Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, Об одном классе интегральных уравнений типа свертки, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 7, 45–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:56:50

УДК 517.968.2

Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян**Об одном классе интегральных уравнений типа свертки**

Получены условия (как необходимое, так и достаточное) существования нетривиального ограниченного решения B интегрального уравнения

$$B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) K(x-t) B(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где данные функции K и λ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^1), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt &= 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 K(t) dt < \infty, \quad \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t K(t) dt &\neq 0, \\ 0 \leq \lambda(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda &\not\equiv 0. \end{aligned}$$

Доказано существование пределов $B(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x)$ и найдено соотношение, связывающее эти пределы с моментом 1-го порядка ν и интегральной нормой B .

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

1.1. В работе [1] была изучена задача

$$B(x) = \int_x^{x+1} \lambda(t) B(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 1 \quad (2)$$

относительно искомой функции B , где данная функция λ удовлетворяет следующим условиям:

- $\alpha 1)$ λ измерима на $\mathbb{R}^1$;
- $\alpha 2)$ $0 < \lambda(x) \leq 1$ почти везде на $\mathbb{R}^1$;
- $\alpha 3)$ $\lambda \uparrow$ на $[\tau, +\infty)$ при некотором $\tau \in \mathbb{R}^1$;
- $\alpha 4)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 1$.

Задача (1), (2) возникает в теории ядерных реакторов в задачах замедления нейтронов (см., например, [1] или [2; гл. 3, п. 3.9], [3; введение]).

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости и асимптотического поведения решения более общего интегрального уравнения

$$B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) K(x-t) B(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (3)$$

где данные функции λ и K удовлетворяют условиям:

$$\beta 1) 0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^1);$$

$$\beta 2) \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1;$$

$$\beta 3) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 K(x) dx < +\infty;$$

$$\beta 4) \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x K(x) dx \neq 0;$$

$$\gamma 1) \lambda \text{ измерима на } \mathbb{R}^1;$$

$$\gamma 2) 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ и } \lambda \neq 0 \text{ на } \mathbb{R}^1.$$

Из условий $\beta 1)$ – $\beta 3)$ следует

$$\beta 3^*) \int_{-\infty}^{+\infty} |x| K(x) dx < +\infty.$$

Отметим, что при

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0], \\ 0, & x \in \mathbb{R}^1 \setminus [-1, 0], \end{cases} \quad (4)$$

уравнение (3) принимает форму (1), причем очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям $\beta 1)$ – $\beta 4)$.

1.2. В [1] были достаточно полно изучены вопросы разрешимости задачи (1), (2) при условиях $\alpha 1)$ – $\alpha 4)$, в частности получено необходимое и достаточное условие для существования ограниченного на $\mathbb{R}^1$ решения задачи (1), (2) при выполнении $\alpha 1)$ – $\alpha 4)$. Это условие

$$\alpha 5) (1 - \lambda(x))|_{(\tau, +\infty)} \in L_1(\tau, +\infty) \quad \text{при некотором } \tau \in \mathbb{R}^1.$$

(Здесь и далее через $f|_G$ обозначается сужение функции f на G .)

Из наиболее интересных результатов работы [1] следует отметить следующий факт.

Если условие $\alpha 5)$ выполняется при $\tau = -\infty$, то для решения B задачи (1), (2), $\alpha 1)$ – $\alpha 4)$ существует конечный предел $B(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} B(x)$, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t)) B(t) dt = \frac{1}{2} (1 - B(-\infty)). \quad (5)$$

(В настоящей работе под условиями α) будем подразумевать совокупность условий $\alpha 1)$ – $\alpha 4)$, под β) – совокупность $\beta 1)$ – $\beta 4)$, под $\beta^*)$ – совокупность условий $\beta 1)$, $\beta 2)$, $\beta 3^*)$, $\beta 4)$ и под γ) – пару условий $\gamma 1)$, $\gamma 2)$.)

1.3. В работе [4] получено достаточное условие для нетривиальной разрешимости уравнения (3), где функции K и λ удовлетворяют условиям $\beta^*)$ и $\gamma)$, а именно, доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть в уравнении (3) функции K и λ удовлетворяют условиям $\beta^*)$ и $\gamma)$. Тогда при дополнительном условии

$$\gamma 3) 1 - \lambda(x) \in L_1(\mathbb{R}^1)$$

существует нетривиальное ограниченное решение B этого уравнения, для которого имеют место соотношения

$$0 \leq B(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^1; \quad \int_0^x B(t) dt = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

§ 2. Вспомогательные предложения

Хотя утверждение теоремы А доказано при условии $1 - \lambda(x) \in L_1(\mathbb{R}^1)$, но, как будет доказано ниже, оно сохраняет свою силу и при более общем условии $\alpha 5$). Более того, будет доказано, что для существования ограниченного решения уравнения (3) условие $\alpha 5$) не только достаточное, но и необходимое.

