Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 73–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:48:55

УДК 517.983.33+517.984.51

Ю. М. Дюкарев

О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби

В статье изучаются симметрические блочные матрицы Якоби J и порожденные ими симметрические операторы L . Пусть m обозначает размер блоков в матрице J . Как известно, дефектные числа m_+ и m_- оператора L удовлетворяют неравенствам $0 \leq m_+, m_- \leq m$ и максимального значения m они достигают одновременно. Пусть m_+ и m_- обозначают произвольные целые числа, которые удовлетворяют неравенствам $0 \leq m_+, m_- \leq m - 1$. В статье доказано, что существует такая симметрическая матрица Якоби J , что m_+ и m_- являются дефектными числами соответствующего симметрического оператора L .

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение и формулировка основного результата

Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbb{C}^{m \times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц m -го порядка, а через $\mathbb{C}^m$ обозначим m -мерные столбцы комплексных чисел со стандартным определением операций линейного пространства над полем $\mathbb{C}$. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$ зададим формулой $(f, g) = f^* g$. Матрица $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ называется *эрмитовой*, если $(f, Ag) = (Af, g) \quad \forall f, g \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_H^{m \times m}$ обозначим множество эрмитовых матриц m -го порядка. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ называется *неотрицательной*, если $(f, Af) \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ обозначим множество эрмитовых неотрицательных матриц m -го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ называется *строго положительной*, если $(f, Af) > 0$ для всех ненулевых векторов $f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ обозначим множество эрмитовых строго положительных матриц m -го порядка. Единичную и нулевую матрицы обозначим через I и O соответственно. Тот факт, что $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ ($A \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$), будем записывать в виде $A \geq O$ (соответственно $A > O$). И пусть, далее, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_{\pm} = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Рассмотрим бесконечную блочную матрицу Якоби

$$J_m = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь матрицы $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ являются эрмитовыми матрицами, а матрицы $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}$ являются невырожденными матрицами.

Символом $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ обозначим линейное пространство бесконечных вектор-столбцов

$$u = \text{col}[u_0, u_1, u_2, \dots], \quad u_k \in \mathbb{C}^m, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* u_k < +\infty.$$

Пространство $\ell^2(\mathbb{C}^m)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^* v_k \quad \forall u, v \in \ell^2(\mathbb{C}^m).$$

Символом $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ обозначим незамкнутое подпространство в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$, состоящее из финитных векторов, т.е. из векторов с конечным числом ненулевых компонент. Подпространство в $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ всюду плотно в $\ell^2(\mathbb{C}^m)$.

С помощью матрицы $\mathbf{J}_m$ определим операцию $l: \ell_0^2(\mathbb{C}^m) \rightarrow \ell_0^2(\mathbb{C}^m)$:

$$lu = \mathbf{J}_m u \quad \forall u \in \ell_0^2(\mathbb{C}^m).$$

На финитных векторах эта операция определена корректно и на $\ell_0^2(\mathbb{C}^m)$ задает незамкнутый симметрический оператор. Его замыкание обозначим символом $\mathbf{L}_m$. Будем говорить, что оператор $\mathbf{L}_m$ ассоциирован с матрицей Якоби $\mathbf{J}_m$.

Приведем хорошо известные свойства оператора $\mathbf{L}_m$ (см. [1]–[4]). Оператор $\mathbf{L}_m$, вообще говоря, не самосопряжен. Числа

$$m_+ = \dim \ker(\mathbf{L}_m^* - zI), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = \dim \ker(\mathbf{L}_m^* - zI), \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (2)$$

не зависят от выбора точки z из верхней и нижней полуплоскости соответственно и называются *дефектными числами* оператора $\mathbf{L}_m$. Дефектные числа m_+ и m_- удовлетворяют условиям

$$0 \leq m_+ \leq m, \quad 0 \leq m_- \leq m.$$

В этих неравенствах максимального значения дефектные числа достигают одновременно: $m_+ = m \Leftrightarrow m_- = m$. В статье [5] получены некоторые достаточные условия на элементы матрицы Якоби (1), при выполнении которых дефектные числа m_+ и m_- максимальны.

Если дефектные числа m_+ и m_- не максимальны, то оставался открытым вопрос о возможных значениях дефектных чисел. Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$, и пусть целые числа m_+ и m_- удовлетворяют условиям

$$0 \leq m_+ \leq m - 1, \quad 0 \leq m_- \leq m - 1.$$

Тогда существует такая матрица Якоби $\mathbf{J}_m$, что дефектные числа ассоциированного оператора $\mathbf{L}_m$ равны m_+ и m_- .

Во время своего визита в октябре 2004 года в Копенгагенский университет автор сообщил Х. Бергу содержание теоремы 1. В ответ Х. Берг сообщил автору, что он и А. Дюран знали доказательство теоремы 1 в простом частном случае $m_+ = m_-$, но этот результат они не опубликовали.

В теории интерполяционных задач аналогом теоремы 1 является проблема возможных значений рангов радиусов предельных матричных кругов Вейля. Для задачи Неванлинны–Пи́ка возможные значения рангов радиусов предельных кругов Вейля впервые были описаны в [6]. В [7] были описаны ранги радиусов предельных кругов Вейля в задаче Шура. Однако методы, примененные в [6] и [7] для исследования рангов радиусов предельных матричных кругов Вейля, не могут быть применены для исследования вопроса о возможных значениях дефектных чисел m_+ и m_- . Для решения этой задачи потребовалось существенно изменить методы исследования (см., в частности, доказательство теорем 2 и 3 с использованием леммы 10 и окончательный вид мультипликативных формул (87), (88), (91), (92)).

Отметим связь с еще одним направлением исследований. В [8], [9] и в монографии [10], а также в [11] рассматривались квадратично интегрируемые решения симметрических систем дифференциальных уравнений. Теорему 1 можно рассматривать как конечноразностный аналог соответствующих результатов для систем дифференциальных уравнений.

§ 2. Матричные многочлены 1 и 2 рода

С матрицей Якоби (1) мы свяжем две последовательности матричных многочленов. Матричные многочлены 1 рода задаются рекуррентной формулой

$$zP_k(z) = B_{k-1}^*P_{k-1}(z) + A_kP_k(z) + B_kP_{k+1}(z), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

и начальными условиями

$$P_0(z) \equiv S, \quad P_1(z) = B_0^{-1}(zI - A_0)S. \quad (4)$$

Здесь $S > O$ – некоторая фиксированная матрица.

Матричные многочлены 2 рода задаются рекуррентной формулой

$$zQ_k(z) = B_{k-1}^*Q_{k-1}(z) + A_kQ_k(z) + B_kQ_{k+1}(z), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

и начальными условиями

$$Q_0(z) \equiv O, \quad Q_1(z) = B_0^{-1}S^{-1}. \quad (6)$$

Матрицы $\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z)$ монотонно возрастают с ростом n . Они строго положительны, так как

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z) \geq P_0^*(z)P_0(z) = S^*S > 0. \quad (7)$$

Обратные матрицы $(\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z))^{-1}$ строго положительны и монотонно убывают с ростом n . По матричной версии теоремы Вейерштрасса при любом $z \in \mathbb{C}$ существует предел

$$H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z) \right)^{-1}. \quad (8)$$

Запись $P_k^*(z)$ всегда будет сокращением записи $(P_k(z))^*$.

