H}$ функция $\psi \mapsto \sigma(\psi, \ell, \lambda)$ выпукла на множестве $\Psi(\ell)$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что множество $M(\lambda)$ является порождающим при любом $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

ЛЕММА 9. Пусть задана непрерывная четная 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть производные f' и f'' существуют и непрерывны во всех точках за исключением точек $\varphi_i + 2\pi k$, где $i \in \{1, \dots, I\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, I\}$ существуют конечные односторонние пределы $f'(\varphi_i - 0)$, $f'(\varphi_i + 0)$, причем

$$f'(\varphi_i - 0) \leq f'(\varphi_i + 0). \quad (54)$$

Пусть

$$f''(\varphi) + f(\varphi) \geq 0 \quad \text{для любого } \varphi \neq \varphi_i + 2\pi k, \quad i \in \{1, \dots, I\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (55)$$

Определим функцию $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r f(\varphi) \quad \text{для любых } \varphi \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0. \quad (56)$$

Пусть E – нормированное пространство. Определим функцию $\sigma: \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\sigma(\psi_0, \psi) = g(\psi_0, \|\psi\|) \quad \text{для любых } \psi_0 \in \mathbb{R}, \quad \psi \in E. \quad (57)$$

Тогда функция σ выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathbb{R}^2$ зафиксируем произвольную прямую ℓ , не проходящую через начало координат. Пусть прямая ℓ имеет направляющий вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и проходит через точку $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{где } u(t) = u_0 + ta, \quad v(t) = v_0 + tb.$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ определим $w(t) = g(u(t), v(t))$. Покажем, что функция $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла.

Определим непрерывные функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $r: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ из уравнений

$$r(t) \cos \varphi(t) = u(t), \quad r(t) \sin \varphi(t) = v(t) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Так как прямая ℓ не проходит через начало координат, то такие непрерывные функции φ, r существуют.

Если в точке φ существуют производные f' и f'' , то, дифференцируя уравнения (56), найдем частные производные функции $g(u, v)$ в точке $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$, где $r > 0$:

$$\begin{aligned} g'_{uu} &= \frac{1}{r}(f''(\varphi) + f(\varphi)) \sin^2 \varphi, \\ g'_u &= f(\varphi) \cos \varphi - f'(\varphi) \sin \varphi, \\ g'_v &= f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi, \\ g''_{uv} &= -\frac{1}{r}(f''(\varphi) + f(\varphi)) \cos \varphi \sin \varphi, \\ g''_{vv} &= \frac{1}{r}(f''(\varphi) + f(\varphi)) \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (58)$$

Так как

$$\begin{aligned} w'(t) &= a g'_u(u(t), v(t)) + b g'_v(u(t), v(t)), \\ w''(t) &= a^2 g''_{uu}(u(t), v(t)) + 2ab g''_{uv}(u(t), v(t)) + b^2 g''_{vv}(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

то в точках $t \in \mathbb{R}$ таких, что $\varphi = \varphi(t) \neq \varphi_i + 2\pi k$, $i \in \{1, \dots, I\}$, $k \in \mathbb{Z}$, в силу неравенства (55) имеем

$$w''(t) = \frac{1}{r}(f''(\varphi) + f(\varphi))(a \sin \varphi - b \cos \varphi)^2 \geq 0.$$

Зафиксируем точку t_i такую, что $\varphi(t_i) = \varphi_i + 2\pi k$, $i \in \{1, \dots, I\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как $w(t) = r(t)f(\varphi(t))$, то $w'(t) = r'(t)f(\varphi(t)) + r(t)f'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Следовательно, в силу непрерывности функции f и непрерывной дифференцируемости функций φ, r получаем:

$$w'(t_i + 0) - w'(t_i - 0) = r(t_i)\varphi'(t_i)(f'(\varphi(t_i + 0)) - f'(\varphi(t_i - 0))).$$

Отсюда и из неравенства (54) следует, что $w'(t_i + 0) - w'(t_i - 0) \geq 0$.

Итак, функция $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, производные w' и w'' существуют за исключением конечного числа точек t_i , причем $w''(t) \geq 0$ при $t \neq t_i$ и $w'(t_i + 0) - w'(t_i - 0) \geq 0$. Отсюда следует выпуклость функции w .

Поэтому функция $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла на любой прямой, не проходящей через начало координат. Отсюда и из непрерывности g следует выпуклость g на $\mathbb{R}^2$.