Рассмотрим уравнение на $\mathbb{R}^1$

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)f(t) dt, \quad K \in L_1(\mathbb{R}^1), \quad (7)$$

относительно искомой функции f , которое запишем в операторной форме:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K})f = g, \quad (8)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный оператор, а $\mathbf{K}$ – оператор свертки. Пусть $E(\mathbb{R}^1)$ – одно из пространств $L_p(\mathbb{R}^1)$, $p \geq 1$, $M(\mathbb{R}^1) \equiv L_\infty$. В работах [5], [6] исследована, в частности, возможность разложения

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_+), \quad (9)$$

где $\mathbf{V}_\pm$ – вольтерровы операторы, действующие в $E(\mathbb{R}^1)$:

$$(\mathbf{V}_+\Psi)(x) = \int_{-\infty}^x V_+(x-t)\psi(t) dt, \quad (\mathbf{V}_-\Psi)(x) = \int_x^{+\infty} V_-(t-x)\psi(t) dt. \quad (10)$$

Факторизация (9) сводит решение уравнения (7) (или (8)) к последовательному решению следующих двух уравнений типа Вольтерра:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{+\infty} V_-(t-x)\varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1; \quad (11)$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_{-\infty}^x V_+(x-t)f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (12)$$

В [5] доказана

ТЕОРЕМА В. Пусть

$$\mu \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx \leq 1.$$

Тогда существует факторизация (9) в $E(\mathbb{R}^1)$, причем ядра $V_\pm$ операторов (10), являясь решениями нелинейной системы

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, +\infty), \quad (13)$$

обладают свойствами

$$V_\pm \in L_1(\mathbb{R}^1); \quad V_\pm = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^- \equiv (-\infty, 0); \quad \gamma_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty |V_\pm(x)| dx \leq 1.$$

Отметим, что утверждение теоремы справедливо также в консервативном случае (см. условия $\beta 1$), $\beta 2$))

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1. \quad (14)$$

Согласно результатам работы [5] в указанном случае имеют место соотношения

$$V_{\pm} \geq 0, \quad \gamma_{\pm} \leq 1, \quad (1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 0, \quad (15)$$

где

$$\gamma_{\pm} = \int_0^{\infty} V_{\pm}(x) dx.$$

Последнее равенство, очевидно, означает, что в консервативном случае хотя бы одна из величин $\gamma_{\pm}$ равна 1, что, в свою очередь, означает необратимость соответствующего фактора равенства (9) в $E(\mathbb{R}^1)$. Вопрос о том, какой из факторов $\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\pm}$ в указанном равенстве обратим в $E(\mathbb{R}^1)$, решен в [6; § 4, теорема 4.1].

Имеет место

ТЕОРЕМА С. Пусть ядро K оператора свертки $\mathbf{K}$ удовлетворяет условиям консервативности (14), причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|K(x) dx < +\infty.$$

Тогда:

- (i) $\nu > 0 \iff \gamma_+ = 1, \gamma_- < 1;$
- (ii) $\nu < 0 \iff \gamma_+ < 1, \gamma_- = 1;$
- (iii) $\nu = 0 \iff \gamma_{\pm} = 1;$

здесь

$$\nu = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx.$$

Применение факторизации (9) к уравнению (7) или (8) в консервативном случае (14) дало возможность получить достаточные условия разрешимости этого уравнения. В [4] доказана

ТЕОРЕМА D. Пусть в уравнении (7) ядро K удовлетворяет условиям β^*), а $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R}^1)$. Тогда это уравнение обладает неотрицательным решением $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$.

Следующий факт дополняет утверждение этой теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если в уравнении (7) ядро K удовлетворяет условиям β), то для существования неотрицательного решения $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ достаточно выполнения одного из условий

- i) $\nu > 0$ и $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^-)$,
- ii) $\nu < 0$ и $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^+)$,

где $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ и $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.

(Здесь и далее через $L_1^0(G)$ обозначен класс определенных на $\mathbb{R}^1$ функций f , сужения которых на множестве G принадлежат пространству $L_1(G)$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай i). В случае ii) заменой x на $-x$ уравнение сводится к первому случаю с функцией $g^*(x) = g(-x)$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Как было отмечено выше, факторизация (9) сводит решение уравнения (7) к последовательному решению уравнений (11) и (12), причем согласно теореме С имеем $\gamma_- < 1$, $\gamma_+ = 1$.

Рассмотрим уравнение (11) в случае $\gamma_- < 1$. Решение этого уравнения можно представить (см., например, [6; § 3, формула (3.17)]) в виде

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^{+\infty} \Phi_-(t-x)g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (16)$$

где резольвентная функция Φ_- определяется из уравнения

$$\Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x V_-(x-t)\Phi_-(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (17)$$

причем $\Phi_- \geq 0$ и $\Phi_- \in L_1(\mathbb{R}^+)$ в случае $\gamma_- < 1$.

В [6; § 4, п. 1] доказано, что в случае $\gamma_+ = 1$ из $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 K(t) dt < +\infty$ следует конечность величины $\xi = \int_0^\infty t V_-(t) dt$. Тогда с учетом (17) получаем

$$\int_0^\infty t \Phi_-(t) dt < +\infty.$$

Действительно, умножая равенство (17) на x и интегрируя от 0 до A (здесь A — произвольное положительное число), получаем

$$\int_0^A x \Phi_-(x) dx \leq \xi + \int_0^A \Phi_-(t) dt \int_0^{A-t} x V_-(x) dx + \int_0^A t \Phi_-(t) dt \int_0^{A-t} V_-(x) dx,$$

что в силу

$$\int_0^\infty \Phi_-(t) dt = \frac{\gamma_-}{1 - \gamma_-}$$

влечет неравенство

$$\int_0^A x \Phi_-(x) dx \leq \frac{\xi}{(1 - \gamma_-)^2} < \infty.$$

Теперь покажем, что в случае $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^-)$ и $\int_0^\infty t \Phi_-(t) dt < \infty$ для решения φ уравнения (11) (при $\gamma_- < 1$) имеет место включение $\varphi \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^-)$.