Дефектные числа m_+ и m_- были определены формулами (2). Можно доказать (см. [1], [3]), что имеют место формулы

$$m_+ = \text{rank } H(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}_+, \quad m_- = \text{rank } H(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}_-. \quad (9)$$

ЛЕММА 1. Пусть дана блочная матрица Якоби $\mathbf{J}_m$, и пусть матричные многочлены P_n и Q_n определены с помощью формул (3)–(6). Тогда при всех $z, \lambda \in \mathbb{C}$ и при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матричные многочлены P_n и Q_n удовлетворяют следующим тождествам Кристоффеля–Дарбу:

$$(z - \bar{\lambda}) \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z})P_k(\bar{\lambda}) = P_{n+1}^*(\bar{z})B_n^*P_n(\bar{\lambda}) - P_n^*(\bar{z})B_nP_{n+1}(\bar{\lambda}), \quad (10)$$

$$(z - \bar{\lambda}) \sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar{z})Q_k(\bar{\lambda}) = Q_{n+1}^*(\bar{z})B_n^*Q_n(\bar{\lambda}) - Q_n^*(\bar{z})B_nQ_{n+1}(\bar{\lambda}), \quad (11)$$

$$-I + (z - \bar{\lambda}) \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z})Q_k(\bar{\lambda}) = P_{n+1}^*(\bar{z})B_n^*Q_n(\bar{\lambda}) - P_n^*(\bar{z})B_nQ_{n+1}(\bar{\lambda}), \quad (12)$$

$$I + (z - \bar{\lambda}) \sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar{z})P_k(\bar{\lambda}) = Q_{n+1}^*(\bar{z})B_n^*P_n(\bar{\lambda}) - Q_n^*(\bar{z})B_nP_{n+1}(\bar{\lambda}). \quad (13)$$

Доказательство этой леммы имеется в [3].

§ 3. Резольвентные матрицы

С матрицей Якоби (1) через посредство матричных многочленов 1 и 2 рода $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ свяжем последовательность резольвентных матриц

$$U_n(z) = \begin{bmatrix} P_{n+1}^*(\bar{z})B_n^* & P_n^*(\bar{z}) \\ -Q_{n+1}^*(\bar{z})B_n^* & -Q_n^*(\bar{z}) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (14)$$

Введем матрицы

$$J = \begin{bmatrix} O & -iI \\ iI & O \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}, \quad j = \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$J^2 = I, \quad J^* = J, \quad j^2 = I, \quad j^* = j.$$

Матрицы J и j связаны соотношениями

$$\mathcal{V}J\mathcal{V}^* = j, \quad \mathcal{V}^*j\mathcal{V} = J. \quad (16)$$

Здесь унитарная матрица $\mathcal{V}$ имеет вид

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} iI & I \\ -iI & I \end{bmatrix}. \quad (17)$$

ЛЕММА 2. Для всех $z, \lambda \in \mathbb{C}$ и для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеет место формула

$$U_n(z)JU_n^*(\lambda) - J = i(\bar{\lambda} - z) \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z})P_k(\bar{\lambda}) & -\sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z})Q_k(\bar{\lambda}) \\ -\sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar{z})P_k(\bar{\lambda}) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar{z})Q_k(\bar{\lambda}) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Доказательство этой леммы следует из (14) и тождеств Кристоффеля–Дарбу (10)–(13).

Подставим в (18) $\bar{z}$ вместо λ . Получим $U_n(z)JU_n^*(\bar{z}) - J = O$. Отсюда следует обратимость матрицы $U_n(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и что

$$U_n^{-1}(z) = JU_n^*(\bar{z})J = \begin{bmatrix} -Q_n(z) & -P_n(z) \\ B_n Q_{n+1}(z) & B_n P_{n+1}(z) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Подставим в (18) $\bar{z}$ вместо z и $\bar{\lambda}$ вместо λ . Умножив получившееся равенство слева и справа на J , получим

$$JU_n(\bar{z})JJU_n^*(\bar{z})J - J = i(z - \bar{z})J \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z) & -\sum_{k=0}^n P_k^*(z)Q_k(z) \\ -\sum_{k=0}^n Q_k^*(z)P_k(z) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)Q_k(z) \end{bmatrix} J.$$

Отсюда и из (19) имеем

$$U_n^{-1*}(z)JU_n^{-1}(z) - J = i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)Q_k(z) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)P_k(z) \\ \sum_{k=0}^n P_k^*(z)Q_k(z) & \sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

ЛЕММА 3. Пусть дана бесконечная матрица Якоби (1) и матрица-функция U_n^{-1} задана формулой (19). Рассмотрим элементарные множители Бляшке–Потапова

$$b_k^{-1}(z) = \begin{bmatrix} O & -B_{k-1}^{-1} \\ B_{k-1}^* & (zI - A_k)B_{k-1}^{-1} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (21)$$

Здесь $B_{-1} = S > O$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место равенства

$$U_n^{-1}(z) = b_n^{-1}(z)b_{n-1}^{-1}(z) \cdots b_1^{-1}(z)b_0^{-1}(z). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $U_0^{-1}(z)$ формула (22) очевидна. Пусть формула (22) выполнена для $U_{n-1}^{-1}(z)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
 & b_n^{-1}(z)b_{n-1}^{-1}(z) \cdots b_1^{-1}(z)b_0^{-1}(z) \\
 &= \begin{bmatrix} O & -B_{n-1}^{-1} \\ B_{n-1}^* & (zI - A_n)B_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} U_{n-1}^{-1}(z) \\
 &= \begin{bmatrix} O & -B_{n-1}^{-1} \\ B_{n-1}^* & (zI - A_n)B_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_{n-1}(z) & -P_{n-1}(z) \\ B_{n-1}Q_n(z) & B_{n-1}P_n(z) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -Q_n(z) & -P_n(z) \\ -B_{n-1}^*Q_{n-1}(z) + (zI - A_n)Q_n(z) & -B_{n-1}^*P_{n-1}(z) + (zI - A_n)P_n(z) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -Q_n(z) & -P_n(z) \\ B_nQ_{n+1}(z) & B_nP_n(z) \end{bmatrix} = U_n^{-1}(z).
 \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе и последнее равенства следуют из (19), а четвертое равенство следует из (3) и (5).

§ 4. Матрицы Вейля

Пусть дана матрица Якоби (1), и пусть матрица $U_n^{-1}(z)$ определена формулой (19). Матрицей Вейля называется

$$W_n(z) = U_n^{-1*}(z)JU_n^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (23)$$

Из формулы (20) имеем

$$W_n(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{12}^*(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Здесь

$$a_{11}(z) = i(z - \bar{z}) \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)Q_k(z), \quad (25)$$

$$a_{12}(z) = -iI + i(z - \bar{z}) \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)P_k(z), \quad (26)$$

$$a_{22}(z) = i(z - \bar{z}) \sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z). \quad (27)$$

Из (23) и (19) следует, что матрица Вейля $W(z)$ невырождена при всех $z \in \mathbb{C}$. Покажем, что обратная может быть найдена по формуле

$$W_n^{-1}(z) = JW_n(\bar{z})J = \begin{bmatrix} a_{22}(\bar{z}) & -a_{12}^*(\bar{z}) \\ -a_{12}(\bar{z}) & a_{11}(\bar{z}) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Действительно, воспользовавшись (23), равенствами $J^2 = I$, $J^{-1} = J$ и (19), получим

$$\begin{aligned} JW_n(\bar{z})J &= JU_n^{-1*}(\bar{z})JU_n^{-1}(\bar{z})J = \{JU_n(\bar{z})JJJU_n^*(\bar{z})J\}^{-1} \\ &= \{U_n^{-1*}(z)JU_n^{-1}(z)\}^{-1} = W_n^{-1}(z). \end{aligned}$$

Первое равенство в (28) доказано. Второе следует из (24) и (15).