Так как функция f четная, то $g(u, -v) = g(u, v)$ для любых $u, v \in \mathbb{R}$. Отсюда и из выпуклости функции g следует, что

$$g(u, v_1) \leq g(u, v_2) \quad \text{для любых } u, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \text{ таких, что } 0 \leq v_1 \leq v_2. \quad (59)$$

Пусть заданы произвольные числа $\psi_0^1, \psi_0^2 \in \mathbb{R}$ и векторы $\psi^1, \psi^2 \in E$. В силу выпуклости и положительной однородности функции g имеем:

$$\sigma(\psi_0^1, \psi^1) + \sigma(\psi_0^2, \psi^2) = g(\psi_0^1, \|\psi^1\|) + g(\psi_0^2, \|\psi^2\|) \geq g(\psi_0^1 + \psi_0^2, \|\psi^1\| + \|\psi^2\|).$$

Отсюда, из неравенства $\|\psi^1 + \psi^2\| \leq \|\psi^1\| + \|\psi^2\|$ и неравенства (59) следует, что

$$\sigma(\psi_0^1, \psi^1) + \sigma(\psi_0^2, \psi^2) \geq g(\psi_0^1 + \psi_0^2, \|\psi^1 + \psi^2\|) = \sigma(\psi_0^1 + \psi_0^2, \psi^1 + \psi^2).$$

Поэтому в силу положительной однородности функции σ получаем выпуклость этой функции.

ЛЕММА 10. Пусть задана непрерывная четная 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим функцию $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r f(\varphi) \quad \text{для любых } \varphi \in \mathbb{R}, r \geq 0. \quad (60)$$

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Определим функцию $s: \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$s(\psi_0, \psi) = g(\psi_0, \|\psi\|) \quad \text{для любых } \psi_0 \in \mathbb{R}, \psi \in E. \quad (61)$$

Пусть заданы числа $\psi_0, \ell_0 \in \mathbb{R}$ и векторы $\psi, \ell \in \mathcal{H}$ такие, что $\psi_0 \ell_0 + \langle \psi, \ell \rangle = 0$. Пусть $\psi_0 = r \cos \varphi$, $\|\psi\| = r \sin \varphi$, $r > 0$. Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $\varphi \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, и пусть $f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi \neq 0$ и $f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi \neq 0$.

Тогда для величины $\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell)$, определяемой формулой (41), справедливо равенство

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = \frac{r}{4} \left(\frac{\ell_0^2}{(f''(\varphi) + f(\varphi)) \sin^2 \varphi} + \frac{\|\ell\|^2 \sin^2 \varphi - \ell_0^2 \cos^2 \varphi}{(f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi) \sin \varphi} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство (61), получаем

$$\left\langle \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix}, s''(\psi_0, \psi) \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix} \right\rangle = g''_{uu} h_0^2 + 2g''_{uv} \frac{h_0 \langle \psi, h \rangle}{\|\psi\|} + g''_{vv} \frac{\langle \psi, h \rangle^2}{\|\psi\|^2} + g'_v \left(\frac{\|h\|^2}{\|\psi\|} - \frac{\langle \psi, h \rangle^2}{\|\psi\|^3} \right).$$

Отсюда и из формул (58) следует, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix}, s''(\psi_0, \psi) \begin{pmatrix} h_0 \\ h \end{pmatrix} \right\rangle = A \left(h_0 - \frac{\psi_0 \langle \psi, h \rangle}{\|\psi\|^2} \right)^2 + B (\|h\|^2 \|\psi\|^2 - \langle \psi, h \rangle^2),$$

где

$$A = \frac{f''(\varphi) + f(\varphi)}{r} \sin^2 \varphi, \quad B = \frac{f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi}{\|\psi\|^3}.$$

Определим

$$\hat{h}_0 = \frac{\ell_0}{2A}, \quad \hat{h} = \frac{1}{2B \|\psi\|^2} \left(\ell - \frac{\langle \psi, \ell \rangle \psi}{\|\psi\|^2} \right).$$

Тогда $\langle \psi, \hat{h} \rangle = 0$ и

$$\ell_0 = 2A \left(\hat{h}_0 - \frac{\psi_0 \langle \psi, \hat{h} \rangle}{\|\psi\|^2} \right). \quad (62)$$