Действительно, в силу $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1)$ из равенства (16) непосредственно получаем $0 \leq \varphi \in M(\mathbb{R}^1)$. Интегрируя (16) от $-A < 0$ до 0, где $A > 0$ произвольное, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-A}^0 \varphi(s) ds &\leq \int_{-\infty}^0 g(s) ds + \int_0^\infty \Phi_-(t) dt \int_{-\infty}^t g(s) ds \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_-} \int_{-\infty}^0 g(s) ds + \int_0^\infty \Phi_-(t) dt \int_0^t g(s) ds, \end{aligned}$$

откуда, учитывая $g_* = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^1} g(x) < +\infty$, получаем оценку

$$\int_{-A}^0 \varphi(s) ds \leq \frac{1}{1 - \gamma_-} \int_{-\infty}^0 g(s) ds + g_* \int_0^\infty t \Phi_-(t) dt < +\infty.$$

Рассмотрим теперь уравнение (12) при $\gamma_+ = 1$ и $\varphi \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^-)$. Заменяя в этом уравнении x на $-x$ и вводя в рассмотрение функции $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, получаем

$$\tilde{f}(x) = \tilde{\varphi}(x) + \int_x^\infty V_+(t-x)\tilde{f}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (18)$$

причем

$$0 \leq \tilde{\varphi} \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^+). \quad (19)$$

Из последнего условия следует, что

$$\int_\tau^\infty \tilde{\varphi}(x)dx < \infty$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}^1$.

Повторяя рассуждения работы [4], можно доказать, что в случае $\gamma_+ = 1$ и (19) уравнение (18) обладает решением $\tilde{f}$ из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$, причем

$$\int_0^x \tilde{f}(x)dx = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, построена функция $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ – результат последовательного решения уравнений (11) и (12), причем для этой функции имеет место соотношение

$$\int_0^x f(t)dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (20)$$

Использование факторизации (9) для решения уравнения (7) обусловлено эквивалентностью уравнения (7) (или (8)) и

$$(\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f = g \quad (21)$$

в любом из пространств $L_p(\mathbb{R}^1)$, $p \geq 1$, $M(\mathbb{R}^1) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Однако уравнение (21) может иметь решение f , не принадлежащее ни одному из этих пространств. (В дальнейшем будет показано, что построенное выше решение f этого уравнения не принадлежит указанным пространствам.) Поэтому для завершения доказательства теоремы установим следующий факт.

ЛЕММА 1. *Решение f уравнения (21) удовлетворяет уравнению (7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим равенство (9) в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+). \quad (22)$$

Пусть $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$ – неотрицательное решение уравнения (21), полученное при доказательстве теоремы 1. Рассмотрим последовательность следующих функций, определенных на $\mathbb{R}^1$ (здесь N – натуральное число):

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-N, N], \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^1 \setminus [-N, N]. \end{cases} \quad (23)$$

Очевидно, что $f_N \in L_1(\mathbb{R}^1)$, и поэтому справедливо равенство

$$\mathbf{K}f_N = \mathbf{V}_+f_N + \mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N.$$

Во-первых докажем, что f принадлежит области определения оператора $\mathbf{K}$, т.е. для п.в. $x_0 \in \mathbb{R}^1$ имеет место неравенство $(\mathbf{K}f)(x_0) < \infty$.

Из последнего равенства для п.в. $x_0 \in \mathbb{R}^1$ следует

$$(\mathbf{K}f_N)(x_0) = (\mathbf{V}_+f_N)(x_0) + (\mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N)(x_0). \quad (24)$$

Оценим каждый член правой части этого равенства. Выберем число N так, чтобы $x_0 \in [-N, N]$. Тогда будем иметь

$$(\mathbf{V}_+f_N)(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} V_+(x_0 - t)f_N(t) dt = \int_{-N}^{x_0} V_+(x_0 - t)f(t) dt. \quad (25)$$

Для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ имеем также

$$\begin{aligned} ((\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N)(x) &= f_N(x) - \int_{-\infty}^x V_+(x - t)f_N(t) dt \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } x < -N, \\ f(x) - \int_{-N}^x V_+(x - t)f(t) dt, & \text{если } x \in [-N, N], \\ - \int_{-N}^N V_+(x - t)f(t) dt, & \text{если } x > N. \end{cases} \end{aligned}$$

Из равенства (12) имеем

$$f(x) - \int_{-N}^x V_+(x - t)f(t) dt = \varphi(x) + \int_{-\infty}^{-N} V_+(x - t)f(t) dt.$$

Поэтому для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$((\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N)(x) \leq \varphi(x) + \int_{-\infty}^{-N} V_+(x - t)f(t) dt,$$

откуда получаем

$$(\mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N)(x_0) \leq \int_{x_0}^{\infty} V_-(t - x_0) \left(\varphi(t) + \int_{-\infty}^{-N} V_+(t - z)f(z) dz \right) dt,$$