ЛЕММА 4. При всех $z \in \mathbb{C}_+$ матрица Вейля допускает представление

$$\begin{aligned} W_n(z) &= \begin{bmatrix} I & a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z) \\ O & I \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \left\{i(\bar{z} - z) \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z})P_k(\bar{z})\right\}^{-1} & O \\ O & -\left\{i(\bar{z} - z) \sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z)\right\} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} I & O \\ a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (27) и (7) следует, что в (24) матрица $a_{22}(z)$ невырождена при всех $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому

$$\begin{aligned} W_n(z) &= \begin{bmatrix} I & a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z) \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) & O \\ O & a_{22}(z) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} I & O \\ a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (24) и (28) имеем

$$\begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{12}^*(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22}(\bar{z}) & -a_{12}^*(\bar{z}) \\ -a_{12}(\bar{z}) & a_{11}(\bar{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$a_{11}(z)a_{22}(\bar{z}) - a_{12}(z)a_{12}(\bar{z}) = I, \quad a_{12}^*(z)a_{22}(\bar{z}) - a_{22}(z)a_{12}(\bar{z}) = O.$$

Из этих двух равенств последовательно получим

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{12}(\bar{z})a_{22}^{-1}(\bar{z}) = a_{22}^{-1}(\bar{z}), \quad a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z)a_{22}(\bar{z}) = a_{12}(\bar{z}).$$

Подставим выражение для $a_{12}(\bar{z})$ из второго равенства в первое. Получим

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z)a_{22}(\bar{z})a_{22}^{-1}(\bar{z}) = a_{22}^{-1}(\bar{z}).$$

Окончательно имеем:

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) = a_{22}^{-1}(\bar{z}).$$

Теперь (30) можно записать в виде

$$W_n(z) = \begin{bmatrix} I & a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z) \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22}^{-1}(\bar{z}) & O \\ O & a_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) & I \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из (27) следует (29).

§ 5. Основные леммы

Пусть заданы эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ и невырожденная матрица $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Рассмотрим элементарный множитель Бляшке–Потапова $b(z)$ и обратный множитель $b^{-1}(z)$ следующего вида:

$$b(z) = \begin{bmatrix} B^{*-1}(zI - A) & B^{*-1} \\ -B & O \end{bmatrix}, \quad b^{-1}(z) = \begin{bmatrix} O & -B^{-1} \\ B^* & (zI - A)B^{-1} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Очевидно, что $b(z)b^{-1}(z) = I$. Рассмотрим матрицу Вейля

$$W(z) = b^{-1*}(z)Jb^{-1}(z). \quad (32)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$W(z) = \begin{bmatrix} O & -iI \\ iI & i(z - \bar{z})B^{*-1}B^{-1} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

ЛЕММА 5. При всех $z \in \mathbb{C}_+$ имеет место следующее представление для матрицы Вейля (32):

$$W(z) = \begin{bmatrix} I & -C^*(z) \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z) & O \\ O & R^{-1}(z) \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} R(z) & O \\ O & R^{-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C(z) & I \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Здесь

$$C(z) = \frac{1}{\bar{z} - z}BB^*, \quad R(z) = \left(\frac{1}{i(\bar{z} - z)}BB^* \right)^{1/2}. \quad (35)$$

Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

ЛЕММА 6. Пусть матрица-функция $b^{-1}(z)$ определена формулой (31), и пусть

$$\tilde{b}^{-1}(z) = I + izJ \begin{bmatrix} O \\ B^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B^{-1}] = \begin{bmatrix} I & zB^{*-1}B^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Тогда

$$\tilde{b}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} B^{*-1} & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & I \\ -I & O \end{bmatrix} b^{-1}(z), \quad (37)$$

$$b^{-1}(z) = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^* & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}^{-1}(z), \quad (38)$$

$$b^{-1*}(z)Jb^{-1}(z) = \tilde{b}^{-1*}(z)J\tilde{b}^{-1}(z). \quad (39)$$

Доказательство проводится прямыми вычислениями.

ЛЕММА 7. Пусть матрица-функция $\tilde{b}^{-1}(z)$ определена формулой (36), а матрицы j и $\mathcal{V}$ — формулами (15) и (17). И пусть, далее,

$$\hat{b}^{-1}(z) = I + \frac{iz}{2}j \begin{bmatrix} B^{*-1} \\ B^{*-1} \end{bmatrix} [B^{-1} \ B^{-1}]. \quad (40)$$

Тогда

$$\hat{b}^{-1}(z) = \mathcal{V}\tilde{b}^{-1}(z)\mathcal{V}^*. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\tilde{b}^{-1}(z)\mathcal{V}^* &= \mathcal{V} \left\{ I + izJ \begin{bmatrix} O \\ B^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B^{-1}] \right\} \mathcal{V}^* \\ &= I + iz\mathcal{V}J\mathcal{V}^*\mathcal{V} \begin{bmatrix} O \\ B^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B^{-1}]\mathcal{V}^* \\ &= I + \frac{iz}{2}j \begin{bmatrix} B^{*-1} \\ B^{*-1} \end{bmatrix} [B^{-1} \ B^{-1}] = \hat{b}^{-1}(z). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались (16).

Матрицей Вейля, ассоциированной с $\hat{b}^{-1}(z)$, называется

$$\mathcal{W}(z) = \hat{b}^{-1*}(z)j\hat{b}^{-1}(z). \quad (42)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z) &= \mathcal{V}\mathcal{V}^*\hat{b}^{-1*}(z)\mathcal{V}J\mathcal{V}^*\hat{b}^{-1}(z)\mathcal{V}\mathcal{V}^* = \mathcal{V}\tilde{b}^{-1*}(z)J\tilde{b}^{-1}(z)\mathcal{V}^* \\ &= \mathcal{V} \left\{ J + \begin{bmatrix} O & O \\ O & i(z - \bar{z})B^{*-1}B^{-1} \end{bmatrix} \right\} \mathcal{V}^* \\ &= j - \frac{z - \bar{z}}{2i} \begin{bmatrix} B^{*-1}B^{-1} & B^{*-1}B^{-1} \\ B^{*-1}B^{-1} & B^{*-1}B^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{W}(z) = j - \frac{z - \bar{z}}{2i} \begin{bmatrix} B^{*-1}B^{-1} & B^{*-1}B^{-1} \\ B^{*-1}B^{-1} & B^{*-1}B^{-1} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

ЛЕММА 8. Матрица Вейля (42) допускает представление

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z) &= \begin{bmatrix} I & -C^*(z) \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z) & O \\ O & R^{-1}(z) \end{bmatrix} j \\ &\quad \times \begin{bmatrix} R(z) & O \\ O & R^{-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C(z) & I \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{C}_+. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$C(z) = -\left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}}BB^*\right)^{-1}, \quad R(z) = \left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i}B^{*-1}B^{-1}\right)^{-1/2}, \quad (45)$$

причем матрица $R(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$O < R(z) < I. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C}_+$. Тогда матрица $I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1}$ обратима. Легко видеть, что имеют место формулы

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \left(-I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} = \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right)^{-1}, \\
 & \left(I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \\
 & - \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \left(-I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \\
 & = \left(I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) - \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right)^{-1} \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \\
 & = \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right)^{-1} \\
 & \quad \times \left\{ \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right) \left(I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) - \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \right\} \\
 & = \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right)^{-1} \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* = \left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Из этих формул и из (43) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(z) &= \begin{bmatrix} I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} & -\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \\ -\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} & -I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I & \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \left(-I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \\
 & \quad \times \begin{bmatrix} \left(I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) - \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) & O \\ \times \left(-I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) & -I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \\ O & \end{bmatrix} \\
 & \quad \times \begin{bmatrix} I & O \\ \left(-I - \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} \left(-\frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) & I \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I & \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} B B^* \right)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \\
 & \quad \times \begin{bmatrix} \left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right)^{-1} & O \\ O & -\left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1} \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & O \\ \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} BB^*\right)^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z) &= \begin{bmatrix} I & \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} BB^*\right)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1}\right)^{-1} & O \\ O & -\left(I + \frac{z - \bar{z}}{2i} B^{*-1} B^{-1}\right) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} I & O \\ \left(I + \frac{2i}{z - \bar{z}} BB^*\right)^{-1} & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (45) вытекает (44). Неравенство (46) следует из (45).