Из определения вектора $\hat{h}$ и равенства $\psi_0 \ell_0 + \langle \psi, \ell \rangle = 0$ имеем:

$$\ell = -\frac{\psi_0 \ell_0 \psi}{\|\psi\|^2} + 2B \|\psi\|^2 \hat{h}.$$

Отсюда, из равенств (62), $\langle \psi, \hat{h} \rangle = 0$ получаем равенство

$$\ell = 2A \left(\hat{h}_0 - \frac{\psi_0 \langle \psi, \hat{h} \rangle}{\|\psi\|^2} \right) \left(-\frac{\psi_0 \psi}{\|\psi\|^2} \right) + 2B (\|\psi\|^2 \hat{h} - \langle \psi, \hat{h} \rangle \psi). \quad (63)$$

Из равенств (62), (63) следует, что супремум квадратичной функции (41) достигается в точке $h_0 = \hat{h}_0$, $h = \hat{h}$ и равен

$$\sigma = \frac{\hat{h}_0 \ell_0 + \langle \hat{h}, \ell \rangle}{2} = \frac{\ell_0^2}{4A} + \frac{1}{4B\|\psi\|^2} \left(\|\ell\|^2 - \frac{\langle \psi, \ell \rangle^2}{\|\psi\|^2} \right) = \frac{\ell_0^2}{4A} + \frac{1}{4B\|\psi\|^2} \left(\|\ell\|^2 - \frac{\ell_0^2 \psi_0^2}{\|\psi\|^2} \right).$$

Отсюда вытекает доказываемое равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Определим число $\beta = \gamma/\sqrt{1-\gamma^2}$. Прямые вычисления показывают, что опорная функция множества M определяется формулой

$$s(\psi_0, \psi) = \begin{cases} \sqrt{\psi_0^2 + \|\psi\|^2}, & \psi_0 \geq -\beta\|\psi\|, \\ \sqrt{\gamma^2 \psi_0^2 + a^2 \|\psi\|^2} - (b - \gamma + \gamma \ln(2\gamma a^2))\psi_0 \\ \quad + \gamma \psi_0 \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \frac{a^2 \|\psi\|^2}{\psi_0^2}} \right), & \psi_0 \leq -\beta\|\psi\|. \end{cases}$$

Следовательно,

$$s(\psi_0, \psi) = g(\psi_0, \|\psi\|), \quad g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r f(\varphi),$$

$f(\varphi) = 1$ при $\varphi \in [-\pi + \varphi_0, \pi - \varphi_0] + 2\pi k$ и

$$f(\varphi) = \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} - d \cos \varphi + \gamma \cos \varphi \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right)$$

при $\varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] + 2\pi k$, где $\varphi_0 = \arccos \gamma$, $d = b - \gamma + \gamma \ln(2\gamma a^2) = \gamma \ln(a^2/\gamma)$. Непосредственные вычисления дают, что при $\varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] + 2\pi k$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= \frac{(a^2 - \gamma^2) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} + d \sin \varphi - \gamma \sin \varphi \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma a^2 \sin \varphi}{(-\gamma \cos \varphi + \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}) \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

$$f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi = \frac{a^2 \sin \varphi}{-\gamma \cos \varphi + \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\begin{aligned} (f''(\varphi) + f(\varphi)) \cos \varphi &= (f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi)' \\ &= -\frac{\gamma (\sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} + \gamma \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(f''(\varphi) + f(\varphi)) \sin^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi}{(f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi) \sin \varphi} = -\frac{\cos \varphi}{\gamma},$$

$$\frac{\sin \varphi}{f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi} = \frac{-\gamma \cos \varphi + \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}{a^2}.$$

Отсюда и из леммы 10 получаем, что для любых чисел $\psi_0, \ell_0 \in \mathbb{R}$ и векторов $\psi, \ell \in \mathcal{H}$ таких, что $\psi_0 \ell_0 + \langle \psi, \ell \rangle = 0$, справедливо равенство

$$\sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell) = G(\psi_0, \|\psi\|),$$

где функция $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулами

$$G(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r F(\varphi) \quad \text{для любых } \varphi \in \mathbb{R}, r \geq 0,$$

$$F(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\ell_0^2 + \|\ell\|^2), & \varphi \in [-\pi + \varphi_0, \pi - \varphi_0] + 2\pi k, \\ \frac{1}{4} \left(-\frac{\ell_0^2 \cos \varphi}{\gamma} + \frac{\|\ell\|^2}{a^2} \left(-\gamma \cos \varphi + \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \right) \right), & \varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] + 2\pi k. \end{cases}$$