или

$$(\mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f_N)(x_0) \leq \varphi(x_0) - g(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} V_-(t - x_0) dt \int_{-\infty}^{-N} V_+(t - z)f(z) dz. \quad (26)$$

В силу неравенства

$$\int_x^{\infty} V_-(t - x)V_+(t - z) dt \leq V_+(x - z),$$

которое следует из соотношений (13), последнее слагаемое неравенства (26) допускает оценку

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{\infty} V_-(t - x_0) dt \int_{-\infty}^{-N} V_+(t - z)f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{-N} f(z) dz \int_{x_0}^{\infty} V_-(t - x_0)V_+(t - z) dt \leq \int_{-\infty}^{-N} V_+(x_0 - z)f(z) dz. \end{aligned}$$

Учитывая последнюю оценку, из (24)–(26) получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}f_N)(x_0) &\leq \int_{-N}^{x_0} V_+(x_0 - t)f(t) dt + (\varphi(x_0) - g(x_0)) + \int_{-\infty}^{-N} V_+(x_0 - t)f(t) dt \\ &= (\varphi(x_0) - g(x_0)) + (f(x_0) - \varphi(x_0)) = f(x_0) - g(x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, для фиксированного x_0 имеем

$$(\mathbf{K}f_N)(x_0) = \int_{-N}^N K(x_0 - t)f(t) dt \leq f(x_0) - g(x_0).$$

Отсюда получаем

$$(\mathbf{K}f)(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_0 - t)f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N K(x_0 - t)f(t) dt \leq f(x_0) - g(x_0),$$

т.е. $(\mathbf{K}f)(x_0) < \infty$.

Рассмотрим теперь последовательность функций $\{\omega_N\}$:

$$\omega_N(x) = \varphi_N(x) + \int_{-\infty}^x V_+(x - t)\omega_N(t) dt, \quad (27)$$

где N – натуральное число, а

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in [-N, N], \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^1 \setminus [-N, N]. \end{cases}$$

Согласно результатам работы [6] решение уравнения (27) при фиксированном N можно представить в виде

$$\omega_N(x) = \varphi_N(x) + \int_{-\infty}^x \Phi_+(x - t)\varphi_N(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (28)$$

где функция Φ_+ определяется из уравнения

$$\Phi_+(x) = V_+(x) + \int_0^x V_+(x - t)\Phi_+(t) dt, \quad x \geq 0, \quad (29)$$

причем в случае $\gamma_+ = 1$ имеют место соотношения

$$S_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \int_0^x \Phi_+(t) dt = O(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty$$

и

$$S_+(x + y) \leq S_+(x) + S_+(y) \quad (30)$$

для произвольных $x, y \geq 0$.

Поскольку $\varphi \in M(\mathbb{R}^1)$, то и $\varphi_N \in M(\mathbb{R}^1)$ для фиксированного N . Из (28) следует

$$\omega_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -N, \\ \varphi(x) + \int_{-N}^x \Phi_+(x - t)\varphi(t) dt, & \text{если } x \in [-N, N], \\ \int_{-N}^N \Phi_+(x - t)\varphi(t) dt, & \text{если } x > N. \end{cases} \quad (31)$$

Обозначив $\varphi_0 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^1} \varphi(x) < +\infty$, из (31) с учетом (30) получаем

$$\omega_N(x) \leq \varphi_0(1 + S_+(2N)), \quad \text{т.е. } \omega_N \in M(\mathbb{R}^1).$$

Тогда справедливо равенство

$$(\mathbf{K}\omega_N)(x_0) = (\mathbf{V}_+\omega_N)(x_0) + (\mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)\omega_N)(x_0). \quad (32)$$

Согласно определению функций ω_N для $x_0 \in [-N, N]$ и для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\begin{aligned} ((\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)\omega_N)(x) &= \varphi_N(x), & (\mathbf{V}_- \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)\omega_N)(x_0) &= \int_{x_0}^N V_-(t - x_0)\varphi(t) dt, \\ (\mathbf{V}_+\omega_N)(x_0) &= \omega_N(x_0) - \varphi(x_0), \end{aligned}$$

что совместно с (32) дает

$$(\mathbf{K}\omega_N)(x_0) = \omega_N(x_0) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^N V_+(t - x_0)\varphi(t) dt. \quad (33)$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^N V_+(t - x_0)\varphi(t) dt &\rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} V_+(t - x_0)\varphi(t) dt = \varphi(x_0) - g(x_0), \\ (\mathbf{K}\omega_N)(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x_0 - t)\omega_N(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K(x_0 - t)f(t) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Возможность предельного перехода под знаком интеграла в соотношении (34) следует из теоремы Б. Леви [9; гл. 5, § 5, теорема 7] в силу монотонной сходимости п.в. на $\mathbb{R}^1$ последовательности ω_N и сходимости (при фиксированном x_0)

$$K(x_0 - t)\omega_N(t) \uparrow K(x_0 - t)f(t) \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^1,$$

а также конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_0 - t)f(t) dt.$$

Аналогично получаем соотношение $\omega_N(x_0) \rightarrow f(x_0)$ при $N \rightarrow +\infty$, учитывая монотонность по N функций ω_N и равенство (28).