Матрица $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ называется j -унитарной, если $\mathcal{U}^* j \mathcal{U} = j$. Легко видеть, что произведение двух j -унитарных матриц является j -унитарной матрицей. Отметим (см. [12]), что

$$\mathcal{U}^* j \mathcal{U} = j \Leftrightarrow \mathcal{U} j \mathcal{U}^* = j \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1*} j \mathcal{U}^{-1} = j \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1} j \mathcal{U}^{-1*} = j. \quad (47)$$

В (47) можно матрицу j заменить на матрицу J .

ЛЕММА 9. Пусть даны две невырожденные матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ такие, что $A^* J A = B^* j B$. Тогда матрица $\mathcal{U} = \mathcal{V} A B^{-1}$ является j -унитарной и

$$A = \mathcal{V}^* \mathcal{U} B. \quad (48)$$

Здесь матрица $\mathcal{V}$ определена формулой (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию и формуле (16) имеем $A^* \mathcal{V}^* j \mathcal{V} A = B^* j B$. Отсюда $B^{*-1} A^* \mathcal{V}^* j \mathcal{V} A B^{-1} = j$. Из этого равенства следует, что матрица $\mathcal{U} = \mathcal{V} A B^{-1}$ является j -унитарной. Из определения матрицы $\mathcal{U}$ и унитарности матрицы $\mathcal{V}$ вытекает равенство (48).

ЛЕММА 10. Пусть дана J -унитарная матрица

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}, \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad (49)$$

такая, что матрица a_{21} невырождена. Тогда существуют невырожденная матрица $T \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и эрмитовы матрицы $N \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$, $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ такие, что матрица $\mathcal{M}$ допускает единственное представление в виде произведения трех J -унитарных матриц

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} T^{*-1} & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A \end{bmatrix}. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицы

$$T = a_{21}, \quad A = -a_{21}^{-1}a_{22}, \quad N = a_{21}^*a_{11}.$$

По условию матрица $T = a_{21}$ невырождена. Отсюда и из (49) имеем

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} T^{*-1} & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix}, \quad X = a_{21}^*a_{12} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (51)$$

Матрица $\mathcal{M}$ и первый сомножитель в правой части (51) являются J -унитарными матрицами. Но тогда и второй сомножитель в правой части (51) является J -унитарной матрицей. Отсюда и из (47) имеем

$$\begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix}^* = J, \quad \begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix} = J,$$

или

$$\begin{bmatrix} -NX^* + XN^* & NA^* + X \\ -X^* - AN^* & A^* - A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & O \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N^* - N & N^*A + X \\ -X^* - A^*N & X^*A - A^*X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & O \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает

$$N = N^*, \quad A = A^*, \quad X = -I - NA.$$

Из этих формул и из (51) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} T^{*-1} & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & X \\ I & -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{*-1} & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & -I - NA \\ I & -A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{*-1} & O \\ O & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано представление (50). Ясно, что все сомножители в правой части (50) являются J -унитарными матрицами.

Докажем единственность представления (50). Действительно, пусть наряду с (50) существует еще одно представление $\mathcal{M}$ вида (50) с матрицами T_1 , N_1 и A_1 :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} T_1^{*-1} & O \\ O & T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_1 \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} T^{*-1}N & T^{*-1}(-I - NA) \\ T & -TA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{*-1}N_1 & T_1^{*-1}(-I - N_1A_1) \\ T_1 & -T_1A_1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из невырожденности T последовательно получаем $T = T_1$, $N = N_1$, $A = A_1$.

§ 6. Мультипликативные формулы

В дальнейшем будем рассматривать значения множителей Бляшке–Потапова, матриц Вейля и других функций в фиксированной точке $z_0 \in \mathbb{C}_+$. Для упрощения записей зависимость от z_0 часто будем опускать.

Мы будем рассматривать матричные произведения. Стрелка над матричным произведением указывает направление возрастания индексов сомножителей. Если в матричном произведении верхний предел окажется меньше нижнего, то такое произведение считается равным единичной матрице.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$, зафиксирована некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$ и даны последовательность унитарных $m \times m$ матриц

$$v_0 = I, \quad v_1, \dots, v_n, \dots, \quad \det(I - iv_1) \neq 0, \quad \det(I - v_k) \neq 0, \quad k \geq 2, \quad (52)$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\widehat{B}_{-1} > O, \quad \widehat{B}_0, \widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (53)$$

И пусть, далее,

$$R_0 = \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \widehat{B}_{-1} \widehat{B}_{-1}^* \right)^{1/2}, \quad C_0 = \frac{1}{\bar{z}_0 - z_0} \widehat{B}_{-1} \widehat{B}_{-1}^*, \quad (54)$$

$$R_k = \left(I + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} \widehat{B}_{k-1}^* \widehat{B}_{k-1} \right)^{-1/2}, \quad C_k = - \left(I + \frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \widehat{B}_{k-1} \widehat{B}_{k-1}^* \right)^{-1}, \quad (55)$$

$k \in \mathbb{N}$.

1) Существует последовательность J -унитарных матриц

$$\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n, \dots \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}, \quad (56)$$

каждая из которых удовлетворяет условиям леммы 10 и, следовательно, допускает представление

$$\mathcal{M}_n = \begin{bmatrix} T_n^{*-1} & O \\ O & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_n \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (57)$$

с невырожденной матрицей T_n и эрмитовыми матрицами N_n, A_n .

2) Пусть последовательность

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathbb{C}_H^{m \times m} \quad (58)$$

образована эрмитовыми матрицами из (57), а последовательность невырожденных матриц B_n образована по матрицам T_n из (57) и по матрицам $\widehat{B}_n$ из (53) с помощью формул

$$B_{-1} = \widehat{B}_{-1} > O, \quad B_0 = T_0^{-1} \widehat{B}_0, \quad \dots, \quad B_n = T_n^{-1} \widehat{B}_n, \quad \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (59)$$

И пусть матрицы b_k^{-1} , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, построены по матрицам (58)–(59) с помощью формул (21). Тогда при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\}^* j \\ & \quad \times \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \\ & = \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} b_k^{-1} \right\}^* J \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} b_k^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

3) Матрицы $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, из (56) могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{n+1} \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \\ & \quad \times \left\{ \prod_{k=0}^{\overrightarrow{n-1}} b_k \right\} \tilde{b}_n \begin{bmatrix} B_{n-1}^* & O \\ O & B_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь

$$\tilde{b}_n = \begin{bmatrix} I & -z_0 B_{n-1}^{*-1} B_{n-1}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}. \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n .

Шаг 1. Докажем теорему 2 при $n = 0$. Пусть $B_{-1} = \hat{B}_{-1} > O$. По матрице B_{-1} построим множитель Бляшке–Потапова

$$\tilde{b}_0^{-1} = I + iz_0 J \begin{bmatrix} O \\ B_{-1}^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & z_0 B_{-1}^{*-1} B_{-1}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Из (39) и (32) следует, что в левой части (34) можно заменить $W(z)$ на $\tilde{b}^{-1*}(z) J \tilde{b}^{-1}(z)$. Теперь из (34) и (35) имеем

$$\begin{bmatrix} I & -C_0^* \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0^{-1} \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_0 & I \end{bmatrix} = \tilde{b}_0^{-1*} J \tilde{b}_0^{-1}. \quad (64)$$

Причем R_0 и C_0 определяются формулами (54).