Заметим, что функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, четная и 2π -периодическая,

$$F'(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \in (-\pi + \varphi_0, \pi - \varphi_0) + 2\pi k, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\ell_0^2 \sin \varphi}{\gamma} + \frac{\|\ell\|^2}{a^2} \left(\gamma \sin \varphi + \frac{(a^2 - \gamma^2) \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right), & \varphi \in (\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0) + 2\pi k, \end{cases}$$

$$F''(\varphi) + F(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\ell_0^2 + \|\ell\|^2), & \varphi \in (-\pi + \varphi_0, \pi - \varphi_0) + 2\pi k, \\ \frac{\gamma^2 \|\ell\|^2}{4(\gamma^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, & \varphi \in (\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0) + 2\pi k. \end{cases}$$

Следовательно, для любого $\varphi \neq \pi \pm \varphi_0 + 2\pi k$ справедливо неравенство $F''(\varphi) + F(\varphi) \geq 0$ и $F'(\pi - \varphi_0 + 0) - F'(\pi - \varphi_0 - 0) = (\ell_0^2 \sin \varphi_0)/(4\gamma) \geq 0$. Отсюда в силу леммы 9 следует выпуклость функции $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \sigma(\psi_0, \psi, \ell_0, \ell)$ на множестве

$$\Psi = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi \end{pmatrix} : \psi_0 \in \mathbb{R}, \psi \in \mathcal{H}, \psi_0 \ell_0 + \langle \psi, \ell \rangle = 0 \right\}$$

для любых $\ell_0 \in \mathbb{R}, \ell \in \mathcal{H}$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем, что множество M является порождающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Предположим противное: функция f – порождающая, т.е. множество

$$M = \text{epi } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} : x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1, x_0 \geq -\sqrt{1 - \|x\|^2} \right\}$$

является порождающим в пространстве $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Зафиксируем два единичных взаимно перпендикулярных вектора $p, q \in \mathcal{H}$. Рассмотрим множество $A = M \cap (M + a)$, где $a = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5}p \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Тогда

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} : \|x\| \leq 1, \|x - \frac{2}{5}p\| \leq 1, \right. \\ \left. x_0 \geq -\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_0 - \frac{9}{5} \geq -\sqrt{1 - \|x - \frac{2}{5}p\|^2} \right\}.$$

Рассмотрим точку $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5}p + \frac{3}{5}q \end{pmatrix} \in M$. Так как множество M порождающее, то существует вектор $d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$, где $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathcal{H}$, такой, что $b \in d + A \subset M$. Поскольку b – опорный вектор множества M по направлению b , то $b - d$ – опорный вектор множества A по этому направлению. Следовательно, $b - d = \begin{pmatrix} -d_0 \\ \frac{4}{5}p + \frac{3}{5}q \end{pmatrix}$, а значит, $d = \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Так как $b - d \in A$, то $-d_0 \geq \frac{9}{5} - \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{9-2\sqrt{3}}{5}$. Если $-d_0 > \frac{9-2\sqrt{3}}{5}$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $b - d - \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} \in A$. Отсюда и из включения $d + A \subset M$ следует, что $b - \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} \in M$, что противоречит определениям множества M и вектора b . Следовательно, $d_0 = -\frac{9-2\sqrt{3}}{5}$.

Так как $c = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \in A$, $d + A \subset M$, то $\begin{pmatrix} 1+d_0 \\ p \end{pmatrix} = d + c \in M$. Поэтому $1 + d_0 \geq 0$, т.е. $1 - \frac{9-2\sqrt{3}}{5} \geq 0$, что неверно.

ЛЕММА 11. Пусть функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ четная дважды непрерывно дифференцируемая и $\varphi''(t) > 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Пусть функции $t \mapsto \frac{t}{\varphi'(t)}$ и $t \mapsto \frac{1}{t^2\varphi''(t)} - \frac{1}{t\varphi'(t)}$ имеют конечные пределы в точке $t = 0$ и выпуклы на $\mathbb{R}$. Пусть φ^* – сопряженная к φ функция, множество $\text{dom } \varphi^*$ открыто в $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Тогда функция $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определяемая формулой $f(x) = \varphi^*(\|x\|)$, где $x \in \mathcal{H}$, является порождающей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – сопряженная к f функция. Тогда для любого вектора $\psi \in \mathcal{H}$ имеем

$$g(\psi) = \sup_{x \in \mathcal{H}} (\langle \psi, x \rangle - \varphi^*(\|x\|)) = \sup_{t \geq 0} (\|\psi\|t - \varphi^*(t)).$$