Переходя к пределу в равенстве (33), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_0 - t)f(t) dt = f(x_0) - g(x_0).$$

Этим завершается доказательство леммы 1 и теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть в неоднородном уравнении

$$\Psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t)K(x - t)\Psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (35)$$

функции λ и K удовлетворяют условиям $\beta)$ и $\gamma)$, а функция g неотрицательна на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} g &\in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^-) \quad \text{в случае } \nu > 0; \\ g &\in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\mathbb{R}^+) \quad \text{в случае } \nu < 0. \end{aligned}$$

Тогда это уравнение имеет решение $\Psi \in L_1^{\text{loc}}$ с асимптотическим свойством

$$\int_0^x \Psi(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (\text{в случае } \nu > 0)$$

или

$$\int_0^x \Psi(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (\text{в случае } \nu < 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu > 0$, а f – построенное в теореме 1 решение уравнения (7) с теми же, что и в (35), функциями K и g и, следовательно, обладающее асимптотическим свойством (20). Как и в [6; § 6, п. 1], здесь можно доказать, что указанное решение является пределом (п.в. на $\mathbb{R}^1$) итераций:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)f_n(t) dt, \\ f_0(x) &\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Наряду с (36) рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(x) &= g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t)K(x-t)\Psi_n(t) dt, \\ \Psi_0(x) &\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Очевидно, что при $g(x) \geq 0$ для любого n имеем

$$0 \leq \Psi_n \uparrow \quad \text{по } n, \quad \Psi_n \leq f_n \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^1. \quad (38)$$

Поэтому п.в. на $\mathbb{R}^1$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = \Psi(x)$, который, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнению (35).

Из соотношений (38) следует $\Psi \leq f$ п.в. на $\mathbb{R}^1$. Следовательно, при $\nu > 0$ для полученного решения Ψ в силу (20) имеет место асимптотическое соотношение

$$\int_0^x \Psi(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (39)$$

Аналогично можно получить асимптотическое соотношение для $\Psi(x)$ в случае $\nu < 0$.

§ 3. Разрешимость уравнения (3)

3.1. Рассмотрим теперь вопросы нетривиальной разрешимости уравнения (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (3) функции K и λ удовлетворяют условиям β) и γ). Тогда для существования ограниченного решения этого уравнения достаточно выполнения еще одного условия:

$\gamma 4$) $1 - \lambda(x) \in L_1^0(\tau, +\infty)$ (в случае $\nu < 0$) или $1 - \lambda(x) \in L_1^0(-\infty, \tau)$ (в случае $\nu > 0$) при некотором $\tau \in \mathbb{R}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неоднородное уравнение (35), соответствующее уравнению (3), со свободным членом вида

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t))K(x-t) dt \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (40)$$

Одним из решений этого уравнения является функция $\Psi^{(1)}(x) \equiv 1$. При выполнении условия γ_4 функция g будет принадлежать соответственно пространствам $M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(\tau, +\infty)$ и $M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(-\infty, \tau)$. Действительно, при $1 - \lambda(x) \in L_1^0(\tau, +\infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{+\infty} g(x) dx &= \int_{-\infty}^0 K(t) dt \int_{\tau-t}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx + \int_0^{\infty} K(t) dt \int_{\tau-t}^{\tau} (1 - \lambda(x)) dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} K(t) dt \int_{\tau}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx. \end{aligned} \quad (41)$$

В силу равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$$

сумма первого и третьего слагаемых в правой части равенства (41) не превосходит величины

$$\int_{\tau}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx,$$

а второе слагаемое не превосходит

$$\int_0^{\infty} tK(t) dt < \infty.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$\int_{\tau}^{\infty} g(x) dx < \infty.$$

Очевидно также, что $g \in M(\mathbb{R}^1)$.

Аналогично доказывается, что $g \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1^0(-\infty, \tau)$ в случае $1 - \lambda(x) \in L_1^0(-\infty, \tau)$.

Согласно следствию из теоремы 1 уравнение (35) со свободным членом (40) обладает также другим решением $\Psi^{(2)}(x)$, отличным от решения $\Psi^{(1)}(x)$ в силу соотношения (39). Рассматривая итерации (37) в случае функции (40), убеждаемся, что для любого n имеет место $\Psi_n \leq 1$, откуда следует $\Psi^{(2)} \leq 1$. Поэтому разность $\Psi^{(1)} - \Psi^{(2)}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^1$ и является нетривиальным ограниченным на $\mathbb{R}^1$ решением уравнения (3).

3.2. Теперь обсудим вопрос о необходимых условиях существования ограниченного решения уравнения (3). Ограничимся рассмотрением лишь случая монотонно возрастающей на $\mathbb{R}^1$ функции λ .