Следует особо отметить, что мы определили множитель Бляшке–Потапова $\tilde{b}_0^{-1}$, но пока не определили b_0^{-1} (см. (63) и (38)),

$$b_0^{-1} = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{-1}^* & O \\ O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_0^{-1}.$$

Для определения множителя b_0^{-1} нужна эрмитова матрица A_0 , к определению которой мы и приступаем.

Легко видеть, что

$$\tilde{b}_0^{-1*} J \tilde{b}_0^{-1} = \tilde{b}_0^{-1*} \begin{bmatrix} B_{-1}^{-1} & O \\ O & B_{-1}^{-1*} \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} B_{-1}^{*-1} & O \\ O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_0^{-1}. \quad (65)$$

Из (64), (65) и леммы 9 следует, что существует j -унитарная матрица $\mathcal{U}_0$ такая, что

$$\begin{bmatrix} B_{-1}^{*-1} & O \\ O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_0^{-1} = \mathcal{V}^* \mathcal{U}_0 \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_0 & I \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Отсюда и из унитарности матрицы $\mathcal{V}$ имеем

$$\mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{V} = \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_0 & I \end{bmatrix} \tilde{b}_0 \begin{bmatrix} B_{-1}^{-1*} & O \\ O & B_{-1} \end{bmatrix}.$$

Матрицу $\mathcal{M}_0$ определим равенством $(a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, a_{21}^{(0)}, a_{22}^{(0)}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_1 \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{V}. \quad (67)$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & O \\ O & R_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_0 & I \end{bmatrix} \tilde{b}_0 \begin{bmatrix} B_{-1}^{-1*} & O \\ O & B_{-1} \end{bmatrix}. \quad (68)$$

И далее, с учетом (62) и (17)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \begin{bmatrix} -iR_0 B_{-1}^{-1*} - iv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1*} \\ R_0 B_{-1}^{-1*} - v_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1*} \\ izR_0 B_{-1}^{-1*} + izv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1*} + iv_1 R_0^{-1} B_{-1} \\ -zR_0 B_{-1}^{-1*} + zv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1*} + v_1 R_0^{-1} B_{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (67) вытекает:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} a_{21}^{(0)} &= R_0 B_{-1}^{-1*} - v_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1*} \\ &= \{I - v_1 R_0^{-1} C_0 R_0^{-1}\} R_0 B_{-1}^{-1*} = \{I - iv_1\} R_0 B_{-1}^{-1*}. \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь следует из (54). Теперь из (52) следует, что матрица

$a_{21}^{(0)}$ невырождена. Из j -унитарности матриц $\begin{bmatrix} I & O \\ O & v_1 \end{bmatrix}$ и $\mathcal{U}_0^{-1}$ следует, что матрица

$\mathcal{M}_0 = \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_1 \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{-1} \mathcal{V}$ является J -унитарной (см. (16)). По лемме 10 существуют невырожденная матрица T_0 и эрмитовы матрицы N_0 и A_0 такие, что

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} T_0^{*-1} & O \\ O & T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_0 \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_0 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Теперь определим матрицу b_0^{-1} формулой

$$b_0^{-1} = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{-1}^{*-1} & O \\ O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_0^{-1}. \quad (70)$$

Матрицы $\begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B_{-1}^* & O \\ O & B_{-1}^{-1} \end{bmatrix}$ являются J -унитарными. Поэтому $\tilde{b}_0^{-1*} J \tilde{b}_0^{-1} = b_0^{-1*} J b_0^{-1}$. Отсюда и из (64) следует формула (60) при $n = 0$, так как $v_0 = I$. Таким образом, теорема 2 доказана при $n = 0$.

Шаг 2. Допустим, что теорема доказана для $n = l$. Докажем теорему для $n = l + 1$. При $n = l$ из (61), (57) и представления (38) для b_l^{-1} имеем

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+1} \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{V} \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & O \\ O & T_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_l \\ O & I \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Пусть

$$B_l^{-1} = \widehat{B}_l^{-1} T_l, \quad \tilde{b}_{l+1}^{-1} = I + iz_0 J \begin{bmatrix} O \\ B_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B_l^{-1}]. \quad (72)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l+1}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\}^* j \\ & \times \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l+1}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \begin{bmatrix} I & O \\ N_l & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ O & T_l^* \end{bmatrix} \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & -C_{l+1}^* \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{l+1} & O \\ O & R_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ & \times j \begin{bmatrix} R_{l+1} & O \\ O & R_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_{l+1} & I \end{bmatrix} \mathcal{V} \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & O \\ O & T_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_l \\ O & I \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix} \mathcal{V}^* \left\{ I - \frac{iz_0}{2} \begin{bmatrix} \widehat{B}_l^{*-1} \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [\widehat{B}_l^{-1} \ \widehat{B}_l^{-1}] \mathcal{V} J \mathcal{V}^* \right\} \mathcal{V} \\ & \times J \mathcal{V}^* \left\{ I + \frac{iz_0}{2} \mathcal{V} J \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} \widehat{B}_l^{*-1} \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [\widehat{B}_l^{-1} \ \widehat{B}_l^{-1}] \right\} \mathcal{V} \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \\ &= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix} \left\{ I - iz_0 \begin{bmatrix} O \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ \widehat{B}_l^{-1}] J \right\} \\ & \times J \left\{ I + iz_0 J \begin{bmatrix} O \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ \widehat{B}_l^{-1}] \right\} \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \left\{ \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix} - i\bar{z}_0 \begin{bmatrix} O \\ B_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ \widehat{B}_l^{-1}] J \right\} \\
&\quad \times J \left\{ \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix} + iz_0 J \begin{bmatrix} O \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B_l^{-1}] \right\} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \\
&= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \left\{ I - i\bar{z}_0 \begin{bmatrix} O \\ B_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ \widehat{B}_l^{-1}] J \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\
&\quad \times J \left\{ I + iz_0 \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix}^{-1} J \begin{bmatrix} O \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B_l^{-1}] \right\} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \\
&= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \left\{ I - i\bar{z}_0 \begin{bmatrix} O \\ B_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ \widehat{B}_l^{-1}] \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix} J \right\} \\
&\quad \times J \left\{ I + iz_0 J \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ \widehat{B}_l^{*-1} \end{bmatrix} [O \ B_l^{-1}] \right\} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\} \\
&= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \tilde{b}_{l+1}^{-1} J \tilde{b}_{l+1}^{-1} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}.
\end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (71), второе – из (44), (42), (40) и (16), третье – из вида (17) матрицы $\mathcal{V}$ и ее унитарности, четвертое – из (72), пятое – из J -унитарности матрицы

$$\begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix},$$

шестое – из непосредственно проверяемого равенства

$$J \begin{bmatrix} T_l^{-1} & O \\ N_l T_l^{-1} & T_l^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & T_l^{*-1} N_l \\ O & T_l \end{bmatrix} J,$$

седьмое – из (72). Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l+1}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\}^* j \\
&\quad \times \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l+1}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}^* \tilde{b}_{l+1}^{-1} J \tilde{b}_{l+1}^{-1} \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{l}} b_k^{-1} \right\}. \tag{73}
\end{aligned}$$