Так как функция φ^* четная, то $g(\psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (\|\psi\|t - \varphi^*(t)) = \varphi(\|\psi\|)$. Следовательно, для любых $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $h \in \mathcal{H}$ имеем

$$g'(\psi) = \frac{\varphi'(\|\psi\|)}{\|\psi\|} \psi, \quad g''(\psi)h = \frac{\varphi'(\|\psi\|)}{\|\psi\|} h + \frac{(\|\psi\|\varphi''(\|\psi\|) - \varphi'(\|\psi\|)) \langle \psi, h \rangle}{\|\psi\|^3} \psi.$$

Так как функция φ дважды непрерывно дифференцируема и $\varphi'(0) = 0$ в силу четности φ , то функция g дважды непрерывно дифференцируема. В частности, $\lim_{\psi \rightarrow 0} g''(\psi)h = g''(0)h = \varphi''(0)h$.

Из неравенства $\varphi''(t) > 0$ следует, что для любого $\psi \in \mathcal{H}$ оператор $g''(\psi)$ обратим и для любых векторов $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $\ell \in \mathcal{H}$ справедливы равенства

$$(g''(\psi))^{-1}\ell = \frac{\|\psi\|}{\varphi'(\|\psi\|)}\ell + \left(\frac{1}{\|\psi\|^2\varphi''(\|\psi\|)} - \frac{1}{\|\psi\|\varphi'(\|\psi\|)} \right) \langle \psi, \ell \rangle \psi,$$

$$\langle \ell, (g''(\psi))^{-1}\ell \rangle = \alpha(\|\psi\|)\|\ell\|^2 + \beta(\|\psi\|)\langle \psi, \ell \rangle^2,$$

где

$$\alpha(t) = \frac{t}{\varphi'(t)}, \quad \beta(t) = \frac{1}{t^2 \varphi''(t)} - \frac{1}{t \varphi'(t)} \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Так как функции $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклы и четные, то функции $\psi \rightarrow \alpha(\|\psi\|)$, $\psi \rightarrow \beta(\|\psi\|)$ выпуклы на $\mathcal{H}$. Следовательно, для любого числа $\ell_0 \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\ell \in E$ функция $\psi \mapsto \langle \ell, (g''(\psi))^{-1} \ell \rangle$ выпукла на множестве $\{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \ell \rangle = \ell_0\}$. Отсюда в силу теоремы 2 получаем доказываемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Определим функцию $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi(t) = \sqrt{1+t^2} - \ln(1 + \sqrt{1+t^2}) - 1 + \ln 2.$$

Заметим, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{t}{1 + \sqrt{1+t^2}}, \quad \varphi''(t) = \frac{t}{(1 + \sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}}, \\ \frac{t}{\varphi'(t)} &= 1 + \sqrt{1+t^2}, \quad \frac{1}{t^2 \varphi''(t)} - \frac{1}{t \varphi'(t)} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, функции

$$t \mapsto \frac{t}{\varphi'(t)} \quad \text{и} \quad t \mapsto \frac{1}{t^2 \varphi''(t)} - \frac{1}{t \varphi'(t)}$$

имеют конечные пределы в точке $t = 0$ и выпуклы на $\mathbb{R}$. Отсюда и из равенства $f(x) = \varphi^*(\|x\|)$ в силу леммы 11 получаем, что функция f является порождающей.

Список литературы

- [1] Е. С. Половинкин, “О новых классах порождающих множеств”, *Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики*, Междувед. сб., МФТИ, М., 1998, 81–93.
- [2] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
- [3] М. В. Балашов, Е. С. Половинкин, “ M -сильно выпуклые множества и их порождающие подмножества”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 27–64; англ. пер.: M. V. Balashov, E. S. Polovinkin, “ M -strongly convex subsets and their generating sets”, *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 25–60; 81–93.
- [4] Р. Н. Карасев, “О характеристизации порождающих множеств”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **8**:2 (2001), 3–9.
- [5] Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, БХВ, СПб., 2004; англ. пер.: B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov, *Selected problems in real analysis*, Transl. Math. Monogr., **107**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [6] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

Г. Е. Иванов (G. E. Ivanov)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: G.E.Ivanov@mail.ru, givanov@mail.mipt.ru

Поступила в редакцию

16.12.2005