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть в уравнении (3) функции K и λ удовлетворяют условиям $\beta^*)$ и γ). В случае существования ограниченного ненулевого решения уравнения (3) это уравнение будет обладать также ограниченным неотрицательным ненулевым на $\mathbb{R}^1$ решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{B}$ – ограниченное решение уравнения (3). Тогда

$$|\tilde{B}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) K(x-t) |\tilde{B}(t)| dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (42)$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) K(x-t) B_n(t) dt, \\ B_0(x) &\equiv B_*, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (43)$$

где $B_* = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^1} |\tilde{B}(x)| < +\infty$. Учитывая неравенство (42), индукцией по n проверяем справедливость оценок

$$B_n(x) \geq |\tilde{B}(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Теперь убедимся, что итерации B_n монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^1$. Действительно, из (43) следует соотношение

$$B_{n+1}(x) - B_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) (B_n(t) - B_{n-1}(t)) dt. \quad (44)$$

С другой стороны, при $n = 1$ из (43) получаем

$$B_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) B_0(t) dt \leq B_* \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) dt \leq B_* \equiv B_0(x), \quad (45)$$

т.е. $B_1(x) - B_0(x) \leq 0$ при $x \in \mathbb{R}^1$. Из (44) и (45) следует $B_{n+1}(x) - B_n(x) \leq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для последовательности $\{B_n(x)\}$ п.в. на $\mathbb{R}^1$ имеем

$$B_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad B_n(x) \geq |\tilde{B}(x)| \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

Поэтому п.в. на $\mathbb{R}^1$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = B(x)$. Покажем, что предельная функция B удовлетворяет уравнению (3).

Поскольку при фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lambda(t) K(x-t) B_n(t) &\rightarrow \lambda(t) K(x-t) B(t) \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) B_n(t) dt &\geq 0, \end{aligned}$$

то в силу теоремы Б. Леви имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) B_n(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) K(x-t) B(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Совершая предельный переход в соотношении (43), получаем равенство (3) относительно предельной функции $B(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция λ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^1$, то в случае существования ограниченного решения уравнения (3) (например, при выполнении условий β^*) и γ) это уравнение будет обладать также положительным монотонно возрастающим на $\mathbb{R}^1$ решением B .

Действительно, записав соотношения (43) в виде

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \lambda(x-t) B_n(x-t) dt, \\ B_0(x) &\equiv B_*, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{aligned}$$

можно индукцией по n доказать монотонное возрастание на $\mathbb{R}^1$ каждой из функций B_n . Поэтому предельная функция B также будет возрастать на $\mathbb{R}^1$.

В работе [7] доказано существование ограниченного решения f уравнения (7) в случае, когда ядро K удовлетворяет условиям β^*), а $g \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^1)$ и определены условия для существования пределов $f(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. А именно, в [7; п. 4, теорема 4.1] доказано, что при выполнении β^*) и условий

$$g \in L_1(\mathbb{R}^1) \cap M(\mathbb{R}^1), \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty \quad (47)$$

существуют $f(\pm\infty)$ и для этих значений имеет место соотношение

$$f(+\infty) - f(-\infty) = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \quad (48)$$

(см. также [8; ч. 2, гл. 9, теорема 9.15]).

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть в уравнении (7) ядро K удовлетворяет условиям $\beta 1)$, $\beta 2)$, $\beta 3^*)$, а функция g — условию $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1)$, причем $g \neq 0$ на множестве положительной меры. Если это уравнение обладает ограниченным решением f , то

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x K(x) dx \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), в рассматриваемом случае обладает очевидным решением $f_0(x) \equiv h$, где $h \in \mathbb{R}^1$ (h произвольное), то без ограничения общности можно предполагать, что указанное решение f уравнения (7) положительно на $\mathbb{R}^1$. Тогда это уравнение обладает также минимальным положительным ограниченным решением f^* , $0 \leq f^* \leq f$, являющимся пределом итераций

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) f_n(t) dt, & f_0(x) &\equiv 0, \\ x &\in \mathbb{R}^1, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Совместно с (7) рассмотрим уравнение

$$\hat{f}(x) = g_N(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) \hat{f}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (50)$$

с тем же ядром K и с финитной функцией $g_N(x) = g(x)\theta(N - |x|)$, где θ — функция Хевисайда. Очевидно, что $0 \leq g_N \in M(\mathbb{R}^1) \cap L_1(\mathbb{R}^1)$ и итерации

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n+1}(x) &= g_N(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) \hat{f}_n(t) dt, & \hat{f}_0(x) &\equiv 0, \\ x &\in \mathbb{R}^1, & n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

сходятся к минимальному положительному решению $\hat{f}$ уравнения (50), для которого имеет место оценка $\hat{f} \leq f^*$. Здесь, как и в [6; п. 6, теорема 6.3], можно доказать, что это решение можно получить посредством факторизации (9), сводящей решение к последовательному решению уравнений (11) и (12).

Допустим, что уравнение (7) обладает ограниченным решением f и $\nu = 0$. Тогда согласно теореме С будем иметь $\gamma_- = \gamma_+ = 1$. Поэтому для ограниченного решения $\widehat{\varphi}$ уравнения

$$\widehat{\varphi}(x) = g_N(x) + \int_x^{+\infty} V_-(t-x)\widehat{\varphi}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \gamma_- = \int_0^{+\infty} V_-(x) dx = 1,$$

существование которого следует из [7; п. 4, теорема 4.1], пределы $\widehat{\varphi}(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \widehat{\varphi}(x)$ конечны, причем для минимального положительного решения имеют место соотношения

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{\varphi}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \widehat{\varphi}(x) = \int_{-N}^N g(x) dx \left(\int_0^{\infty} x V_-(x) dx \right)^{-1} > 0.$$

Пусть c_0 – произвольное положительное число такое, что $c_0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \widehat{\varphi}(x)$. Тогда для некоторого $\tau > 0$ имеет место

$$\widehat{\varphi}(x) > c_0 \quad \text{при } x < -\tau. \quad (51)$$

Тогда итерации

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{n+1}^*(x) &= \widehat{\varphi}(x) + \int_{-\infty}^x V_+(x-t)\widehat{f}_n^*(t) dt, \\ \widehat{f}_0^*(x) &\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \gamma_+ = \int_0^{\infty} V_+(x) dx = 1, \end{aligned}$$

будут расходиться на $(-\infty, -\tau]$. Это означает, что не существует положительного ограниченного на $\mathbb{R}^1$ решения $\widehat{f}$ уравнения (50) и, следовательно, не существует (на $\mathbb{R}^1$) ограниченного решения f уравнения (7), что противоречит условию леммы.