Из J -унитарности матрицы $\begin{bmatrix} B_l^* & O \\ O & B_l^{-1} \end{bmatrix}$ следует, что

$$\begin{aligned} & \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l b_k^{-1}} \right\}^* \tilde{b}_{l+1}^{-1*} J \tilde{b}_{l+1}^{-1} \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l b_k^{-1}} \right\} \\ &= \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l b_k^{-1}} \right\}^* \tilde{b}_{l+1}^{-1*} \begin{bmatrix} B_l & O \\ O & B_l^{-1*} \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} B_l^* & O \\ O & B_l^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_{l+1}^{-1} \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l b_k^{-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, равенства (73) и леммы 9 следует, что существует j -унитарная матрица $\mathcal{U}_{l+1}$ такая, что

$$\begin{bmatrix} B_l^* & O \\ O & B_l^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_{l+1}^{-1} \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l b_k^{-1}} \right\} = \mathcal{V}^* \mathcal{U}_{l+1} \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^{l+1} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix}} \right\}.$$

Отсюда вытекает:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{l+1}^{-1} \mathcal{V} &= \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^{l+1} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \overrightarrow{\prod_{k=0}^l b_k} \right\} \tilde{b}_{l+1} \begin{bmatrix} B_l^{-1*} & O \\ O & B_l \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (74)$$

Матрицу $\mathcal{M}_{l+1}$ определим равенством

$$\mathcal{M}_{l+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(l+1)} & a_{12}^{(l+1)} \\ a_{21}^{(l+1)} & a_{22}^{(l+1)} \end{bmatrix} = \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+2} \end{bmatrix} \mathcal{U}_{l+1}^{-1} \mathcal{V}. \quad (75)$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l+1} &= \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+2} \end{bmatrix} \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^{l+1} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \overrightarrow{\prod_{k=0}^l b_k} \right\} \tilde{b}_{l+1} \begin{bmatrix} B_l^{-1*} & O \\ O & B_l \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (76)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{l+1} &= \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{l+1} & O \\ O & R_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_{l+1} & I \end{bmatrix} \mathcal{V} \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+1} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^l \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \overrightarrow{\prod_{k=0}^{l-1} b_k} \right\} \tilde{b}_l \begin{bmatrix} B_{l-1}^{-1*} & O \\ O & B_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_l \end{bmatrix}^{-1} \tilde{b}_{l+1} \begin{bmatrix} B_l^{-1*} & O \\ O & B_l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{l+1} & O \\ O & R_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_{l+1} & I \end{bmatrix} \mathcal{V} \\
&\quad \times \mathcal{M}_l \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_l \end{bmatrix}^{-1} \tilde{b}_{l+1} \begin{bmatrix} B_l^{-1*} & O \\ O & B_l \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{V}^* \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_{l+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{l+1} & O \\ O & R_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_{l+1} & I \end{bmatrix} \mathcal{V} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} T_l^{*-1} & O \\ O & T_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_l \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_l \end{bmatrix}^{-1} \tilde{b}_{l+1} \begin{bmatrix} B_l^{-1*} & O \\ O & B_l \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i(-v_{l+2}R_{l+1}^{-1}C_{l+1} - v_{l+2}R_{l+1}^{-1} + R_{l+1})T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из (38), а многоточием обозначены те блоки матрицы $\mathcal{M}_{l+1}$, вид которых мы не используем. Отсюда (см. (75)) вытекает

$$\begin{aligned}
2a_{21}^{(l+1)} &= i(-v_{l+2}R_{l+1}^{-1}C_{l+1} - v_{l+2}R_{l+1}^{-1} + R_{l+1})T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} \\
&= i(v_{l+2}R_{l+1}^{-1}C_{l+1}\{-I - C_{l+1}^{-1}\} + R_{l+1})T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} \\
&= i \left[-v_{l+2}R_{l+1}^{-1} \left(I + \frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \widehat{B}_l \widehat{B}_l^* \right)^{-1} \left(-I + I + \frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \widehat{B}_l \widehat{B}_l^* \right) + R_{l+1} \right] \\
&\quad \times T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} \\
&= i \left[-v_{l+2}R_{l+1}^{-1} \left(I + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} \widehat{B}_l^{-1*} \widehat{B}_l^{-1} \right)^{-1} + R_{l+1} \right] T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} \\
&= i(-v_{l+2}R_{l+1}^{-1}R_{l+1}^2 + R_{l+1})T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*} = i(-v_{l+2} + I)R_{l+1}T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*}.
\end{aligned}$$

Здесь третье и пятое равенство следуют из (55).

Таким образом, $2a_{21}^{(l+1)} = i(-v_{l+2} + I)R_{l+1}T_{l+1}^{*-1}B_l^{-1*}$. Теперь из (52) следует, что матрица $a_{21}^{(l+1)}$ невырождена. Матрица $\mathcal{M}_{l+1}$ является J -унитарной (см. аналогичные рассуждения для матрицы $\mathcal{M}_0$ при доказательстве шага 1). По лемме 10 существуют невырожденная матрица T_{l+1} и эрмитовы матрицы N_{l+1} и A_{l+1} такие, что

$$\mathcal{M}_{l+1} = \begin{bmatrix} T_{l+1}^{*-1} & O \\ O & T_{l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N_{l+1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_{l+1} \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу b_{l+1}^{-1} формулой

$$b_{l+1}^{-1} = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & -A_{l+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{B}_l^* & O \\ O & \widehat{B}_l^{-1} \end{bmatrix} \tilde{b}_{l+1}^{-1}. \quad (77)$$

Легко видеть, что $\tilde{b}_{l+1}^{-1*} J \tilde{b}_{l+1}^{-1} = b_{l+1}^{-1*} J b_{l+1}^{-1}$. Отсюда, из (73) и (77) следует формула (60) при $n = l + 1$.

По аналогии с теоремой 2 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть зафиксирована точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$ и даны последовательность унитарных $m \times m$ матриц

$$u_0 = I, \quad u_1, \dots, u_n, \dots, \quad \det(u_1 - iI) \neq 0, \quad \det(u_k - I) \neq 0, \quad k \geq 2, \quad (78)$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\hat{B}_{-1} > O, \quad \hat{B}_0, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (79)$$

И пусть, далее, по матрицам (79) с помощью формул (54)–(55) построены матрицы $R_k, C_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда существуют последовательность эрмитовых матриц

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathbb{C}_H^{m \times m} \quad (80)$$

и последовательность невырожденных матриц

$$B_{-1} > O, \quad B_0, \dots, B_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m} \quad (81)$$

таких, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k & O \\ O & I \end{bmatrix} \right\}^* \\ & \quad \times j \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k & O \\ O & I \end{bmatrix} \right\} \\ & = b_0^{-1*} b_1^{-1*} \dots b_n^{-1*} J b_n^{-1} \dots b_1^{-1} b_0^{-1}. \end{aligned} \quad (82)$$

Матрицы $b_0^{-1}, b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}, \dots$ построены по матрицам (80)–(81) с помощью формул (21).

ЛЕММА 11. Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы матрицы $R_k \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}, C_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и унитарные матрицы $v_k \in \mathbb{C}^{m \times m}, v_0 = I$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\}^* j \\ & \quad \times \left\{ \prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} I & -\left\{ \sum_{k=0}^n \left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^* \right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l \right) \right\}^* \\ O & I \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \left(\overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k \right)^* \left(\overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k \right) & O \\ O & -\left(\overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k^{-1} v_k \right)^* \left(\overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k^{-1} v_k \right) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} I & O \\ -\sum_{k=0}^n \left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^* \right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l \right) & I \end{bmatrix}. \tag{83}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся очевидным перестановочным соотношением ($A, D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\det D_2 \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} I & O \\ A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ D_2^{-1} A D_1 & I \end{bmatrix}.$$

Имеет место формула

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{\prod}_{k=0}^n \begin{bmatrix} R_k & O \\ O & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & v_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k & O \\ O & \overleftarrow{\prod}_{k=0}^n R_k^{-1} v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -\sum_{k=0}^n \left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^* \right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l \right) & I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Эта формула доказывается последовательной перестановкой вправо матриц $\begin{bmatrix} I & O \\ -C_k & I \end{bmatrix}$. Из последней формулы следует (83).

ЛЕММА 12. Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \det a_{22} \neq 0.$$

И пусть, далее, матрица A представлена в виде

$$A = \begin{bmatrix} I & N_1 \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ N_2 & I \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Тогда матрицы в правой части (84) определены единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует еще одно представление матрицы A вида (84)

$$A = \begin{bmatrix} I & \tilde{N}_1 \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & O \\ O & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ \tilde{N}_2 & I \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 + N_1 D_2 N_2 & N_1 D_2 \\ D_2 N_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 + \tilde{N}_1 \tilde{D}_2 \tilde{N}_2 & \tilde{N}_1 \tilde{D}_2 \\ \tilde{D}_2 \tilde{N}_2 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства и невырожденности матрицы a_{22} следует невырожденность матриц D_2 и $\tilde{D}_2$. С учетом этого факта и последнего равенства последовательно получим: $D_2 = \tilde{D}_2$, $N_2 = \tilde{N}_2$, $N_1 = \tilde{N}_1$, $D_1 = \tilde{D}_1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$, последовательность унитарных $m \times m$ матриц

$$v_0 = I, v_1, \dots, v_n, \dots, \quad \det(I - iv_1) \neq 0, \quad \det(I - v_k) \neq 0, \quad k \geq 2, \quad (85)$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\hat{B}_{-1} > O, \quad \hat{B}_0, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (86)$$

И пусть матрицы R_k построены по матрицам (86) с помощью формул (54) и (55).

Тогда существует матрица Якоби вида (1) такая, что для построенных по ней с помощью формул (3)–(4) матричных многочленов $P_k(z)$ выполняются равенства ($\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\left(\sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z}_0) P_k(\bar{z}_0) \right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0) \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} R_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \right), \quad (87)$$

$$\left(\sum_{k=0}^n P_k^*(z_0) P_k(z_0) \right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0) \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} v_k^* R_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k v_k \right). \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 существуют последовательности матриц (58) и (59) такие, что выполнены соотношения (60). Рассмотрим матрицу Якоби $\mathbf{J}_m$ вида (1), построенную по матрицам (58) и (59). Тогда выражение в правой части (60) будет матрицей Вейля, построенной по матрице Якоби $\mathbf{J}_m$ (см. (23) и (22)). Далее в правую часть (60) запишем представление матрицы Вейля (29), а левую часть (60) преобразуем с помощью (83). Получим

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & - \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^* \right) C_k \left(\prod_{l=0}^{k-1} R_l \right) \right\}^* \\ O & I \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \right)^* \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \right) & O \\ O & - \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k^{-1} v_k \right)^* \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k^{-1} v_k \right) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} I & O \\ - \sum_{k=0}^n \left(\prod_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^* \right) C_k \left(\prod_{l=0}^{k-1} R_l \right) & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} I & a_{12}(z_0)a_{22}^{-1}(z_0) \\ O & I \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \left\{ i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z}_0)P_k(\bar{z}_0) \right\}^{-1} & O \\ O & -\left\{ i(\bar{z}_0 - z_0) \sum_{k=0}^n P_k^*(z_0)P_k(z_0) \right\} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} I & a_{12}(z_0)a_{22}^{-1}(z_0) \\ O & I \end{bmatrix}^*.
\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 12 следуют (87) и (88).

По аналогии с теоремой 4 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть даны точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$, последовательность унитарных $m \times m$ матриц

$$u_0 = I, \quad u_1, \dots, u_n, \dots, \quad \det(u_1 - iI) \neq 0, \quad \det(u_k - I) \neq 0, \quad k \geq 2, \quad (89)$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\widehat{B}_{-1} > O, \quad \widehat{B}_0, \widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_n, \dots \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (90)$$

И пусть матрицы R_k построены по матрицам (90) с помощью формул (54) и (55).

Тогда существует матрица Якоби вида (1) такая, что для построенных по ней с помощью формул (3)–(4) матричных многочленов $P_k(z)$ выполняются равенства ($\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\left(\sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{z}_0)P_k(\bar{z}_0) \right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0) \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} u_k^* R_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k u_k \right), \quad (91)$$

$$\left(\sum_{k=0}^n P_k^*(z_0)P_k(z_0) \right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0) \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} R_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k \right). \quad (92)$$

Формулы (87), (88) и (91), (92) связывают аддитивные выражения в левых частях с мультипликативными в правых частях. Поэтому они называются мультипликативными формулами.

§ 7. Доказательство теоремы 1

Теперь докажем теорему 1. Заметим, что при $m = 1$ теорема 1 является хорошо известным результатом из теории скалярных матриц Якоби (см., например, [13]). Поэтому рассмотрим случай $m \geq 2$.

Доказательство проведем в два шага. При доказательстве мы будем пользоваться мультипликативными формулами (87), (88) и (91), (92). Диагональные матрицы с элементами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ на главной диагонали будем обозначать символом $\text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m]$.

Шаг 1. Для любого целого числа $0 \leq p \leq m$ существует такая матрица Якоби $\mathbf{J}_m$, что дефектные числа m_+ и m_- ассоциированного оператора $\mathbf{L}_m$ равны p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 = i$. Рассмотрим унитарные $m \times m$ матрицы

$$v_1 = I, \quad v_k = iI, \quad k \geq 2,$$

и диагональные матрицы $\widehat{B}_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ вида

$$\widehat{B}_{-1} = I, \quad \widehat{B}_k = \text{diag} \left[\underbrace{\gamma_k, \dots, \gamma_k}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-p} \right], \quad \gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (93)$$

Введенные матрицы и число z_0 удовлетворяют условиям теоремы 4. По матрицам $\widehat{B}_k$ с помощью формул (54), (55) построим матрицы R_k . Получим

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot I, \\ R_k^2 &= (I + \widehat{B}_{k-1}^{-2})^{-1} = \text{diag} \left[\underbrace{(1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, \dots, (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}}_p, \underbrace{2^{-1}, \dots, 2^{-1}}_{m-p} \right], \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (94)$$

По теореме 4 существует бесконечная матрица Якоби $\mathbf{J}_m$ такая, что построенные по ней матричные многочлены P_k удовлетворяют (87) и (88). Воспользуемся тем фактом, что в матричных произведениях, состоящих из диагональных матриц, можно переставлять сомножители и не указывать стрелкой несущественного порядка их следования. Получим (см. (87), (88) и (94))

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(-i) P_k(-i) \right)^{-1} &= \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1} = 2 \prod_{k=0}^n R_k^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} I \right) \prod_{k=1}^n (I + \widehat{B}_{k-1}^{-2})^{-1} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (I + \widehat{B}_k^{-2}) \right)^{-1} \\ &= \text{diag} \left[\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (1 + \gamma_k^{-2})^{-1}, \dots, \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \gamma_k^{-2})^{-1}}_p, \underbrace{2^{-n}, \dots, 2^{-n}}_{m-p} \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

Как известно,

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \gamma_k^{-2}) = \prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{2}{\pi(2k+1)} \right)^2 \right] = \text{ch } 1. \quad (96)$$

Отсюда и из (95) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(-i) P_k(-i) \right)^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1} \\ &= \text{diag} \left[\underbrace{(\text{ch } 1)^{-1}, \dots, (\text{ch } 1)^{-1}}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_+ = \text{rank} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1} = p,$$

$$m_- = \text{rank} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(-i) P_k(-i) \right)^{-1} = p.$$

Шаг 1 завершен.