ЛЕММА 4. Пусть в уравнении (3) функции K и λ удовлетворяют условиям $\beta(1)$, $\beta(2)$, β^*) и γ). Если это уравнение обладает ограниченным на $\mathbb{R}^1$ решением B , то $\nu \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – ограниченное на $\mathbb{R}^1$ решение уравнения (3) при условиях $\beta(1)$, $\beta(2)$, β^*) и γ). Тогда в силу леммы 2 это уравнение будет обладать также положительным ограниченным решением. Для упрощения через B будем обозначать именно это решение уравнения (3). Если $B_0 = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^1} B(x) < +\infty$, то для ограниченной неотрицательной (на $\mathbb{R}^1$) функции $\widehat{B}(x) = B_0 - B(x)$ из (3) получаем равенство

$$\widehat{B}(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\widehat{B}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (52)$$

где g имеет вид

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t)) K(x-t) B(t) dt. \quad (53)$$

Очевидно, что $0 \leq g \in M(\mathbb{R}^1)$. Согласно лемме 3 имеем $\nu \neq 0$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в уравнении (3) выполняются условия $\beta 1) - \beta 3)$ и $\gamma)$, причем функция λ монотонно возрастает на $\mathbb{R}^1$. Если существует ограниченное решение этого уравнения, то имеет место одно из включений $\gamma 4)$ (в зависимости от знака ν).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 имеем $\nu \neq 0$. Пусть $\nu < 0$. Покажем, что тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}^1$

$$\int_{\alpha}^{\infty} (1 - \lambda(t)) dt < +\infty.$$

Если существует ограниченное решение уравнения (3), то согласно лемме 2 существует также ограниченное положительное решение B этого уравнения. Тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(t)) K(x - t) B(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) B(t) dt - B(x). \quad (54)$$

Пусть r – положительное число, удовлетворяющее условию $\int_{-r}^r K(x) dx \neq 0$.

Интегрируем равенство (54) в пределах от 0 до $A > 2r$ и оценим полученные интегралы. Для интеграла левой части (54) будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^A dx \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(t)) K(x - t) B(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(t)) B(t) dt \int_{-t}^{A-t} K(x) dx \geq \int_r^{A/2} (1 - \lambda(t)) B(t) dt \int_{-r}^r K(x) dx. \end{aligned} \quad (55)$$

Для интеграла правой части получаем

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^A dx \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) B(t) dt - \int_0^A B(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \int_{-x}^{A-x} B(t) dt - \int_0^A B(t) dt. \end{aligned} \quad (56)$$

Первый из двух последних интегралов можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \int_{-x}^{A-x} B(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 K(x) dx \left(\int_{-x}^0 B(t) dt + \int_0^A B(t) dt + \int_A^{A-x} B(t) dt \right) \\ &+ \int_0^{\infty} K(x) dx \left(\int_{-x}^0 B(t) dt + \int_0^A B(t) dt + \int_A^{A-x} B(t) dt \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и учитывая (56), а также соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 K(x) dx \int_{-x}^0 B(t) dt &< 0, & \int_{-\infty}^0 K(x) dx \int_A^{A-x} B(t) dt &> 0, \\ \int_0^{\infty} K(x) dx \int_{-x}^0 B(t) dt &> 0, & \int_0^{\infty} K(x) dx \int_A^{A-x} B(t) dt &< 0, \end{aligned}$$

получаем следующую оценку для интеграла I :

$$I \leq \int_{-\infty}^0 K(x) dx \int_A^{A-x} B(t) dt + \int_0^{\infty} K(x) dx \int_{-x}^0 B(t) dt.$$

Обозначив $B_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} B(x)$, из последнего неравенства получаем

$$I \leq B_* \left(- \int_{-\infty}^0 x K(x) dx + \int_0^{\infty} x K(x) dx \right) = B_* \int_{-\infty}^{\infty} |x| K(x) dx. \quad (57)$$

Из (55) и (57) следует

$$\int_r^{\infty} (1 - \lambda(t)) B(t) dt < +\infty.$$

Учитывая возрастание функции B и то, что $B(r) > 0$, из последнего неравенства получаем

$$\int_r^{\infty} (1 - \lambda(t)) dt < +\infty,$$

что влечет за собой неравенство

$$\int_{\alpha}^{\infty} (1 - \lambda(t)) dt < +\infty$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Аналогично доказывается теорема в случае $\nu < 0$.

Теперь докажем существование пределов $B(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x)$ ограниченного решения уравнения (3) и получим обобщение соотношения (5).