Шаг 2. Пусть целые числа q, p удовлетворяют условиям

$$0 \leq q, p \leq m-1, \quad q \neq p. \quad (97)$$

Тогда существует такая матрица Якоби $\mathbf{J}_m$, что дефектные числа m_+ и m_- ассоциированного оператора $\mathbf{L}_m$ равны q и p соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала выполнены условия

$$0 \leq q < p \leq m-1, \quad q = p-1. \quad (98)$$

Пусть $z_0 = i$ и диагональные матрицы $\hat{B}_k \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$, $k \geq -1$, определены в (93). Для любых целых чисел r и s , $1 \leq r, s \leq m$, символом $P_{r,s} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ обозначим такую перестановочную матрицу, что произведение $AP_{r,s}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, сводится к перестановке местами r -го и s -го столбцов матрицы A . Ясно, что $P_{r,r} = I$. Унитарные матрицы

$$v_1 = P_{p+1,p+1}, \quad v_2 = iP_{p+1,p} \quad (99)$$

продолжим бесконечной периодической последовательностью матриц

$$v_3 = iP_{p+1,p+1}, \quad v_4 = iP_{p+1,p}, \quad v_5 = iP_{p+1,p+1}, \quad v_6 = iP_{p+1,p}, \quad \dots \quad (100)$$

Число z_0 и матрицы $\hat{B}_k$, v_k удовлетворяют условиям теоремы 4. Поэтому существует бесконечная матрица Якоби $\mathbf{J}_m$ такая, что соответствующие ассоциированные многочлены удовлетворяют (87) и (88). Как и при доказательстве утверждения шага 1, из (87) имеем

$$m_- = \text{rank} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(-i) P_k(-i) \right)^{-1} = p.$$

Мы доказали, что дефектное число m_- равно p . Покажем теперь, что $m_+ = q$. Из равенства (88) имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1} &= 2 \left(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}} v_k^* R_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{\overleftarrow{n}} R_k v_k \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{\overrightarrow{n}} v_k^* R_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^{\overleftarrow{n}} R_k v_k \right). \end{aligned} \quad (101)$$

Второе равенство здесь следует из (94). Введем обозначения:

$$\tilde{R}_k^2 = v_k^* R_k^2 v_k. \quad (102)$$

Из определения (99)–(100) матриц v_k следует, что $v_1 = I$ и при нечетных $k > 1$ матрицы $v_k = iP_{p+1,p+1} = iI$. Теперь с учетом (102) и (94) имеем

$$\tilde{R}_k^2 = R_k^2 = \text{diag} \left[\underbrace{(1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, \dots, (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}}_{p-1}, \underbrace{(1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, 2^{-1}}_2, \underbrace{2^{-1}, \dots, 2^{-1}}_{m-p-1} \right],$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ нечетное.} \quad (103)$$

При четных $k \in \mathbb{N}$ матрицы $v_k = iP_{p+1,p}$. Отсюда следует, что диагональная матрица $\tilde{R}_k^2$ получается из диагональной матрицы R_k^2 перестановкой p -го и $(p+1)$ -го диагональных элементов:

$$\tilde{R}_k^2 = v_k^* R_k^2 v_k = P_{p+1,p}^* R_k^2 P_{p+1,p}$$

$$= \text{diag} \left[\underbrace{(1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, \dots, (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}}_{p-1}, \underbrace{2^{-1}, (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}}_2, \underbrace{2^{-1}, \dots, 2^{-1}}_{m-p-1} \right],$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ четное.} \quad (104)$$

Воспользовавшись (101), (102), коммутативностью умножения диагональных матриц и (103), (104), получим

$$\left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1} = \prod_{k=1}^n \tilde{R}_k^2$$

$$= \text{diag} \left[\underbrace{\prod_{k=1}^n (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, \dots, \prod_{k=1}^n (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}}_{p-1}, \underbrace{\prod_{k=1}^n \alpha_k, \prod_{k=1}^n \beta_k}_2, \underbrace{2^{-n}, \dots, 2^{-n}}_{m-p-1} \right].$$

$$(105)$$

Здесь

$$\alpha_k = \begin{cases} 2^{-1}, & k \text{ четное,} \\ (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, & k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} (1 + \gamma_{k-1}^{-2})^{-1}, & k \text{ четное,} \\ 2^{-1}, & k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Из этих формул следует, что при $n \rightarrow \infty$ произведения $\prod_{k=1}^n \alpha_k$ и $\prod_{k=1}^n \beta_k$ стремятся к нулю, так как каждое из них содержит бесконечно много сомножителей сходящегося произведения (96) и бесконечно много сомножителей 2^{-1} . Отсюда, из (105) и (96) имеем

$$m_+ = \text{rank} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(i) P_k(i) \right)^{-1}$$

$$= \text{rank} \text{diag} \left[\underbrace{(\text{ch } 1)^{-1}, \dots, (\text{ch } 1)^{-1}}_{p-1}, \underbrace{0, 0}_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-p-1} \right] = p-1 = q.$$

Шаг 2 доказан при выполнении условий (98). Если выполнены условия

$$0 \leq q < p \leq m-1, \quad q = p-2,$$

то при доказательстве нужно изменить только матрицы v_k . А именно, унитарные матрицы

$$v_1 = P_{p+1,p+1}, \quad v_2 = iP_{p+1,p}, \quad v_3 = iP_{p+1,p-1}$$

продолжим бесконечной периодической последовательностью матриц

$$v_4 = iP_{p+1,p+1}, \quad v_5 = iP_{p+1,p}, \quad v_6 = iP_{p+1,p-1}, \quad v_7 = iP_{p+1,p+1}, \quad \dots$$

Аналогичным образом шаг 2 доказывается при выполнении неравенств $0 \leq q < p \leq m-1$, $p-q > 2$. Если же выполнены неравенства $0 \leq p < q \leq m-1$, то вместо формул (87), (88) используются формулы (91), (92). Теорема 1 доказана.

Автор благодарен Ф. С. Рофе-Бекетову за его интерес к этой работе и обсуждение многих вопросов, связанных с дефектными числами симметрических операторов. Автор благодарен К. А. Мирзоеву за критические замечания, которые привели к улучшению этой статьи.

Список литературы

- [1] М. Г. Крейн, “Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов”, *Докл. АН СССР*, **69**:3 (1949), 125–128.
- [2] М. Г. Крейн, “Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) ”, *Укр. матем. журн.*, **1**:2 (1949), 3–66.
- [3] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [4] В. И. Коган, “Об операторах, порожденных l_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта”, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, 1970, № 11, 103–107.
- [5] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами”, *Функц. анализ и его прилож.*, **35**:4 (2001), 32–37.
- [6] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, “Радиусы круга Вейля в матричной задаче Неванлинны–Пика”, *Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения*, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев, 1981, 25–49.
- [7] В. К. Дубовой, “Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. II”, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, 1982, № 37, 14–26.
- [8] V. I. Kogan, F. S. Rofo-Beketov, “On the question of the deficiency indices of differential operators with complex coefficients”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **72** (1975), 281–298.
- [9] V. I. Kogan, F. S. Rofo-Beketov, “On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **74** (1976), 5–40.
- [10] F. S. Rofo-Beketov, A. M. Kholkin, *Spectral analysis of differential operators. Interplay between spectral and oscillatory properties*, World Sci. Monogr. Ser. Math., **7**, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005.

- [11] Г. А. Калябин, “О числе решений из $L_2(0, \infty)$ самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка”, *Функци. анализ и его прилож.*, **6**:3 (1972), 74–76.
- [12] В. П. Потапов, “Дробно-линейные преобразования матриц”, *Исследования по теории операторов и их приложениям*, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев, 1979, 75–97.
- [13] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней*, ГИФМЛ, М., 1961.

Ю. М. Дюкарев (Yu. M. Dyukarev)

Харьковский национальный университет, Украина

E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию

16.12.2005