ТЕОРЕМА 4. Пусть в уравнении (3) помимо условий β^* , γ выполняются также условия $\gamma 3$) и

$$\gamma 5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(x) = 1.$$

Тогда существуют пределы $B(\pm\infty)$ ограниченного решения этого уравнения, причем справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t)) B(t) dt = (B(-\infty) - B(+\infty)) \int_{-\infty}^{+\infty} t K(t) dt. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в уравнении (3) выполняются условия β^* , γ , $\gamma 3$), и пусть B – ограниченное решение этого уравнения, существующее в силу теоремы А.

Введем в рассмотрение функцию

$$\rho(x) = 1 - \lambda(x) B(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (59)$$

Тогда для ρ из (3) получаем соотношение

$$\rho(x) = (1 - \lambda(x)) B(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) \rho(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (60)$$

Рассматривая это равенство как линейное уравнение типа (7) со свободным членом $g(x) = (1 - \lambda(x)) B(x)$, убеждаемся, что для g выполняются условия (47).

Поэтому из изложенных фактов следует существование пределов $\rho(\pm\infty)$ и равенство

$$\rho(+\infty) - \rho(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t))B(t) dt \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tK(t) dt \right)^{-1}. \quad (61)$$

Из (59) в силу предельных соотношений $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(x) = 1$ следует существование пределов $B(\pm\infty)$ и равенство $\rho(+\infty) - \rho(-\infty) = B(-\infty) - B(+\infty)$, что совместно с (61) дает (58).

Ниже мы воспользуемся следующим фактом.

ЛЕММА 5. Пусть φ и ψ – произвольные функции из $L_1(\mathbb{R}^1) \cap M(\mathbb{R}^1)$. Тогда для свертки $\eta = \varphi * \psi$ этих функций

$$\eta(x) = (\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

имеют место предельные соотношения $\eta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\eta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Пусть число M удовлетворяет условиям

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)| dt \leq M, \quad \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^1} |\psi(x)| \leq M.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем $c < 0$ так, чтобы

$$\int_{-\infty}^c |\varphi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \int_{-\infty}^c |\psi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда, представив функцию $\eta(x)$ в виде

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^c \varphi(x-t)\psi(t) dt + \int_c^{+\infty} \varphi(x-t)\psi(t) dt, \quad (62)$$

имеем

$$|\eta(x)| \leq M \int_{-\infty}^c |\psi(t)| dt + M \int_{-\infty}^{x-c} |\varphi(t)| dt. \quad (63)$$

Если взять $x < 2c < 0$, то будем иметь

$$\int_{-\infty}^{x-c} |\varphi(t)| dt < \int_{-\infty}^c |\varphi(t)| dt,$$

и из (63) получаем $|\eta(x)| < \varepsilon$, что означает $\eta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

Аналогичными рассуждениями, используя равенство (62) при $c > 0$, можно доказать соотношение $\eta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в уравнении (3) выполняются условия $\beta^*)$, $\gamma)$, $\gamma 3)$, $\gamma 4)$ и, кроме того, $K \in M(\mathbb{R}^1)$. Тогда существуют пределы $B(\pm\infty)$ и имеет место равенство (58).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - B(x)$, где B – ограниченное решение уравнения (3). Получаем

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(x))K(x-t)B(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\sigma(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (64)$$

Это равенство можно рассматривать как линейное уравнение вида (7) относительно σ со свободным членом

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t))K(x-t)B(t) dt \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (65)$$

Легко убедиться, что функция (65) удовлетворяет условиям (47). Действительно, из леммы 5 следует $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если взять $\varphi(x) = (1 - \lambda(t))B(x)$ и $\psi(x) = K(x)$, а условие $g \in L_1(\mathbb{R}^1) \cap M(\mathbb{R}^1)$ проверяется непосредственно из (65). В частности, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(t))B(t) dt < +\infty.$$

В силу (48) и соотношений $\sigma(\pm\infty) = 1 - B(\pm\infty)$, следующих из равенства $\sigma(x) = 1 - B(x)$, получаем (58).

Авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за обсуждения результатов работы.

Список литературы

- [1] M. Slater, H. S. Wilf, "A class of linear differential-difference equations", *Pacific J. Math.*, **10**:4 (1960), 1419–1427.
- [2] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York–London, 1963.
- [3] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [4] Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде", *Дифференц. уравнения*, **23**:9 (1987), 1618–1622.
- [5] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", *Матем. сб.*, **97**(139):1(5) (1975), 35–58; англ. пер.: N. B. Engibarjan, A. A. Arutjunjan, "Integral equations on the half-line with difference kernels, and nonlinear functional equations", *Math. USSR-Sb.*, **26**:1 (1975), 31–54.
- [6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", *ВИНИТИ: Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Матем. анализ.*, **22** (1984), 175–244.
- [7] N. B. Yengibarjan, "Renewal equation on the whole line", *Stochastic Process. Appl.*, **85**:2 (2000), 237–247.
- [8] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5 изд., Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, New York, Dover Publ., 1975.

Л. Г. Арабаджян (L. G. Arabadzhyan)
Армянский государственный педагогический
университет им. Х. Абовяна,
Институт математики НАН Армении

Поступила в редакцию
26.12.2005 и 02.10.2006

А. С. Хачатрян (A. S. Khachatryan)
Армянский государственный педагогический
университет им. Х. Абовяна
E-mail: anushavan@aport.ru